Počítačový algebraický systém Maple jako pomůcka při studiu předmětu Matematika I a II.
Parametrické rovnice křivek v E^2

Příklad :
Křivka K je dána parametrickými rovnicemi : $x = \varphi_1(t) = 1 + t^2,\ y = \varphi_2(t) = t - \frac{1}{3}t^3,\ t \in \mathcal{R}$.
Proveďte následující úkoly:

1) Určete tečný vektor ke křivce K v bodě P, který je určen hodnotou parametru $t_0 = 1$, a napište parametrické rovnice tečny p ke křivce K, která se křivky dotýká v bodě P. Do jednoho obr. zakreslete křivku K a tečnu p.

2) Určete tečný vektor ke křivce K v bodě Q, který je průsečíkem křivky K s osou x. Napište parametrické rovnice tečny q, která se dotýká křivky K v bodě Q. Nakonec do jednoho obr. zakreslete křivku K a tečnu q.

3) Rozhodněte, zda křivka K je grafem nějaké funkce $y = f(x)$, případně zda je sjednocením grafů několika funkcí $y = f_i(x)$. Pokud ano, najděte její (jejich) funkční předpis(-y) a nakreslete graf této funkce $y = f(x)$, resp. grafy těchto funkcí $y = f_i(x)$, a to do jednoho obr.

Řešení:
Nejprve zadáme parametrické rovnice křivky K, což lze v prostředí MAPLE provést následujícím příkazem :

```
> x:=t->1+t^2; y:=t->t-1/3*t^3;
```

$$x := t \to 1 + t^2$$
$$y := t \to t - \frac{1}{3}t^3$$

ad 1) Souřadnice bodu dotyku P spočítáme takto:

```
> x(1);y(1);
```

$$2$$
$$\frac{2}{3}$$

Souřadnice tečného vektoru ke křivce K, který vychází z bodu P, jsou pořadě rovny hodnotám derivací funkcí $x(t)$ a $y(t)$ v bodě $t_0 = 1$, neboť tato hodnota parametru bod dotyku P charakterizuje. Jde tedy o vektor $(x'(1), y'(1))$. Jeho souřadnice lze v MAPLu spočítat takto:

```
> D(x)(1);D(y)(1);
```

$$2$$
$$0$$

Uvážíme-li, že tento vektor hraje roli směrového vektoru tečny p, a protože známe také jeden bod, kterým tato tečna prochází (tím je bod dotyku P), můžeme již sestavit parametrické rovnice tečny p:

$$x(s) = x(1) + s\,x'(1) = 1 + 2s,\ y(s) = y(1) + s\,y'(1) = \frac{2}{3},\ s \in \mathcal{R},$$

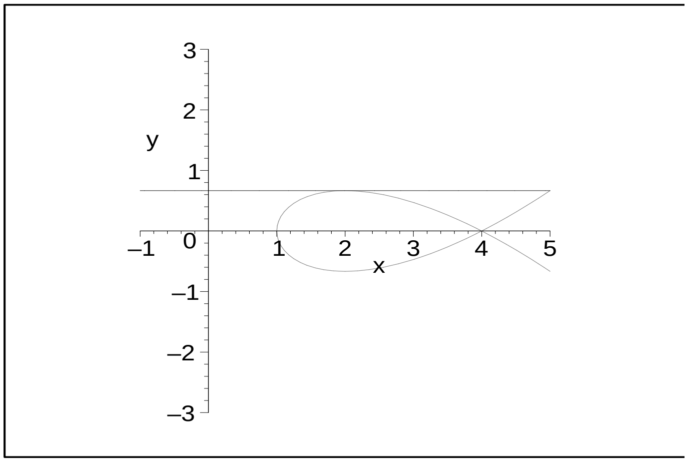
což v prostředí MAPLE provedeme takto:

```
> x0:=s->2+2*s; y0:=s->2/3;
```

$$x0 := s \to 2 + 2\,s$$
$$y0 := \frac{2}{3}$$

Poslední dílčí úkol z úkolu 1) lze v systému MAPLE splnit následujícím příkazem:

```
>  plot({[x(t),y(t),t=-2..2],[x0(s),y0(s),s=-5..5]
>},x=-1..5,y=-3..3,scaling=constrained);
```



ad 2) Protože pro průsečík Q křivky K s osou x platí, že jeho $y-$ová souřadnice je rovna nule, určíme hodnotu parametru t, která bod Q charakterizuje, z rovnice $0 = y(t)$. Tuto rovnici lze v MAPLu vyřešit příkazem:

```
>  solve(0=y(t),t);
```

$$0,\ \sqrt{3},\ -\sqrt{3}$$

Rovnice $0 = y(t)$ má tedy 3 řešení: $t_1 = 0,\ t_2 = \sqrt{3},\ t_3 = -\sqrt{3}$. Tyto hodnoty parametru nyní postupně dosadíme do funkce $x(t)$ a tím dostaneme odpovídající $x-$ové souřadnice jednotlivých průsečíků křivky K s osou x. V prostředí MAPLE to provedeme takto:

```
>  x(0); x(sqrt(3)); x(-sqrt(3));
```

$$1$$
$$4$$
$$4$$

Je tedy jasné, že křivka K má 2 průsečíky s osou x - bod $Q_1 = [0, 0]$, který je charakterizován hodnotou parametru $t_1 = 0$ a bod $Q_2 = [3, 0]$, který je charakterizován 2 hodnotami parametru $t:\ t_2 = \sqrt{3}$ a $t_3 = -\sqrt{3}$.

