

Objemová práce

[start -/n pic/theories.jkv] 1/22
AB04

Práce **vnější** síly:

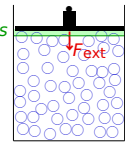
$$W = s \cdot F_{\text{ext}} = \frac{F_{\text{ext}}}{A} \cdot s \cdot A = p_{\text{ext}} \cdot (-\Delta V)$$

kde s = dráha a F_{ext} = vnější síla

● tlak je **vnější** = p_{ext}

● pro systém v rovnováze je $p = p_{\text{ext}}$ a lze použít stavovou rovnici

● angl. *pressure-volume work*



V diferenciálním tvaru (symbol d naznačuje, že W není termodynamická funkce):

$$dW = -p_{\text{ext}} dV$$

V integrálním tvaru

$$W = - \int_{V_1}^{V_2} p_{\text{ext}} dV$$

Podobně elektrická práce $dW = -\Delta\phi dq$, kde $\Delta\phi$ = napětí a dq = přenesený náboj

Objemová práce – příklady

2/22
AB04

Obecně nevratný izobarický děj – práce proti konstantnímu vnějšímu tlaku:

$$W = - \int_{V_1}^{V_2} p_{\text{ext}} dV = -p_{\text{ext}}(V_2 - V_1)$$

Izobarický vratný děj (p v souladu se stavovou rovnicí):

$$W = -p(V_2 - V_1)$$

Izochorický děj:

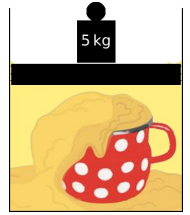
$$dV = 0 \Rightarrow W = 0$$

Izotermický vratný děj – ideální plyn:

$$W = - \int_{V_1}^{V_2} p dV = - \int_{V_1}^{V_2} \frac{nRT}{V} dV = - [nRT \ln V]_{V_1}^{V_2} = -nRT \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right)$$

Izotermický vratný děj – vdW rovnice ($W_m = W/n$)

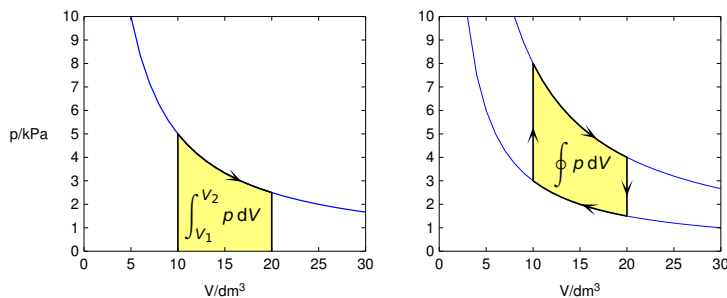
$$W_m = - \int_{V_{m,1}}^{V_{m,2}} \left(\frac{RT}{V_m - b} - \frac{a}{V_m^2} \right) dV_m = - \left[RT \ln \left(\frac{V_{m,2} - b}{V_{m,1} - b} \right) + \frac{a}{V_{m,2}} - \frac{a}{V_{m,1}} \right]$$



Objemová práce graficky

3/22
AB04

plocha = integrál = $-W$



... v tomto příkladu v $\text{dm}^3 \times \text{kPa} = \text{J}$ a $W < 0$ (systém koná práci)

První zákon termodynamiky

4/22
AB04

je vyjádřením **zákona zachování energie**.

Práce W a teplo Q jsou různé formy energie.

Pro uzavřený systém (nevyměňuje hmotu):

Existuje stavová funkce nazývaná **vnitřní energie**, jež si „pamatuje“ veškerou energii (teplo, práci), kterou systém s okolím vymění.

