Řady

Úvod

V matematice se často pracuje se součtem nekonečně mnoha sčítanců. Takovému součtu se říká řada. Přidáváme-li ke konečnému počtu sčítanců další a další sčítance, dostáváme tzv. posloupnost částečných součtů. Přitom mohou (jako vždy při počítání limit) nastat tři různé případy:

- posloupnost částečných součtů má konečnou (říkáme vlastní) limitu; pak říkáme, že řada konverguje,
- posloupnost částečných součtů má nekonečnou (říkáme nevlastní) limitu, pak říkáme, že řada diverguje,
- posloupnost částečných součtů nemá limitu.

V systému Maple lze k práci s řadami použít příkaz `sum`. Ten lze použít pro konečný počet numerických sčítanců

```
> sum(2*k+3,k=2..5);
```

$$40$$

dále pro konečný počet symbolických sčítanců

```
> sum(a*k+b,k=2..5);
```

$$14\,a + 4\,b$$

a také pro nekonečný počet (numerických i symbolických) sčítanců. Ukážeme si to na několika příkladech.

Součet nekonečné geometrické řady

Pro součet nekonečné geometrické řady lze použít příkaz

```
> sum(1/2^k,k=1..infinity);
```

$$1$$

Exponenciála

Exponenciální funkce se dá napsat jako řada. A naopak některé řady mají součet, který lze vyjádřit pomocí exponencální funkce.

```
> sum(1/k!,k=0..infinity);
```

$$e$$

```
> sum(x^k/k!,k=0..infinity);
```

$$e^x$$

Řada převrácených hodnot čtverců

Systém Maple lze použít pro výpočet různých nekonečných řad. Názorné jsou příklady, kde z teorie známe výsledek, např.

```
> sum(1/k^2,k=1..infinity);
```

$$\frac{\pi^2}{6}$$

To nám může dodat důvěru, že i úlohy, kde výsledek neznáme, lze pomocí systému Maple úspěšně vyřešit. Někdy tomu tak skutečně je.

Obecnější konvergentní případ

V některých případech řada konverguje, ale výsledek nelze zapsat pomocí elementárních funkcí. V takových případech lze někdy výsledek zapsat pomocí speciálních matematických funkcí, které jsou často definovány právě pomocí nekonečných řad. Takovéto speciální funkce jsou pojmenovány a jejich vlastnosti jsou poměrně podrobně známy, i když nebývají obsahem učiva běžných kurzů matematiky.

Např. řada

```
> sum(1/k^3,k=1..infinity);
```

$$\zeta(3)$$

konverguje a výsledek lze zapsat pomocí zeta funkce. Přibližnou číselnou hodnotu lze získat příkazem `evalf`

```
> evalf(%);
```

$$1.202056903$$

Divergentní řady

Systém Maple lze použít i v případě divergentních řad

```
> sum(1/k,k=1..infinity);
```

$$\infty$$

Nekonvergentní řady

I v případě, kdy limita částečných součtů neexistuje, můžeme dostat správný výsledek

```
> sum((-1)^k,k=1..infinity);
```

Použití majoranty

V některých případech nám systém Maple výsledek nespočítá a pouze zopakuje zadání. To může mít dva důvody:

- buďto se výsledek nadá zapsat výrazem obsahujícím konečný počet zavedených matematických symbolů (protože těch zavedených matematických symbolů je prostě málo),
- nebo to lze, ale současná verze systému Maple není schopna výsledek najít.

Např.

```
> sum(sin(k)/k!, k=0..infinity);
```

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(k)}{k!}$$

V takovém případě je možné pokusit se získat alespoň přibližný numerický výsledek takto

```
> evalf(%);
```

$$1.279883001$$

Je užitečné se přesvědčit, zda-li výsledek skutečně existuje jako konečná číselná hodnota. V opačném případě by bylo hrubou chybou považovat přibližný numerický výsledek, získaný pomocí systému Maple, za správnou aproximaci danné řady. To lze provést tak, že najdeme konvergentní majorantu, tedy řadu, jejíž každý člen je v absolutní hodnotě větší nebo roven příslušnému členu původní řady, a přitom je konvergentní, a jejíž součet lze najít.

V našem případě taková majoranta existuje

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!},$$

protože $|\sin(k)| \leq 1$ můžeme $\sin(k)$ nahradit 1 a nový výsledek bude v absolutní hodnotě větší nebo roven původnímu výsledku. A tato konvergentní majoranta má součet e, který již známe z předchozích odstavců. Tento součet se však liší od součtu původní řady.

Je zajímavé, že systém Mathematica nám i v tomto případě dá přesný analytický výsledek

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(k)}{k!} = \mathrm{e}^{\cos(1)} \sin(\sin(1)).$$

Aplikace řad

Význam řad v poslední době vzrůstá. Kromě klasických aplikací, jako jsou např. Taylorovy řady či Fourierovy řady je další použití řad v tzv. z–transformaci, což je diskrétní podoba Laplaceovy transformace. Ta se používá při návrhu číslicových filtrů pro zpracování zvukové a obrazové informace v digitální podobě. A digitální zpracování signálu jednoznačně vytlačuje starší analogové metody, protože dovoluje účinnou kompresi signálu a kódování signálu takovým způsobem, že lze po přenosu či archivaci signálu zrekonstruovat i případné chyby v datech, nejsou-li příliš rozsáhlé.