Soustavy lineárních algebraických rovnic

- Gaussova eliminační metoda
- Gaussova-Jordanova metoda
- Inverzní matice
- Cramerovo pravidlo

Gaussova eliminační metoda

- Příklad 10.1.1 Řešte soustavu rovnic
$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & 0, \\ x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 5, \\ 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 1, \\ -x_1 & + & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 4. \end{array}$$
- Příklad 10.1.2 Řešte soustavu rovnic
$$\begin{array}{rcrcrcr} 5x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 1, \\ 3x_1 & + & 5x_2 & - & x_3 & = & 2, \\ 2x_1 & - & 6x_2 & + & 3x_3 & = & 4. \end{array}$$
- Příklad 10.1.3 Řešte soustavu rovnic
$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 6, \\ 3x_1 & + & 7x_2 & - & 4x_3 & = & 16, \\ x_1 & + & 5x_2 & - & 8x_3 & = & 4. \end{array}$$
Výsledek znázorněte graficky.
- Příklad 10.1.4 Řešte soustavu rovnic a proveďte diskusi řešitelnosti pro parametr $\lambda \in \mathbb{R}$.
$$\begin{array}{rcrcrcr} \lambda x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1, \\ x_1 & + & \lambda x_2 & + & x_3 & = & \lambda, \\ x_1 & + & x_2 & + & \lambda x_3 & = & \lambda^2. \end{array}$$

Zpět

Příklad 10.1.1

Řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & 0, \\ x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 5, \\ 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 1, \\ -x_1 & + & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 4. \end{array}$$

? Zpět

Příklad 10.1.1

Řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & 0, \\ x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 5, \\ 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 1, \\ -x_1 & + & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 4. \end{array}$$

Výsledek:

$x_1 = 0,\ x_2 = 3,\ x_3 = 2,\ x_4 = 1\,.$

Zpět

Příklad 10.1.1

Řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & 0, \\ x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 5, \\ 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 1, \\ -x_1 & + & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 4. \end{array}$$

Návod:

Matici soustavy převedeme pomocí ekvivalentních úprav na HT-matici, zjistíme, kolik má daná soustava řešení, případně zvolíme parametry (volitelné proměnné) a zpětným chodem dopočteme zbývající neznámé. Zpět

Příklad 10.1.1

Řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & 0, \\ x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 5, \\ 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 1, \\ -x_1 & + & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 4. \end{array}$$

Řešení:

$$(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & -3 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 4 \end{array}\right) \sim \dots$$

Ke druhému řádku jsme přičetli $(-1)-$násobek prvního řádku (odečetli jsme od druhého řádku první), ke třetímu řádku jsme přičetli $(-2)-$násobek prvního řádku (od třetího řádku jsme odečetli dvojnásobek prvního řádku) a ke čtvrtému řádku jsme přičetli první řádek $((1)-$ násobek prvního řádku).

$$\dots \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 10 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & -6 \end{array}\right) = \mathbf{B}.$$

Přičetli jsme ke třetímu řádku trojnásobek druhého a od čtvrtého řádku jsme odečetli dvojnásobek druhého řádku.

Další

Příklad 10.1.1

Řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & 0, \\ x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 5, \\ 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 1, \\ -x_1 & + & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 4. \end{array}$$

Řešení:

Vidíme, že $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = 4$ soustava má tedy řešení. Protože $n = h(\mathbf{A})$ má soustava právě jedno řešení. Zbývá provést zpětný chod. Výsledné matici $\mathbf{B}$ odpovídá soustava lineárních rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & 0, \\ & & x_2 & & & + & 2x_4 & = & 5, \\ & & & & 3x_3 & + & 10x_4 & = & 16, \\ & & & & & - & 6x_4 & = & -6. \end{array}$$

Z poslední rovnice soustavy vypočteme $x_4 = 1$, dosadíme do třetí rovnice a vypočteme $x_3 = 2$, dále za x_3 i x_4 dosadíme do druhé rovnice a vypočteme $x_2 = 3$ a konečně za x_2, x_3 a x_4 dosadíme do první rovnice a vypočteme $x_1 = 0$.
Jediným řešením naší soustavy je vektor

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^{\mathrm{T}} = (0, 3, 2, 1)^{\mathrm{T}}.$$

Poznamenejme ještě, že lineární prostor V_H je v tomto případě tvořen pouze nulovým vektorem a $\dim V_H = n - h(\mathbf{A}) = 4 - 4 = 0$.

Zpět

Příklad 10.1.1

Řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & 0, \\ x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 5, \\ 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 1, \\ -x_1 & + & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 4. \end{array}$$

Maple:

```
> with(linalg):
> eqns :=
{x1+x2-x3-x4=0,x1+2*x2-x3+x4=5,2*x1-x2+x3+2*x4=1,-x1+x2+x3-x4=4};
```

$$eqns := \{x1 + x2 - x3 - x4 = 0,\ x1 + 2\,x2 - x3 + x4 = 5,\ 2\,x1 - x2 + x3 + 2\,x4 = 1,\ -x1 + x2 + x3 - x4 = 4\}$$

Ukážeme si na tomto příkladě tři možná řešení v Maplu:

1. Nejjednodušší řešení:

```
> solve(eqns);
```

$$\{x1 = 0,\ x3 = 2,\ x4 = 1,\ x2 = 3\}$$

2. Nejprve sestavíme matici soustavy A a pak řešíme:

```
> A := genmatrix(eqns, [x1,x2,x3,x4]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Další

Příklad 10.1.1

Řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & 0, \\ x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 5, \\ 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 1, \\ -x_1 & + & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 4. \end{array}$$

Maple:

```
> x:=linsolve(A,[0,5,1,4]);
```

$$x := [0,\ 3,\ 2,\ 1]$$

3. Sestavíme rozšířenou matici soustavy, provedeme přímý chod Gaussovy metody a výsledek získáme zpětným chodem

```
> b:=vector([0,5,1,4]);
```

$$b := [0,\ 5,\ 1,\ 4]$$

```
> Aaug:=augment(A,b);
```

$$Aaug := \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