Integrovaný tvar: $\Delta U = Q + W$

Δ = rozdíl
koncový stav (2) – počáteční stav (1)

Diferenciální tvar: $dU = dQ + dW$

Důsledky:

● $\Delta U = Q$ ($[V]$, nekoná se jiná práce než objemová)

● U je první větou určeno až na aditivní konstantu

● Pokud dW = infinitesimální objemová práce:

$$dU = dQ - p_{\text{ext}} dV \stackrel{\text{vratné}}{=} dQ - p dV$$

fluidní (kalorická) teorie tepla
Benjamin Thompson 1797
(vrtání dělových hlavňů)
Julius Robert von Mayer 1842
James Prescott Joule 1843
(mechanický ekvivalent tepla)

Jednotky energie

5/22
AB04

Základní jednotka SI: $J = Ws = \text{kg m}^2 \text{s}^{-2}$

● 1 cal_{th} = 4.184 J (termochemická kalorie, chemie, chem. fyzika)

● 1 cal_{it} = 4.1868 J (starší „mezinárodní“ nebo IAPWS kalorie, fyzika, technika)
1 kcal_{it} = 1.163 Wh

● 1 cal_{IUNS} = 4.182 J (potravinový)

● 1 eV = 1.6022 × 10⁻¹⁹ J = energie, kterou získá elementární náboj po průchodu potenciálovým rozdílem (napětím) 1 V

● 1 Kk_B (nepřesně 1 K) = 1.380649 × 10⁻²³ J

● 1 kg TNT = 1 Mcal_{it}

Energie na částici se často zaměňuje s molární energií: „1 mol ≡ 6.02214076 × 10²³“

Příklad. Ionizační potenciál (energie) atomu sodíku je $E_i = 5.14 \text{ eV}$. Kolik je to v jednotkách kJ/mol?

$$E_i = 5.14 \text{ eV} = 5.14 \times 1.6022 \times 10^{-19} \text{ J} = 8.65 \times 10^{-19} \text{ J}$$

$$\text{„} = E_i \times N_A = 8.65 \times 10^{-19} \text{ J} \times 6.022 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1} = 496 \text{ kJ mol}^{-1}$$

Entalpie

6/22
AB04

Úmluva: nebude-li jinak řečeno, budeme uvažovat jen objemovou práci

Definice:

1 intenzivní a 1 extenzivní veličina

$$H = U + pV$$

Důsledky:

$$dH = dU + d(pV) = dQ - p dV + p dV + V dp = dQ + V dp$$

$$\Delta H = Q \quad ([p], \text{ jen objemová práce})$$

Význam: nemusíme se starat o objemovou práci („zdvíhání atmosféry“)

Vhodná pro: energetické změny za $[p]$

Cyklický děj:

$$\Delta U = 0, \quad \Delta H = 0$$

Poznámky

+ 7/22
AB04

Vnitřní energie je „přirozeně“ funkce objemu: $U = U(V)$, $dU = dQ - p dV$

Entalpie je „přirozeně“ funkce tlaku: $H = H(p)$, $dH = dQ + V dp$

Podstatou přechodu $U \rightarrow H$ je **změna nezávisle proměnné** $V \rightarrow p$

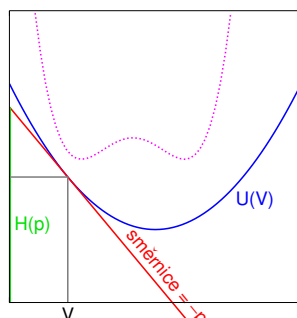
● funkce U musí být konvexní (nebo konkávní), jinak $H(p)$ nebude funkce (bude mít několik hodnot pro stejný p)

● pak lze obdobně přejít zpět z $H(p) \rightarrow U(V)$

$$p = - \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right) \quad H = U + pV = U - \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right) V$$

$$V = \left(\frac{\partial H}{\partial p} \right) \quad U = H - pV = H - \left(\frac{\partial H}{\partial p} \right) p$$

● nazývá se to Legendreova transformace



Tepelné kapacity

8/22
AB04

Tepelná kapacita je množství tepla potřebné k ohřátí systému (za daných podmínek) o jeden stupeň (ve smyslu derivace).

$$C_V = \lim_{\Delta T \rightarrow 0} \left(\frac{Q_{V=\text{const}}}{\Delta T} \right) = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V$$

$$C_p = \lim_{\Delta T \rightarrow 0} \left(\frac{Q_{p=\text{const}}}{\Delta T} \right) = \left(\frac{\partial H}{\partial T} \right)_p$$

Molární veličiny:

$$U = nU_m, \quad H = nH_m, \quad C_V = nC_{V,m}, \quad C_p = nC_{p,m}$$

Specifické (měrné) veličiny:

$$U = mU_{sp}, \quad H = mH_{sp}, \quad C_V = mC_{V,sp}, \quad C_p = mC_{p,sp}$$

Objemové veličiny (hustoty; ρ = „hustota hmotnosti“):

$$U = VU_{vol}, \quad H = VH_{vol}, \quad C_V = VC_{V,vol}, \quad C_p = VC_{p,vol}$$

Příklady

9/22
AB04

Příklad.

