Vlastní čísla a vlastní vektory

Připomeňme nejprve definici: Řekneme, že λ je vlastní číslo matice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ a nenulový vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ je odpovídající vlastní vektor, jestliže platí

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}.$$

Vlastní čísla reálné matice mohou být reálná nebo komplexní. Symetrická matice má pouze reálná vlastní čísla. Jestliže $\mathbf{x}$ je vlastní vektor matice $\mathbf{A}$, pak i každý jeho nenulový reálný násobek je vlastní vektor matice $\mathbf{A}$. Obdobná definice platí i pro matice s komplexními prvky.

Protože

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \quad \Longleftrightarrow \quad (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{x} = \mathbf{0},$$

kde $\mathbf{E} = \mathrm{diag}(1,\ldots,1)$ je jednotková diagonální matice, a tato homogenní soustava lineárních algebraických rovnic má nenulové řešení právě když matice této soustavy je singulární, počítáme vlastní čísla jako kořeny charakteristické rovnice

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = 0.$$

V balíku linalg máme k dispozici následující příkazy:

- charmat($\mathbf{A}$, λ); $\mathbf{A}$ je čtvercová matice, λ je jméno nebo algebraický výraz; funkce **charmat** konstruuje charakteristickou matici $\mathbf{B} = \lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}$, kde $\mathbf{E}$ je jednotková matice. Je-li λ jméno, pak $\det(\mathbf{B})$ je charakteristický polynom matice $\mathbf{A}$.

- charpoly($\mathbf{A}, \lambda$); $\mathbf{A}$ je čtvercová matice řádu n, λ je jméno nebo algebraický výraz; funkce **charpoly** počítá charakteristický polynom matice $\mathbf{A}$, tj. $\det(\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A})$, kde $\mathbf{E}$ je jednotková matice.

- eigenvalues($\mathbf{A}$); eigenvalues($\mathbf{A}, \mathbf{C}$), kde $\mathbf{A}$, $\mathbf{C}$ jsou čtvercové matice stejného řádu; příkaz **eigenvalues**($\mathbf{A}$) vrací posloupnost vlastních čísel matice $\mathbf{A}$. Obsahuje-li $\mathbf{A}$ reálná čísla, je výpočet prováděn numericky s přesností specifikovanou příkazem **Digits**. V symbolickém případě se vlastní čísla počítají jako kořeny charakteristického polynomu.
  Příkaz **eigenvalues**($\mathbf{A}, \mathbf{C}$) řeší zobecněný problém vlastních čísel, tj. hledá kořeny polynomu $\det(\lambda\mathbf{C} - \mathbf{A})$.

- eigenvectors($\mathbf{A}$), kde $\mathbf{A}$ je čtvercová matice; procedura **eigenvectors** počítá vlastní čísla a vlastní vektory matice $\mathbf{A}$, tj. pro každé vlastní číslo λ řeší homogenní soustavu lineárních algebraických rovnic $(\mathbf{E}\lambda - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ pro neznámý vektor $\mathbf{x}$. Výsledkem je posloupnost seznamů ve tvaru $[e_i, \mu, \mathbf{v}_{1,i}, \ldots, \mathbf{v}_{n_i,i}]$, kde e_i je vlastní číslo, μ je jeho algebraická násobnost a $\mathbf{v}_{1,i}, \ldots, \mathbf{v}_{n_i,i}$ jsou vektory, které tvoří bázi vlastního podprostoru odpovídajícího vlastnímu číslu e_i, $1 \le n_i \le \mu$, n_i je dimenze vlastního podprostoru. Pro číselné matice se k výpočtu používají standardní numerické metody a výpočet se provádí s přesností specifikovanou příkazem **Digits**. V symbolickém případě se provádí explicitní (přesný) výpočet příslušných vlastních podprostorů.

