Zkouškový test z MMFCH **6. ledna 2026** **VZOR/1**

body obtížnost

VERZE S ŘEŠENÍM

Můžete potřebovat

Maximální relativní chyby čísel typu float podle normy IEEE:
32 bit (float, REAL*4): $\varepsilon = 2^{-23}$
64 bit (double, REAL*8): $\varepsilon = 2^{-52}$
80 bit (extended, REAL*10): $\varepsilon = 2^{-63}$

Gramova–Schmidtova ortogonalizace:

$$\begin{aligned} b^{(1)} &:= b^{(1)}/|b^{(1)}| \\ b^{(2)} &:= b^{(2)} - \langle b^{(1)}|b^{(2)}\rangle b^{(1)},\ b^{(2)} := b^{(2)}/|b^{(2)}| \\ b^{(3)} &:= b^{(3)} - \langle b^{(1)}|b^{(3)}\rangle b^{(1)} - \langle b^{(2)}|b^{(3)}\rangle b^{(2)},\ b^{(3)} := b^{(3)}/|b^{(3)}| \end{aligned}$$

Neorientovaný úhel rotace ve 3D: $1 + 2\cos\alpha = \mathrm{Tr}(\text{matice rotace})$

Giniho koeficient: $G = \dfrac{1}{2\langle x\rangle}\displaystyle\int_0^\infty p(x)\mathrm{d}x \int_0^\infty p(y)\mathrm{d}y\,|x-y|, \quad G \in [0,1]$

Variance funkce $g(\vec{a})$ parametrů $\vec{a}$ fitovaných metodou nejmenších čtverců:

$$\mathrm{Var}(g(\vec{a})) = \vec{S}^{\mathrm{T}} \cdot \mathrm{Cov}(\vec{a},\vec{a}) \cdot \vec{S}, \qquad \vec{S} = \frac{\partial g}{\partial \vec{a}}\ (\text{gradient})$$

Simpsonovo pravidlo: $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)\right] + \mathcal{O}(b-a)^4$

Normální (Gaussovo) rozdělení s $\langle \boldsymbol{x}\rangle = 0$ a $\mathrm{Var}\,\boldsymbol{x} = 1$: $p_{\mathrm{G}}(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$

Rozdělení náhodné veličiny $f(\boldsymbol{x})$, kde $\boldsymbol{x}$ má rozdělení $p(x)$: $p_f(y) = \displaystyle\sum_{x:f(x)=y} \frac{p(x)}{|f'(x)|}$

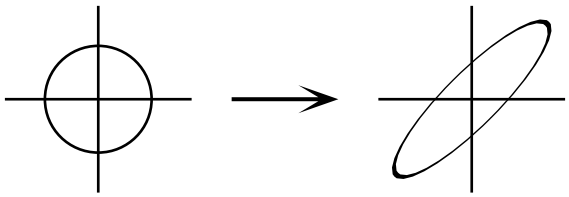
Konvoluce: $(p_1 * p_2)(z) = \int p_1(x)p_2(z-x)\mathrm{d}x$

Příklady

---

1. (20 bodů) 2

a) Uvažujte rovinu $\mathbb{R}^2$. Napište matici lineární transformace, která zobrazuje počátek na počátek, vektor $[1,1]$ prodlouží na dvojnásobek a vektor $[-1,1]$ zkrátí na polovinu.



b) Vypočtěte determinant této matice a okomentujte výsledek.

Řešení: Podmínky:

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$
$$A \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

Rovnice vektorově sečteme a odečteme:

$$\text{rozdíl} \quad A \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/4 \\ 3/2 \end{pmatrix}$$
$$\text{součet} \quad A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 5/2 \end{pmatrix}$$

Po dělení dvěma dostaneme přímo sloupce matice A:

$$A = \begin{pmatrix} 5/4 & 3/4 \\ 3/4 & 5/4 \end{pmatrix}, \quad \det A = 1.$$

Determinant je 1, protože se nemění plocha.

---

2. (20 bodů) Chcete experimentálně posoudit férovost hrací kostky vzhledem k padnutí ⚅. Kolikrát musíte hodit, abyste získali pravděpodobnost padnutí ⚅ se standardní chybou nejvýše 1/600? Předpokládejte, že kostka není příliš špatná, tj. pro účely výpočtu považujte pravděpodobnost padnutí ⚅ za 1/6. 3

Rada: zkuste nejdřív spočítat varianci veličiny $\boldsymbol{H}$, která se rovná 1, pokud padne ⚅, a 0, pokud padne cokoliv jiného.