Měrná tepelná kapacita vody za konstantního tlaku je přibližně $1 \text{ cal K}^{-1} \text{ g}^{-1}$. Kolik je její molární tepelná kapacita v jednotkách SI? ($1 \text{ cal} = 4.184 \text{ J}$)

$$C_{m,p} = C_{sp,p} M = 4.184 \text{ J K}^{-1} \text{ g}^{-1} \times 18.015 \text{ g mol}^{-1} = 75.4 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$$

Příklad.

Jaká je tepelná kapacita vody v bojleru se 100 litry vody? Jak dlouho se bude ohřívat z 15 na 60°C výkonem 2 kW?

$$C_p = m C_{m,p} = 100 \text{ kg} \times 4.184 \text{ kJ K}^{-1} \text{ kg}^{-1} = 418 \text{ kJ K}^{-1}$$

$$Q = \Delta T C_p = (60^\circ\text{C} - 15^\circ\text{C}) \times 418 \text{ kJ K}^{-1} = 45 \text{ K} \times 418 \text{ kJ K}^{-1} = 18810 \text{ kJ}$$

$$\tau = \frac{Q}{P} = \frac{18810000 \text{ J}}{2000 \text{ W}} = 9405 \text{ s} = 2.6 \text{ h}$$

Mayerův vztah

11/22
AB04

Ideální plyn:

$$C_{pm} = \left(\frac{\partial H_m}{\partial T} \right)_p = \left(\frac{\partial (U_m + pV_m)}{\partial T} \right)_p = \left(\frac{\partial (U_m + RT)}{\partial T} \right)_p = \left(\frac{\partial U_m}{\partial T} \right)_V + \left(\frac{\partial RT}{\partial T} \right)_p = C_{Vm} + R$$

$$C_{pm} = C_{Vm} + R$$

Příklad

Příklad: Kolik je $H_m - U_m$ pro **a)** vodík **b)** vodu při teplotě 25°C a tlaku 100 kPa?

a) vodík: $H_m - U_m = pV_m = RT = 8.314 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1} \times 298 \text{ K} = 2.48 \text{ kJ mol}^{-1}$

b) voda: $V_m = M/\rho = 0.018 \text{ kg mol}^{-1} / 1000 \text{ kg m}^{-3} = 18 \times 10^{-6} \text{ m}^3 \text{ mol}^{-1}$

$$H_m - U_m = pV_m = 10^5 \text{ Pa} \times 18 \times 10^{-6} \text{ m}^3 \text{ mol}^{-1} = 1.8 \text{ J mol}^{-1}$$

Pro kondenzované fáze za běžných tlaků $H \approx U$

Vnitřní energie a entalpie ideálního plynu

10/22
AB04

- 1. polovina 19. století: při expanzi do vakua se teplota zředěného plynu nemění (Joule)
- 2. polovina 19. století: molekuly jsou daleko od sebe, takže neinteragují

Vnitřní energie ideálního plynu nezávisí na objemu (tlaku)

$$U = U(T) \text{ [id. plyn]}$$

$$\text{obecně: } U = U(T, V)$$

Důsledek:

$$H = U + pV = U + nRT = U(T) + nRT = H(T) \text{ [id. plyn]}$$

Entalpie i vnitřní energie ideálního plynu jsou pouze funkcí teploty

Můžeme zvolit třeba jednoatomový plyn ($U \equiv E_{\text{kin}} = \frac{3}{2}nRT$) a máme jeho termodynamicky úplný popis - termickou ($p = nRT/V$) i kalorickou ($U = \frac{3}{2}nRT$) stavovou rovnici

Ekvipartiční teorém

12/22
AB04

Pro jednoatomový ideální plyn jsme spočítali:

$$U \equiv E_{\text{kin}} = \frac{3n}{2}RT = \frac{3N}{2}k_B T$$

Výraz E_{kin} je složen z $f = 3N$ členů tvaru $\frac{1}{2}m_i v_{i,k}^2$, kde $k \in \{x, y, z\}$.

f = počet mechanických stupňů volnosti.

