Lineární algebra

1. Možnosti balíku linalg

Před použitím jakéhokoliv příkazu lineární algebry je nutno vyvolat speciální balík programů **linalg** určený pro lineární algebru.

```
> restart;
> with(linalg):
```

Ukončíte-li příkaz středníkem, Maple vypíše včechny příkazy, které jsou součástí balíku **linalg**. Ukončíte-li příkaz dvojtečkou, Maple vás upozorní:

Warning, the protected names norm and trace have been redefined and unprotected

(příkaz **norm**, je-li vyvolán v rámci balíku **linalg**, počítá normu vektoru nebo matice, příkaz trace počítá v rámci balíku **linalg** stopu matice).

1.1. Práce s vektory a maticemi

Uveďme si nejprve několik příkladů, pomocí kterých vytvoříme vektor a matici. Povšimněte si, že příkaz **transpose** vytvoří k dané matici matici transponovanou, ale vektory ponechá v řádkovém tvaru. Přesto, pokud budete matici násobit vektorem, musí vždy rozměry (zjistí je příkazy **rowdim** a **coldim**) odpovídat, t.j. násobím-li matici **A** maticí **B** zprava, musí mít matice **A** stejný počet sloupců jako matice **B** řádků (a toto platí i v případě, že **B** je vektor), přičemž výsledná matice má počet řádků stejný jako matice **A** a počet sloupců stejný jako matice **B**:

```
> u := [3,2,3,5];
```

$$u := [3,\ 2,\ 3,\ 5]$$

```
> v := vector([3,2,1,9]);
```

$$v := [3,\ 2,\ 1,\ 9]$$

```
> v1:= vector[row]([3,2,1,9]);
```

$$v1 := [3,\ 2,\ 1,\ 9]$$

```
> v2:=array([1,-1,2]);
```

$$v2 := [1,\ -1,\ 2]$$

```
> w := transpose(v2);
```

$$w := \mathrm{transpose}(v2)$$

```
> C := matrix( [[1,2,3]] );
```

$$C := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

```
> Ct := transpose(C);
```

$$Ct := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

```
> rowdim(Ct);
```

$$3$$

```
> coldim(Ct);
```

$$1$$

```
> U := array(diagonal, 1..2,1..3, [(1,1)=5]);
```

$$U := \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & U_{2,2} & 0 \end{bmatrix}$$

Předchozí příklad vytvořil diagonální obdélníkovou matici $\mathbf{U}$ typu 2×3, přičemž jsme číselnou hodnotu zadali pouze pro prvek $U_{1,1}$.

```
> multiply(U,C);
```

```
Error, (in multiply) non matching dimensions for vector/matrix
product
```

```
> multiply(U,Ct);
```

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 2\,U_{2,2} \end{bmatrix}$$

Složky vektoru lze také definovat jako funkce nezávisle proměnné:

```
> f:= (j) -> x^(j-1):
> vector(5,f);
```

$$[1,\ x,\ x^2,\ x^3,\ x^4]$$

Matici vytvoříme například tak, že ji zadáme po řádcích výčtem jejích prvků. Příkaz **submatrix** vybere příslušnou podmatici, příkazy **delrows** a **delcols** oříznou uvedené řádky a sloupce, příkaz **extend** matici naopak rozšíří o uvedený počet řádků a sloupců. Povšimněte si, že do všech nově vzniklých řádků a sloupců dosadí příkaz **extend** stejná čísla (poslední parametr). Chceme-li, aby nově vzniklé prvky byly zadány jako vektory, musíme použít příkazy **augment** (spojí dvě matice "za sebou") a **stackmatrix** (spojí dvě matice "pod sebou") . Pozor na rozměry!

```
> A := matrix([[0,5,4,5],[5,-1,4,4],[6,5,-3,7]]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 5 & 4 & 5 \\ 5 & -1 & 4 & 4 \\ 6 & 5 & -3 & 7 \end{bmatrix}$$

```
> A[2,3];
```

```
> B:=submatrix(A, 1..2, 2..4);
```

$$B := \begin{bmatrix} 5 & 4 & 5 \\ -1 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

```
> E:=delrows(A, 2..3);
```

$$E := \begin{bmatrix} 0 & 5 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

```
> E:=delcols(E,2..4);
```

$$E := \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

```
> E:=extend(E, 1, 1, 1);
```

$$E := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> Bt:=transpose(B);
```

$$Bt := \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 4 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$$

```
> augment(A,Bt);
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 5 & 4 & 5 & 5 & -1 \\ 5 & -1 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 6 & 5 & -3 & 7 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

```
> B1:=extend(B,0,1,0);
```

$$B1 := \begin{bmatrix} 5 & 4 & 5 & 0 \\ -1 & 4 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> stackmatrix(A,B1);
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 5 & 4 & 5 \\ 5 & -1 & 4 & 4 \\ 6 & 5 & -3 & 7 \\ 5 & 4 & 5 & 0 \\ -1 & 4 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Pokusme se změnit některé prvky už existující matice **A**, například chceme v matici **A** nahradit v prvním a druhém řádku třetí a čtvrtý sloupec maticí **E**:

```
> copyinto(E,A,1,3);
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & 1 & 1 \\ 6 & 5 & -3 & 7 \end{bmatrix}$$

```
> A;
```

$$A$$

Balík **linalg** zachází s vektory a maticemi jako s funkcemi, nikoliv jako s proměnnými, které mají hodnotu. Vektor nebo matici musíte "vyčíslit" pomocí příkazu **evalm**:

```
> evalm(A);
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & 1 & 1 \\ 6 & 5 & -3 & 7 \end{bmatrix}$$

1.2. Základní vektorové a maticové operace

Definujme dva vektory **u** a **v** a dvě matice **A** a **B** a ukažme si na nich, jak vypadá v Maplu (balík **linalg**) sčítání a násobení těchto objektů.

```
> restart;
> with(linalg):
> u:=vector([-1,2,5]);
```

$$u := [-1,\ 2,\ 5]$$

```
> v:= vector([2,1,-2]);
```

$$v := [2,\ 1,\ -2]$$

```
> u+v;
```

$$u + v$$

```
> evalm(%);
```

$$[1,\ 3,\ 3]$$

```
> matadd(u,v);
```

$$[1,\ 3,\ 3]$$

Vidíme, že sčítáme-li dva vektory, znaménko + nevyčíslí výsledný vektor a chceme-li ho znát, musíme ještě použít funkci **evalm**. Použijeme-li příkaz **matadd**, dostaneme rovnou vyčíslený výsledný vektor. Obdobně pro matice:

```
> A:=matrix(2,3,[5,4,1,6,-1,3]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 6 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

```
> B:=matrix(2,3,[1,-1,4,2,3,1]);
```

$$B := \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> A+B;
```

$$A + B$$

```
> evalm(%);
```

$$\begin{bmatrix} 6 & 3 & 5 \\ 8 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

```
> matadd(A,B);
```

$$\begin{bmatrix} 6 & 3 & 5 \\ 8 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Jak je to s násobením dvou vektorů?

```
> u*v;
```

$$u\,v$$

```
> evalm(%);
```

```
Error, (in evalm/evaluate) use the &* operator for matrix/vector
multiplication
```

Jak radí nápověda chybového hlášení, není operátor pro maticové násobení jenom $*$, ale je &$*$. Použijeme ho, ale číselnou hodnotu příslušného součinu dostaneme teprve, vyvoláme-li funkci **evalm**.

Pozor, pokud násobím takto dva vektory, výsledkem je jejich skalární součin. Násobíme-li dvě matice, musíme dbát na jejich rozměry.