Řešení:

$$p = \frac{1}{6}, \quad \langle H \rangle = p, \quad \operatorname{Var} H = p \cdot (1-p)^2 + (1-p) \cdot (0-p)^2 = p(1-p), \quad \sigma = \sqrt{p(1-p)}$$

$$\sigma(\overline{H}_N) = \sqrt{\frac{p(1-p)}{N}} \stackrel{!}{=} 1/600 \quad \Rightarrow \quad N = 600^2 p(1-p) = 50\,000$$

Alespoň 50 000 hodů.

---

3. (20 bodů) Uvažujme reálný Hilbertův prostor nekonečných posloupností $\{v_n\}_{n=0}^{\infty}$ takových, že řada $\sum_{n=0}^{\infty} v_n^2$ konverguje. Skalární součin nechť je definován vztahem 4

$$(u, v) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n v_n$$

Uvažujte podprostor generovaný (neortogonální) bází

$$\begin{aligned} a &= \{2^{-n}\}_{n=0}^{\infty} = [1, 1/2, 1/2^2, 1/2^3, 1/2^4, \ldots] \\ b &= \{3^{-n}\}_{n=0}^{\infty} = [1, 1/3, 1/3^2, 1/3^3, 1/3^4, \ldots] \end{aligned}$$

Najděte nějakou ortogonální bázi tohoto podprostoru.

Řešení: Normy:

$$\begin{aligned} a^2 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n} = \frac{4}{3} \\ b^2 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{9^n} = \frac{9}{8} \end{aligned}$$

1. prvek báze: $u_1 = a$
2. prvek báze (krok Gram–Schmidt):

$$\begin{aligned} (a,b) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{6^n} = \frac{6}{5} \\ u_2 &= b - \frac{a(a,b)}{a^2} = b - \frac{6/5}{4/3}a = b - \frac{9}{10}a \\ &= \left[1 - \frac{9}{10}\cdot 1,\ \frac{1}{3} - \frac{9}{10}\cdot\frac{1}{2},\ \frac{1}{3^2} - \frac{9}{10}\cdot\frac{1}{2^2},\ \ldots\right] \end{aligned}$$

Normalizace není v příkladu vyžadovaná, ale pokud by byla, vydělili byste u_i příslušnou normou:

$$\begin{aligned} |u_1|^2 &= 4/3 \\ |u_2|^2 &= \left(b - \frac{9}{10}a\right)^2 = b^2 - 2\cdot\frac{9}{10}(a,b) + \left(\frac{9}{10}b\right)^2 = \frac{9}{200} \end{aligned}$$

---

4. (20 bodů) Uvažujte následující vzorec pro numerickou třetí derivaci: 4

$$f'''_{\text{num}}(x) = \frac{f(x+2h)/2 - f(x+h) + f(x-h) - f(x-2h)/2}{h^3}$$

a) Stanovte řád chyby
b) Jaká je doporučená hodnota kroku h pro double precision (REAL*8) aritmetiku?

Řešení:

$$\begin{aligned} f(x \pm 2h) &= f(x) \pm f'(x)2h + f''(x)\frac{(2h)^2}{2} \pm f'''(x)\frac{(2h)^3}{6} + f^{(4)}(x)\frac{(2h)^4}{24} \pm f^{(5)}(x)\frac{(2h)^5}{120}\cdots \\ f(x \pm h) &= f(x) \pm f'(x)h + f''(x)\frac{h^2}{2} \pm f'''(x)\frac{h^3}{6} + f^{(4)}(x)\frac{h^4}{24} \pm f^{(5)}(x)\frac{h^5}{120}\cdots \end{aligned}$$

$$\frac{f(x+2h) - f(x-2h)}{2} = f'(x)2h + f'''(x)\frac{(2h)^3}{6} + f^{(5)}(x)\frac{(2h)^5}{120}\cdots \quad (1)$$

$$f(x+2h) - f(x-2h) = 2f'(x)h + 2f'''(x)\frac{h^3}{6} + 2f^{(5)}(x)\frac{h^5}{120}\cdots \quad (2)$$

Po odečtení (1) a (2) a vydělení h^3 dostaneme

$$f'''_{\text{num}}(x) = f'''(x) + f^{(5)}(x)\frac{h^2}{4} + \ldots = f'''(x) + \mathcal{O}(h^2)$$

Metoda je tedy 2. řádu.