> restart;
> with(linalg): with(plots):

Warning, the protected names norm and trace have been redefined and unprotected
Warning, the name changecoords has been redefined

> A := array([[2, 3, −1], [3, −6, 2], [−1, 2, 5]]);

$$A := \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & -6 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

> E := evalm(array(identity,1..3, 1..3));

$$E := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

> B := evalm(A − λ ∗ E);

$$B := \begin{bmatrix} 2-\lambda & 3 & -1 \\ 3 & -6-\lambda & 2 \\ -1 & 2 & 5-\lambda \end{bmatrix}$$

> charp := det(B);

$$charp := -119 + 46\,\lambda + \lambda^2 - \lambda^3$$

> C:=charmat(A,μ);

$$C := \begin{bmatrix} \mu-2 & -3 & 1 \\ -3 & \mu+6 & -2 \\ 1 & -2 & \mu-5 \end{bmatrix}$$

Matici **C** jsme vytvořili příkazem **charmat**. Matice **B** a **C** mají opačná znaménka. Mají stejný charakteristický polynom?

> charp1 := det(C);

$$charp1 := \mu^3 - \mu^2 - 46\,\mu + 119$$

Mají polynomy *charp* a *charp1* stejné kořeny? Tedy vedou oba postupy k získání stejných vlastních čísel matice **A**?

Vyzkoušejme ještě příkaz **charpoly**, který počítá charakteristický polynom dané matice **A** jako determinant matice $\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}$:

> charp2 := charpoly(A, π);

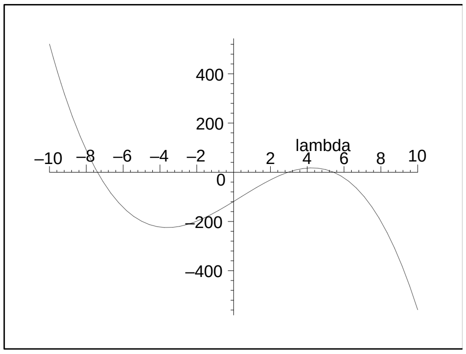
$$charp2 := \pi^3 - \pi^2 - 46\,\pi + 119$$

Na obrázcích 1 a 2 jsou znázorněny polynomy *charp* a *charp2*.

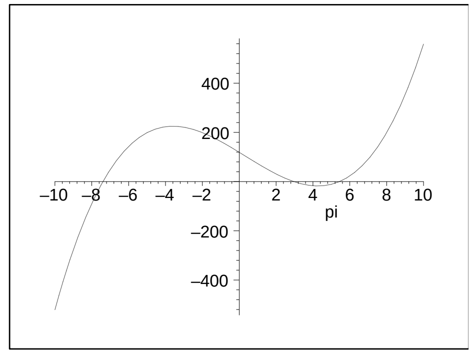
> chareq:=det(B) = 0;

$$chareq := -119 + 46\,\lambda + \lambda^2 - \lambda^3 = 0$$

> solve(chareq, {λ});



Obrázek 1: Polynom *charp*



Obrázek 2: Polynom *charp2*

$$\left\{\lambda = \frac{-11188 + 12\,I\,\sqrt{324363}^{(1/3)}}{6} + \frac{278}{3\,-11188 + 12\,I\,\sqrt{324363}^{(1/3)}} + \frac{1}{3}\right\},$$
$$\left\{\lambda = -\frac{-11188 + 12\,I\,\sqrt{324363}^{(1/3)}}{12} - \frac{139}{3\,-11188 + 12\,I\,\sqrt{324363}^{(1/3)}} + \frac{1}{3} +\right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}\,I\,\sqrt{3}\,\left(\frac{-11188 + 12\,I\,\sqrt{324363}^{(1/3)}}{6} - \frac{278}{3\,\%1^{(1/3)}}\right)\right\},$$
$$\left\{\lambda = -\frac{-11188 + 12\,I\,\sqrt{324363}^{(1/3)}}{12} - \frac{139}{3\,-11188 + 12\,I\,\sqrt{324363}^{(1/3)}} + \frac{1}{3} -\right.$$
$$\left. - \frac{1}{2}\,I\,\sqrt{3}\,\left(\frac{-11188 + 12\,I\,\sqrt{324363}^{(1/3)}}{6} - \frac{278}{3\,-11188 + 12\,I\,\sqrt{324363}^{(1/3)}}\right)\right\}$$