V průměru na každý stupeň volnosti připadá energie

$$\frac{E_{\text{kin}}}{f} = \frac{1}{2}k_B T$$

Tepelná kapacita v molárních jednotkách ($N = N_A$):

počet st. volnosti/molekulu

$$C_{Vm} = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V = \left(\frac{\partial E_{\text{kin}}}{\partial T} \right)_V = \frac{\frac{1}{2}f k_B T}{N_A T} = \frac{f}{2}R$$

Rozšíření:

- Lineární molekuly: + 2 rotace, $f_{\text{molek.}} = 5$, $C_{Vm} = \frac{5}{2}R$ (ale: vodík, CO_2)
- Malé nelineární molekuly: + 3 rotace, $f_{\text{molek.}} = 6$, $C_{Vm} = 3R$
- Vibrace klasicky: + 2 za každou (i za E_{pot}) - nepřesné!

Ekvipartiční teorém - příklad

13/22
AB04

Kolik je C_{pm} pro **a)** dusík, **b)** vodní páru?

a) $f_{\text{molek.}} = 5$, $C_{pm} = \frac{5}{2}R + R = \frac{7}{2}R = 29.10 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$; expt. 300 K: $29.12 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$

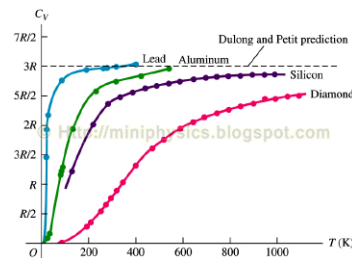
b) $f_{\text{molek.}} = 6$, $C_{pm} = 3R + R = 4R = 33.26 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$; expt. 500 K: $35.22 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$

Pevné látky

+

- klasická mechanika: $\frac{1}{2}R$ za každý kvadratický stupeň volnosti
- 3 za kinetickou energii
- 3 za potenciální energii harmonického oscilátoru

Dulong a Petit (1819)



Výpočet tepla a práce

14/22
AB04

Izochorický děj [V]:

$$W_{\text{obj}} = 0 \Rightarrow \Delta U = U_2 - U_1 = Q$$

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V \Rightarrow \Delta U = \int_{T_1}^{T_2} C_V dT$$

Izobarický vratný děj [p]:

$$W_{\text{obj}} = -p\Delta V \Rightarrow \Delta H = H_2 - H_1 = Q$$

$$C_p = \left(\frac{\partial H}{\partial T} \right)_p \Rightarrow \Delta H = \int_{T_1}^{T_2} C_p dT \text{ (pokud nepotkáme fázový přechod)}$$

Izotermický vratný děj [T] pro ideální plyn:

$$U = U(T) \Rightarrow \Delta U = U(T_2, V_2) - U(T_1, V_1) = 0$$

$$\Delta U = Q + W, W = -nRT \ln(V_2/V_1) \Rightarrow Q = nRT \ln(V_2/V_1)$$

práce se koná na úkor tepla

Adiabatický děj [ad.]:

$$Q = 0 \Rightarrow \Delta U = W$$

Výpočet tepla a práce - příklad

15/22
AB04

Jeden mol dusíku o teplotě 300 K a tlaku 100 kPa přijal vratně za konstantního tlaku teplo 2.9 kJ. Vypočtete