Je-li ε strojová přesnost, pak numerická chyba je řádově ε/h^3 a systematická h^2. Po porování dostaneme pro optimální $h \approx \varepsilon^{1/5} \approx 10^{-3}$.

newpage

---

5. (20 bodů) Lineární regresí (funkce $f(x) = a+bx$) jsme dostali z jistých dat hodnoty parametrů 3

$$a = 1.170476, \quad b = 1.225714$$

a kovarianční matici parametrů a, b (na diagonále jsou variance)

$\mathrm{Cov}(a,b)$	a	b
a	0.0025678	−0.0004054
b	−0.0004054	0.0008109

Vypočtěte kořen rovnice $f(x) = 0$ včetně odhadu standardní chyby.

Řešení: Kořen je dán rovnicí $x = x(a,b) = -a/b = -1.170476/1.225714 = -0.95493402$. Derivace jsou

$$\frac{\partial x}{\partial a} = -\frac{1}{b}, \quad \frac{\partial x}{\partial b} = \frac{a}{b^2}, \quad S = \begin{pmatrix} -1/b \\ a/b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.81585101 \\ 0.77908388 \end{pmatrix}$$

Variance odhadu x je

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(x) &= S \cdot \mathrm{Cov}(a,b) \cdot S \\
&= S \cdot \begin{pmatrix} 0.0025678 \times -0.81585101 - 0.0004054 \times 0.77908388 \\ -0.0004054 \times -0.81585101 + 0.0008109 \times 0.77908388 \end{pmatrix} \\
&= S \cdot \begin{pmatrix} -0.0024107828 \\ 0.00096250512 \end{pmatrix} \\
&= -0.81585101 \times -0.0024107828 + 0.77908388 \times 0.00096250512 = 0.0027167118 \\
\sigma(x) &= \sqrt{0.0027167118} = 0.052122086
\end{aligned}$$

Kořen je $-0.955(52)$

(Celkem 100 bodů, obtížnost = 320.)

---

bonus **6.** (+20 bodů) Chcete spočítat numericky integrál 4

$$I = \int_0^{\pi/2} \sqrt{\frac{\sin x}{x}} \mathrm{d}x,$$

ale váš oblíbený software zhavaruje, protože si neumí poradit s limitou pro $x \to 0$. Vzpomenete si proto na obdélníkové pravidlo (typu midpoint, tj. jeden bod uprostřed každého intervalu). Víte, že nesmíte zvolit x příliš blízko 0, tj. příliš velký počet ekvidistantních subintervalů n, aby nevznikla nepřesnost při dělení malých čísel. Zde jsou vaše mezivýpočty:

n	$I(n)$
4	1.465938626350
8	1.464714799060
16	1.464408822300

Zpřesněte Richardsonovou extrapolací (vč. vyššího řádu).

Řešení: Funkce je (ve smyslu dodefinování $x = 0$) všechny derivace. Obdélníkové pravidlo je 2. řádu, v druhém kroku Richardsonovy extrapolace bude řád 4 (zvyšuje se o dva z důvodu symetrie obdélníkového pravidla).

```
výpočet tabulky
n=4                                                  4
I4=sum x=pi/4/n,pi/2,pi/2/n sqrt(sin(x)/x)*pi/2/n    4 1.465938626350
n=8                                                  4 8
I8=sum x=pi/4/n,pi/2,pi/2/n sqrt(sin(x)/x)*pi/2/n    4 1.464714799060
n=16                                                 4 16
I16=sum x=pi/4/n,pi/2,pi/2/n sqrt(sin(x)/x)*pi/2/n   4 1.464408822300
! extrapolace (toto je řešení příkladu)
II8=(I8*4-I4)/3        ! Richardson poprvé           1.464306856630
II16=(I16*4-I8)/3      ! Richardson poprvé           1.464306830046
III16=(II16*16-II8)/15 ! Richardson podruhé          1.464306828274
přesně pro kontrolu
I=integ x=0,pi/2 sqrt(sin(x)/x) ! přesně             4 1.464306827896
III16-I                         ! chyba extrapolace  4 0.000000000378
```

(Bonusy 20 bodů, obtížnost = 80.)