

jméno	zápočet	úkoly	test	průměr	známka

Čas 90 min

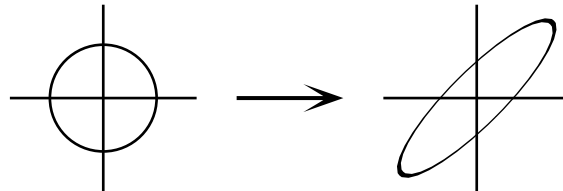
Můžete potřebovat

Maximální relativní chyba čísla typu double precision (REAL*8) podle normy IEEE je 2^{-52}

Příklady

1. (20 bodů)

a) Uvažujte rovinu \mathbb{R}^2 . Napište matici lineární transformace, která zobrazuje počátek na počátek, vektor $[1, 1]$ prodlouží na dvojnásobek a vektor $[-1, 1]$ zkrátí na polovinu.



b) Vypočtete determinant této matice.

2. (20 bodů) Chcete experimentálně posoudit férovost hrací kostky vzhledem k padnutí III . Kolikrát musíte hodit, abyste získali pravděpodobnost padnutí III se standardní chybou alespoň $1/600$ (tj. $1/600$ nebo menší)? Předpokládejte, že kostka není příliš špatná, tj. pro účely výpočtu považujte pravděpodobnost padnutí III za $1/6$.

Rada: zkuste nejdřív spočítat varianci veličiny H , která se rovná 1, pokud padne III , a 0, pokud padne cokoliv jiného.

3. (20 bodů) Uvažujme reálný Hilbertův prostor nekonečných posloupností (v_1, v_2, \dots) takových, že řada $\sum_i v_i^2$ konverguje. Skalární součin nechť je definován vztahem

$$(u, v) = \sum_i u_i v_i$$

Uvažujte podprostor generovaný (neortogonální) bází

$$\begin{aligned} a &= [1, 0, 0, 0, 0, \dots] \\ b &= [1, 1/2, 1/2^2, 1/2^3, 1/2^4, \dots] \\ c &= [1, 1/3, 1/3^2, 1/3^3, 1/3^4, \dots] \end{aligned}$$

Najděte nějakou ortogonální bázi tohoto podprostoru.

4. (20 bodů) Počítáme integrál

$$I = \int_{-1}^1 dx \int_{-1}^1 dy [1 + \exp(x^2 + y^2 - xy)]^{1/3}$$

dvojitou aplikací obdélníkového pravidla se vzdáleností bodů h v každém směru. Vyšlo nám

h	$I(h)$
0.2	5.831404
0.1	5.841215

Zpřesněte výsledek Richardsonovou extrapolací.

5. (20 bodů) Uvažujte následující vzorec pro numerickou třetí derivaci:

$$f'''(x) = \frac{f(x+2h)/2 - f(x+h) + f(x-h) - f(x-2h)/2}{h^3}$$

a) Stanovte řád chyby

b) Jaká je doporučená hodnota kroku h pro double precision (REAL*8) aritmetiku?

(Celkem 100 bodů. Můžete zkusit i bonusové otázky.)

bonus 6. (+20 bodů) Lineární regresí (funkce $f(x) = a + bx$) jsme dostali z jistých dat hodnoty parametrů

$$a = 1.170476, \quad b = 1.225714$$

a matici kovariancí (na diagonále variancí)

Cov(a, b)	a	b
a	0.0025678	-0.0004054
b	-0.0004054	0.0008109

Vypočtěte kořen rovnice $f(x) = 0$ včetně odhadu standardní chyby.

(Bonusy 20 bodů.)

Další příklady k procvičení

7. (20 bodů) Matice zobrazení $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ je

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1/2 & 0 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$$

- Je tato matice ortogonální?
- Tato matice je složena z rotace R okolo jisté osy a dalšího lineárního zobrazení L , $A = R \cdot L$. Určete alespoň jednu dvojici R a L .
- Určete orientovaný úhel rotace daný maticí R v pravotočivé soustavě souřadnic a popište transformaci L .
- Komutují matice R a L ?

8. (20 bodů) Chceme funkci $\tan x$ aproximovat v intervalu $(-\pi/2, \pi/2)$ ve třech subintervalech splajny:

$$\tan x \approx \begin{cases} a_1/(\pi/2 + x) + b_1 + c_1x + d_1x^2 & \text{pro } x \in (-\pi/2, -\pi/6) \\ \text{verze 1} & a_2 + b_2x + c_2x^2 + d_2x^3 & \text{pro } x \in [-\pi/6, \pi/6] \\ \text{verze 2} & a_2x + b_2x^3 & \text{pro } x \in [-\pi/6, \pi/6] \\ \text{verze 3} & a_2x + b_2x^3 + d_2x^5 + d_2x^7 & \text{pro } x \in [-\pi/6, \pi/6] \\ a_3/(\pi/2 - x) + b_3 + c_3x + d_3x^2 & \text{pro } x \in (\pi/6, \pi/2) \end{cases}$$

Požadavky:

- přesné asymptoty, tj. konstanty a_1, a_3 (jaké jsou?),
- přesné hodnoty v obou dělicích bodech $x = \pm\pi/6$,
- přesné hodnoty derivací v obou dělicích bodech,
- spojité druhé derivace v obou dělicích bodech.

Je možné tyto požadavky splnit? Bonus +20 za výpočet takového splajnu.

9. (20 bodů) Chcete spočítat numericky integrál

$$I = \int_0^{\pi/2} \sqrt{\frac{\sin x}{x}} dx,$$

ale váš oblíbený software zhavaruje, protože si neumí poradit s limitou pro $x \rightarrow 0$. Vzpomenete si proto na obdélníkové pravidlo. Víte, že nesmíte zvolit x příliš blízko 0, tj. příliš velký počet ekvidistantních subintervalů n , aby nevznikla nepřesnost při dělení malých čísel. Zde jsou vaše mezivýpočty:

n	$I(n)$
4	1.465938626350
8	1.464714799060
16	1.464408822300

Zpřesněte Richardsonovou extrapolací.