```
> B:=gausselim(Aaug);
```

$$B := \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 10 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & -6 \end{bmatrix}$$

Další

Příklad 10.1.1

Řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & 0, \\ x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 5, \\ 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 1, \\ -x_1 & + & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 4. \end{array}$$

Maple:

```
> backsub(B);
```

$$[0,\ 3,\ 2,\ 1]$$

Poznámka: Přímý chod Gaussovy eliminace lze provádět postupně, zadáme-li jako parametr číslo sloupce, ve kterém má být Gaussova eliminace zastavena:

```
> gausselim(Aaug,1);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & -3 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

```
> gausselim(Aaug,2);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 10 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & -6 \end{bmatrix}$$

Zpět

Příklad 10.1.1

Řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & 0, \\ x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 5, \\ 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 1, \\ -x_1 & + & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 4. \end{array}$$

Mathematica:

Ukážeme si tři možnosti řešení:
1) řešíme přímo soustavu lineárních rovnic

**eqns = {x1 + x2 − x3 − x4==0, x1 + 2x2 − x3 + x4==5,
2x1 − x2 + x3 + 2x4==1, −x1 + x2 + x3 − x4==4}**

{x1 + x2 − x3 − x4 == 0, x1 + 2x2 − x3 + x4 == 5, 2x1 − x2 + x3 + 2x4 == 1,
− x1 + x2 + x3 − x4 == 4}

Solve[eqns]

{{x1 → 0, x2 → 3, x3 → 2, x4 → 1}}

2) řešení přes matici soustavy a pravou stranu

***A* = {{1, 1, −1, −1}, {1, 2, −1, 1}, {2, −1, 1, 2},{−1, 1, 1, −1}}**

{{1, 1, −1, −1}, {1, 2, −1, 1}, {2, −1, 1, 2}, {−1, 1, 1, −1}}

***b* = {0, 5, 1, 4}**

{0, 5, 1, 4}

LinearSolve[*A*, *b*]

{0, 3, 2, 1}

Další

Příklad 10.1.1

Řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & 0, \\ x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 5, \\ 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 1, \\ -x_1 & + & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 4. \end{array}$$

Mathematica:

3) sestavíme rozšířenou matici a řešíme pomocí GaussJordanovy eliminace

Ab = Transpose[Join[Transpose[*A*], {*b*}]]

$\{\{1,1,-1,-1,0\},\{1,2,-1,1,5\},\{2,-1,1,2,1\},\{-1,1,1,-1,4\}\}$

***B* = RowReduce[Ab]**

$\{\{1,0,0,0,0\},\{0,1,0,0,3\},\{0,0,1,0,2\},\{0,0,0,1,1\}\}$

***B*//MatrixForm**

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

reseni = Transpose[*B*][[5]]

$\{0,3,2,1\}$

Zpět

Příklad 10.1.2

Řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcl} 5x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 1, \\ 3x_1 & + & 5x_2 & - & x_3 & = & 2, \\ 2x_1 & - & 6x_2 & + & 3x_3 & = & 4. \end{array}$$

? Zpět

Příklad 10.1.2

Řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 5x_1 &- x_2 &+ 2x_3 &= 1,\\ 3x_1 &+ 5x_2 &- x_3 &= 2,\\ 2x_1 &- 6x_2 &+ 3x_3 &= 4. \end{aligned}$$

Výsledek:

Soustava nemá řešení.

Zpět

Příklad 10.1.2

Řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcl} 5x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 1, \\ 3x_1 & + & 5x_2 & - & x_3 & = & 2, \\ 2x_1 & - & 6x_2 & + & 3x_3 & = & 4. \end{array}$$

Návod:

Matici soustavy převedeme pomocí ekvivalentních úprav na HT-matici. Zjistíme, že matice soustavy má hodnost $h(\mathbf{A}) = 2$, rozšířená matice soustavy má hodnost $h(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = 3$. Soustava tedy podle Frobeniovy věty nemá řešení.

Zpět

Příklad 10.1.2

Řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcl} 5x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 1, \\ 3x_1 & + & 5x_2 & - & x_3 & = & 2, \\ 2x_1 & - & 6x_2 & + & 3x_3 & = & 4. \end{array}$$

Řešení:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 5 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & -1 & 2 \\ 2 & -6 & 3 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 5 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 28 & -11 & 7 \\ 0 & -28 & 11 & 18 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 5 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 28 & -11 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 25 \end{array}\right).$$

Nejprve jsme od pětinásobku druhého řádku odečetli trojnásobek prvního řádku a od pětinásobku třetího řádku jsme odečetli dvojnásobek prvního. Při úpravě druhé matice jsme k třetímu řádku přičetli druhý. Matice soustavy má hodnost $h(\mathbf{A}) = 2$, rozšířená matice soustavy má hodnost $h(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = 3$. Soustava tedy podle Frobeniovy věty nemá řešení.

Zpět

Příklad 10.1.2

Řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcl} 5x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 1, \\ 3x_1 & + & 5x_2 & - & x_3 & = & 2, \\ 2x_1 & - & 6x_2 & + & 3x_3 & = & 4. \end{array}$$

Maple:

```
> with(linalg):
> eqns := {5*x1-x2+2*x3=1,3*x1+5*x2-x3=2,2*x1-6*x2+3*x3=4};
```

$$eqns := \{5\,x1 - x2 + 2\,x3 = 1,\ 3\,x1 + 5\,x2 - x3 = 2,\ 2\,x1 - 6\,x2 + 3\,x3 = 4\}$$

```
> solve(eqns);
```

Maple nevrátil žádné řešení, což znamená, že soustava žádné řešení nemá. Ověříme si to například tak, že sestavíme rozšířenou matici soustavy a provedeme Gaussovu eliminaci:

```
> A := genmatrix(eqns, [x1,x2,x3]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & -1 \\ 2 & -6 & 3 \end{bmatrix}$$

```
> b:=vector([1,2,4]);
```

$$b := [1,\ 2,\ 4]$$

```
> Aaug:=augment(A,b);
```

$$Aaug := \begin{bmatrix} 5 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & -1 & 2 \\ 2 & -6 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Další

