Zkouškový test z MMFCH — 6. ledna 2026 — VZOR/1

jméno	zápočet	úkoly	**test**	průměr	**známka**

Čas 100 min

Můžete potřebovat

Maximální relativní chyby čísel typu float podle normy IEEE:
32 bit (float, REAL*4): $\varepsilon = 2^{-23}$
64 bit (double, REAL*8): $\varepsilon = 2^{-52}$
80 bit (extended, REAL*10): $\varepsilon = 2^{-63}$

Gramova–Schmidtova ortogonalizace:

$$\begin{aligned} b^{(1)} &:= b^{(1)}/|b^{(1)}| \\ b^{(2)} &:= b^{(2)} - \langle b^{(1)}|b^{(2)}\rangle b^{(1)},\ b^{(2)} := b^{(2)}/|b^{(2)}| \\ b^{(3)} &:= b^{(3)} - \langle b^{(1)}|b^{(3)}\rangle b^{(1)} - \langle b^{(2)}|b^{(3)}\rangle b^{(2)},\ b^{(3)} := b^{(3)}/|b^{(3)}| \end{aligned}$$

Neorientovaný úhel rotace ve 3D: $1 + 2\cos\alpha = \mathrm{Tr}(\text{matice rotace})$

Giniho koeficient: $G = \dfrac{1}{2\langle x\rangle}\displaystyle\int_0^\infty p(x)\mathrm{d}x \int_0^\infty p(y)\mathrm{d}y\,|x-y|, \quad G \in [0,1]$

Variance funkce $g(\vec{a})$ parametrů $\vec{a}$ fitovaných metodou nejmenších čtverců:

$$\mathrm{Var}(g(\vec{a})) = \vec{S}^{\mathrm{T}} \cdot \mathrm{Cov}(\vec{a},\vec{a}) \cdot \vec{S}, \qquad \vec{S} = \frac{\partial g}{\partial \vec{a}}\ (\text{gradient})$$

Simpsonovo pravidlo: $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)\right] + \mathcal{O}(b-a)^4$

Normální (Gaussovo) rozdělení s $\langle \boldsymbol{x}\rangle = 0$ a $\mathrm{Var}\,\boldsymbol{x} = 1$: $p_{\mathrm{G}}(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$

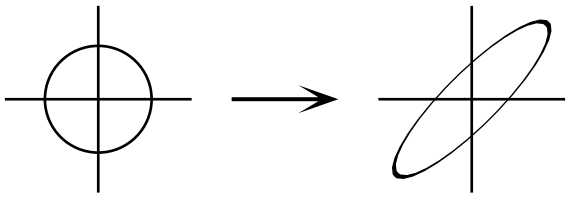
Rozdělení náhodné veličiny $f(\boldsymbol{x})$, kde $\boldsymbol{x}$ má rozdělení $p(x)$: $p_f(y) = \displaystyle\sum_{x:f(x)=y} \frac{p(x)}{|f'(x)|}$

Konvoluce: $(p_1 * p_2)(z) = \int p_1(x)p_2(z-x)\mathrm{d}x$

Příklady

---

1. (20 bodů)
a) Uvažujte rovinu $\mathbb{R}^2$. Napište matici lineární transformace, která zobrazuje počátek na počátek, vektor $[1, 1]$ prodlouží na dvojnásobek a vektor $[-1, 1]$ zkrátí na polovinu.



b) Vypočtěte determinant této matice a okomentujte výsledek.

---

2. (20 bodů) Chcete experimentálně posoudit férovost hrací kostky vzhledem k padnutí ⚅. Kolikrát musíte hodit, abyste získali pravděpodobnost padnutí ⚅ se standardní chybou nejvýše 1/600? Předpokládejte, že kostka není příliš špatná, tj. pro účely výpočtu považujte pravděpodobnost padnutí ⚅ za 1/6.
Rada: zkuste nejdřív spočítat varianci veličiny $\boldsymbol{H}$, která se rovná 1, pokud padne ⚅, a 0, pokud padne cokoliv jiného.

---

3. (20 bodů) Uvažujme reálný Hilbertův prostor nekonečných posloupností $\{v_n\}_{n=0}^{\infty}$ takových, že řada $\sum_{n=0}^{\infty} v_n^2$ konverguje. Skalární součin nechť je definován vztahem

$$(u, v) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n v_n$$

Uvažujte podprostor generovaný (neortogonální) bází

$$\begin{aligned} a &= \{2^{-n}\}_{n=0}^{\infty} = [1, 1/2, 1/2^2, 1/2^3, 1/2^4, \ldots] \\ b &= \{3^{-n}\}_{n=0}^{\infty} = [1, 1/3, 1/3^2, 1/3^3, 1/3^4, \ldots] \end{aligned}$$

Najděte nějakou ortogonální bázi tohoto podprostoru.

---

4. (20 bodů) Uvažujte následující vzorec pro numerickou třetí derivaci:

$$f'''_{\mathrm{num}}(x) = \frac{f(x+2h)/2 - f(x+h) + f(x-h) - f(x-2h)/2}{h^3}$$

a) Stanovte řád chyby
b) Jaká je doporučená hodnota kroku h pro double precision (REAL*8) aritmetiku?

5. (20 bodů) Lineární regresí (funkce $f(x) = a+bx$) jsme dostali z jistých dat hodnoty parametrů

$$a = 1.170476, \quad b = 1.225714$$

a kovarianční matici parametrů a, b (na diagonále jsou variance)

$\mathrm{Cov}(a,b)$	a	b
a	0.0025678	−0.0004054
b	−0.0004054	0.0008109

Vypočtěte kořen rovnice $f(x) = 0$ včetně odhadu standardní chyby.

(Celkem 100 bodů. Můžete zkusit i bonusové otázky.)

bonus **6.** (+20 bodů) Chcete spočítat numericky integrál

$$I = \int_0^{\pi/2} \sqrt{\frac{\sin x}{x}} \mathrm{d}x,$$

ale váš oblíbený software zhavaruje, protože si neumí poradit s limitou pro $x \to 0$. Vzpomenete si proto na obdélníkové pravidlo (typu midpoint, tj. jeden bod uprostřed každého intervalu). Víte, že nesmíte zvolit x příliš blízko 0, tj. příliš velký počet ekvidistantních subintervalů n, aby nevznikla nepřesnost při dělení malých čísel. Zde jsou vaše mezivýpočty:

n	$I(n)$
4	1.465938626350
8	1.464714799060
16	1.464408822300

Zpřesněte Richardsonovou extrapolací (vč. vyššího řádu).

(Bonusy 20 bodů.)