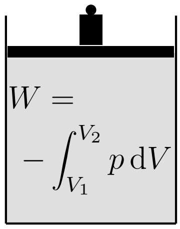
Objemová práce:

$$W_{\mathrm{obj}} = -\int_{V_1}^{V_2} p_{\mathrm{ext}} \mathrm{d}V$$

1. Izobarický děj

Ve válci pod pístem o průřezu $S = 0.01\,\mathrm{m^2}$ je uzavřen 1 mol vodní páry o teplotě 400 K. Na pístu je závaží $m = 100\,\mathrm{kg}$, píst se pohybuje bez tření. Atmosférický tlak je $p = 100\,\mathrm{kPa}$. Dodáním tepla se zvětší objem systému tak, že dojde k posunu pístu směrem vzhůru (proti gravitačnímu poli) o $l = 1\,\mathrm{cm}$. Vypočtěte změnu potenciální energie závaží, objemovou práci plynu, rozdíl teplot a dodané teplo. Kolik procent z dodaného tepla se přeměnilo na zvýšení potenciální energie závaží (tj. lze snadno převést zpět na užitečnou práci)? Gravitační zrychlení je $g = 10\,\mathrm{m\,s^{-2}}$. Tepelnou kapacitu odhadněte z ekvipartičního teorému.



$W = -20\,\mathrm{J}$, $W_{\mathrm{užitek}} = 10\,\mathrm{J}$, $\Delta T = 2{,}4\,\mathrm{K}$, $Q(400\,\mathrm{K}) = 80\,\mathrm{J}$ $(C_p \doteq 4R)$

gdec=10[m.s-2] = 10 $\mathrm{m\,s^{-2}}$
m=100[kg] = 100 kg
z=1[cm] = 0.01 m
S=0.01[m2] = 0.01 $\mathrm{m^2}$
Zvýšení potenciální energie:
DEpot=m*gdec*z = 10 J
P=1[bar]+m*gdec/S = 2e+05 Pa
DV=S*z = 0.0001 $\mathrm{m^3}$
Wobj=-P*DV = -20 J
Cpm=4*R = 33.26 $\mathrm{J\,K^{-1}\,mol^{-1}}$
n=1[mol] = 1 mol
Cp=Cpm*n = 33.26 $\mathrm{J\,K^{-1}}$
T1=400[K] = 400 K
V1=n*R*T1/P = 0.01663 $\mathrm{m^3}$
V2=V1+DV = 0.01673 $\mathrm{m^3}$
T2=P*V2/n/R = 402.4 K
DT=T2-T1 = 2.405 K rozdíl teplot
Alternativní metoda výpočtu ΔT z $T_1 : T_2 = V_1 : V_2$ $[p]$:
DT=(V2-V1)/V1*T1 = 2.405 K
CV=Cp-n*R = 24.94 $\mathrm{J\,K^{-1}}$
ΔU pro id. plyn:
DU=DT*CV = 60 J
Q=DU-Wobj = 80 J
eta=DEpot/Q = 0.125 účinnost

2. Izotermický děj

Jeden mol ideálního plynu expanduje izotermicky (T=300 K) z počátečního tlaku 1 MPa na tlak $p = 200\,\mathrm{kPa}$. Určete práci, teplo, změnu vnitřní energie a enthalpie za předpokladu, že expanze je provedena vratně.

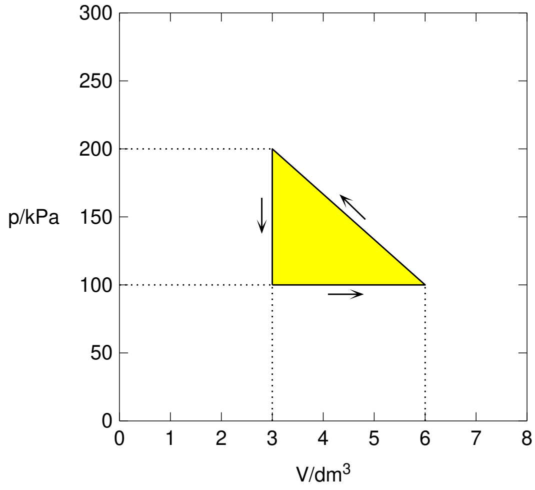
$Q = -W = 4014\,\mathrm{J}$, $\Delta U = \Delta H = 0$

T=300[K] = 300 K
W=-R*T*ln(1/0.2) = -4014 $\mathrm{J\,mol^{-1}}$ protože $p_2/p_1 = V_1/V_2$ $[T]$
Q=-W = 4014 $\mathrm{J\,mol^{-1}}$

3. Práce graficky

Plyn vykonal cyklický děj podle p–V diagramu vpravo. Vypočtěte práci.