> evalf(%);

$$\{\lambda = 5.435111408 - 0.1\,10^{-8}\,I\},\ \{\lambda = -7.395608304 + 0.1339745960\,10^{-9}\,I\},$$
$$\{\lambda = 2.960496896 + 0.1866025404\,10^{-8}\,I\}$$

> $\lambda 1 := 5.435111408 - .1e - 8 * I;$

$$\lambda 1 := 5.435111408 - 0.1\,10^{-8}\,I$$

> $\lambda 2 := -7.395608304 + .1339745960e - 9 * I;$

$$\lambda 2 := -7.395608304 + 0.1339745960\,10^{-9}\,I$$

> $\lambda 3 := 2.960496896 + .1866025404e - 8 * I;$

$$\lambda 3 := 2.960496896 + 0.1866025404\,10^{-8}\,I$$

> evalf(eigenvalues(A));

$$5.435111408 - 0.1\,10^{-8}\,I,\ -7.395608304 + 0.1339745960\,10^{-9}\,I,$$
$$2.960496896 + 0.1866025404\,10^{-8}\,I$$

Oba postupy nám tedy nalezly stejná vlastní čísla. Tato vlastní čísla jsou "téměř" reálná. Z obrázku charakteristického polynomu (Obrázek 1, Obrázek 2) vidíme, že kdybychom počítali přesně, měli bychom získat tři reálné kořeny, a tedy tři reálná (různá) vlastní čísla. Nepřesnost výsledku způsobuje jednak použití numerické metody při výpočtu, jednak zaokrouhlovací chyby.

Zkusme ještě symbolický výpočet například pro diagonální matici:

```
> DM:=array([[a,0,0],[0,b,0],[0,0,c]]);
```

$$DM := \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$$

```
> eigenvalues(DM);
```

$$a,\ b,\ c$$

Vidíme, že v případě diagonální matice jsou všechna vlastní čísla diagonální prvky dané matice.

```
> eigenvectors(DM);
```

$$[a,\ 1,\ \{[1,\ 0,\ 0]\}],\ [b,\ 1,\ \{[0,\ 1,\ 0]\}],\ [c,\ 1,\ \{[0,\ 0,\ 1]\}]$$

Výsledek, říká, že a je jednoduché vlastní číslo, kterému přísluší vlastní vektor $[1,\ 0,\ 0]$. Obdobně pro vlastní čísla b a c.

```
> DM1:=array([[1,0,0],[0,1,0],[0,0,1]]);
```

$$DM1 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> eigenvectors(DM1);
```

$$[1,\ 3,\ \{[1,\ 0,\ 0],\ [0,\ 0,\ 1],\ [0,\ 1,\ 0]\}]$$

Tedy matice **DM1** má jedno vlastní číslo rovno 1 s algebraickou násobností 3 a odpovídající vlastní vektory jsou vektory $(1, 0, 0)^{\mathrm{T}}$, $(0, 1, 0)^{\mathrm{T}}$, $(0, 0, 1)^{\mathrm{T}}$.

Jaké jsou vlastní vektory matice **A**?