```
> u&*v;
```

$$u \mathbin{\&*} v$$

```
> evalm(%);
```

$$-10$$

```
> A&*(transpose(B));
```

$$A \mathbin{\&*} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> evalm(%);
```

$$\begin{bmatrix} 5 & 23 \\ 19 & 12 \end{bmatrix}$$

Balík **linalg** umožňuje ještě další vektorová a maticová násobení. Příkaz **dotprod** počítá skalární součin dvou vektorů, příkaz **multiply** vypočte součin matic, přičemž je třeba dbát, aby obě násobené matice měly správné rozměry. Aplikujeme-li **multiply** na dva vektory, příkaz vrací skalární součin. Příkaz **crossprod** vypočte vektorový součin dvou vektorů z $\mathcal{R}^3$, **scalarmul** násobí matici nebo vektor algebraickým výrazem, **innerprod** násobí posloupnost vektorů a matic; opět je třeba dbát aby násobené matice měly správné rozměry. Pokud posloupnost sestává pouze ze dvou vektorů, vypočte se jejich skalární součin.

```
> dotprod(u,v);
```

$$-10$$

```
> multiply(u,v);
```

$$-10$$

```
> multiply(transpose(A),B);
```

$$\begin{bmatrix} 17 & 13 & 26 \\ 2 & -7 & 15 \\ 7 & 8 & 7 \end{bmatrix}$$

```
> innerprod(u,v);
```

$$-10$$

```
> innerprod(u,transpose(A),B);
```

$$[22,\ 13,\ 39]$$

```
> innerprod(u,transpose(A),B,v);
```

$$-21$$

```
> crossprod(u,v);
```

$$[-9,\ 8,\ -5]$$

```
> scalarmul(v, x);
```

$$[2\,x,\ x,\ -2\,x]$$

```
> scalarmul(A,2*x);
```

$$\begin{bmatrix} 10\,x & 8\,x & 2\,x \\ 12\,x & -2\,x & 6\,x \end{bmatrix}$$

Balík (**linalg**) umí také spočítat délku (normu) vektoru, přiřadit vektoru příslušný vektor délky 1 (normalizovat daný vektor) a určit úhel, který svírají dva vektory

```
> w:=vector[row]([1,2,2,4]);
```

$$w := [1,\ 2,\ 2,\ 4]$$

```
> nw:=([norm(w), norm(w,1), norm(w, 2),
> norm(w, infinity), norm(w,frobenius)]);
```

$$nw := [4,\ 9,\ 5,\ 4,\ 5]$$

Jaké "délky" vektoru $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_n)^{\mathrm{T}}$ jsme dostali? Příslušný příkaz balíku **linalg** má tvar **norm(vector,normname)** nebo **norm(matrix,normname)**. Parametr **normname** má následující význam:

1. pro vektory je **normname** $= a$, kde a je přirozené číslo, $a \geq 1$, nebo $a = \infty$ nebo $a =$ frobenius :
   $||\mathbf{w}||_k = (|w_1|^k + |w_2|^k + \ldots + |w_n|^k)^{1/k}$;
   $||\mathbf{w}||_\infty = \max(|w_1|, |w_2|, \ldots, |w_n|)$;
   $||\mathbf{w}||_F = \sqrt{|w_1|^2 + |w_2|^2 + \ldots + |w_n|^2}$;
   pokud nezadáme parametr **normname**, vyčísluje se $||\mathbf{w}||_\infty$;

2. pro matice musí být **normname** $1, 2, \infty$ nebo frobenius, přičemž pro $\mathbf{A} = (a_{ij})$, $i = 1, \ldots, m$; $j = 1, \ldots, n$ je
   $||\mathbf{A}||_1 = \max_j \left(\sum_{i=1}^m |a_{ij}|\right)$ (= maximální sloupcový součet absolutních hodnot);
   $||\mathbf{A}||_2$ je odmocnina maximálního vlastního čísla matice $\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$;
   $||\mathbf{A}||_\infty = \max_i \left(\sum_{j=1}^n \ |a_{ij}|\right)$ (= maximální řádkový součet absolutních hodnot);
   $$||A||_F = \sqrt{\sum_{i,j} |a_{ij}|^2};$$
   nezadáme-li parametr **normname**, vyčíslí se stejně jako u vektorů $||\mathbf{A}||_\infty$.

Vypočtěme normu následující, tzv. Hilbertovy matice:

```
> Hilb:= (i,j) -> 1/(i+j-1):
> H:=matrix(4,4,Hilb);
```

$$H := \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} \end{bmatrix}$$

```
> nH:=([norm(H), norm(H,1), norm(H, 2),
> norm(H, infinity), norm(H,
> frobenius)]);
```

$$nH := [\frac{25}{12}, \frac{25}{12}, \frac{1}{4}\mathrm{RootOf}($$
$$1 - 6684916\,\_Z + 9214816950\,\_Z^2 - 20354692500\,\_Z^3 + 558140625\,\_Z^4,$$
$$index = 4)^{(1/2)}, \frac{25}{12}, \frac{\sqrt{100517}}{210}]$$

```
> evalf(%);
```

$$[2.083333333, 2.083333333, 1.500214280, 2.083333333, 1.509734100]$$

```
> normalize(row(H,3));
```

$$\left[\frac{\sqrt{869}\,\sqrt{3600}}{2607}, \frac{\sqrt{869}\,\sqrt{3600}}{3476}, \frac{\sqrt{869}\,\sqrt{3600}}{4345}, \frac{\sqrt{869}\,\sqrt{3600}}{5214}\right]$$

```
> normalize(col(H,3));
```

$$\left[\frac{\sqrt{869}\,\sqrt{3600}}{2607}, \frac{\sqrt{869}\,\sqrt{3600}}{3476}, \frac{\sqrt{869}\,\sqrt{3600}}{4345}, \frac{\sqrt{869}\,\sqrt{3600}}{5214}\right]$$

```
> angle(row(H,2),col(H,3));
```

$$\arccos(\frac{1200\,\sqrt{1669}\,\sqrt{869}}{1450361})$$

```
> evalf(%);
```

$$0.08462159349$$

```
> angle( vector([1,0]), vector([0,1]) );
```

$$\frac{\pi}{2}$$

Příkaz **angle** počítá (v radiánech) úhel α dvou $n-$dimenzionálních vektorů **u** a **v** podle vzorce $\cos\alpha = \dfrac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}||v|}$.

Balík **linalg** umožňuje také pomocí příkazu **basis** vybrat bázi vektorového prostoru ze seznamu vektorů nebo najít bázi vektorového prostoru, který generují řádky nebo sloupce dané matice.

```
> restart;
> with(linalg):
```

```
> v1 := vector( [1,0,1] ):  v2 := vector(
> [0,-1,0] ):  v3 := vector( [1,0,-1] ):  v4 := vector( [1,1,1] ):
> basis( {v1, v2, v3} );
```

$$\{v1,\ v2,\ v3\}$$

```
> A := matrix([[0,5,4,5],[5,-1,4,4],[6,5,-3,7]]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 5 & 4 & 5 \\ 5 & -1 & 4 & 4 \\ 6 & 5 & -3 & 7 \end{bmatrix}$$

```
> basis(A,'rowspace');
```

$$[[0,\ 5,\ 4,\ 5],\ [5,\ -1,\ 4,\ 4],\ [6,\ 5,\ -3,\ 7]]$$

```
> basis(A,'colspace');
```

$$[[0,\ 5,\ 6],\ [5,\ -1,\ 5],\ [4,\ 4,\ -3]]$$

Příkaz **nullspace** vrátí bázi nulového prostoru dané matice, případně jeho dimenzi. Připomeňme, že nulový prostor $\mathcal{N}$ matice $\mathbf{A}$ typu $m \times n$ je lineární prostor,

$$\mathcal{N} = \{\mathbf{x} \in R^n,\ \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}\}.$$

V následujícím příkladu se do parametru d (volitelný parametr) dosadí dimenze nulového prostoru matice $\mathbf{A}$.

```
> nullspace(A,d);
```

$$\left\{\left[1,\ \frac{239}{223},\ \frac{100}{223},\ \frac{-319}{223}\right]\right\}$$

```
> d;
```

$$1$$

Hodnost dané matice počítáme pomocí příkazu **rank**. Pozor, nepleťte si tento příkaz s příkazy **rowdim** a **coldim**, které dávají jen počet řádků a sloupců dané matice, nehodnotí jejich lineární závislost a nezávislost.

```
> rank(A);
```

$$3$$

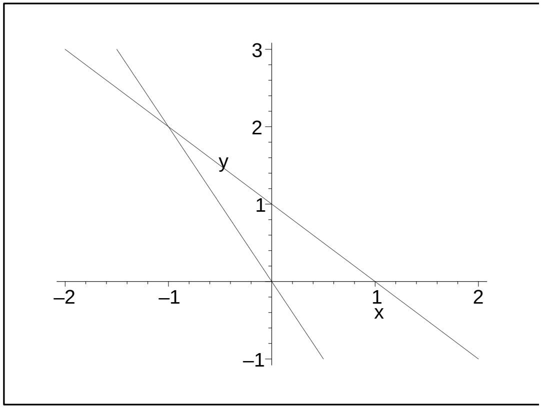
1.3. Řešení soustav lineárních algebraických rovnic

Řešme nejprve soustavu dvou rovnic o dvou neznámých:

$$2x + y = 0, \qquad x + y = 1.$$

V tomto jednoduchém případě lze hledané řešení snadno graficky znázornit, neboť hledáme společné body přímek $y = -2x$ a $y = -x + 1$.

