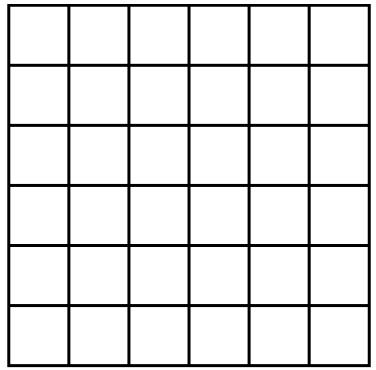
Metoda sítí pro parciální diferenciální rovnice

Motivace: viz přednáška `mat-pdr.pdf`

Příklad. Proudění viskózní kapaliny trubicí čtvercového průřezu:

$$\nabla^2 v + 1 = 0, \quad v(\square) = 0, \quad \square = \text{obvod 1-čtverce}$$



$\downarrow$
$h = 1/n$

$$\frac{v(x+h,y) + v(x-h,y) + v(x,y-h) + v(x,y-h) - 4v(x,y)}{h^2} + 1 = 0,$$

$x, y =$ body uvnitř čtverce

$$v(0,y) = v(1,y) = v(x,0) = v(x,1) = 0$$

To je $(n-1)^2$ lineárních rovnic pro $(n-1)^2$ neznámých. Metody:

- přímé řešení – není tak obtížné, ježto soustava je řídká
- iterace – viz dále a `mat-num5.mw`

Iterační metoda řešení soustav lineárních rovnic

$$v_{+1}(x,y) := \frac{v(x+h,y)+v(x-h,y)+v(x,y-h),v(x,y-h)+h^2}{4}$$

- v_{+1} zkopírujeme do v až po výpočtu pro všechna x, y
- v_{+1} okamžitě použijeme v dalším kroku

Superrelaxace

$$v_{\mathrm{sup}}(x,y) := v_{+1}\cdot\omega + v\cdot(1-\omega)$$

zde $\omega > 1$, proto superrelaxace, jindy naopak nutno tlumit (relaxace)

Konec iterací: zvolit velmi malou chybu, protože konverguje pomalu

Větší přesnost:

- vzorce pro derivace vyššího řádu
- $h \to h/2$ a Richardsonova extrapolace

Různé sítě – složité vzorce pro derivace

Metoda konečných prvků instant – slabé řešení 1D

Uvažujme jednoduchou okrajovou úlohu v 1D:

$$y'' + f(x) = 0, \quad y(0) = y(1) = 0$$

Zvolme si libovolné v takové, že $v(0) = v(1) = 0$. Pak

$$-\int_0^1 f(x)v(x)dx = \int_0^1 y''(x)v(x)dx \overset{\text{per partes}}{=} [y'v]_0^1 - \int_0^1 y'v'dx$$

Tedy je-li y řešení, pak $\forall v : v(0) = v(1) = 0$ platí

$$\int_0^1 y'v'dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx \tag{1}$$

Naopak:

Nechť rov. (1) platí $\forall v : v(0) = v(1) = 0$. Pak y nazvu **slabým** řešením.

Toto řešení je obecnější, např. akceptuje singularity (rázovou vlnu ve vlnové rovnici).

Metoda konečných prvků instant – slabé řešení 3D

Vsuvka či opakování: Gaussova–Ostrogradského věta:

$$\int_\Omega \vec{\nabla} \cdot \vec{v}\,\mathrm{d}\vec{r} = \int_{\partial\Omega} \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{s}$$

Poissonova rovnice ve 3D:

$$\nabla^2 y(\vec{r}) + f(\vec{r}) = 0 \quad \text{pro } y(\partial\Omega) = 0$$

Rozšíření slabého řešení:

$$-\int_\Omega f v\,\mathrm{d}\vec{r} = \int_\Omega v \nabla^2 y\,\mathrm{d}\vec{r} = \int_\Omega \left[\vec{\nabla} \cdot (v \vec{\nabla} y) - \vec{\nabla} y \cdot \vec{\nabla} v\right] \mathrm{d}\vec{r}$$

$$= \int_{\partial\Omega} v \vec{\nabla} y\,\mathrm{d}\vec{s} - \int_\Omega \vec{\nabla} y \cdot \vec{\nabla} v\,\mathrm{d}\vec{r} \overset{v(\partial\Omega)=0}{=} -\int_\Omega \vec{\nabla} y \cdot \vec{\nabla} v\,\mathrm{d}\vec{r}$$

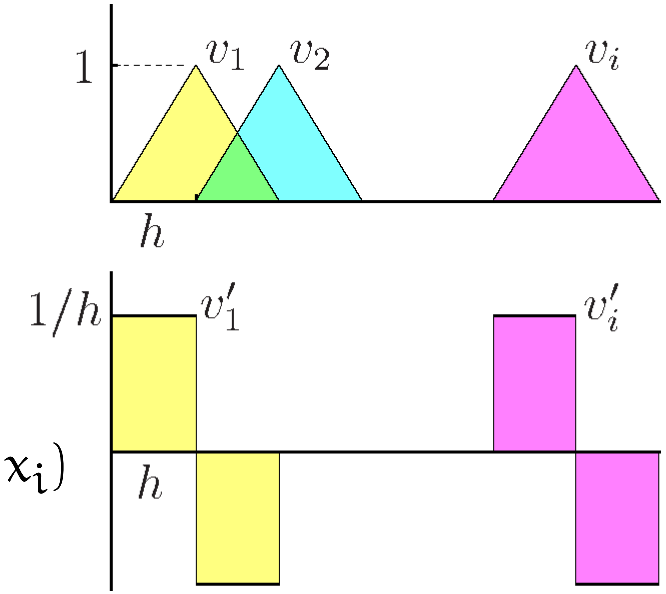
A definujeme: y je slabé řešení, pokud $\forall v, v(\partial\Omega) = 0$, platí:

$$\int_\Omega f(\vec{r}) v(\vec{r}) \mathrm{d}\vec{r} = \int_\Omega \vec{\nabla} y(\vec{r}) \cdot v(\vec{r}) \mathrm{d}\vec{r}$$

Metoda konečných prvků instant – 1D

Zvolíme vhodnou bázi v_i, integrály aproximujeme a řešíme.

Příklad výběru konečných prvků v 1D:



Aproximujme integrály (nejjednodušší verze)

$$\int_0^1 f(x)v_i(x)dx \approx hf(x_i)$$

$$\int_0^1 y'(x)v_i(x)dx \approx \frac{h}{h}\left[y'(x_i - \frac{h}{2}) - y'(x_i + \frac{h}{2})\right] \approx -hy''(x_i)$$

Pokud nyní

- rozšíříme metodu na 2D
- uvažujeme $f(x) = 1$ (tj. řešíme $\nabla^2 y + 1 = 0$)
- aproximujeme $y''(x_i) \approx [y(x_i - h) - 2y(x_i) + y(x_i + h)]/h^2$

dostaneme přesně metodu sítí z minulého příkladu.

Formulace pomocí konečných prvků je zpravidla flexibilnější.