```
> evalf(eigenvectors(A));
```

$$\begin{aligned}
&[5.435111408 - 0.1\,10^{-8}\,I,\ 1.,\\
&\{[-0.179489876 + 0.5105777948\,10^{-8}\,I,\ 0.127810768 + 0.1252888975\,10^{-8}\,I,\ 1.]\}]\\
&,[-7.395608304 + 0.1339745960\,10^{-9}\,I,\ 1.,\\
&\{[1.79828530 + 0.1847745082\,10^{-9}\,I,\ -5.298661502 + 0.3593745522\,10^{-9}\,I,\ 1.]\}],\\
&[2.960496896 + 0.1866025404\,10^{-8}\,I,\ 1.,\\
&\{[7.524061680 - 0.4775368097\,10^{-8}\,I,\ 2.742279288 - 0.1254671347\,10^{-8}\,I,\ 1.]\}]
\end{aligned}$$

Vlastní vektory matice **A** mají opět "zanedbatelnou" imaginární část:

```
> v1:=vector([1., -.712077918+.5394248717e-9*I,
> -5.571345162+.2918274615e-8*I]);
```

$$v1 := [1.,\ -0.712077918 + 0.5394248717\,10^{-9}\,I,\ -5.571345162 + 0.2918274615\,10^{-8}\,I]$$

```
> v2:=vector([1., -2.946507676+.1156248156e-9*I,
> .556085283+.628998508e-10*I]);
```

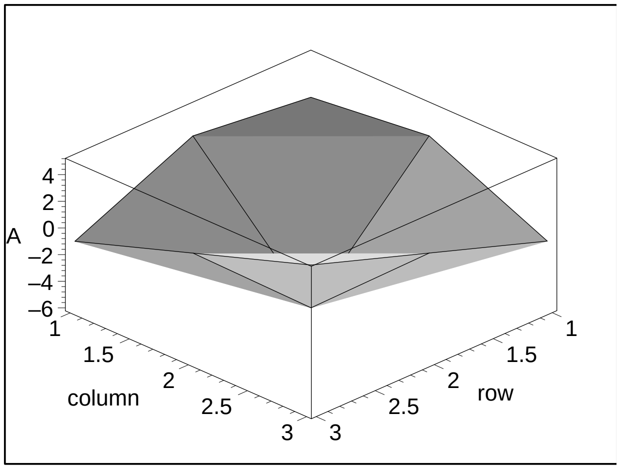
$$v2 := [1.,\ -2.946507676 + 0.1156248156\,10^{-9}\,I,\ 0.556085283 + 0.628998508\,10^{-10}\,I]$$

```
> v3:=vector([1., .3644679428-.5489823192e-9*I,
> .132906932-.3662972362e-8*I]);
```

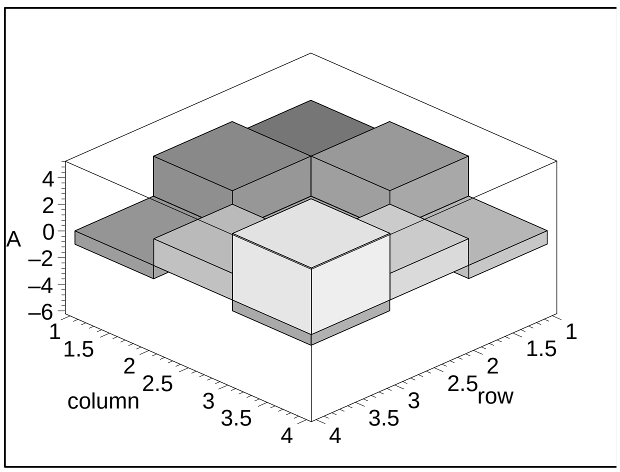
$v3 := [1., 0.3644679428 - 0.5489823192\,10^{-9}\,I,\, 0.132906932 - 0.3662972362\,10^{-8}\,I]$

Znázorněme si ještě některé naše výsledky graficky:

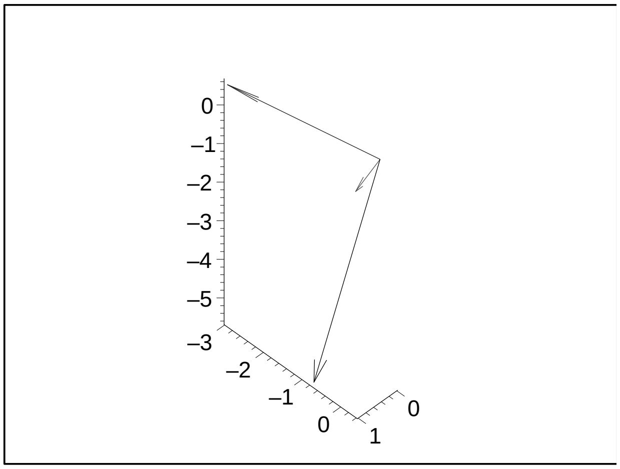
```
> matrixplot(A,axes=boxed);
```




