Dvojný a trojný integrál

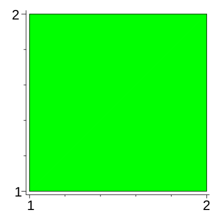
Chceme-li v Maple zapsat dvojný integrál přes množinu M, musíme nejdřív zavolat knihovnu programů `student` a pak použít příkaz `Doubleint(f(x,y),x,y,M)`:

```
> with (student):
> Doubleint(f(x,y),x,y,M);
```

$$\int\int_M \mathrm{f}(x,\,y)\,dx\,dy$$

Chceme-li vypočítat dvojný integrál musíme si ho rozdělit na dva jednoduché integráli.
Vypočteme nyní dvojný integrál $\displaystyle\iint_M x\,y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ 1 \le x \le 2,\ 1 \le y \le 2\}$. Nejprve si množinu M zakreslíme.

```
> with(plottools):
> Mg := rectangle([1,1], [2,2], color=green):
> plots[display](Mg, scaling=constrained,tickmarks=[2, 2]);
```



Nyní vyjádříme dvojný integrál pomocí jednoduchých integrálů a ty vypočteme.

```
> Doubleint(x*y^2,x,y,M)=Int(Int(x*y^2,y=1..2),x=1..2);
```

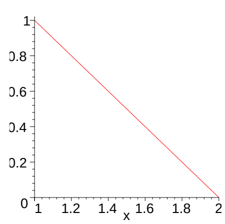
$$\int\int_M x\,y^2\,dx\,dy = \int_1^2\int_1^2 x\,y^2\,dy\,dx$$

```
> Int(Int(x*y^2,y=1..2),x=1..2)=int(int(x*y^2,y=1..2),x=1..2);
```

$$\int_1^2\int_1^2 x\,y^2\,dy\,dx = \frac{7}{2}$$

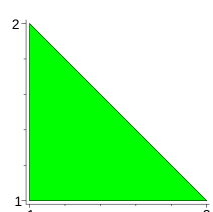
Vypočteme nyní dvojný integrál $\displaystyle\iint_M x\,y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ y \le 2-x,\ y \ge 0,\ x \ge 0\}$. Nejprve si zobrazíme graf funkce $y = 2 - x$:

```
> plot(2-x,x=1..2);
```



Nyní můžeme již nakreslit množinu M:

```
Mg:=polygon([[1,1],[1,2],[2,1]],color=green):
plots[display](Mg,scaling=constrained,tickmarks=[2,2]);
```



Nyní vyjádříme dvojný integrál opět pomocí jednoduchých integrálů a ty vypočteme.

```
> Doubleint(x*y^2,x,y,M)=Int(Int(x*y^2,y=1..2-x),x=1..2);
```

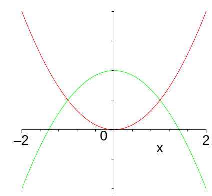
$$\int\int_M x\,y^2\,dx\,dy = \int_1^2\int_1^{2-x} x\,y^2\,dy\,dx$$

```
> Doubleint(x*y^2,x,y,M)=Int(Int(x*y^2,y=1..2-x),x=1..2);
```

$$\int_1^2\int_1^{2-x} x\,y^2\,dy\,dx = \frac{-2}{5}$$

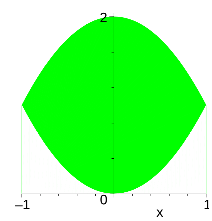
Vypočteme dvojný integrál $\iint_M \; x\,y - 2\,x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde M je množina ohraničená grafy funkcí $y = x^2$, $y = 2 - x^2$. Nejprve si zobrazíme graf funkce $y = x^2$ a $y = 2 - x^2$:

```
> plot([x^2,2-x^2],x=-2..2,tickmarks=[2, 2]);
```



Nyní si nakreslit množinu M:

```
plot([x^2,2-x^2],x=-1..1,tickmarks=[2,2],filled=true,color=[white,green]);
```



Nyní vyjádříme dvojný integrál opět pomocí jednoduchých integrálů a ty vypočteme.

```
> Doubleint(x*y+2*x^2+1,x,y,M)=Int(Int(x*y+2*x^2+1,y=x^2..2-x^2),x=-1..1);
```

$$\int\int_M x\,y + 2\,x^2 + 1\,dx\,dy = \int_{-1}^1\int_{x^2}^{2-x^2} x\,y + 2\,x^2 + 1\,dy\,dx$$

Můžeme si nejdříve pomocí programu Maple vypočítat vnitřní integrál

```
> Int(Int(x*y+2*x^2+1,y=x^2..2-x^2),x=-1..1)=Int(int(x*y+2*x^2+1,y=x^2..2-x^2),x=-1..1);
```

$$\int_{-1}^1\int_{x^2}^{2-x^2} x\,y + 2\,x^2 + 1\,dy\,dx = \int_{-1}^1 \frac{x\,((2-x^2)^2 - x^4)}{2} + 2\,x^2\,(2 - 2\,x^2) + 2 - 2\,x^2\,dx$$

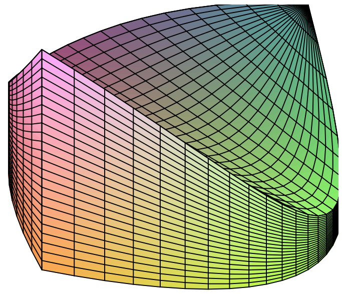
Nyní vypočteme i vnější integrál

```
> Int(Int(x*y+2*x^2+1,y=x^2..2-x^2),x=-1..1)=int(int(x*y+2*x^2+1,y=x^2..2-x^2),x=-1..1);
```