```
> restart;
> with(plots):with(linalg):
> implicitplot({2*x+y=0, x+y=1},x=-2..2,y=-1..3);
```



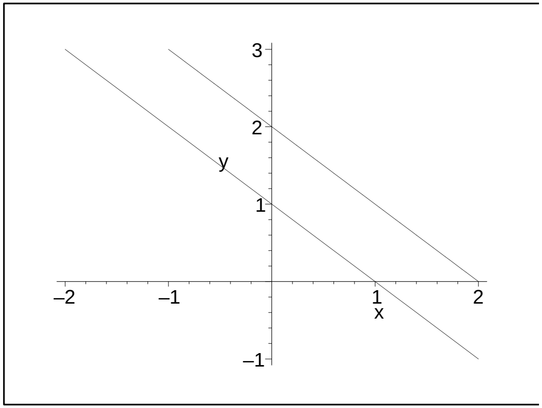
V Maplu slouží k řešení soustavy lineárních algebraických rovnic příkaz **solve**:

```
>  solve({2*x+y=0, x+y=1},{x,y});
```

$$\{x = -1, y = 2\}$$

Toto byl nejjednodušší případ, kdy soustava měla právě jedno řešení. Mohou ale nastat ještě dva jiné případy: soustava nemá řešení nebo soustava má nekonečně mnoho řešení:

```
>  solve({x+y=2, x+y=1},{x,y});
>  implicitplot({x+y=2, x+y=1},x=-2..2,y=-1..3);
```

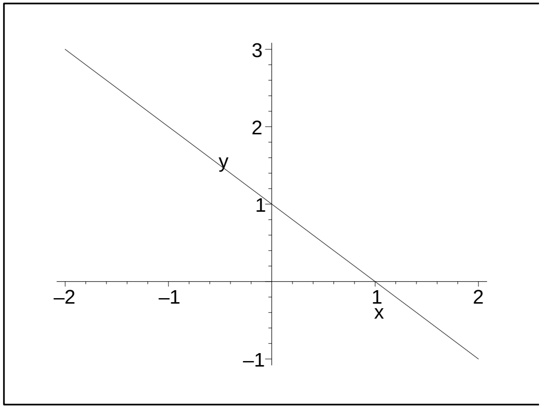


V tomto případě soustava nemá řešení, neboť hledáme vlastně průsečík dvou rovnoběžných přímek. Příkaz **solve** nevrátil žádnou hodnotu x a y.

```
> solve({2*x+2*y=2, x+y=1},{x,y});
```

$$\{y = y, x = -y + 1\}$$

```
> implicitplot({2*x+2*y=2, x+y=1},x=-2..2,y=-1..3);
```



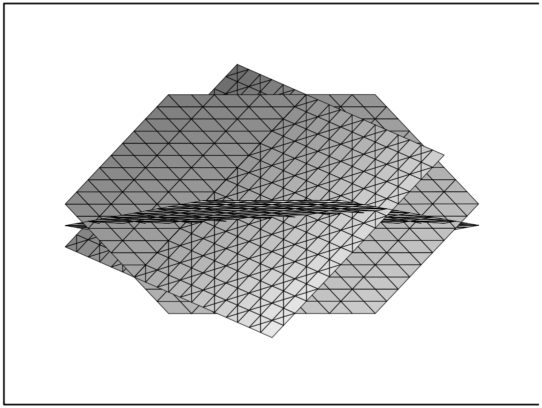
Tato soustava má nekonečně mnoho řešení, neboť obě rovnice jsou rovnicemi téže přímky.

Řešení soustavy tří rovnic o třech neznámých představuje geometricky hledání společných bodů tří rovin. I zde soustava může mít jedno řešení, nekonečně mnoho řešení nebo žádné řešení.

```
> solve({x+y+z=0,y+z=1,x+y-z=1},{x,y,z});
```

$$\{z = \frac{-1}{2},\, y = \frac{3}{2},\, x = -1\}$$

```
> implicitplot3d({x+y+z=0,x+z=1,x+y-z=1},x=-3..3,y=-3..3,z=-3..3);
```

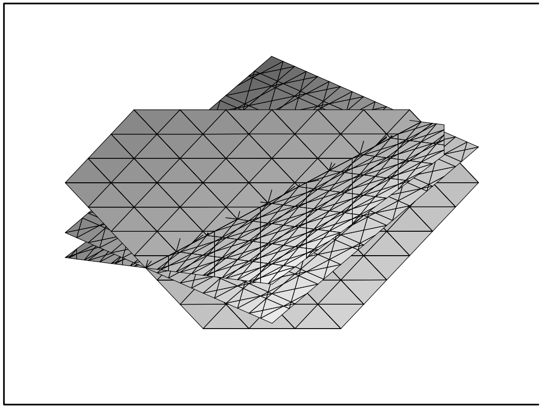


Všechny tři roviny mají jeden společný bod. V následujícím příkladu je průsečnicí tří rovin přímka, soustava má tedy nekonečně mnoho řešení.

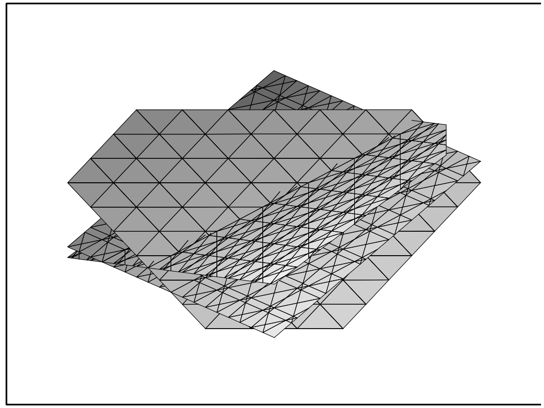
```
> solve({x+y+z=1,x-y+2*z=1,2*x+3*z=2},{x,y,z});
```

$$\{z = 2\,y,\ y = y,\ x = 1 - 3\,y\}$$

```
> implicitplot3d({x+y+z=1,x-y+2*z=1,2*x+3*z=2},x=-3..3,y=-3..3,z=-3..3);
```



```
> solve({x+y+z=1,x-y+2*z=1,2*x+3*z=0},{x,y,z});
> implicitplot3d({x+y+z=1,x-y+2*z=1,2*x+3*z=0
},x=-3..3,y=-3..3,z=-3..3);
```



V tomto posledním případě soustava nemá řešení, roviny nemají žádný společný bod.
Soustavy více rovnic s více neznámými už si nelze tak jednoduše představit. Řešíme je metodami lineární algebry. Ukažme si možnosti balíku **linalg** při řešení soustav.

Příklad:
Následující soustavu lineárních algebraických rovnic nejprve zapište a vytvořte odpovídající matici a rozšířenou matici soustavy (**genmatrix**, **augment**). Jakou mají hodnost (příkaz **rank**)? Rozšířenou matici soustavy převeďte na horní trojúhelníkový tvar pomocí ekvivalentních úprav, které nemění hodnost matice. Připomeňme, že jde o následující úpravy: přehození řádků (**swaprow**) nebo sloupců (**swapcol**), k jednomu řádku (sloupci) přičtení násobku jiného řádku (sloupce) (příkazy **addrow**, **addcol**), vynásobení libovolného řádku nenulovým číslem (**mulrow**) a vynechání nulového řádku matice (**delrows**). Nakonec proveďte zpětné dosazení (**backsub**). Kolik má soustava řešení? Jak vypadá nulový prostor matice (=prostor všech řešení homogenní soustavy)? Jaká je jeho dimenze (**nullspace**(**A**, '**nulldim**'))?