```
> matrixplot(A,heights=histogram,axes=boxed);
```




```
> a1 :=
> arrow(<Re(v1[1]),Re(v1[2]),Re(v1[3])>, shape=arrow, width=[0.02,
> relative], head_length=[0.1, relative], color=black):a2 :=
> arrow(<Re(v2[1]),Re(v2[2]),Re(v2[3])>,shape=arrow, width=[0.02,
> relative], head_length=[0.2, relative], color=blue): a3 :=
> arrow(<Re(v3[1]),Re(v3[2]),Re(v3[3])>,shape=arrow, width=[0.1,
> relative], head_length=[0.3, relative],
> color=cervena):display(a1,a2,a3, scaling=constrained,
> axes=FRAMED);
```

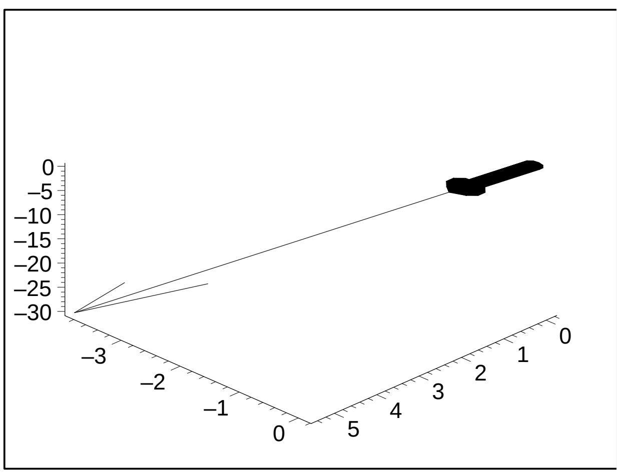


Je-li **v1** vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu $\lambda 1$ matice **A**, pak vektor **Av1** je jeho $\lambda 1-$násobkem:

```
> w1:=evalm(A&*v1);
```

$$w1 := [5.435111408 - 0.1300000000\,10^{-8}\,I,\ -3.870222812 + 0.2600000000\,10^{-8}\,I,\ -30.28088165 + 0.1567022282\,10^{-7}\,I]$$

```
> p1 := arrow(<0,0,0>,<Re(v1[1]),Re(v1[2]),Re(v1[3])>, difference,
> color=black):p2 :=
> arrow(<0,0,0>,<Re(w1[1]),Re(w1[2]),Re(w1[3])>,shape=arrow,
> width=[0.02, relative], head_length=[0.2, relative], color=blue):
> display(p1,p2,axes=FRAMED);
```



Příklady k procvičení

1. Najděte vlastní čísla a vlastní vektory matice (graficky znázorněte)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -6 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Najděte vlastní čísla a vlastní vektory matice (graficky znázorněte)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -6 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Najděte vlastní čísla a vlastní vektory matice $\mathbf{A}$ a matice $\mathbf{A}^2$ (graficky znázorněte)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Najděte vlastní čísla a vlastní vektory matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -2 & 0 \\ -5 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Najděte vlastní čísla a vlastní vektory matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

6. Najděte vlastní čísla a vlastní vektory matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

7. Najděte vlastní čísla a vlastní vektory matice (graficky znázorněte)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 5 & 3 & -2 \\ 4 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$