Implicitně zadané funkce

Implicitní funkce jedné proměnné

Předpokládejme, že máme zadanou rovnici $F(x,y)=0$. Systém Maple má možnost pomocí příkazu
`implicitplot(F(x,y),x=xmin..xmax,y=ymin..ymax)`
nakreslit křivku definovanou rovnicí $F(x,y)=0$. Nejdřív ale musíme zavolat knihovnu programů `plots`, která tento příkaz zná.

- **Příklad 1:** Nakreslete křivku, která je definovaná rovnicí $\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{y}+x+2y-2=0$

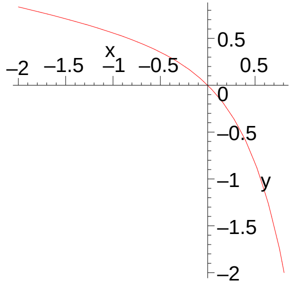
```
> F:=(x,y)->exp(2*x)+exp(y)+x+2*y-2;
```

$$F := (x,\, y) \rightarrow e^{(2\,x)} + e^{y} + x + 2\,y - 2$$

Nejdříve zavoláme knihovnu programů `plots` a potom příkaz `implicitplot;`

```
> with(plots):
> implicitplot(F(x,y),x=-2..1,y=-2..1);
```

Maple nám vykreslí následující graf



Z grafu vidíme, že rovnice $e^{2x} - e^{y} + x + 2y - 2 = 0$ definuje implicitně funkci $y = f(x)$ pro všechna $x \in (-2, 1)$.

Pokuď rovnice $F(x, y) = 0$ definuje v okolí bodu $A = [a, b]$ implicitně zadanou funkci, můžeme vypočítat $f'(a)$, $f''(a), \ldots$ pomocí příkazu `implicitdiff(F(x,y),y,x)`. Takto použitý příkaz nám vypočte $f'(a)$, vyšší derivace si ukážeme na příkladu.

• **Příklad 2:** Vypočtěte $f'(0)$, $f''(0)$, $f'''(0)$ pro funkci, která je implicitně definovaná rovnicí

$$e^{2x} + e^{y} + x + 2y - 2 = 0\,.$$

Nejdříve vypočteme pro $x_0 = 0$ příslušné y_0.

```
> b:=solve(F(0,y),y);
```

$$y0 := 0$$

Nyní vypočteme pomocí příkazu `implicitdiff` první derivaci implicitně zadané funkce $y(x)$ a dosadíme za x hodnotu x_0, za y hodnotu y_0.

```
> subs(x=0,y=0,implicitdiff(F(x,y),y,x));
```

$$-\frac{2\,e^0+1}{e^0+2}$$

Zjednodušíme vypočtený výraz.

```
> simplify(%);
```

$$-1$$

Druhou derivaci vypočteme podobně, jen použijeme příkaz `implicitdiff(F(x,y),y,x$2)` pro druhou derivaci implicitně zadané funkce.

```
> subs(x=0,y=0,implicitdiff(F(x,y),y,x$2));
```

$$-\frac{8\left(e^{0}\right)^{3}+20\left(e^{0}\right)^{2}+17\,e^{0}}{\left(e^{0}\right)^{3}+6\left(e^{0}\right)^{2}+12\,e^{0}+8}$$

```
> simplify(%);
```

$$-5/3$$

Podobně spočteme třetí derivaci.

```
> subs(x=0,y=0,implicitdiff(F(x,y),y,x$3));
```

$$-2\,\frac{24\left(e^{0}\right)^{5}+90\left(e^{0}\right)^{4}+147\left(e^{0}\right)^{2}+162\left(e^{0}\right)^{3}+63\,e^{0}}{\left(e^{0}\right)^{5}+10\left(e^{0}\right)^{4}+40\left(e^{0}\right)^{3}+80\left(e^{0}\right)^{2}+80\,e^{0}+32}$$

```
> simplify(%);
```

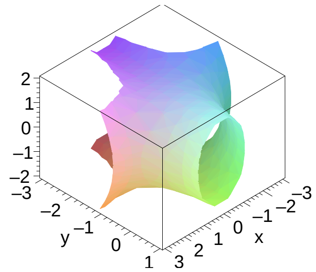
$$-4$$

• **Příklad 3:** Nakreslete plochu, která je definovaná rovnicí $x^2+y\,x^2-3+z^2=0$. Zjistěte, zda rovnice definuje v okolí bodu $(x_0,y_0,z_0)=(1,1,1)$ implicitně zadanou funkci $z=f(x,y)$ a vypočtěte derivaci této funkce v bodě $(1,1)$.

Nejdříve zavoláme knihovnu programů `plots` a potom pomocí příkazu `implicitplot3d` vykreslíme plochu, která je definována rovnicí $F(x,y,z)=0$.

```
> with(plots):
> implicitplot3d(F(x,y,z),x=-3..3,y=-3..1,z=-2..2,axes=boxed,style=PATCHNOGRID);
```

Maple nám vykreslí následující graf



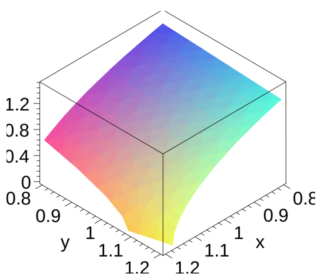
Ověříme, zda bod $(1, 1, 1)$ splňuje rovnici $F(x, y, z) = 0$

```
> F(1,1,1);
```

$$0$$

Nyní si vykreslíme plochu pouze v okolí bodu $(1, 1, 1)$.

```
> with(plots):
> implicitplot3d(F(x,y,z),x=0.8..1.2,y=0.8..1.2,z=0..1.5,axes=boxed,style=PATCHNOGRID)
```



Z tohoto grafu vidíme, že rovnice $x^2 + y\,x^2 - 3 + z^2 = 0$ definuje implicitně funkci $z = f(x, y)$ pro všechna $x \in (0.8, 1.2)$ a $y \in (0.8, 1.2)$.

Nyní vypočteme pomocí příkazu `implicitdiff` první parciální derivace implicitně zadané funkce $z = f(x, y)$ a dosadíme za x hodnotu 1, za y hodnotu 1 a za z hodnotu 1. Vypočteme tedy $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1)$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 1)$.

Výpočet $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x}$:

```
> implicitdiff(F(x,y,z),z(x,y),x);
```

$$\frac{-x\,(1+y)}{z}$$

Výpočet $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1)$:

```
> subs(x=1,y=1,z=1,implicitdiff(F(x,y,z),z(x,y),x));
```

$$-2$$

Výpočet $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial y}$:

```
> implicitdiff(F(x,y,z),z(x,y),y);
```

$$-\frac{x^2}{2\,z}$$

Výpočet $\frac{\partial f}{\partial y}(1,1)$:

```
>  subs(x=1,y=1,z=1,implicitdiff(F(x,y,z),z(x,y),y));
```

$$-\frac{1}{2}$$