Protože bod $Q_2 = [3, 0]$ je 2-násobným bodem křivky K, lze očekávat, že v bodě Q_2 budou existovat 2 různé tečné vektory ke křivce K :

$$\vec{u}_{Q_{21}} = (x'(\sqrt{3}), y'(\sqrt{3})) \ \text{ a } \ \vec{u}_{Q_{22}} = (x'(-\sqrt{3}), y'(-\sqrt{3})).$$

Souřadnice tečných vektorů ke křivce K, které vycházejí z bodu Q_1, resp. Q_2, lze v MAPLu spočítat násl. způsobem :

```
>  D(x)(0); D(y)(0);
```

$$0$$
$$1$$

```
>  D(x)(sqrt(3)); D(y)(sqrt(3));
```

$$2\sqrt{3}$$
$$-2$$

```
>  D(x)(-sqrt(3)); D(y)(-sqrt(3));
```

$$-2\sqrt{3}$$
$$-2$$

Tečným vektorem ke křivce K, který vychází z bodu Q_1, je tedy vektor $\vec{u}_{Q_1} = (0;1)$. Z bodu Q_2 pak vychází 2 různé tečné vektory ke křivce K :

$$\vec{u}_{Q_{21}} = (2\sqrt{3};-2) \text{ a } \vec{u}_{Q_{22}} = (-2\sqrt{3};-2).$$

V bodě Q_2 tudíž existují 2 různé tečny ke křivce K. Nyní již můžeme (analogicky jako v rámci řešení úlohy 1)) sestavit parametrické rovnice tečny q_1 ke křivce K v bodě Q_1 a tečen q_2 , q_3 ke křivce K v bodě Q_2 :

$$q_1 : \ x(n) = x(0) + n\,x'(0) = 1\ ,\ y(n) = y(0) + n\,y'(0) = n\ ,\ n \in \mathcal{R},$$

$$q_2 : \ x(m) = x(\sqrt{3}) + m\,x'(\sqrt{3}) = 4 + m\,2\sqrt{3}\ ,\ y(m) = y(\sqrt{3}) + n\,y'(\sqrt{3}) = -2\,m\ ,\ m \in \mathcal{R},$$

$$q_3 : \ x(r) = x(-\sqrt{3}) + r\,x'(-\sqrt{3}) = 4 - r\,2\sqrt{3}\ ,\ y(r) = y(-\sqrt{3}) + r\,y'(-\sqrt{3}) = -2\,r\ ,\ r \in \mathcal{R},$$

což v MAPLu provedeme takto:

```
>  x1:=n->1; y1:=n->n;
```

$$x1 := 1$$
$$y1 := n \to n$$

```
>  x2:=m->4+m*2*sqrt(3); y2:=m->m*(-2);
```

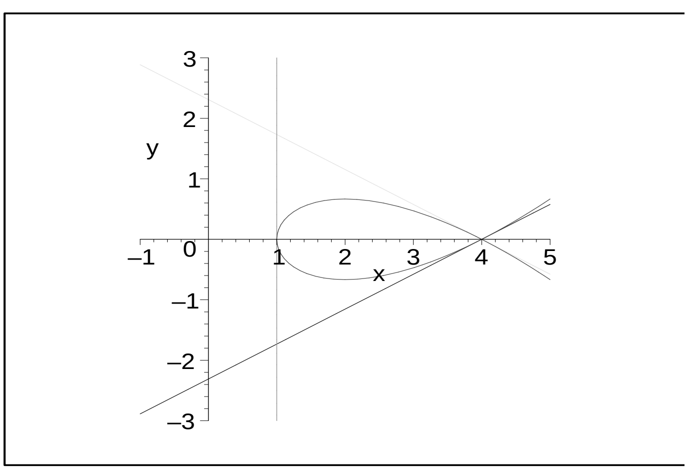
$$x2 := m \to 4 + 2\,m\sqrt{3}$$
$$y2 := m \to -2\,m$$

```
>  x3:=r->4+r*(-2)*sqrt(3); y3:=r->r*(-2);
```

$$x3 := r \to 4 - 2\,r\sqrt{3}$$
$$y3 := r \to -2\,r$$

Nyní již pomocí následujícího příkazu zakreslíme do jednoho obr. křivku K a tečny q_1 , q_2 , q_3 :

```
>  plot(
>{[x(t),y(t),t=-2..2],[x1(n),y1(n),n=-5..5],[x2(m),y2(m),m=-5..5],[x3(
>  r),y3(r),r=-5..5]},x=-1..5,y=-3..3,scaling=constrained);
```



ad 3) Postačující podmínkou k tomu, aby křivka K byla grafem nějaké funkce $y = f(x)$, je, že existuje inverzní funkce k funkci $x = \varphi_1(t),\ t \in I$. Je-li tomu tak a podaří-li se nám navíc t z rovnice $x = \varphi_1(t)$ "vyjádřit" (což není vždy možné, přestože je funkce $x = \varphi_1(t)$ prostá), pak lze do 2.parametrické rovnice $y = \varphi_2(t)$ za t dosadit, čímž dostaneme:

$$y = \varphi_2(t) = \varphi_2(\varphi_1^{-1}(x)) = \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}(x),\ x \in H(\varphi_1) = \varphi_1(I).$$