Příklad 10.1.2

Řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcl} 5x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 1, \\ 3x_1 & + & 5x_2 & - & x_3 & = & 2, \\ 2x_1 & - & 6x_2 & + & 3x_3 & = & 4. \end{array}$$

Maple:

```
>  B:=gausselim(Aaug);
```

$$B := \begin{bmatrix} 5 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & \frac{28}{5} & \frac{-11}{5} & \frac{7}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Hodnost matice soustavy je 2, hodnost rozšířené matice soustavy je 3. Soustava nemá řešení. Kdybychom se přesto pokusili provést zpětný chod, dostali bychom:

```
>  backsub(B);
```

Error, (in backsub) inconsistent system

Zpět

Příklad 10.1.2

Řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcl} 5x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 1, \\ 3x_1 & + & 5x_2 & - & x_3 & = & 2, \\ 2x_1 & - & 6x_2 & + & 3x_3 & = & 4. \end{array}$$

Mathematica:

Nejdříve řešíme přímo soustavu lineárních rovnic:

**eqns = {x1 + x2 − x3 − x4==0, x1 + 2x2 − x3 + x4==5,
2x1 − x2 + x3 + 2x4==1, −x1 + x2 + x3 − x4==4}**

{x1 + x2 − x3 − x4 == 0, x1 + 2x2 − x3 + x4 == 5,
2x1 − x2 + x3 + 2x4 == 1, −x1 + x2 + x3 − x4 == 4}

Solve[eqns]

{}

Mathematica nevrátil žádné řešení, což znamená, že soustava žádné řešení nemá. Ověříme si to například tak, že sestavíme rozšířenou matici soustavy a provedeme Gaussovu eliminaci:

A **= {{5, −1, 2}, {3, 5, −1}, {2, −6, 3}}**

{{5, −1, 2}, {3, 5, −1}, {2, −6, 3}}

b **= {1, 2, 4}**

{1, 2, 4}

Další

Příklad 10.1.2

Řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcl} 5x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 1, \\ 3x_1 & + & 5x_2 & - & x_3 & = & 2, \\ 2x_1 & - & 6x_2 & + & 3x_3 & = & 4. \end{array}$$

Mathematica:

$\mathbf{Ab = Transpose[Join[Transpose[}\boldsymbol{A}\mathbf{], \{}\boldsymbol{b}\mathbf{\}]]}$

$\{\{5, -1, 2, 1\}, \{3, 5, -1, 2\}, \{2, -6, 3, 4\}\}$

$\boldsymbol{B}\mathbf{ = RowReduce[Ab]}$

$\left\{\left\{1, 0, \frac{9}{28}, 0\right\}, \left\{0, 1, -\frac{11}{28}, 0\right\}, \{0, 0, 0, 1\}\right\}$

$\boldsymbol{B}\mathbf{//MatrixForm}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{9}{28} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{11}{28} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Hodnost matice soustavy je 2, hodnost rozšířené matice soustavy je 3. Soustava nemá řešení.

Zpět

Příklad 10.1.3

Řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 6, \\ 3x_1 & + & 7x_2 & - & 4x_3 & = & 16, \\ x_1 & + & 5x_2 & - & 8x_3 & = & 4. \end{array}$$

Výsledek znázorněte graficky.

? Zpět

Příklad 10.1.3

Řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 6, \\ 3x_1 & + & 7x_2 & - & 4x_3 & = & 16, \\ x_1 & + & 5x_2 & - & 8x_3 & = & 4. \end{array}$$

Výsledek znázorněte graficky.

Výsledek:

Soustava má nekonečně mnoho řešení

$$\mathbf{x} = (13/2, -1/2, 0)^{\mathrm{T}} + s(-9, 5, 2)^{\mathrm{T}}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Grafickým řešením je přímka - viz Maple.

Zpět

Příklad 10.1.3

Řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 6, \\ 3x_1 & + & 7x_2 & - & 4x_3 & = & 16, \\ x_1 & + & 5x_2 & - & 8x_3 & = & 4. \end{array}$$

Výsledek znázorněte graficky.

Návod:

Matici soustavy převedeme pomocí ekvivalentních úprav na HT-matici. Zvolíme parametry (volitelné proměnné) a zpětným chodem dopočteme zbývající neznámé. Grafické řešení - viz Maple.

Zpět

Příklad 10.1.3

Řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 6, \\ 3x_1 & + & 7x_2 & - & 4x_3 & = & 16, \\ x_1 & + & 5x_2 & - & 8x_3 & = & 4. \end{array}$$

Výsledek znázorněte graficky.

Řešení:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & 6 \\ 3 & 7 & -4 & 16 \\ 1 & 5 & -8 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 4 & -10 & -2 \\ 0 & 4 & -10 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & -5 & -1 \end{array}\right).$$

Nejprve jsme od druhého řádku odečetli trojnásobek prvního a od třetího řádku odečetli první. V další úpravě jsme od třetího řádku odečetli druhý a vynechali jsme nulový řádek.
Vidíme, že $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = 2,\ n = 3$. Soustava má tedy nekonečně mnoho řešení, $\dim V_H = 3 - 2 = 1 =$ počet volitelných neznámých.
Zpětný chod:
$x_3 := t \in \mathbb{R}$,
$2x_2 = -1 + 5x_3 \quad \Rightarrow \quad x_2 = -1/2 + 5/2t$,
$x_1 = 6 - 2x_3 - x_2 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 6 - 2t + 1/2 - 5/2t \quad \Rightarrow \quad x_1 = 13/2 - 9/2t$.

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \frac{13}{2} - \frac{9}{2}t \\ -\frac{1}{2} - \frac{5}{2}t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{13}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}t \begin{pmatrix} -9 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{13}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -9 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Jednoprvková báze prostoru V_H je tvořena např. vektorem $(-9, 5, 2)^{\mathrm{T}}$. Grafické řešení - viz Maple.