```
> restart;
> with(linalg):
> eqns :=
>{3*x1+x2+x3+x4=2,x1-x2+3*x3-x4=-6,2*x1+2*x3=-2,x1+x2-x3+x4=4};
```

$$eqns := \{3\,x1 + x2 + x3 + x4 = 2,\ x1 - x2 + 3\,x3 - x4 = -6,\ 2\,x1 + 2\,x3 = -2,\ x1 + x2 - x3 + x4 = 4\}$$

```
> C := genmatrix(eqns, [x1,x2,x3,x4], b);
```

$$C := \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> evalm(b);
```

$$[2,\ -6,\ -2,\ 4]$$

```
> rank(C);
```

$$2$$

```
> Cb:=augment(C,[2,-6,-2,4]);
```

$$Cb := \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & -1 & -6 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

```
> rank(Cb);
```

$$2$$

Poznamenejme, že kdybychom jako třetí parametr zadali místo vektoru **b** parametr **flag**, uložila by se do matice **C** celá rozšířená matice soustavy.

```
> C1 := genmatrix(eqns, [x1,x2,x3,x4], flag);
```

$$C1 := \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & -1 & -6 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Hodnost matice **C** je tedy rovna hodnosti rozšířené matice soustavy $(\mathbf{C}|\mathbf{b})$ a podle Frobeniovy věty má soustava řešení. Protože hodnost matice **C** je 2 a soustava má 4 neznámé, bude mít soustava nekonečně mnoho řešení. Dimenze prostoru všech řešení homogenní soustavy musí být 2 (později ověříme v Maplu). Nyní převedeme matici $(\mathbf{C}|\mathbf{b})$ na horní trojúhelníkový tvar **Cht** :

```
> Cht := swaprow(Cb,1,4);
```

$$Cht := \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 3 & -1 & -6 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

```
> Cht := addrow(Cht,1,2,-1);
```

$$Cht := \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 4 & -2 & -10 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

```
> Cht := addrow(Cht,1,3,-2);
```

$$Cht := \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 4 & -2 & -10 \\ 0 & -2 & 4 & -2 & -10 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

```
> Cht := addrow(Cht,1,4,-3);
```

$$Cht := \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 4 & -2 & -10 \\ 0 & -2 & 4 & -2 & -10 \\ 0 & -2 & 4 & -2 & -10 \end{bmatrix}$$

```
> Cht := addrow(Cht,2,3,-1);
```

$$Cht := \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 4 & -2 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & -2 & -10 \end{bmatrix}$$

```
> Cht := addrow(Cht,2,4,-1);
```

$$Cht := \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 4 & -2 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> Cht:=delrows(Cht,3..4);
```

$$Cht := \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 4 & -2 & -10 \end{bmatrix}$$

```
> Cht:= mulrow(Cht,2,-1/2);
```

$$Cht := \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Nejprve jsme přehodili první a čtvrtý řádek, od druhého řádku jsme odečetli první, od třetího řádku jsme odečetli dvojnásobek prvního a od čtvrtého řádku jsme odečetli trojnásobek prvního. Vynulujeme 3. a 4. řádek a nulové řádky vynecháme. Druhý řádek vydělíme (-2)ma (t.j. násobíme $-1/2$). Matice **Cht** je v horním trojúhelníkovém tvaru. Zbývá provést zpětný chod:

```
> x0:= backsub(Cht);
```

$$x0 := [-1 - \_t_2,\ 5 + 2\,\_t_2 - \_t_1,\ \_t_2,\ \_t_1]$$

```
> C&*x0-b;
```

$$(C \mathbin{\&*} x0) - b$$

```
> evalm(%);
```

$$[0,\ 0,\ 0,\ 0]$$

Zkouška ukázala, že jsme skutečně řešili naši soustavu správně.

Zbývá zodpovědět otázku, jak vypadá nulový prostor matice **C**, tj. jaký je lineární prostor všech řešení příslušné homogenní soustavy.

```
> nullspace(C,d);
```

$$\{[-1,\ 2,\ 1,\ 0],\ [0,\ -1,\ 0,\ 1]\}$$

```
> d;
```

$$2$$

Nulový prostor je tedy dvoudimenzionální podprostor prostoru $\mathcal{R}^4$ a jeho bázi tvoří například vektory $(-1, 2, 1, 0)^{\mathrm{T}}$, $(0, -1, 0, 1)^{\mathrm{T}}$.

Balík linalg ale umožňuje hledat řešení soustavy hned několika způsoby přímo. Řešme soustavu $\mathbf{Ux} = \mathbf{v}$:

a) příkaz **linsolve**

```
> U:= randmatrix(3,3);
```

$$U := \begin{bmatrix} -58 & -90 & 53 \\ -1 & 94 & 83 \\ -86 & 23 & -84 \end{bmatrix}$$

```
> v:=randvector(3);
```

$$v := [19,\ -50,\ 88]$$

```
> linsolve(U,v);
```

$$\left[\frac{-965021}{1645903},\ \frac{-8250}{71561},\ \frac{-788237}{1645903}\right]$$

```
> xl:=evalf(%);
```

$$xl := [-0.5863170551,\ -0.1152862593,\ -0.4789085384]$$

b) příkaz **gausselim** provede přímý chod Gaussovy eliminace, tedy převede rozšířenou matici soustavy na horní trojúhelníkový tvar. Chceme-li získat řešení, musí vždy následovat zpětný chod Gaussovy eliminace, tedy příkaz **backsub**

```
> Uaug:=augment(U,v);
```

$$Uaug := \begin{bmatrix} -58 & -90 & 53 & 19 \\ -1 & 94 & 83 & -50 \\ -86 & 23 & -84 & 88 \end{bmatrix}$$

```
> Uht:=gausselim(Uaug);
```

$$Uht := \begin{bmatrix} -1 & 94 & 83 & -50 \\ 0 & -5542 & -4761 & 2919 \\ 0 & 0 & \dfrac{-1645903}{5542} & \dfrac{788237}{5542} \end{bmatrix}$$

```
> backsub(Uht);
```

$$\left[\frac{-965021}{1645903}, \frac{-8250}{71561}, \frac{-788237}{1645903}\right]$$

```
> xg:=evalf(%);
```

$$xg := [-0.5863170551, -0.1152862593, -0.4789085384]$$

c) příkaz **gaussjord** převede danou matici na diagonální s jedničkami na diagonále. Máme-li získat řešení soustavy v tomto případě, pracujeme s rozšířenou maticí soustavy. Opět následuje zpětný chod, ale ten je v tomto případě velmi jednoduchý.

```
> U0:=gaussjord(Uaug);
```

$$U0 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{-965021}{1645903} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-8250}{71561} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-788237}{1645903} \end{bmatrix}$$

```
> backsub(U0);
```

$$\left[\frac{-965021}{1645903}, \frac{-8250}{71561}, \frac{-788237}{1645903}\right]$$

```
> xj:=evalf(%);
```

$$xj := [-0.5863170551, -0.1152862593, -0.4789085384]$$

```
> evalm(xl); evalm(xg); evalm(xj);
```

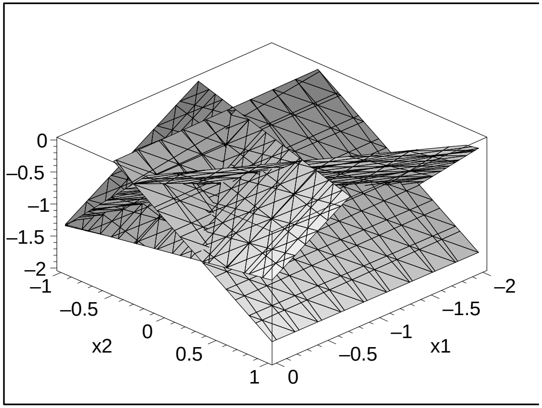
$$[-0.5863170551, -0.1152862593, -0.4789085384]$$
$$[-0.5863170551, -0.1152862593, -0.4789085384]$$
$$[-0.5863170551, -0.1152862593, -0.4789085384]$$

Uvedenými třemi způsoby jsme skutečně získali stejné řešení.

```
> with(plots):
> v:=geneqns(U,[x1,x2,x3],v);
```

$$v := \{-58\,x1 - 90\,x2 + 53\,x3 = 19, -x1 + 94\,x2 + 83\,x3 = -50,$$
$$-86\,x1 + 23\,x2 - 84\,x3 = 88\}$$

```
> implicitplot3d(v,x1=-2..0, x2=-1..1,x3=-2..0, axes=boxed);
```



Poznamenejme, že matici soustavy **U** (vektor pravé strany **v**) jsme vytvořili příkazem **randmatrix** (**randvector**). Při každém provádění tohoto příkazu se tedy vytvoří jiná matice soustavy (jiný vektor pravé strany). V důsledku toho se může stát, že příkaz **plot** nevykreslí řešení správně. Potom je třeba upravit intervaly pro zobrazování jednotlivých neznámých.

1.4. Determinanty, inverzní matice, maticové rovnice

```
> A:=matrix(1,1,[a]);
```

$$A := \begin{bmatrix} a \end{bmatrix}$$

```
> det(A);
```

$$a$$

```
> G:=matrix(2,2);
```

$$G := \mathrm{array}(1..2,\ 1..2,\ [])$$

```
> det(G);
```

$$G_{1,1}\, G_{2,2} - G_{1,2}\, G_{2,1}$$

1.4.1. Determinanty a inverzní matice Tak bychom mohli pokračovat pro determinanty čtvercových matic vyšších řádů. Připomeňme, že až do řádu 3 včetně lze determinanty počítat Sarrusovým pravidlem (pro matici 2×2 obecně zapsal toto pravidlo předchozí příklad). Determinanty matic vyšších řádů lze počítat pouze rozvojem podle některého řádku nebo sloupce. Determinant vypočteme pomocí příkazu **det**.