Odtud pak plyne, že pro hledanou funkci f platí : $f = \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$.
Není-li funkce $x = \varphi_1(t)$ na daném intervalu I prostá, ale je prostá na každém z intervalů I_i , $i = 1, ..., n$, pro něž platí $\bigcup_{i=1}^{n} I_i = I$, existují inverzní funkce k funkcím $x = (\varphi_1|_{I_i})(t)$, což jsou restrikce funkce $x = \varphi_1(t)$ na jednotlivé intervaly I_i , $i = 1, .., n$.
Křivka K je pak sjednocením grafů funkcí:

$$f_i\ :\ y = \varphi_2(t) = \varphi_2((\varphi_1|_{I_i})^{-1}(x)) = \varphi_2 \circ (\varphi_1|_{I_i})^{-1}(x),\ x \in H(\varphi_1|_{I_i})\ ,\ i = 1, ..., n.$$

Zda je x v našem případě prostou funkcí proměnné t, tj. zda lze t z rovnice $x = 1 + t^2$ jednoznačně vyjádřit jako funkci x, se pokusíme zjistit řešením rovnice $x = 1 + t^2$, kde x nyní chápeme jako parametr a t jako neznámou. V MAPLu to lze provést příkazem:

```
> solve(x=1+t^2,t);
```

$$\sqrt{x-1},\ -\sqrt{x-1}$$

Vidíme tedy, že uvedená rovnice má 2 řešení. První z nich (tj. $\sqrt{x-1}$) lze zřejmě interpretovat jako funkční předpis inverzní funkce k funkci $\varphi_1|_{\langle 0,\infty)}$, druhé pak jako funkční předpis inverzní funkce k funkci $\varphi_1|_{(-\infty,0\rangle}$ (Zdůvodněte si podrobně sami a navíc si rozmyslete, že definičním oborem obou zmíněných funkcí je interval $\langle 1, \infty)$.)
Zadefinujme si tedy v MAPLu tyto 2 funkce:

```
> t1:=x->sqrt(x-1);
```

$$t1 := x \to \sqrt{x-1}$$

```
> t2:=x->-sqrt(x-1);
```

$$t2 := x \to -\sqrt{x-1}$$

Křivka K je tedy zřejmě sjednocením grafů 2 funkcí f_1 , f_2, které lze v MAPLu zadat následujícími příkazy:

```
> f1:=x->y(t1(x));
```

$$f1 := x \to \mathrm{y}(\mathrm{t1}(x))$$

```
> f2:=x->y(t2(x));
```

$$f2 := x \to \mathrm{y}(\mathrm{t2}(x))$$

"Konkrétní" funkční předpisy funkcí f_1 a f_2 lze získat pomocí následujících příkazů:

```
> f1(x);
```

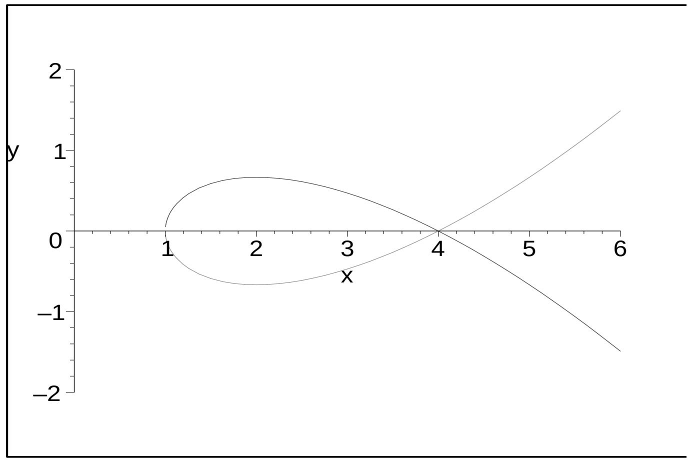
$$\sqrt{x-1} - \frac{(x-1)^{(3/2)}}{3}$$

```
> f2(x);
```

$$-\sqrt{x-1} + \frac{(x-1)^{(3/2)}}{3}$$

Pomocí následujícího příkazu nyní zakreslíme do jednoho obr. grafy obou funkcí $f_1(x)$ a $f_2(x)$:

```
> plot([f1(x),f2(x)],x=0..6,y=-2..2,scaling=constrained);
```


2
y
1
0
1
2
3
4
5
6
x
–1
–2