Zpět

Příklad 10.1.3

Řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 6, \\ 3x_1 & + & 7x_2 & - & 4x_3 & = & 16, \\ x_1 & + & 5x_2 & - & 8x_3 & = & 4. \end{array}$$

Výsledek znázorněte graficky.

Maple:

```
> with(linalg): with(plots):
> eqns := {x1+x2+2*x3=6,3*x1+7*x2-4*x3=16,x1+5*x2-8*x3=4};
```

$$eqns := \{x1 + x2 + 2\,x3 = 6,\ 3\,x1 + 7\,x2 - 4\,x3 = 16,\ x1 + 5\,x2 - 8\,x3 = 4\}$$

```
> sols := solve(eqns);
```

$$sols := \{x2 = -\frac{1}{2} + \frac{5\,x3}{2},\ x1 = \frac{13}{2} - \frac{9\,x3}{2},\ x3 = x3\}$$

```
> assign( sols );
> x:=vector([x1,x2,x3]);
```

$$x := \left[\frac{13}{2} - \frac{9\,x3}{2},\ -\frac{1}{2} + \frac{5\,x3}{2},\ x3\right]$$

Graficky představuje řešení soustavy tří rovnic o třech neznámých hledání průsečnice tří rovin, které jsou zadány obecnými rovnicemi odpovídajícími řádkům rozšířené matice soustavy:

```
> implicitplot3d({x+y+2*z=6,3*x+7*y-4*z=16,x+5*y-8*z=4
},x=-3..5,y=-3..5,z=-3..5, axes=boxed);
```

Další

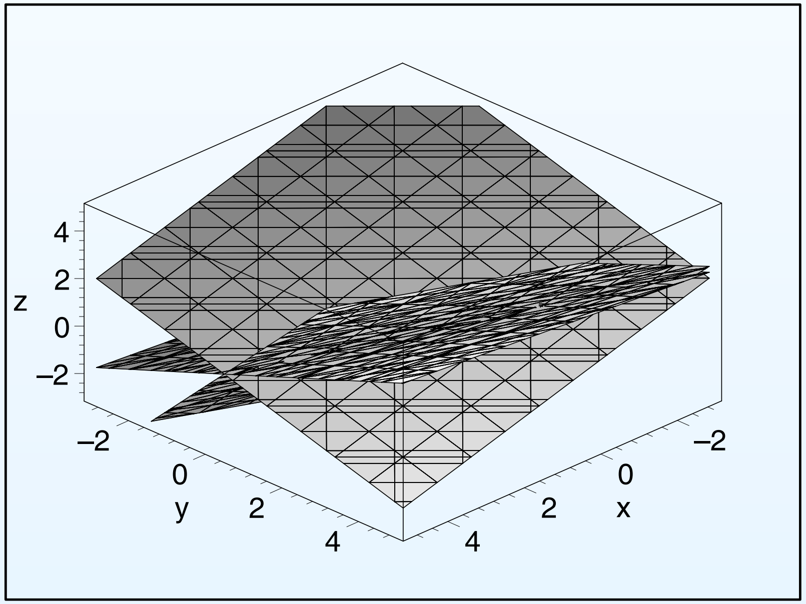
Příklad 10.1.3

Řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x_1 &+ x_2 &+ 2x_3 &= 6, \\ 3x_1 &+ 7x_2 &- 4x_3 &= 16, \\ x_1 &+ 5x_2 &- 8x_3 &= 4. \end{aligned}$$

Výsledek znázorněte graficky.

Maple:



Průsečnice je přímka, jejíž parametrické rovnice jsou:

$$x = \frac{13}{2} - 9s, \quad y = -\frac{1}{2} + 5s, \quad z = 2s.$$

Zpět

Příklad 10.1.3

Řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 6, \\ 3x_1 & + & 7x_2 & - & 4x_3 & = & 16, \\ x_1 & + & 5x_2 & - & 8x_3 & = & 4. \end{array}$$

Výsledek znázorněte graficky.

Mathematica:

Nejdříve řešíme přímo soustavu lineárních rovnic:

eqns = {x1 + x2 + 2x3==6, 3x1 + 7x2 − 4x3==16,
x1 + 5x2 − 8x3==4}

{x1 + x2 + 2x3 == 6, 3x1 + 7x2 − 4x3 == 16, x1 + 5x2 − 8x3 == 4}

Solve[eqns]

Solve::svars :
Equations may not give solutions for all solve variables. More...[1mm]
$\{\{\mathrm{x1} \to \frac{13}{2} - \frac{9\mathrm{x3}}{2}, \mathrm{x2} \to -\frac{1}{2} + \frac{5\mathrm{x3}}{2}\}\}$

Mathematica nám vrátil nekonečně mnoho řešení, závislých na jednom parametru. Ověříme si to například tak, že sestavíme rozšířenou matici soustavy a provedeme Gaussovu eliminaci:

***A* = {{1, 1, 2}, {3, 7, −4}, {1, 5, −8}}**

{{1, 1, 2}, {3, 7, −4}, {1, 5, −8}}

***b* = {6, 16, 4}**

{6, 16, 4}

Další

Příklad 10.1.3

Řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 6, \\ 3x_1 & + & 7x_2 & - & 4x_3 & = & 16, \\ x_1 & + & 5x_2 & - & 8x_3 & = & 4. \end{array}$$

Výsledek znázorněte graficky.