150 J




```
W1=-(6[L]-3[L])*100[kPa] = -300 J
W2=-(3[L]-6[L])*(100[kPa]+200[kPa])/2 = 450 J
W3=0[J] = 0 J
W=W1+W2+W3 = 150 J
```

nebo plocha (pozor na znaménko):

```
W=3[L]*100[kPa]/2 = 150 J
```

4. *Práce při kompresi

Vypočtěte objemovou práci potřebnou k izotermickému a adiabatickému stlačení 1 m^3 kapalného benzenu z tlaku 0.1 MPa na tlak 10.1 MPa při teplotě 25 °C.

Data: $\varrho = 0.8734\,\mathrm{g\,cm^{-3}}$, rychlost zvuku v benzenu 1298 m s^{-1}, $B_T = 1.05$ GPa (jiná data: 1.02 GPa). Rychlost zvuku je dána vzorcem $c = \sqrt{B_S \varrho}$, kde B_S je adiabatický modul objemové pružnosti.

izotermicky: 48 kJ nebo 49 kJ dle postupu, adiabaticky: 35 kJ

Postup za předpokladu B=konst

$dp = -B\,dV/V$, po integraci do V:

```
> p:=p0+int(-B/Vx,Vx=V0..V) assuming V0>0,V>0;
```

$$p := p0 + \ln(V0)\,B - \ln(V)\,B$$

chceme koncové V z p

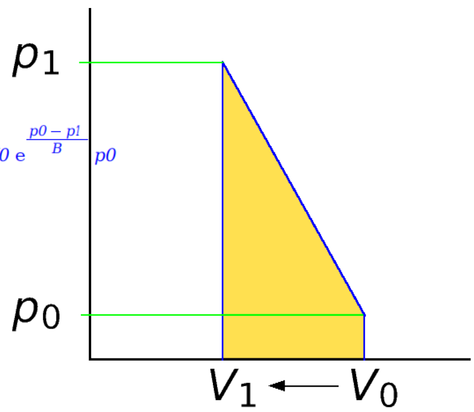
```
> V1:=solve(p=p1,V);
```

$$V1 := e^{\frac{\ln(V0)\,B + p0 - p1}{B}}$$

práce je integrálem v mezích V_0, V_1

```
> W:=-int(p,V=V0..V1);
```

$$W := V0\,B + V0\,p0 + B\ln\left(V0\,e^{\frac{p0-p1}{B}}\right)V0\,e^{\frac{p0-p1}{B}} - B\ln(V0)\,V0\,e^{\frac{p0-p1}{B}} - B\,V0\,e^{\frac{p0-p1}{B}} - V0\,e^{\frac{p0-p1}{B}}\,p0$$



data (izotermické B)

```
> B_T:=1.05e9; p0:=0.1e6; p1:=10.1e6; V0:=1.0;
```

$$B\_T := 1.05 \times 10^9$$
$$p0 := 100000.$$
$$p1 := 1.01 \times 10^7$$
$$V0 := 1.0$$

objemová práce [J]

```
> B:=B_T; V1; W;
```

$$B := 1.05 \times 10^9$$
$$0.9905213983$$
$$48265.86017$$

data (adiabatické B)

```
> c:=1298; rho:=873.4; B_S:=c^2*rho;
```

$$c := 1298$$
$$\rho := 873.4$$
$$B\_S := 1.471507814 \times 10^9$$

objemová práce [J]

```
> B:=B_S; V1; W;
```

$$B := 1.471507814 \times 10^9$$
$$0.9932272884$$
$$34502.27116$$

Linearizované rovnice ($\Delta V \ll V$)

izotermické B

```
> V1:=V0-(p1-p0)/B_T;
```

$$V1 := 0.9904761905$$

práce = lichoběžník mezi body (V_0, p_0) a (V_1, p_1)

```
> W:=-(V1-V0)*(p0+p1)/2;
```

$$W := 48571.42845$$

adiabatické B

```
> V1:=V0-(p1-p0)/B_S;
```

$$V1 := 0.9932042495$$

práce = lichoběžník mezi body (V_0, p_0) a (V_1, p_1)

```
> W:=-(V1-V0)*(p0+p1)/2;
```

$$W := 34658.32755$$

5. Práce při kompresi

Vypočtěte minimální práci potřebnou na stlačení 1 mol ethanu při 300 K z objemu 20 dm^3 na 2 dm^3 za předpokladu platnosti

a) stavové rovnice ideálního plynu,

b) viriálové stavové rovnice $z = 1 + B/V_\mathrm{m}$, $B_2(300\,\mathrm{K}) = -180\,\mathrm{cm^3\,mol^{-1}}$.

