

MMFCH – domácí úkol 3

1. Uvažujte funkci (je užitečná při studiu vlnění Země v geologii)

$$f(x) = \begin{cases} \cosh(\sqrt{x}) & \text{pro } x \geq 0 \\ \cos(\sqrt{-x}) & \text{pro } x < 0 \end{cases}$$

Najděte její Taylorův rozvoj v bodě $x = 0$, tj. ukažte, že Taylorův rozvoj spočítaný z derivací zprava je stejný jako Taylorův rozvoj spočítaný z derivací zleva. (Pokud tento Taylorův rozvoj navíc konverguje, je funkce analytická v bodě $x = 0$.)

2. Aproximujte tuto funkci na intervalu $[-\pi^2, \pi^2]$ Čebyšovovými polynomy s přesností lepší než 10^{-7} . Potřebný řád polynomu označte m ; nechť $n = m+1$ (počet konstant polynomu). Nakreslete funkci $C_n(x) - f(x)$, kde $C_n(x)$ je získaná aproximace. Kolik nulových bodů má funkce $C_n(x) - f(x)$?
3. (Bonus +50 bodů) Aproximujte funkci $f(x)$ polynomem procházející body $[x_i, f(x_i)]$, $i = 1, 2, \dots, n$, kde $x_i = \pi^2 \xi_i$ a ξ_i jsou kořeny polynomu $T_n(x)$. Nakreslete funkci $A_n(x) - f(x)$, kde $A_n(x)$ je získaná aproximace, a srovnajte s $C_n(x) - f(x)$.

Pozn.: $T_n(x)$ je Čebyšovův polynom 1. druhu řádu n a argumentu x .