Mathematica:

Ab = Transpose[Join[Transpose[*A*], {*b*}]]

$\{\{1, 1, 2, 6\}, \{3, 7, -4, 16\}, \{1, 5, -8, 4\}\}$

***B* = RowReduce[Ab]//MatrixForm**

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{9}{2} & \frac{13}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Znázorníme si to graficky:

r1 = x3/.Solve[eqns[[1]], x3][[1]]
r2 = x3/.Solve[eqns[[2]], x3][[1]]
r3 = x3/.Solve[eqns[[3]], x3][[1]]

$\frac{1}{2}(6 - \mathrm{x1} - \mathrm{x2})$

$\frac{1}{4}(-16 + 3\mathrm{x1} + 7\mathrm{x2})$

$\frac{1}{8}(-4 + \mathrm{x1} + 5\mathrm{x2})$

Další

Příklad 10.1.3

Řešte soustavu rovnic

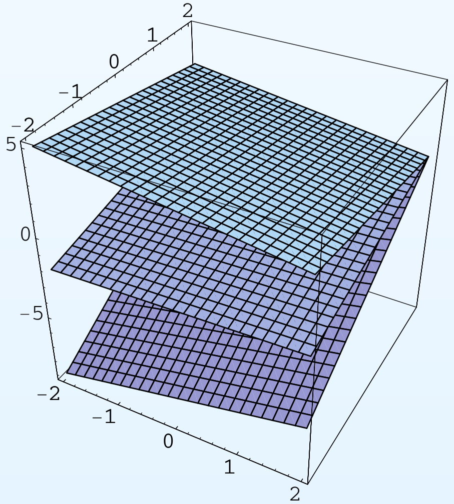
$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 6, \\ 3x_1 & + & 7x_2 & - & 4x_3 & = & 16, \\ x_1 & + & 5x_2 & - & 8x_3 & = & 4. \end{array}$$

Výsledek znázorněte graficky.

Mathematica:

g1 = Plot3D[r1, {x1, −2, 2}, {x2, −2, 2},DisplayFunction → Identity];
g2 = Plot3D[r2, {x1, −2, 2}, {x2, −2, 2},DisplayFunction → Identity];
g3 = Plot3D[r3, {x1, −2, 2}, {x2, −2, 2},DisplayFunction → Identity];

Show[{g1, g2, g3}, DisplayFunction → $DisplayFunction,BoxRatios → {1, 1, 1}];



Řešení soustavy je přímka, která je průsečnicí tří rovin.

Zpět

Příklad 10.1.4

Řešte soustavu rovnic a proveďte diskusi řešitelnosti pro parametr $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcrcrcr} \lambda x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1, \\ x_1 & + & \lambda x_2 & + & x_3 & = & \lambda, \\ x_1 & + & x_2 & + & \lambda x_3 & = & \lambda^2. \end{array}$$

? Zpět

Příklad 10.1.4

Řešte soustavu rovnic a proveďte diskusi řešitelnosti pro parametr $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcrcrcr} \lambda x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1, \\ x_1 & + & \lambda x_2 & + & x_3 & = & \lambda, \\ x_1 & + & x_2 & + & \lambda x_3 & = & \lambda^2. \end{array}$$

Výsledek:

$\lambda = -2 \quad \Rightarrow \quad$ soustava nemá řešení;

$\lambda = 1 \quad \Rightarrow \quad$ soustava má nekonečně mnoho řešení,

$$\mathbf{x} = (1,0,0)^{\mathrm{T}} + t(-1,0,1)^{\mathrm{T}} + s(-1,1,0)^{\mathrm{T}}, \ t, s \in \mathbb{R};$$

$\lambda \notin \{-2, 1\} \quad \Rightarrow \quad$ soustava má právě jedno řešení

$$\mathbf{x} = \left(-\frac{1+\lambda}{2+\lambda}, \frac{1}{2+\lambda}, -\frac{(1+\lambda)^2}{2+\lambda} \right)^{\mathrm{T}}.$$

Zpět

Příklad 10.1.4

Řešte soustavu rovnic a proveďte diskusi řešitelnosti pro parametr $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcrcrcr} \lambda x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1, \\ x_1 & + & \lambda x_2 & + & x_3 & = & \lambda, \\ x_1 & + & x_2 & + & \lambda x_3 & = & \lambda^2. \end{array}$$

Návod:

Rozšířenou matici soustavy převádíme pomocí ekvivalentních úprav na horní trojúhelníkový tvar. Protože nulovým číslem nelze dělit, musíme pro hodnoty parametru, při kterém by dělení nulou mohlo nastat, řešit soustavu s touto hodnotou λ zvlášť. Provedeme diskusi hodnosti matice a rozšířené matice soustavy v závislosti na různých hodnotách parametru λ a zpětný chod. Nakonec shrneme získané výsledky.

Zpět

Příklad 10.1.4

Řešte soustavu rovnic a proveďte diskusi řešitelnosti pro parametr $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcrcrcr} \lambda x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1, \\ x_1 & + & \lambda x_2 & + & x_3 & = & \lambda, \\ x_1 & + & x_2 & + & \lambda x_3 & = & \lambda^2. \end{array}$$

Řešení:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda^2 & 1-\lambda & 1-\lambda^2 \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda^2 & 1-\lambda^3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1+\lambda & 1 & 1+\lambda \\ 0 & 1 & 1+\lambda & 1+\lambda+\lambda^2 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1+\lambda & 1 & 1+\lambda \\ 0 & 0 & -\lambda(\lambda+2) & -\lambda(1+\lambda)^2 \end{array}\right).$$

Při provádění ekvivalentních úprav jsme vyloučili případ $\lambda = 1$ a z tvaru výsledné horní trojúhelníkové matice vidíme, že speciálními případy budou i hodnoty $\lambda = 0,\ \lambda = -1$ a $\lambda = -2$ (diagonální prvky horní trojúhelníkové matice musí být nenulové).

a) Pro $\lambda = -2$ má upravená matice tvar

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \qquad h(\mathbf{A}) = 2,\ h(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = 3 \quad \Rightarrow \quad \text{soustava nemá řešení.}$$

Další

Příklad 10.1.4

Řešte soustavu rovnic a proveďte diskusi řešitelnosti pro parametr $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcrcrcr} \lambda x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1, \\ x_1 & + & \lambda x_2 & + & x_3 & = & \lambda, \\ x_1 & + & x_2 & + & \lambda x_3 & = & \lambda^2. \end{array}$$

Řešení:

b) Pro $\lambda = -1$ je

$$(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right),$$

kde jsme při poslední úpravě museli přehodit druhý a třetí řádek, aby diagonální prvky byly nenulové. Tedy pro $\lambda = -1$ je $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = n = 3 \quad \Rightarrow$ soustava má právě jedno řešení. Zpětný chod: $x_3 = 0, \quad x_2 = 1, \quad x_1 = x_2 + x_3 - 1 = 0, \quad$ t.j. $\quad \mathbf{x} = (0, 1, 0)^{\mathrm{T}}$.

c) Pro $\lambda = 0$ je

$$(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{rrr|r} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

Tedy pro $\lambda = 0$ je $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = n = 3 \quad \Rightarrow$ soustava má právě jedno řešení. Zpětný chod: $x_3 = 1/2, \quad x_2 = 1/2, \quad x_1 = -1/2, \quad$ t.j. $\quad \mathbf{x} = \dfrac{1}{2}(-1, 1, 1)^{\mathrm{T}}$.