```
> H:=diag(d1,d2,d3,d4);
```

$$H := \begin{bmatrix} d1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d4 \end{bmatrix}$$

```
> det(H);
```

$$d1\ d2\ d3\ d4$$

```
> M:=randmatrix(4,4);
```

$$M := \begin{bmatrix} -85 & -55 & -37 & -35 \\ 97 & 50 & 79 & 56 \\ 49 & 63 & 57 & -59 \\ 45 & -8 & -93 & 92 \end{bmatrix}$$

```
> det(M);
```

$$-5825992$$

Zmiňme se ještě o příkazu **adj**. Je-li **G** daná matice, pak příkaz **adj** vypočítá inverzní matici vynásobenou determinantem matice **G** (adj(**G**) je transponovaná matice algebraických doplňků).

```
> G0:=adj(G);
```

$$G0 := \begin{bmatrix} G_{2,2} & -G_{1,2} \\ -G_{2,1} & G_{1,1} \end{bmatrix}$$

```
> G&*G0;
```

$$G \mathbin{\&*} G0$$

```
> evalm(%);
```

$$\begin{bmatrix} G_{1,1}\,G_{2,2} - G_{1,2}\,G_{2,1} & 0 \\ 0 & G_{1,1}\,G_{2,2} - G_{1,2}\,G_{2,1} \end{bmatrix}$$

```
> (G&*G0)/det(G);
```

$$\frac{G \mathbin{\&*} G0}{G_{1,1}\,G_{2,2} - G_{1,2}\,G_{2,1}}$$

```
> evalm(%);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tedy inverzní maticí k matici **G** je matice $\dfrac{1}{\det \mathbf{G}} * \operatorname{adj}(\mathbf{G})$.

V Maplu můžeme také počítat jednotlivé minory (příkaz **minor**):

```
> minor(G, 2,2);
```

$$\left[G_{1,1} \right]$$

```
> V:=minor(M, 3,2);
```

$$V := \begin{bmatrix} -85 & -37 & -35 \\ 97 & 79 & 56 \\ 45 & -93 & 92 \end{bmatrix}$$

```
> det(V);
```

$$-383352$$

1.4.2. Inverzní matice a maticové rovnice Maticová rovnice je rovnice, v níž všechny vystupující veličiny včetně neznámé jsou matice. Než takové rovnice budeme řešit, naučíme se, jak k dané matici pomocí příkazu **inverse** najdeme matici inverzní. Připomeňme, že inverzní matice existuje pouze k regulární matici, tj. ke čtvercové matici, jejíž determinant je nenulový.

```
> A:=matrix([[0,0,1],[0,1,0],[1,0,0]]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> det(A);
```

$$-1$$

```
> B:=inverse(A);
```

$$B := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> evalm(A&*B);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tedy matice **A** a **B** jsou navzájem inverzní.

Příklad:
Řešme následující maticovou rovnici:

$$\mathbf{A}^2 * \mathbf{X} - 4 * \mathbf{B} = 3 * \mathbf{A} * \mathbf{X},$$

kde **A**, **B** jsou dané matice. Z této rovnice musíme nejprve vypočítat neznámou matici **X**:

$$\mathbf{A}^2 * \mathbf{X} - 3 * \mathbf{A} * \mathbf{X} = 4 * \mathbf{B}\ , \qquad (\mathbf{A}^2 - 3 * \mathbf{A}) * \mathbf{X} = 4 * \mathbf{B}\ , \quad \text{tedy}$$

$$\mathbf{X} = 4 * (\mathbf{A}^2 - 3 * \mathbf{A})^{-1} * \mathbf{B}\ .$$

```
> A:=matrix([[1,0,2],[1,0,1],[1,1,0]]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> B:=matrix([[-1,1,1],[1,-1,1],[1,1,-1]]);
```

$$B := \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

```
> X:=4*inverse(A&*A-3*A)&*B;
```

$$X := \left(4 \begin{bmatrix} 0 & \frac{-3}{4} & \frac{-1}{4} \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{-1}{4} \end{bmatrix}\right) \mathbin{\&*} B$$

```
> evalm(X);
```

$$\begin{bmatrix} -4 & 2 & -2 \\ 2 & -6 & 2 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

2. Příklady

Příklad 1:
Ověřte, že vektory $\mathbf{a} = (-1; 4; 2; -5; 3)^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{b} = (1; 1; 0; 0; 4)^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{c} = (3; -5; -2; 8; 7)^{\mathrm{T}}$ jsou lineárně nezávislé a vyjádřete vektor $\mathbf{v} = (1, -4, -2, 5, -3)^{\mathrm{T}}$ jako jejich lineární kombinaci.

Řešení:

```
> restart;
> with(linalg):
> a:=vector([-1,4,2,-5,3]);
```

$$a := [-1,\ 4,\ 2,\ -5,\ 3]$$

```
> b:=vector([1,1,0,0,4]);
```

$$b := [1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 4]$$

```
> c:=vector([3,-5,-2,8,7]);
```

$$c := [3,\ -5,\ -2,\ 8,\ 7]$$

```
> v:=vector([1,-4,-2,5,-3]);
```

$$v := [1,\ -4,\ -2,\ 5,\ -3]$$

```
> lv:=[a,b,c];
```

$$lv := [a,\ b,\ c]$$

```
> A:=matrix(3,5,lv);
```

$$A := \begin{bmatrix} -1 & 4 & 2 & -5 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 3 & -5 & -2 & 8 & 7 \end{bmatrix}$$

```
> rank(A);
```

$$3$$

Vektory **a**, **b**, **c** jsou tedy lineárně nezávislé. Na první pohled to poznáme například z horního trojúhelníkového tvaru matice **A**:

```
> gausselim(A);
```

$$\begin{bmatrix} -1 & 4 & 2 & -5 & 3 \\ 0 & 5 & 2 & -5 & 7 \\ 0 & 0 & \frac{6}{5} & 0 & \frac{31}{5} \end{bmatrix}$$

Chceme-li zjistit, jakou lineární kombinací vektorů **a**, **b**, **c** je vektor **v**, musíme najít koeficienty α, β a δ lineární kombinace $\alpha * \mathbf{a} + \beta * \mathbf{b} + \delta * \mathbf{c} = \mathbf{v}$. Znamená to vyřešit nehomogenní soustavu lineárních algebraických rovnic, přičemž maticí soustavy je $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ a pravou stranou je vektor **v**:

```
> Av := augment(transpose(A),v);
```

$$Av := \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & -5 & -4 \\ 2 & 0 & -2 & -2 \\ -5 & 0 & 8 & 5 \\ 3 & 4 & 7 & -3 \end{bmatrix}$$

```
> redAv:=gausselim(Av);
```

$$redAv := \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> koef:=backsub(redAv);
```

$$koef := [-1, 0, 0]$$

```
> alpha:=koef[1];beta:=koef[2];delta:=koef[3];
```

$$\alpha := -1$$

$$\beta := 0$$

$$\delta := 0$$

Pohledem na zadané vektory se snadno přesvědčíme, že vektor $\mathbf{v}$ je skutečně roven $-\mathbf{a}$.
Poznamenejme ještě, že všechny vektory, které vzniknou lineární kombinací vektorů $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ tvoří lineární podprostor dimenze 3 prostoru $\mathcal{R}^5$.

Příklad 2:
Najděte vektor $\mathbf{v}$, který je obrazem vektoru $\mathbf{u} = (2, 3, -7)^T$ v lineárním zobrazení prostoru $\mathcal{R}^3$ do $\mathcal{R}^3$ daném maticí

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -3 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zjistěte, zda vektor $\mathbf{u}$ je jediným vektorem z prostoru $\mathcal{R}^3$, který se na vektor $\mathbf{v}$ zobrazí. Pokud není jediný, najděte všechny další vektory, které se na tento vektor zobrazí.

Řešení:

```
> restart;
> with(linalg):
> A:=matrix(3,3,[1,4,2,-3,2,0,-1,3,1]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -3 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> u:=vector([2,3,-7]);
```

$$u := [2,\ 3,\ -7]$$

```
> v:=A&*u;
```

$$v := A \,\&{*}\, u$$

```
> evalm(v);
```

$$[0,\ 0,\ 0]$$

Obrazem vektoru **u** je tedy nulový vektor **v**.
Všechny další vektory, které se na vektor **v** zobrazí, najdeme jako řešení homogenní soustavy (homogenní, protože **v** je nulový vektor) $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$:

```
> Aht:=gausselim(A);
```

$$Aht := \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> linsolve(A,[0,0,0]);
```

$$\left[\_t_1,\ \frac{3}{2}\,\_t_1,\ -\frac{7}{2}\,\_t_1\right]$$

Tedy všechny vektory, které se zobrazí na vektor **v**, tvoří lineární podprostor dimenze 1 prostoru $\mathcal{R}^3$. Jeho báze je tvořena například vektorem **u** (stačí polžit $\_t1 = 2$).

