Zkouškový test z MMFCH **1. prosince 2023** $\boxed{\text{A/1}}$

obtížnost

Můžete potřebovat

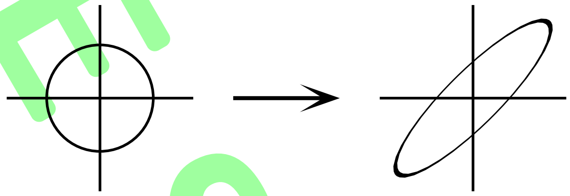
Maximální relativní chyba čísla typu double precision (REAL*8) podle normy IEEE je 2^{-52}

Příklady

---

1. (20 bodů) 3

a) Uvažujte rovinu $\mathbb{R}^2$. Napište matici lineární transformace, která zobrazuje počátek na počátek, vektor $[1,1]$ prodlouží na dvojnásobek a vektor $[-1,1]$ zkrátí na polovinu.



b) Vypočtěte determinant této matice.

Řešení: $\begin{pmatrix} 5/4 & 3/4 \\ 3/4 & 5/4 \end{pmatrix}$, det $= 1$

---

2. (20 bodů) Chcete experimentálně posoudit férovost hrací kostky vzhledem k padnutí ⚅. Kolikrát musíte hodit, abyste získali pravděpodobnost padnutí ⚅ se standardní chybou alespoň 1/600 (tj. 1/600 nebo menší)? Předpokládejte, že kostka není příliš špatná, tj. pro účely výpočtu považujte pravděpodobnost padnutí ⚅ za 1/6. 3

Rada: zkuste nejdřív spočítat varianci veličiny $\boldsymbol{H}$, která se rovná 1, pokud padne ⚅, a 0, pokud padne cokoliv jiného.

Řešení: alespoň 50 000

---

3. (20 bodů) Uvažujme reálný Hilbertův prostor nekonečných posloupností $(v_1, v_2, \ldots)$ takových, že řada $\sum_i v_i^2$ konverguje. Skalární součin nechť je definován vztahem 3

$$(u,v) = \sum_i u_i v_i$$

Uvažujte podprostor generovaný (neortogonální) bází

$$\begin{aligned} a &= [1,0,0,0,0\ldots] \\ b &= [1,1/2,1/2^2,1/2^3,1/2^4,\ldots] \\ c &= [1,1/3,1/3^2,1/3^3,1/3^4,\ldots] \end{aligned}$$

Najděte nějakou ortogonální bázi tohoto podprostoru.

Řešení: (nenormalizovaná báze):

$u_1 = a,\ \ u_2 = b - a,\ \ u_3 = c - (2a+3b)/5$

$u_1 = \begin{cases} 1 & \text{pro } i=0 \\ 0 & \text{pro } i>0 \end{cases},\quad u_2 = \begin{cases} 0 & \text{pro } i=0 \\ \frac{1}{2^i} & \text{pro } i>0 \end{cases},\quad u_3 = \begin{cases} 0 & \text{pro } i=0 \\ \frac{2}{3^i} - \frac{3}{5\cdot 2^i} & \text{pro } i>0 \end{cases}$

otočte stránku

4. (20 bodů) Počítáme integrál 3

$$I = \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x \int_{-1}^{1} \mathrm{d}y \left[1 + \exp(x^2 + y^2 - xy))\right]^{1/3}$$

dvojí aplikací obdélníkového pravidla se vzdáleností bodů h v každém směru. Vyšlo nám

h	$I(h)$
0.2	5.831404
0.1	5.841215

Zpřesněte výsledek Richardsonovou extrapolací.

Řešení: 5.844485

5. (20 bodů) Uvažujte následující vzorec pro numerickou třetí derivaci: 3

$$f'''(x) = \frac{f(x+2h)/2 - f(x+h) + f(x-h) - f(x-2h)/2}{h^3}$$

a) Stanovte řád chyby
b) Jaká je doporučená hodnota kroku h pro double precision (REAL*8) aritmetiku?

Řešení: $\mathcal{O}(h^2)$, 10^{-3}

(Celkem 100 bodů, obtížnost = 300.)

bonus **6.** (+20 bodů) Lineární regresí (funkce $f(x) = a + bx$) jsme dostali z jistých dat hodnoty parametrů 3

$$a = 1.170476, \quad b = 1.225714$$

a matici kovariancí (na diagonále variancí)

Cov(a, b)	a	b
a	0.0025678	−0.0004054
b	−0.0004054	0.0008109

Vypočtěte kořen rovnice $f(x) = 0$ včetně odhadu standardní chyby.

Řešení: $0.9549340 \pm 0.0521225 = 0.955(52)$

(Bonusy 20 bodů, obtížnost = 60.)

Další příklady k procvičení

7. (20 bodů) Matice zobrazení $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je 3

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1/2 & 0 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$$

a) Je tato matice ortogonální?
b) Tato matice je složena z rotace R okolo jisté osy a dalšího lineárního zobrazení L, $A = R \cdot L$. Určete alespoň jednu dvojici R a L.
c) Určete orientovaný úhel rotace daný maticí R v pravotočivé soustavě souřadnic a popište transformaci L.
d) Komutují matice R a L?