Určete tutéž práci za předpokladu platnosti stavové rovnice ideálního plynu. V kterém případě bude objemová práce větší? 5743 J, 5541 J

T=300[K] = 300 K
B2=-180[cm3.mol-1] = -0.00018 $\mathrm{m^3\,mol^{-1}}$
n=1[mol] = 1 mol
V1=20[L] = 0.02 $\mathrm{m^3}$
V2=2[L] = 0.002 $\mathrm{m^3}$ Ideální plyn:
W=-R*T*ln(V2/V1) = 5743 $\mathrm{J\,mol^{-1}}$
viriálová stavová rovnice:
W=-(R*T*ln(V2/V1)+R*T*B2*(-1/V2+1/V1)) = 5541 $\mathrm{J\,mol^{-1}}$
molekuly se přitahují ($B_2 < 0$) což pomáhá stlačování $\Rightarrow$ práce je menší

Vratný adiabatický děj ideálního plynu:

$$\kappa = \frac{C_{pm}}{C_{V\mathrm{m}}}, \quad pV^\kappa = \mathrm{const}, \quad C_{pm} = C_{V\mathrm{m}} + R$$

---

6. Adiabatický index

Specifická (měrná) tepelná kapacita vzduchu je s „technickou přesností“ rovna $C_{p,\mathrm{spec}} = 1\,\mathrm{kJ\,K^{-1}\,kg^{-1}}$. Vypočtěte poměr tepelných kapacit $\kappa = C_p/C_V$. Střední molární hmotnost vzduchu je $\bar{M} = 29\,\mathrm{g\,mol^{-1}}$.

$\kappa = 1.402$

```
Cpsp=1[kJ.K-1.kg-1] = 1000  m^2 s^-2 K^-1
to J.K-1.kg-1 = 1000  J K^-1 kg^-1
M=29[g.mol-1] = 29  g mol^-1
Cp=Cpsp*M = 29  J K^-1 mol^-1
kappa=Cp/(Cp-R) = 1.402
```

---

7. Vratný adiabatický děj

Pepa Guma nafukuje duši svého bicyklu pomocí hustilky za pěkného letního dne (teplota 300 K, atmosférický tlak 1 bar). Po adiabatickém vratném stlačení hlásí tlakoměr na hustilce přetlak 2 bar.

a) Jakou teplotu má vzduch po stlačení?
b) Jaká objemová práce byla vykonána? Objem hustilky je $0.1\,\mathrm{dm^3}$.
c) Jakou práci vynaložil Pepa?
d) Jak by se změnily výsledky, kdyby děj probíhal izotermicky a koncový objem by byl stejný jako v adiabatickém případě?
e) +Jak by se změnily výsledky, kdyby děj probíhal izotermicky a koncový tlak byl stejný jako v adiabatickém případě?

a) $T_2 = 411\,\mathrm{K}$, b) $W_{\mathrm{obj}} = 9.22\,\mathrm{J}$, c) $W_{\mathrm{mech}} = 3.78\,\mathrm{J}$,
d) $W_{\mathrm{obj}} = 7.85\,\mathrm{J}$, $W_{\mathrm{mech}} = 2.41\,\mathrm{J}$, e) $W_{\mathrm{obj}} = 10.99\,\mathrm{J}$, $W_{\mathrm{mech}} = 4.32\,\mathrm{J}$.

```
kappa=1.4 = 1.4
patm=1[bar] = 1e+05  Pa
p1=patm = 1e+05  Pa
p2=patm+2[bar] = 3e+05  Pa
T1=300[K] = 300  K
```

a)

```
T2=T1*(p2/p1)**(1-1/kappa) = 410.6  K
```

b)

```
V1=0.1[dm3] = 0.0001  m^3
V2=V1*(p1/p2)**(1/kappa) = 4.562e-05  m^3
```

1. zákon: $\Delta U = nC_{V\mathrm{m}}(T_2 - T_1) = W_{\mathrm{obj}}$

```
CVm=R/(kappa-1) = 20.79  J K^-1 mol^-1
n=p1*V1/R/T1 = 0.004009  mol
n=p2*V2/R/T2 = 0.004009  mol
Wobj=n*CVm*(T2-T1) = 9.218  J
```

c) Tuto práci za Pepu vykonala atmosféra:

```
Watm=-(V2-V1)*p1 = 5.438  J
```

Pepa vykonal pouze:

```
Wpepa=Wobj-Watm = 3.781  J
```

d) (stejný koncový objem)
`Wobj=-n*R*T1*ln(V2/V1) = 7.847 J`
`Wpepa=Wobj-Watm = 2.41 J` Adiabatická práce je vyšší než izotermická, protože pro stejné V je větší teplota, a proto i tlak.
e) (stejný koncový tlak)
`V2=n*R*T1/p2 = 3.333e-05` m^3
`Wobj=-n*R*T1*ln(V2/V1) = 10.99 J`
`Watm=-(V2-V1)*p1 = 6.667 J`
`Wpepa=Wobj-Watm = 4.319 J`