Další

Příklad 10.1.4

Řešte soustavu rovnic a proveďte diskusi řešitelnosti pro parametr $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcrcrcr} \lambda x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1, \\ x_1 & + & \lambda x_2 & + & x_3 & = & \lambda, \\ x_1 & + & x_2 & + & \lambda x_3 & = & \lambda^2. \end{array}$$

Řešení:

d) Pro $\lambda = 1$ je

$$(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Tedy pro $\lambda = 1$ je $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = 1,\ n = 3 \quad \Rightarrow$ soustava má nekonečně mnoho řešení, dim $V_H = n - h(\mathbf{A}) = 2 =$ počet volitelných proměnných. Zpětný chod:

$$x_3 = t \in \mathbb{R}, \quad x_2 = s \in \mathbb{R}, \quad x_1 = 1 - s - t, \quad \text{t.j.}$$

$\mathbf{x} = (1,0,0)^{\mathrm{T}} + t(-1,0,1)^{\mathrm{T}} + s(-1,1,0)^{\mathrm{T}},\ t, s \in \mathbb{R}$;
báze $V_H = \{(-1,0,1)^{\mathrm{T}}, (-1,1,0)^{\mathrm{T}}\}$.
e) Jestliže $\lambda \notin \{-2, 1\}$, pak $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = n = 3$ a soustava má právě jedno řešení.
Báze $V_H = \{(0,0,0)^{\mathrm{T}}\}$. Zpětný chod:

$$x_3 = \frac{(1+\lambda)^2}{2+\lambda},\ (1+\lambda)x_2 = 1+\lambda-x_3 \quad \Rightarrow \quad x_2 = \frac{1}{2+\lambda},\ \lambda x_1 = 1-x_2-x_3 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -\frac{1+\lambda}{2+\lambda}.$$

Například pro $\lambda = -1$ dostáváme: $\mathbf{x} = (0,1,0)^{\mathrm{T}}$, což je řešení, které jsme získali v b).
Pro $\lambda = 0$ dostáváme: $\mathbf{x} = (-1/2, 1/2, 1/2)^{\mathrm{T}}$, což je řešení, které jsme získali v c).

Zpět

Příklad 10.1.4

Řešte soustavu rovnic a proveďte diskusi řešitelnosti pro parametr $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcrcrcr} \lambda x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1, \\ x_1 & + & \lambda x_2 & + & x_3 & = & \lambda, \\ x_1 & + & x_2 & + & \lambda x_3 & = & \lambda^2. \end{array}$$

Maple:

```
> with(linalg): with(plots):
> eqns :=
{lambda*x1+x2+x3=1,x1+lambda*x2+x3=lambda,x1+x2+lambda*x3=lambda^2};
```

$$eqns := \{\lambda\, x1 + x2 + x3 = 1,\ x1 + \lambda\, x2 + x3 = \lambda,\ x1 + x2 + \lambda\, x3 = \lambda^2\}$$

```
> sols := solve(eqns, {x1,x2,x3});
```

$$sols := \{x1 = -\frac{\lambda+1}{\lambda+2},\ x3 = \frac{(\lambda+1)^2}{\lambda+2},\ x2 = \frac{1}{\lambda+2}\}$$

```
> assign( sols );
> x:=vector([x1,x2,x3]);
```

$$x := \left[-\frac{\lambda+1}{\lambda+2},\ \frac{1}{\lambda+2},\ \frac{(\lambda+1)^2}{\lambda+2}\right]$$

Pozor, Maple apriori předpokládá, že lambda je takové, že soustava má řešení, a to právě jedno. My ale víme, že musíme rozlišit hned několik případů.

```
> unassign('x1','x2','x3');
```

Další

Příklad 10.1.4

Řešte soustavu rovnic a proveďte diskusi řešitelnosti pro parametr $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
\lambda x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1, \\
x_1 & + & \lambda x_2 & + & x_3 & = & \lambda, \\
x_1 & + & x_2 & + & \lambda x_3 & = & \lambda^2.
\end{array}
$$

Maple:

a) $\lambda = -2$:

```
> eqnsa:= {-2*x1+x2+x3=1,x1-2*x2+x3=-2,x1+x2-2*x3=4};
```

$$eqnsa := \{-2\,x1 + x2 + x3 = 1,\; x1 - 2\,x2 + x3 = -2,\; x1 + x2 - 2\,x3 = 4\}$$

```
> solve(eqnsa);
```

Maple nevrátil žádné řešení, soustava tedy pro $\lambda = -2$ řešení nemá. Přesvědčte se o tom pomocí Gaussovy eliminace.

b) $\lambda = -1$:

```
> eqnsb:= {-x1+x2+x3=1,x1-x2+x3=-1,x1+x2-x3=1};
```

$$eqnsb := \{-x1 + x2 + x3 = 1,\; x1 - x2 + x3 = -1,\; x1 + x2 - x3 = 1\}$$

```
> solve(eqnsb);
```

$$\{x3 = 0,\; x1 = 0,\; x2 = 1\}$$

c) $\lambda = 0$:

```
> eqnsc:= {x2+x3=1,x1+x3=0,x1+x2=0};
```

$$eqnsc := \{x2 + x3 = 1,\; x1 + x3 = 0,\; x1 + x2 = 0\}$$

Další

Příklad 10.1.4

Řešte soustavu rovnic a proveďte diskusi řešitelnosti pro parametr $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcrcrcr} \lambda x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1, \\ x_1 & + & \lambda x_2 & + & x_3 & = & \lambda, \\ x_1 & + & x_2 & + & \lambda x_3 & = & \lambda^2. \end{array}$$