Příklad 3:
Napište matici reprezentující lineární zobrazení $\mathcal{L}$ prostoru $\mathcal{R}^3$ do $\mathcal{R}^3$ definované vztahem

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}} = (2x_1 + x_3, x_1 - x_2 - x_3, -x_1 + 3x_2 + 2x_3)^{\mathrm{T}}$$

a najdětete k ní matici inverzní.

Řešení:

```
> restart;
> with(linalg):
> A:=matrix(3,3,[2,0,1,1,-1,-1,-1,3,2]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

```
> x:=vector([x1,x2,x3]);
```

$$x := [x1,\ x2,\ x3]$$

```
> y:=vector([2*x1+x3,x1-x2-x3,-x1+3*x2+2*x3]);
```

$$y := [2\,x1 + x3,\ x1 - x2 - x3,\ -x1 + 3\,x2 + 2\,x3]$$

```
> evalm(A&*x);
```

$$[2\,x1 + x3,\; x1 - x2 - x3,\; -x1 + 3\,x2 + 2\,x3]$$

Matice **A** tedy zobrazí vektor **x** na vektor **y**. Inverzní matici sestrojíme dvěma způsoby: pomocí příkazu **gaussjordan** a **inverse**:

```
> E:=diag(1,1,1);
```

$$E := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> AE:=augment(A,E);
```

$$AE := \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> gaussjord(AE);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

```
> Ainv:=inverse(A);
```

$$Ainv := \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

```
> evalm(Ainv&*y);
```

$$[x1, x2, x3]$$

Tedy matice inverzní k matici **A** převádí vektor **y** na vektor **x**.

Příklad 4:

Najděte všechna řešení soustavy rovnic

$$\begin{aligned} 3x_1 - 4x_2 + 4x_3 + 2x_4 &= 0 \\ 7x_1 - x_2 + 6x_3 + 3x_4 &= 0 \\ -2x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 &= 0 \end{aligned}$$

a určete dimenzi nejmenšího podprostoru prostoru $\mathcal{R}^4$, ve kterém všechna řešení leží.

Řešení:

```
> restart;
> with(linalg):
> eqns :=
>{3*x1-4*x2+4*x3+2*x4=0,7*x1-x2+6*x3+3*x4=0,-2*x1+x2-2*x3-x4=0};
```

$$eqns := \{3\,x1 - 4\,x2 + 4\,x3 + 2\,x4 = 0,\ 7\,x1 - x2 + 6\,x3 + 3\,x4 = 0,\ -2\,x1 + x2 - 2\,x3 - x4 = 0\}$$

```
> C := genmatrix(eqns, [x1,x2,x3,x4]);
```

$$C := \begin{bmatrix} 3 & -4 & 4 & 2 \\ 7 & -1 & 6 & 3 \\ -2 & 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

```
> x:=linsolve(C,[0,0,0]);
```

$$x := [-2\,\_t_1,\ \_t_1,\ \_t_2,\ 5\,\_t_1 - 2\,\_t_2]$$

```
> rank(C);
```

$$2$$

```
> n:=4;
```

$$n := 4$$

```
> dimV_H:=n-rank(C);
```

$$dimV\_H := 2$$

```
> basis(C,rowspace);
```

$$[[3,\ -4,\ 4,\ 2],\ [7,\ -1,\ 6,\ 3]]$$

Řešením naší soustavy je vektor **x** a všechna řešení leží v podprostoru $\mathcal{R}^4$, jehož báze je tvořena prvními dvěma řádky dané matice. Jeho dimenze je 2.

Příklad 5:

Zjistěte, pro která $a \in \mathcal{R}$ má soustava lineárních rovnic řešení:

$$\begin{aligned} 5x + 3y + z &= a + 2 \\ x + 3y + 2z &= -2 \\ 2x + 2y + z &= a \\ 3x + y &= 2 \end{aligned}$$

Pokud řešení existuje, najděte ho.

Řešení:

```
> restart;
> with(linalg):
> soustava := {5*x+3*y+z=a+2,x+3*y+2*z=-2,2*x+2*y+z=a,3*x+y=2};
```

$$soustava := \{5\,x + 3\,y + z = a + 2,\ x + 3\,y + 2\,z = -2,\ 2\,x + 2\,y + z = a,\ 3\,x + y = 2\}$$

```
> b:=a->vector([a+2,-2,a,2]);
```

$$b := a \rightarrow [a + 2,\ -2,\ a,\ 2]$$

```
> A := genmatrix(soustava, [x,y,z]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> Ab:=augment(A,b(a));
```

$$Ab := \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 & a+2 \\ 1 & 3 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 & a \\ 3 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Matice $(\mathbf{A}|\mathbf{b})$ je rozšířená matice soustavy. Ilustrujme si na tomto příkladu, jaký je rozdíl v použití příkazů **gausselim** a **gaussjord**.

```
> Aht:=gausselim(Ab,r);
```

$$Aht := \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 & a+2 \\ 0 & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} & \frac{3a-4}{5} \\ 0 & 0 & 0 & -2a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> r;
```

$$3$$

```
> rank(A);
```

$$2$$

```
> backsub(Aht);
```

```
Error, (in backsub) inconsistent system
```

Do matice **Aht** se uložil horní trojúhelníkový tvar rozšířené matice soustavy, hodnota parametru r udává hodnost rozšířené matice soustavy. Vzhledem k tomu, že hodnost matice soustavy je 2, vidíme, že soustava může mít řešení pouze v případě, že a je rovno nule. Dříve, než provedeme zpětný chod pro hodnotu $a = 0$, vyzkoušejme, jak pracuje příkaz **gaussjord**. Pro lepší pochopení budeme provádět Gauss-Jordanovu eliminaci rozšířené matice soustavy $(\mathbf{A}|\mathbf{b})$ postupně po sloupcích:

```
> S1:=gaussjord(Ab, 1);
```

$$S1 := \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} & \frac{a+2}{5} \\ 0 & \frac{12}{5} & \frac{9}{5} & -\frac{12+a}{5} \\ 0 & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} & \frac{3a-4}{5} \\ 0 & -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{4-3a}{5} \end{bmatrix}$$

```
> S2:=gaussjord(S1, 2);
```

$$S2 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{-a+4}{4} \\ 0 & 1 & \frac{3}{4} & \frac{3a-4}{4} \\ 0 & 0 & 0 & -2a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> S3:=gaussjord(S2, 3);
```

$$S3 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{-a+4}{4} \\ 0 & 1 & \frac{3}{4} & \frac{3a-4}{4} \\ 0 & 0 & 0 & -2a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Provedli jsme redukci prvních tří sloupců rozšířené matice soustavy, opět vidíme, že hodnost matice $\mathbf{A}$ je 2, hodnost $(\mathbf{A}|\mathbf{b})$ je tři, není-li $a = 0$. Kdybychom ale zadali příkaz **gaussjord** bez udání sloupce, v němž má redukce skončit, dostali bychom zcela scestný výsledek, nezávislý na hodnotě parametru a (Maple totiž v tomto případě zcela ignoruje případné dělení nulou a klidně dál redukuje poslední sloupec):

```
> S:=gaussjord(S3);
```

$$S := \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> backsub(S);
```

```
Error, (in backsub) inconsistent system
```

Položme nyní $a = 0$ a vypočtěme naše řešení pro tuto hodnotu parametru a :

```
> a:=0;
```

$$a := 0$$

```
> A0:=augment(A,b(a));
```

$$A0 := \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

```
> Aht:=gausselim(A0);
```

$$Aht := \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> backsub(Aht,false,t);
```

$$\left[1 + \frac{1}{4}\,t_1,\ -1 - \frac{3}{4}\,t_1,\ t_1\right]$$

```
> S0:=gaussjord(A0);
```

$$S0 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{4} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{4} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> reseni:=backsub(S0,false,t);
```

$$reseni := \left[1 + \frac{1}{4}\,t_1,\ -1 - \frac{3}{4}\,t_1,\ t_1\right]$$

Druhý parametr **false** v příkazu **backsub** znamená, že poslední sloupec v matici **S0** je sloupec pravých stran, Třetí parametr t říká, pomocí jakých parametrů má být zapsaáno řešení (Maple si parametry sám čísluje).

Vidíme, že nyní už oba příkazy **gausselim** a **gaussjord** a následný zpětný chod daly stejné řešení závislé na jednom parametru (tj. lineární prostor všech řešení homogenní soustavy má dimenzi 1, jeho bázi tvoří například vektor $(1, -3, 4)^{\mathrm{T}}$):

