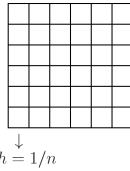


Motivace: viz přednáška mat-pdr.pdf

Příklad. Proudění viskózní kapaliny trubící čtvercového průřezu:

$$\nabla^2 v + 1 = 0, \quad v(\square) = 0, \quad \square = \text{obvod 1-čtverce}$$



$$\frac{v(x+h, y) + v(x-h, y) + v(x, y+h) + v(x, y-h) - 4v(x, y)}{h^2} + 1 = 0,$$

$x, y =$ body uvnitř čtverce

$$v(0, y) = v(1, y) = v(x, 0) = v(x, 1) = 0$$

To je $(n-1)^2$ lineárních rovnic pro $(n-1)^2$ neznámých. Metody:

- přímé řešení – není tak obtížné, ježto soustava je řádká
- iterace – viz dále a mat-num5.mw

Iterační metoda řešení soustav lineárních rovnic

$$v_{+1}(x, y) := \frac{v(x+h, y) + v(x-h, y) + v(x, y+h) + v(x, y-h) + h^2}{4}$$

- v_{+1} zkopírujeme do v až po výpočtu pro všechna x, y
- v_{+1} okamžitě použijeme v dalším kroku

Superrelaxace

$$v_{\text{sup}}(x, y) := v_{+1} \cdot \omega + v \cdot (1 - \omega)$$

zde $\omega > 1$, proto superrelaxace, jindy naopak nutno tlumit (relaxace)

Konec iterací: zvolit velmi malou chybu, protože konverguje pomalu

Větší přesnost:

- vzorce pro derivace vyššího řádu
- $h \rightarrow h/2$ a Richardsonova extrapolace

Různé sítě – složité vzorce pro derivace

Metoda konečných prvků instant – slabé řešení 1D

Uvažujme jednoduchou okrajovou úlohu v 1D:

$$y'' + f(x) = 0, \quad y(0) = y(1) = 0$$

Zvolme si libovolné v takové, že $v(0) = v(1) = 0$. Pak

$$-\int_0^1 f(x)v(x)dx = \int_0^1 y''(x)v(x)dx \stackrel{\text{per partes}}{=} [y'(x)v(x)]_0^1 - \int_0^1 y'(x)v'(x)dx$$

Tedy je-li y řešením, pak $\forall v: v(0) = v(1) = 0$ platí

$$\int_0^1 y'(x)v'(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx \tag{1}$$

Naopak:

Necht' rov. (1) platí $\forall v: v(0) = v(1) = 0$. Pak y nazvu **slabým** řešením.

Toto řešení je obecnější, např. akceptuje singularitu (rázovou vlnu ve vlnové rovnici).

Metoda konečných prvků instant – slabé řešení 3D

Vsuvka či opakování: Gaussova–Ostrogradského věta:

$$\int_{\Omega} \vec{\nabla} \cdot \vec{v} d\vec{r} = \int_{\partial\Omega} \vec{v} \cdot d\vec{s}$$

Poissonova rovnice ve 3D:

$$\nabla^2 y(\vec{r}) + f(\vec{r}) = 0 \quad \text{pro } y(\partial\Omega) = 0$$

Rozšíření slabého řešení:

$$-\int_{\Omega} f v d\vec{r} = \int_{\Omega} v \nabla^2 y d\vec{r} = \int_{\Omega} [\vec{\nabla} \cdot (v \vec{\nabla} y) - \vec{\nabla} y \cdot \vec{\nabla} v] d\vec{r}$$

$$= \int_{\partial\Omega} v \vec{\nabla} y \cdot d\vec{s} - \int_{\Omega} \vec{\nabla} y \cdot \vec{\nabla} v d\vec{r} \stackrel{v(\partial\Omega)=0}{=} - \int_{\Omega} \vec{\nabla} y \cdot \vec{\nabla} v d\vec{r}$$

A definujeme: y je slabé řešení, pokud $\forall v, v(\partial\Omega) = 0$, platí:

$$\int_{\Omega} f(\vec{r})v(\vec{r})d\vec{r} = \int_{\Omega} \vec{\nabla} y(\vec{r}) \cdot \vec{\nabla} v(\vec{r})d\vec{r}$$

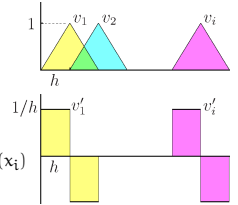
Zvolíme vhodnou bázi v_i , integrály aproximujeme a řešíme.

Příklad výběru konečných prvků v 1D:

Aproximujme integrály (nejjednodušší verze)

$$\int_0^1 f(x)v_i(x)dx \approx hf(x_i)$$

$$\int_0^1 y'(x)v_i(x)dx \approx \frac{h}{2} [y'(x_i - \frac{h}{2}) - y'(x_i + \frac{h}{2})] \approx -hy''(x_i)$$



Pokud nyní

- rozšíříme metodu na 2D
 - uvažujeme $f(x) = 1$ (tj. řešíme $\nabla^2 y + 1 = 0$)
 - aproximujeme $y''(x_i) \approx [y(x_i - h) - 2y(x_i) + y(x_i + h)]/h^2$
- dostaneme přesně metodu sítí z minulého příkladu.

Formulace pomocí konečných prvků je zpravidla flexibilnější.