Maple:

```
> solve(eqnsc);
```

$$\{x1 = \frac{-1}{2},\ x2 = \frac{1}{2},\ x3 = \frac{1}{2}\}$$

d) $\lambda = 1$:

```
> eqnsd:= {x1+x2+x3=1,x1+x2+x3=1,x1+x2+x3=1};
```

$$eqnsd := \{x1 + x2 + x3 = 1\}$$

```
> solve(eqnsd);
```

$$\{x1 = -x2 - x3 + 1,\ x2 = x2,\ x3 = x3\}$$

```
> A := genmatrix(eqnsd, [x1,x2,x3]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> nullspace(A);
```

$$\{[-1,\ 0,\ 1],\ [-1,\ 1,\ 0]\}$$

Maple nám vrátil bázi prostoru V_H.

Zpět

Příklad 10.1.4

Řešte soustavu rovnic a proveďte diskusi řešitelnosti pro parametr $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcrcrcr} \lambda x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1, \\ x_1 & + & \lambda x_2 & + & x_3 & = & \lambda, \\ x_1 & + & x_2 & + & \lambda x_3 & = & \lambda^2. \end{array}$$

Mathematica:

Nejdříve necháme Mathematicu vyřešit soustavu:

$\left\{\mathrm{x2} + \mathrm{x3} + \mathrm{x1}\lambda == 1, \mathrm{x1} + \mathrm{x3} + \mathrm{x2}\lambda == \lambda, \mathrm{x1} + \mathrm{x2} + \mathrm{x3}\lambda == \lambda^2\right\}$

Solve[eqns, {x1, x2, x3}]

$\left\{\left\{\mathrm{x1} \to -\frac{1+\lambda}{2+\lambda}, \mathrm{x2} \to \frac{1}{2+\lambda}, \mathrm{x3} \to -\frac{-1-2\lambda-\lambda^2}{2+\lambda}\right\}\right\}$

Mathematica nám vypočte pouze řešení pro taková λ, kdy existuje pouze jedno řešení. Z výsledku ale vidíme, že pro $\lambda = -2$ řešení neexistuje. Pokusíme se zjistit problematické hodnoty parametru λ. Definujeme si matici soustavy a rozšířenou matici soustavy.

$\boldsymbol{A = \{\{\lambda, 1, 1\}, \{1, \lambda, 1\}, \{1, 1, \lambda\}\}}$

$\{\{\lambda, 1, 1\}, \{1, \lambda, 1\}, \{1, 1, \lambda\}\}$

$\mathbf{Ab = \{\{\lambda, 1, 1, 1\}, \{1, \lambda, 1, \lambda\}, \{1, 1, \lambda, \lambda\hat{\ }2\}\}}$

$\left\{\{\lambda, 1, 1, 1\}, \{1, \lambda, 1, \lambda\}, \left\{1, 1, \lambda, \lambda^2\right\}\right\}$

Vypočtěme hodnoty λ, kdy determinant matice soustavy je roven 0.

Další

Příklad 10.1.4

Řešte soustavu rovnic a proveďte diskusi řešitelnosti pro parametr $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcrcrcr} \lambda x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1, \\ x_1 & + & \lambda x_2 & + & x_3 & = & \lambda, \\ x_1 & + & x_2 & + & \lambda x_3 & = & \lambda^2. \end{array}$$

Mathematica:

Solve[Det[A] == 0, λ]

$\{\{\lambda \to -2\}, \{\lambda \to 1\}, \{\lambda \to 1\}\}$

Problematické body jsou $\lambda = -2$ a $\lambda = -1$. Vyšetříme řešení pro tyto parametry.

$\boldsymbol{\lambda = -2}$

-2

RowReduce[Ab]//MatrixForm

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solve[eqns, {x1, x2, x3}]

$\{\}$

Další

Příklad 10.1.4

Řešte soustavu rovnic a proveďte diskusi řešitelnosti pro parametr $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcrcrcr} \lambda x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1, \\ x_1 & + & \lambda x_2 & + & x_3 & = & \lambda, \\ x_1 & + & x_2 & + & \lambda x_3 & = & \lambda^2. \end{array}$$

Mathematica:

$\boldsymbol{\lambda = 1}$

1

RowReduce[Ab]//MatrixForm

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Solve[eqns, {x1, x2, x3}]

Solve::svars :
Equations may not give solutions for all solve variables. More...

$\{\{\mathrm{x1} \to 1 - \mathrm{x2} - \mathrm{x3}\}\}$

Pro $\lambda = -2$ neexistuje řešení, pro $\lambda = -1$ existuje nekonečně řešení (řešení je závislé na dvou parametrech), pro ostatní hodnoty parametru λ existuje jedno řešení $x_1 = -\frac{1+\lambda}{2+\lambda}, x_2 = \frac{1}{2+\lambda}, x_3 = -\frac{-1-2\lambda-\lambda^2}{2+\lambda}$.