- konečnou teplotu
- objemovou práci
- změnu vnitřní energie
- změnu entalpie

Data: $C_{pm}(\text{N}_2) = 29 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$

$$Q = \Delta H = \int_{T_1}^{T_2} n C_{pm} dT \quad C_{pm} = \text{const} \quad n C_{pm} \Delta T$$

$$\text{a) } T_2 = T_1 + \frac{Q}{n C_{pm}} = 300 \text{ K} + \frac{2900 \text{ J}}{1 \text{ mol} \times 29 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}} = 400 \text{ K}$$

$$\text{b) } W = - \int_{V_1}^{V_2} p dV = -p(V_2 - V_1) = -nR(T_2 - T_1) = -831 \text{ J}$$

$$\text{c) } \Delta U = Q + W = 2900 \text{ J} - 831 \text{ J} = 2069 \text{ J}$$

$$\text{d) } \Delta H = \Delta U + p\Delta V = 2900 \text{ J} \\ \Delta H = Q \text{ (děj za konstantního tlaku)}$$

Adiabatický vratný děj pro ideální plyn

16/22
AB04

Další předpoklady:

- tepelné kapacity nezávisí na teplotě
- koná se jen objemová práce

$$dU = dW + dQ \quad \begin{matrix} \nearrow \\ =0 \end{matrix}$$

$$dU = -pdV$$

$$nC_{Vm}dT = -\frac{nRT}{V}dV$$

$$\frac{C_{Vm}dT}{R} = -\frac{dV}{V}$$

$$\frac{C_{Vm}}{R} \ln T = -\ln V + \text{const}$$

$$\ln T^{C_{Vm}/R} = -\ln V + \text{const}$$

$$T^{C_{Vm}/R} V = \text{const}$$

konstanty „const“ jsou obecně různé

Adiabatický vratný děj pro ideální plyn

17/22
AB04

Obvykle se tabeluje poměr tepelných kapacit (adiabatický index) $\kappa = \frac{C_{pm}}{C_{Vm}}$

Časté značení γ , angl. *adiabatic index, heat capacity ratio**

$$\frac{C_{Vm}}{R} = \frac{1}{\kappa - 1}$$

$$T^{C_{Vm}/R} V = \text{const} \Rightarrow TV^{\kappa-1} = \text{const}$$

Zároveň platí stavová rovnice ideálního plynu:

$$TV^{\kappa-1} = \frac{pV}{nR} V^{\kappa-1} \Rightarrow pV^{\kappa} = \text{const}$$

$$TV^{\kappa-1} = T \left(\frac{nRT}{p} \right)^{\kappa-1} \Rightarrow T^{\kappa} p^{1-\kappa} = \text{const}$$

*V německé a české literatuře se spojuje se jménem Poisson, který zavedl γ v souvislosti s rychlostí zvuku, neznal však vztah γ k tepelným kapacitám. Ten objevil Laplace, proto se někdy adiabatický index označuje i jako Laplaceův koeficient. Ve shodě s mezinárodními zvyklostmi i českým překladem Atkinsovy učebnice nebudeme termíny Poissonova konstanta, Poissonovy rovnice používat.

Adiabatický index z ekvipartičního teoremu

19/22
AB04

● Jednoatomový plyn (vzácné plyny): $\kappa = \frac{\frac{3}{2}R+R}{\frac{3}{2}R} = \frac{5}{3} \doteq 1.667$

● Dvouatomový plyn (N_2 , O_2 , vzduch) $\kappa = \frac{\frac{5}{2}R+R}{\frac{5}{2}R} = \frac{7}{5} = 1.400$

● Obecná molekula (CH_4 , NH_3 , H_2O) $\kappa = \frac{\frac{6}{2}R+R}{\frac{6}{2}R} = \frac{4}{3} \doteq 1.333$

Nepřesné pro:

H_2 za nižších teplot (rotace jsou kvantové)

Cokoliv za vysokých teplot

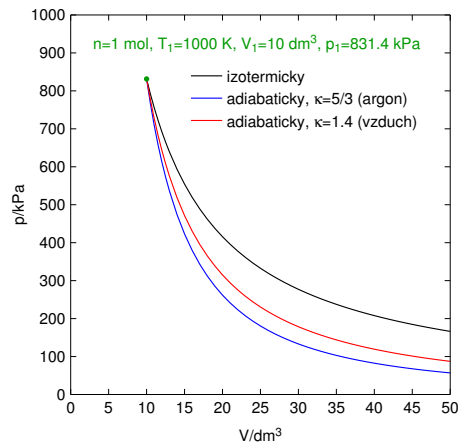
Složitější molekuly (vibrace, vnitřní bráněné rotace)

Adiabaty a izotermy

18/22
AB04

V případě izotermické expanze dodávám teplo, abych zachoval $[T]$, a proto tlak s objemem ubývá pomaleji.