```
> V:= nullspace(A,p);
```

$$V := \{[1,\ -3,\ 4]\}$$

```
> p;
```

$$1$$

```
> basis(V);
```

$$\{[1,\ -3,\ 4]\}$$

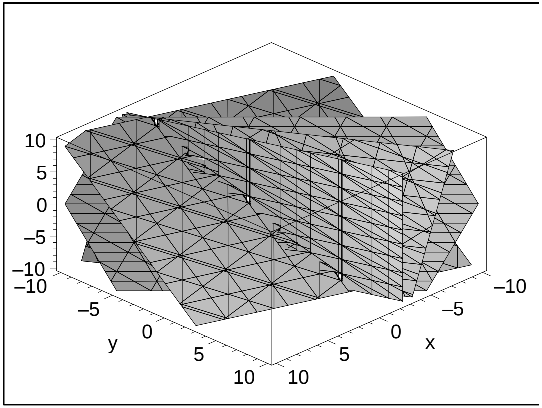
Znázorněme si řešení pro $a = 0$ graficky. Hledáme společné body rovin, jejichž rovnice jsou:

$$5x + 3y + z = 2\,, \quad x + 3y + 2z = -2\,, \quad 2x + 2y + z = 0\,, \quad 3x + y = 2\,.$$

```
> with(plots):
> g:=geneqns(A, [x,y,z], b(0));
```

$$g := \{x + 3\,y + 2\,z = -2,\ 3\,x + y = 2,\ 5\,x + 3\,y + z = 2,\ 2\,x + 2\,y + z = 0\}$$

```
> implicitplot3d(g,x=-10..10, y=-10..10,z=-10..10, axes=boxed);
```



Vidíme, že roviny mají společnou průsečnici. Její parametrické rovnice jsou (viz reseni):

$$x = 1 + \frac{1}{4}t\,, \quad y = -1 - \frac{3}{4}t\,, \quad z = t\,, \quad \text{kde} \quad t \quad \text{je reálný parametr.}$$

Příklad 6:
Vypočtěte determinant matice

$$\begin{pmatrix} f(x) & f'(x) & f''(x) \\ g(x) & g'(x) & g''(x) \\ h(x) & h'(x) & h''(x) \end{pmatrix},$$

kde $f(x) = \sin^2 x$, $\quad g(x) = \cos^2 x$, $\quad h(x) = 1$, $\quad x \in \mathcal{R}$. Zjistěte, pro která x je determinant roven 1.

Řešení:

```
> restart;
> with(linalg):
> f:=x->(sin(x))^2; g:=x->(cos(x))^2; h:=x->1;
```

$$f := x \to \sin(x)^2$$

$$g := x \to \cos(x)^2$$

$$h := 1$$

```
> M:=matrix(3,3,[f(x),diff(f(x),x),diff(f(x),x$2),g(x),diff(g(x),x),dif
> f(g(x),x$2),h(x),diff(h(x),x),diff(h(x),x$2)]);
```

$$M := \begin{bmatrix} \sin(x)^2 & 2\sin(x)\cos(x) & 2\cos(x)^2 - 2\sin(x)^2 \\ \cos(x)^2 & -2\sin(x)\cos(x) & -2\cos(x)^2 + 2\sin(x)^2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Povšimněte si, jak Matlab zapíše funkci $\sin^2 x$.

```
> m:=det(M);
```

$$m := 0$$

Determinant je roven 0 pro všechna $x \in \mathcal{R}$, matice je tedy singulární pro všechna $x \in \mathcal{R}$.

Příklad 7:
Najděte matici $\mathbf{X}$ tak, aby byla splněna rovnice

$$\mathbf{X} * \mathbf{A} + \mathbf{A} = -\mathbf{A} + \mathbf{X}\ , \quad \text{kde} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\ .$$

Řešení:

```
> restart;
> with(linalg):
> A:=matrix(2,2,[1,2,3,-1]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

```
> X:=matrix(2,2);
```

$$X := \mathrm{array}(1..2,\ 1..2,\ [])$$

```
> solve(X*A+A=-A+X,X);
```

$$-\frac{2\,A}{A-1}$$

Vidíme, že Maple neumí maticovou rovnici zadanou tímto způsobem vyřešit. Musíme nejprve vypočítat matici $\mathbf{X}$ z rovnice a pak teprve použít Maple.

$$\mathbf{X} * \mathbf{A} - \mathbf{X} = -2 * \mathbf{A} => \mathbf{X} * (\mathbf{A} - \mathbf{E}) = -2 * \mathbf{A} => \mathbf{X} = -2 * \mathbf{A} * (\mathbf{A} - \mathbf{E})^{-1}\ .$$

Nejprve vypočteme $(\mathbf{A}-\mathbf{E})^{-1}$, pokud existuje, a pak provedeme násobení na pravé straně. Připomeňme, že $\mathbf{E}$ značí jednotkovou matici, tedy diagonální matici s jedničkami na diagonále.

```
> E:=diag(1,1);
```

$$E := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> det(A-E);
```

$$-6$$

Determinant je nenulový, tedy inverzní matice existuje.

```
> B:=inverse(A-E);
```

$$B := \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