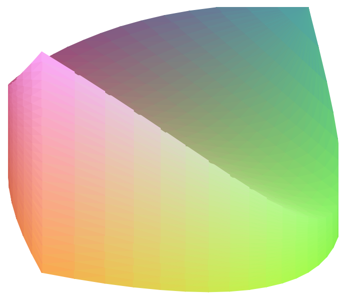
$$\int_{-1}^1\int_{x^2}^{2-x^2} x\,y + 2\,x^2 + 1\,dy\,dx = \frac{56}{15}$$

Z teorie dvojného integrálu víme, že náš integrál představuje objem nějakého tělesa. Toto těleso si teď nakreslíme.

```
g1:=plot3d([x,x^2,z],x=-1..1,z=0..x*x^2+2*x^2+1):
g2:=plot3d([x,2-x^2,z],x=-1..1,z=0..x*(2-x^2)+2*x^2+1):
g3:=plot3d(x*y+2*x^2+1,x=-1..1,y=x^2..2-x^2):
> plots[display3d](g1,g2,g3);
```



```
plots[display3d](g1,g2,g3,style=PATCHNOGRID);
```



Chceme-li v programu Maple zapsat trojný integrál přes množinu M, použíjeme příkaz `Tripleint(f(x,y,z),x,y,z,M)`:

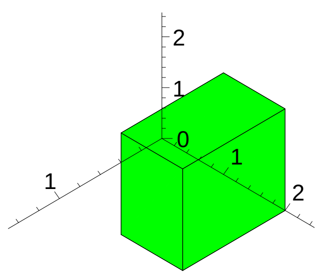
```
> with (student):
> Tripleint(f(x,y,z),x,y,z,M);
```

$$\int\int\int_{M} \mathrm{f}(x,\,y,\,z)\,dx\,dy\,dz$$

Vypočteme nyní trojný integrál $\displaystyle\iiint\limits_{M} x^3\,y - \frac{z}{y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,,$

kde $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ 0 \le x \le 1,\ 1 \le y \le 2,\ 0 \le z \le 2\}$. Nejprve si množinu M zakreslíme.

```
> with(plottools):
Mg:=cuboid([0,1,0],[1,2,2],color=green):
> plots[display](plots[display](Mg,style=patch,view=[0..1.5,0..2.5,0..2.5],axes=normal,tickmarks=[2
```



Nyní vyjádříme trojný integrál pomocí jednoduchých integrálů a ty vypočteme.

```
Tripleint(x^3*y-z/y,x,y,z,M)=Int(Int(Int(x^3*y-z/y,x=0..1),y=1..2),z=
0..2);
```

$$\int\int\int_{M} x^3\,y - \frac{z}{y}\,dx\,dy\,dz = \int_0^2\int_1^2\int_0^1 x^3\,y - \frac{z}{y}\,dx\,dy\,dz$$

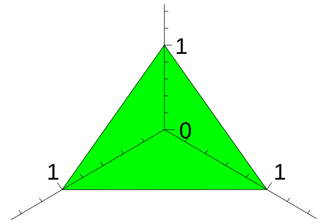
```
Int(Int(Int(x^3*y-z/y,x=0..1),y=1..2),z=0..2)=int(int(int(x^3*y-z/y,x
=0..1),y=1..2),z=0..2);
```

$$\int_0^2\int_1^2\int_0^1 x^3\,y - \frac{z}{y}\,dx\,dy\,dz = -2\ln(2) + \frac{3}{4}$$

Vypočteme nyní trojný integrál $\displaystyle\iiint\limits_{M} 1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,,$

kde $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0,\ x+y+z \le 1\}$. Nejprve si množinu M zakreslíme.

```
> with(plottools):
Mg:=polygon([[1,0,0],[0,1,0],[0,0,1]],color=green):
> plots[display](Mg,style=patch,view=[0..1.5,0..1.5,0..1.5],axes=normal,tickmarks=[2,2,2]);
```



Nyní vyjádříme trojný integrál pomocí jednoduchých integrálů a ty postupně vypočteme.

```
> Tripleint(1,x,y,z,M)=Int(Int(Int(1,z=0..1-x-y),y=0..1-x),x=0..1);
```

$$\int\int\int_M 1\,dx\,dy\,dz = \int_0^1\int_0^{1-x}\int_0^{1-x-y} 1\,dz\,dy\,dx$$

```
Int(Int(Int(1,z=0..1-x-y),y=0..1-x),x=0..1)=Int(Int(int(1,z=0..1-x-y)
,y=0..1-x),x=0..1);
```

$$\int_0^1\int_0^{1-x}\int_0^{1-x-y} 1\,dz\,dy\,dx = \int_0^1\int_0^{1-x} 1-x-y\,dy\,dx$$

```
Int(Int(Int(1,z=0..1-x-y),y=0..1-x),x=0..1)=Int(int(int(1,z=0..1-x-y)
,y=0..1-x),x=0..1);
```

$$\int_0^1\int_0^{1-x}\int_0^{1-x-y} 1\,dz\,dy\,dx = \int_0^1 1-x-x\,(1-x)-\frac{(1-x)^2}{2}\,dx$$

```
Int(Int(Int(1,z=0..1-x-y),y=0..1-x),x=0..1)=int(int(int(1,z=0..1-x-y)
,y=0..1-x),x=0..1);
```

$$\int_0^1\int_0^{1-x}\int_0^{1-x-y} 1\,dz\,dy\,dx = \frac{1}{6}$$