Při adiabatické expanzi se plyn ochlazuje (šlehačková bombička, pneumatika), protože koná práci a nedodávám teplo, a tlak ubývá rychleji.



Adiabatický děj – použití

20/22
AB04

● Zvuk se šíří adiabaticky. Rychlost zvuku v ideálním plynu:

$$v = \sqrt{\frac{\kappa RT}{M}}$$

Odvození pro zájemce: do obecného vztahu

$$v = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{ad.}} = \sqrt{-\frac{V^2}{M} \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_{ad.}}$$

dosadíme $\left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_{ad.} = -\kappa \frac{p}{V}$ získané diferencováním vztahu $pV^{\kappa} = \text{const}$ [ad.], např. takto: $d(pV^{\kappa}) = V^{\kappa} dp + \kappa p V^{\kappa-1} dV = 0$

● Adiabatický model atmosféry – pokles teploty s výškou:

$$\frac{dT}{dh} = -\frac{\kappa - 1}{\kappa} \frac{gM}{R} \doteq -0.01 \text{ K m}^{-1}$$

Odvození pro zájemce: ve vztahu pro hydrostatický tlak

$$dp = -\rho g dh = -\frac{Mp}{RT} g dh$$

převědeme dp vlevo na dT pomocí diferencování rovnice $p^{1-\kappa} T^{\kappa} = \text{const}$

● Kompresory, spalovací motory, zkapalňování plynů...

Adiabatický děj – příklad I

21/22
AB04

Jeden mol argonu ($C_{pm} = 20.785 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$) o teplotě 300 K a tlaku 100 kPa byl vratně adiabaticky stlačen na desetinu objemu. Vypočtete **a)** koncový tlak, **b)** koncovou teplotu, **c)** objemovou práci potřebnou ke stlačení a **d)** práci dodanou kompresorem, který pracuje bez ztrát za atmosférického tlaku 100 kPa.

$$C_{Vm} = C_{pm} - R = (20.785 - 8.314) \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1} = 12.471 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$$

$$\kappa = \frac{C_{pm}}{C_{Vm}} = \frac{20.785}{12.471} = 1.6667$$

$$\text{a) } p_1 V_1^{\kappa} = p_2 V_2^{\kappa} \Rightarrow p_2 = p_1 \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\kappa} = 100 \text{ kPa} \left(\frac{1}{0.1} \right)^{1.6667} = 4642 \text{ kPa}$$

$$\text{b) } T_1 V_1^{\kappa-1} = T_2 V_2^{\kappa-1} \Rightarrow T_2 = T_1 \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\kappa-1} = 300 \text{ K} \left(\frac{1}{0.1} \right)^{0.6667} = 1393 \text{ K}$$

$$\text{c) } W_{obj} = \Delta U = n C_{Vm} (T_2 - T_1) = 1 \text{ mol} \times 12.471 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1} \times (1393 \text{ K} - 300 \text{ K}) = 13626 \text{ J}$$

Adiabatický děj – příklad II

22/22
AB04

d) pomáhá nám atmosféra – odečteme $W_{atm} = -p_{atm} \Delta V$

$$V_1 = \frac{nRT_1}{p} = \frac{1 \text{ mol} \times 8.314 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1} \times 300 \text{ K}}{100\,000 \text{ Pa}} = 0.02494 \text{ m}^3$$

$$\Delta V = V_2 - V_1 = \frac{V_1}{10} - V_1 = -0.9 \times V_1$$

$$W_{atm} = -p_{atm} \Delta V = 100\,000 \text{ Pa} \times (-0.9) \times 0.02494 \text{ m}^3 = 2245 \text{ J}$$

$$W_{kompresor} = W_{obj} - W_{atm} = 13626 \text{ J} - 2245 \text{ J} = 11381 \text{ J}$$