```
> X:= 2*A&*B;
```

$$X := (2\,A)\ \&*\ B$$

```
> X:=evalm(X);
```

$$X := \begin{bmatrix} \frac{8}{3} & \frac{2}{3} \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

3. Cvičení

Čísla zde uvedených příkladů jsou uspořádána tak, že první číslo odkazuje na vzorový vyřešený příklad v předchozí části.

Příklad 1.1:
Určete dimenzi nejmenšího podprostoru prostoru $\mathcal{R}^5$, ve kterém leží vektory

$$\mathbf{a} = (4; 2; 0; -1; 1)^{\mathrm{T}}, \quad \mathbf{b} = (-3; 1; -1; 2; -2)^{\mathrm{T}}, \quad \mathbf{c} = (-2; 4; -2; 3; -3)^{\mathrm{T}},$$

a napište jeden další vektor, který v tomto podprostoru leží. Ověřte!

Příklad 1.2:
Napište libovolnou bázi prostoru $\mathcal{R}^4$ a vyjádřete vektor $\mathbf{a} = (2, -2, 1, -3)^{\mathrm{T}}$ pomocí této báze.

Příklad 1.3:
Zjistěte, zda vektory

$$\mathbf{a} = (-1, 4, 2, -5, 3)^{\mathrm{T}}, \quad \mathbf{b} = (1, 1, 0, 0, 4)^{\mathrm{T}}, \quad \mathbf{c} = (3, -5, -2, 8, -1)^{\mathrm{T}}$$

jsou lineárně nezávislé a zjistěte, zda vektor $\mathbf{v} = (2, 1, 2, 1, 3)^{\mathrm{T}}$ leží v podprostoru, jehož bázi tvoří vektory $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$.

Příklad 1.4:
Z vektorů

$$\mathbf{a} = (5, -2, 0, 4)^{\mathrm{T}}, \quad \mathbf{b} = (3, 1, -2, 5)^{\mathrm{T}}, \quad \mathbf{c} = (0, 1, -2, 5)^{\mathrm{T}}, \quad \mathbf{d} = (2, -3, 1, 2)^{\mathrm{T}}$$

vyberte maximální počet lineárně nezávislých vektorů a zbylé vektory vyjádřete jako lineární kombinaci vybraných vektorů. Napište jeden libovolný vektor z prostoru $\mathcal{R}^4$, který neleží v podprostoru generovaném vybranými vektory.

Příklad 1.5:
Z vektorů

$$(3,4,3,1)^{\mathrm{T}}, \quad (1,2,1,1)^{\mathrm{T}}, \quad (2,5,-4,3)^{\mathrm{T}}, \quad (1,3,1,2)^{\mathrm{T}}$$

vyberte maximální počet lineárně nezávislých vektorů a doplňte je dalšími vektory tak, aby tvořily bázi prostoru R^4.

Příklad 2.1:
Najděte vektor $\mathbf{v}$, který je obrazem vektoru $\mathbf{u} = (1,1,1)^{\mathrm{T}}$ v lineárním zobrazení prostoru $\mathcal{R}^3$ do $\mathcal{R}^3$ reprezentovaném maticí

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zjistěte, zda vektor $\mathbf{u}$ je jediným vektorem z prostoru $\mathcal{R}^3$, který se na vektor $\mathbf{v}$ zobrazí. Pokud není jediný, najděte všechny další.

Příklad 2.2:
Najděte vektor $\mathbf{v}$, který je obrazem vektoru $\mathbf{u} = (2,3,7)^{\mathrm{T}}$ v lineárním zobrazení prostoru $\mathcal{R}^3$ do $\mathcal{R}^4$

reprezentovaném maticí

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ -5 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Zjistěte, zda vektor $\mathbf{u}$ je jediným vektorem z prostoru $\mathcal{R}^3$, který se na vektor $\mathbf{v}$ zobrazí. Pokud není jediný, najděte všechny další.

Příklad 3.1:
Napište matici reprezentující lineární zobrazení $\mathcal{L}$ prostoru $\mathcal{R}^3$ do $\mathcal{R}^3$ definované vztahem

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}} = (2x_1 + x_3, -x_2 + x_3, x_1 + 2x_2)^{\mathrm{T}}$$

a najdětete k ní matici inverzní.

Příklad 3.2:
Dokažte, že zobrazení $\mathcal{L}_1 : \mathcal{R}^3 \longrightarrow \mathcal{R}^4$ a zobrazení $\mathcal{L}_2 : \mathcal{R}^4 \longrightarrow \mathcal{R}^3$ jsou lineární a najděte matici $\mathbf{A}$ reprezentující složené zobrazení $\mathcal{L}_1$ s $\mathcal{L}_2$. Úlohu řešte tak, že

a) naleznete tvar složeného zobrazení a pak sestavíte jeho matici;

b) setavíte nejprve matice jednotlivých zobrazení.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1(x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}} &= (x_1 - 2x_2 + x_3, 4x_1 + 2x_2 - x_3, -x_1 - 5x_2 + 3x_3, 2x_1 - 3x_2 + 8x_3)^{\mathrm{T}} ; \\ \mathcal{L}_2(x_1, x_2, x_3, x_4)^{\mathrm{T}} &= (x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4, x_1 - 7x_4, 2x_1 - x_3 + x_4)^{\mathrm{T}}. \end{aligned}$$

Příklad 3.3:
Dokažte, že zobrazení $\mathcal{L}_1 : \mathcal{R}^3 \longrightarrow \mathcal{R}^4$ a zobrazení $\mathcal{L}_2 : \mathcal{R}^4 \longrightarrow \mathcal{R}^3$ jsou lineární a najděte matici $\mathbf{A}$ reprezentující složené zobrazení $\mathcal{L}_2$ s $\mathcal{L}_1$. Úlohu řešte tak, že

a) naleznete tvar složeného zobrazení a pak sestavíte jeho matici;

b) setavíte nejprve matice jednotlivých zobrazení.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_1(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}} &= (x_1-2x_2+x_3, 4x_1+2x_2-x_3, -x_1-5x_2+3x_3, 2x_1-3x_2+8x_3)^{\mathrm{T}}\ ; \\
\mathcal{L}_2(x_1,x_2,x_3,x_4)^{\mathrm{T}} &= (x_1-2x_2+x_3-x_4, x_1-7x_4, 2x_1-x_3+x_4)^{\mathrm{T}}.
\end{aligned}
$$

Příklad 4.1:
Najděte všechna řešení soustavy rovnic

$$
\begin{aligned}
3x+y+2z-5t &= -2 \\
6x+2y+z-4t &= -4 \\
-3x-y+2z-3t &= 2
\end{aligned}
$$

a určete dimenzi a bázi podprostoru prostoru $\mathcal{R}^4$, ve kterém leží všechna řešení příslušné homogenní soustavy.

Příklad 4.2:
Najděte všechna řešení soustavy rovnic

$$
\begin{aligned}
5x+2y+z+2t &= -1 \\
4x+y+2z+4t &= -2 \\
3x+2y-z-2t &= 1
\end{aligned}
$$

a určete dimenzi a bázi podprostoru prostoru $\mathcal{R}^4$, ve kterém leží všechna řešení příslušné homogenní soustavy.

Příklad 4.3:
Najděte všechna řešení soustavy lineárních rovnic (znázorněte také graficky):

$$\begin{aligned} 3x - 2y - z &= 4 \\ x + z &= 2 \\ x + y + 3z &= 3 \\ 4x - y + 2z &= 7 \end{aligned}$$

a určete dimenzi a některou bázi podprostoru prostoru $\mathcal{R}^3$, ve kterém leží všechna řešení příslušné homogenní soustavy.

Příklad 4.4:
Najděte všechna řešení soustavy lineárních rovnic (znázorněte také graficky):

$$\begin{aligned} 3x + y + z &= 3 \\ 2x - y + 4z &= 7 \\ x + z &= 2 \\ 4x + 2y - 3z &= -4 \end{aligned}$$

a určete dimenzi a některou bázi podprostoru prostoru $\mathcal{R}^3$, ve kterém leží všechna řešení příslušné homogenní soustavy.

Příklad 4.5:
Najděte všechna řešení soustavy rovnic

$$\begin{aligned} 7x_1 + x_2 - 3x_3 - 6x_4 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 &= 0 \\ -3x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 4x_4 &= 0 \end{aligned}$$

a určete dimenzi nejmenšího podprostoru prostoru $\mathcal{R}^4$, ve kterém všechna řešení leží.

Příklad 5.1:
Zjistěte, pro která $a \in \mathcal{R}$ má soustava lineárních rovnic řešení:

$$\begin{aligned} 3x + y &= 2 \\ 5x + 3y + z &= a \\ 2x + 2y + z &= a - 2 \\ -x - 3y - 2z &= 2 \end{aligned}$$

Všechna řešení napište a znázorněte graficky.

Příklad 5.2:
Řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= -1 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 - x_3 - 2x_4 &= 0 \\ ax_1 + 2x_3 + 2x_4 &= b \end{aligned}$$

s reálnými parametry $a,\ b$ a proveďte diskusi řešitelnosti vzhledem k těmto parametrům. Všechna řešení vypočtěte.

Příklad 5.3:
Řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 &= 3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 &= 0 \\ x_1 - x_2 + ax_3 &= b \end{aligned}$$

s reálnými parametry $a,\ b$ a proveďte diskusi řešitelnosti vzhledem k těmto parametrům. Všechna řešení vypočtěte a graficky znázorněte.

Příklad 5.4:
Zjistěte, pro která reálná a má soustava lineárních rovnic řešení:

$$\begin{aligned} 4x+3y-7z-2u &= 5 \\ 3x+2y-4z-u &= 3 \\ -2x-y+z &= a^2 \\ 8x-11y+z+2u &= 2 \end{aligned}$$

Všechna řešení najděte.

Příklad 5.5:
Řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 5x_1+3x_2+x_3 &= a+1 \\ 2x_1+2x_2+x_3 &= a-1 \\ x_1+3x_2+2x_3 &= -2 \\ 3x_1+x_2 &= 2 \end{aligned}$$

s reálným parametrem a. Proveďte diskusi řešitelnosti vzhledem k tomuto parametru. Všechna řešení vypočtěte a graficky znázorněte.

Příklad 6.1:
K matici

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

vypočtěte matici inverzní.

Příklad 6.2:
K matici

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

vypočtěte matici inverzní.

Příklad 6.3:
Vypočtěte determinant matice

$$\begin{pmatrix} f(x) & f'(x) & f''(x) \\ g(x) & g'(x) & g''(x) \\ h(x) & h'(x) & h''(x) \end{pmatrix},$$

kde $f(x) = \sin x, \quad g(x) = \cos x, \quad h(x) = x, \quad x \in \mathcal{R}$. Zjistěte, pro která x je determinant roven 1.

Příklad 7.1:
Najděte matici $\mathbf{X}$ tak, aby byla splněna rovnice

$$\mathbf{A} * \mathbf{X} + \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{B}, \quad \text{kde} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Příklad 7.2:
Najděte matici $\mathbf{X}$ tak, aby byla splněna rovnice

$$\mathbf{A} * \mathbf{X} + \mathbf{A} = \mathbf{X} - \mathbf{A}\,, kde \text{kde} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Příklad 7.3:
Najděte matici $\mathbf{X}$ tak, aby byla splněna rovnice

$$\mathbf{A} * \mathbf{X} - \mathbf{A} = \mathbf{E} + \mathbf{X}\,, \quad \text{kde} \quad (\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Příklad 7.4:
Najděte matici $\mathbf{X}$ tak, aby byla splněna rovnice

$$\mathbf{A} * \mathbf{X} * \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{B} + \mathbf{E}\,, \quad \text{kde} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Příklad 7.5:
Najděte matici $\mathbf{X}$ tak, aby byla splněna rovnice

$$\mathbf{A} * \mathbf{X} * \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{B} + \mathbf{X} * \mathbf{A}^{-1}\,, \quad \text{kde} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$