---

8. *Vratný adiabatický děj a práce

Jeden mol argonu, o kterém budeme předpokládat, že se chová jako ideální plyn, byl adiabaticky vratně stlačen z tlaku 100 kPa na tlak p_2. Počáteční teplota byla T_1=300 K. Kompresní práce činila $W = 1250\,\mathrm{J\,mol^{-1}}$. Vypočtěte teplotu T_2 a tlak p_2. Adiabatický index argonu vypočtěte z ekvipartičního teorému.

$T_2 = 400,2\,\mathrm{K}$, $p_2 = 205,6\,\mathrm{kPa}$

`n=1[mol] = 1 mol`
`p1=100[kPa] = 1e+05 Pa`
`T1=300[K] = 300 K`
`W=1250[J] = 1250 J`
id. plyn: $C_{V\mathrm{m}} = 3R/2,\ C_{p\mathrm{m}} = 5R/2,\ \kappa = C_{p\mathrm{m}}/C_{V\mathrm{m}} = 5/3$
`kappa=5/3 = 1.667`
`CVm=R/(kappa-1) = 12.47` $\mathrm{J\,K^{-1}\,mol^{-1}}$
1. zákon: $W = nC_{V\mathrm{m}}(T_2 - T_1)$
`T2=W/n/CVm+T1 = 400.2 K`
`p2=p1*(T2/T1)**(kappa/(kappa-1)) = 2.056e+05 Pa`

---

9. +Vratný adiabatický děj – opakování

Jeden mol ideálního plynu byl stlačen adiabaticky vratně na třetinu objemu. Tlak vzrostl z 90 kPa na 419 kPa. Vypočtěte molární tepelnou kapacitu při konstantním tlaku (předpokládejte, že je konstantní). Je-li počáteční teplota 300 K, vypočtěte konečnou teplotu a práci, potřebnou ke stlačení.

$C_{p,m} = 29,1\,\mathrm{J\,K^{-1}\,mol^{-1}}$, $T_2 = 465,5\,\mathrm{K}$, $W = 3,44\,\mathrm{kJ}$

`p1=90[kPa] = 9e+04 Pa`
`p2=419[kPa] = 4.19e+05 Pa`
rovnice: $p_1V_1^\kappa = p_2V_2^\kappa,\quad V_2/V_1 = 1/3$
`kappa=ln(p2/p1)/ln(3) = 1.4`
`Cp=R*kappa/(kappa-1) = 29.1` $\mathrm{J\,K^{-1}\,mol^{-1}}$
`T1=300[K] = 300 K`
ze stavové rovnice:
`T2=T1*p2/p1/3 = 465.6 K`
nebo z rovnic pro adiabatický děj v T, p:
`T2=T1*(p2/p1)**(1-1/kappa) = 465.6 K`
nebo z rovnic pro adiabatický děj v T, V:
`T2=T1*(1/3)**(1-kappa) = 465.6 K`
`n=1[mol] = 1 mol`
`W=n*(Cp-R)*(T2-T1) = 3441 J`

---

10. +První věta

Dva moly ideálního plynu o objemu 16 L a tlaku 6 bar expandovaly (nikoliv nutně vratně) a přitom odevzdaly 3 kJ tepla. Konečná teplota po expanzi byla 350 K. Určete objemovou práci. Molární tepelná kapacita plynu byla $C^{\circ}_{p,\mathrm{m}} = 45\,\mathrm{J\,K^{-1}\,mol^{-1}}$.

$W = -13.7$ kJ

V1=16[dm3] = 0.016 $\mathrm{m^3}$
p1=600[kPa] = 6e+05 Pa
n=2[mol] = 2 mol
Q=-3000[J] = -3000 J
T2=350[K] = 350 K
Cpm=45[J.K-1.mol-1] = 45 $\mathrm{J\,K^{-1}\,mol^{-1}}$
T1=p1*V1/R/n = 577.3 K
DU=n*(Cpm-R)*(T2-T1) = -1.668e+04 J
to kJ = -16.68 kJ
Wobj=DU-Q = -13.68 kJ