Řešení:

a) Ano, determinant $= -1$;
b) Jedno s možných řešení:

$$R = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\pi/6) & 0 & -\sin(-\pi/6) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(-\pi/6) & 0 & \cos(\pi/6) \end{pmatrix}, \qquad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c) $R =$ rotace okolo osy $\hat{y}$ o orientovaný úhel $+\pi/6$. Pro stanovení znaménka si buď rotaci nakreslete, nebo si uvědomte, že matice

$$\begin{pmatrix} \cos(\pi/6) & -\sin(-\pi/6) & 0 \\ \sin(-\pi/6) & \cos(\pi/6) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

je maticí rotace o $-\pi/6$ okolo osy $\hat{z}$, tj. díváme-li se od $z = \infty$, je rotace v záporném smyslu, zatímco rotace o $+90°$ převádí $\hat{x}$ na $\hat{y}$. Podobně R by byla maticí rotace o $-\pi/6$ okolo osy $\hat{y}$, kdyby při pohledu z $y = \infty$ rotace o $+90°$ převáděla $\hat{x}$ na $\hat{z}$. Ale tak tomu není, rotace o $+90°$ převádí $\hat{z}$ na $\hat{x}$. Znaménko úhlu je proto opačné.
$L =$ zrcadlení, rovina symetrie je $(\hat{x}, \hat{z})$
d) Ano.

Jiné řešení je $R =$ rotace o $+\frac{7}{6}\pi$ okolo $\hat{y}$, $L =$ středová inverze.

8. (20 bodů) Chceme funkci $\tan x$ aproximovat v intervalu $(-\pi/2, \pi/2)$ ve třech subintervalech splajny: 3

$$\tan x \approx \begin{cases} & a_1/(\pi/2 + x) + b_1 + c_1 x + d_1 x^2 & \text{pro } x \in (-\pi/2, -\pi/6) \\ \textbf{verze 1} & a_2 + b_2 x + c_2 x^2 + d_2 x^3 & \text{pro } x \in [-\pi/6, \pi/6] \\ \textbf{verze 2} & a_2 x + b_2 x^3 & \text{pro } x \in [-\pi/6, \pi/6] \\ \textbf{verze 3} & a_2 x + b_2 x^3 + d_2 x^5 + d_2 x^7 & \text{pro } x \in [-\pi/6, \pi/6] \\ & a_3/(\pi/2 - x) + b_3 + c_3 x + d_3 x^2 & \text{pro } x \in (\pi/6, \pi/2) \end{cases}$$

Požadavky:

1. přesné asymptoty, tj. konstanty a_1, a_3 (jaké jsou?),
2. přesné hodnoty v obou dělících bodech $x = \pm\pi/6$,
3. přesné hodnoty derivací v obou dělících bodech,
4. spojité druhé derivace v obou dělících bodech.

Je možné tyto požadavky splnit? Bonus +20 za výpočet takového splajnu.

Řešení:
Celkem konstant: 12 (verze 1), 10 (verze 2), 12 (verze 3)
požadavek 1: 2 rovnice ($a_1 = -1$, $a_3 = 1$)
požadavek 2: 4 rovnice
požadavek 3: 4 rovnice
požadavek 4: 2 rovnice = celkem 12 rovnic

Verze 1 Mělo by to jít … přesněji viz níže.
Verze 2 Vypadá to, že máme příliš mnoho rovnic. Ale ve skutečnosti je tato verze totožná s verzí 1, protože stejně vyjde $a_2 = c_2 = 0$, neboť funkce $\tan(x)$ je lichá.
Verze 3 Ač máme 12 rovnic a 12 konstant, je soustava rovnic je přeurčená (∞ mnoho řešení).

Pokud vezmeme v úvahu všechny důsledky lichosti funkce ($a_2 = c_2 = 0$ a $\alpha_1 = -\alpha_3$, $\alpha \in \{a, b, c, d\}$), zbyde nám polovina konstant, tj. 6. Požadavky jsou také poloviční, totiž 6 požadavků. Toto je správné řešení.

---

9. (20 bodů) Chcete spočítat numericky integrál 3

$$I = \int_0^{\pi/2} \sqrt{\frac{\sin x}{x}} \mathrm{d}x,$$

ale váš oblíbený software zhavaruje, protože si neumí poradit s limitou pro $x \to 0$. Vzpomenete si proto na obdélníkové pravidlo. Víte, že nesmíte zvolit x příliš blízko 0, tj. příliš velký počet ekvidistantních subintervalů n, aby nevznikla nepřesnost při dělení malých čísel. Zde jsou vaše mezivýpočty:

n	$I(n)$
4	1.465938626350
8	1.464714799060
16	1.464408822300

Zpřesněte Richardsonovou extrapolací.

Řešení: Funkce je (ve smyslu dodefinování $x = 0$) všechny derivace. Obdélníkové pravidlo je 2. řádu, v druhém kroku Richardsonovy extrapolace bude řád 4 (zvyšuje se o dva z důvodu symetrie obdélníkového pravidla).

`! výpočet tabulky`	
`n=4`	4
`I4=sum x=pi/4/n,pi/2,pi/2/n sqrt(sin(x)/x)*pi/2/n`	1.465938626350
`n=8`	8
`I8=sum x=pi/4/n,pi/2,pi/2/n sqrt(sin(x)/x)*pi/2/n`	1.464714799060
`n=16`	16
`I16=sum x=pi/4/n,pi/2,pi/2/n sqrt(sin(x)/x)*pi/2/n`	1.464408822300
`extrapolace`	
`II8=(I8*4-I4)/3 ! Richardson poprvé`	1.464306856630
`II16=(I16*4-I8)/3 ! Richardson poprvé`	1.464306830046
`III16=(II16*16-II8)/15 ! Richardson podruhé`	1.464306828274
`I=integ x=0,pi/2 sqrt(sin(x)/x) ! přesně pro kontrolu`	1.464306827896
`III16-I ! chyba`	0.000000000378