Zpět

Gaussova-Jordanova metoda

- **Příklad 10.2.1** Řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & 0, \\ 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 1, \\ x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 5, \\ -x_1 & + & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 4. \end{array}$$

- **Příklad 10.2.2** Gaussovou-Jordanovou metodou řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & + & x_4 & = & -5, \\ 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & 0, \\ 7x_1 & - & x_2 & + & 4x_3 & - & 3x_4 & = & 15, \\ x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & - & x_4 & = & -3. \end{array}$$

Zpět

Příklad 10.2.1

Řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & 0, \\ 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 1, \\ x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 5, \\ -x_1 & + & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 4. \end{array}$$

? Zpět

Příklad 10.2.1

Řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & 0, \\ 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 1, \\ x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 5, \\ -x_1 & + & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 4. \end{array}$$

Výsledek:

$x_1 = 0, \; x_2 = 3, \; x_3 = 2, \; x_4 = 1.$

Zpět

Příklad 10.2.1

Řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcrcl}
x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & 0, \\
2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 1, \\
x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 5, \\
-x_1 & + & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 4.
\end{array}$$

Návod:

Pomocí ekvivalentních úprav převedeme rozšířenou matici soustavy na matici

$$\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & 0 & 0 & 0 & x_1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & x_2 \\
0 & 0 & 1 & 0 & x_3 \\
0 & 0 & 0 & 1 & x_4
\end{array}\right).$$

Zpět

Příklad 10.2.1

Řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & 0, \\ 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 1, \\ x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 5, \\ -x_1 & + & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 4. \end{array}$$

Řešení:

$$(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 4 \end{array}\right) \sim^1 \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 4 \end{array}\right) \sim^2 \left(\begin{array}{rrrr|r} 3 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 10 & 16 \\ 0 & 0 & 6 & 2 & 14 \end{array}\right) \sim^3$$

$$\ldots \sim^3 \left(\begin{array}{rrrr|r} 3 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 6 & 15 \\ 0 & 0 & 3 & 10 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & -18 & -18 \end{array}\right) \sim^4 \left(\begin{array}{rrrr|r} 3 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 10 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim^5 \ldots$$

$$\ldots \sim^5 \left(\begin{array}{rrrr|r} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim^6 \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Další

Příklad 10.2.1

Řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & 0, \\ 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 1, \\ x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 5, \\ -x_1 & + & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 4. \end{array}$$

Řešení:

Ekvivalentní úpravy:

$\sim^1$: Od druhého řádku jsme odečetli dvojnásobek prvního, od třetího řádku jsme odečetli první a ke čtvrtému řádku jsme první přičetli.

$\sim^2$: Ke trojnásobku prvního řádku jsme přičetli druhý řádek, k trojnásobku třetího jsme přičetli druhý a k trojnásobku čtvrtého jsme přičetli dvojnásobek druhého.

$\sim^3$: K (-2) násobku druhého řádku jsme přičetli třetí a od čtvrtého jsme odečetli dvojnásobek třetího.

$\sim^4$: Abychom si zjednodušili počítání, vydělili jsme druhý řádek číslem 3 a poslední řádek číslem -18.

$\sim^5$: Od prvního řádku jsme odečetli poslední, od druhého jsme odečetli dvojnásobek posledního a od třetího jsme odečetli desetinásobek posledního řádku.

$\sim^6$: Nakonec vydělíme první a třetí řádek třemi, abychom získali na diagonále jedničky. Poznamenejme, že je také možné provádět úpravy tak, aby diagonální prvky byly rovny rovnou při úpravách jedné, ale v tom případě se nevyhneme počítání se zlomky (viz. Maple).

Vidíme, že $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = 4$ a $k = n - h(\mathbf{A}) = 4 - 4 = 0$ soustava má tedy právě jedno řešení $\mathbf{x} = (0, 3, 2, 1)^{\mathrm{T}}$.

Zpět

Příklad 10.2.1

Řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & 0, \\ 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 1, \\ x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 5, \\ -x_1 & + & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 4. \end{array}$$

Maple:

```
> with(linalg): with(plots):
> A:=array([[1,1,-1,-1,0],[2,-1,1,2,1],[1,2,-1,1,5],[-1,1,1,-1,4]]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

```
> B:=gaussjord(A);
```

$$B := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> x:=vector(4,[]);
```

$$x := \mathrm{array}(1..4, [])$$

Další

Příklad 10.2.1

Řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & 0, \\ 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 1, \\ x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 5, \\ -x_1 & + & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 4. \end{array}$$

Maple:

```
> for i to 4 do x[i] := B[i,5]; end do:
> print(x);
```

$$[0, 3, 2, 1]$$

Také Gausovu-Jordanovu metodu lze provádět postupně po sloupcích, např.:

```
> gaussjord(A,3);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{10}{3} & \frac{16}{3} \\ 0 & 0 & 0 & -6 & -6 \end{bmatrix}$$

Zpět

Příklad 10.2.1

Řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & 0, \\ 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 1, \\ x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 5, \\ -x_1 & + & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 4. \end{array}$$

Mathematica:

Definujeme rozšířenou matici soustavy a provedeme Gaussovu-Jordanovu eliminaci:

$\mathbf{Ab = \{\{1, 1, -1, -1, 0\}, \{2, -1, 1, 2, 1\}, \{1, 2, -1, 1, 5\},}$
$\mathbf{\{-1, 1, 1, -1, 4\}\}}$

$\{\{1, 1, -1, -1, 0\}, \{2, -1, 1, 2, 1\},$
$\{1, 2, -1, 1, 5\}, \{-1, 1, 1, -1, 4\}\}$

$\boldsymbol{B} = \mathbf{RowReduce[Ab]}$

$\{\{1, 0, 0, 0, 0\}, \{0, 1, 0, 0, 3\},$
$\{0, 0, 1, 0, 2\}, \{0, 0, 0, 1, 1\}\}$

$\boldsymbol{B}\mathbf{//MatrixForm}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\mathbf{reseni = Transpose[}\boldsymbol{B}\mathbf{][[5]]}$

$\{0, 3, 2, 1\}$

Zpět

Příklad 10.2.2

Gaussovou-Jordanovou metodou řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & + & x_4 & = & -5, \\
2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & 0, \\
7x_1 & - & x_2 & + & 4x_3 & - & 3x_4 & = & 15, \\
x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & - & x_4 & = & -3.
\end{array}$$

?

Zpět

Příklad 10.2.2

Gaussovou-Jordanovou metodou řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & + & x_4 & = & -5, \\
2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & 0, \\
7x_1 & - & x_2 & + & 4x_3 & - & 3x_4 & = & 15, \\
x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & - & x_4 & = & -3.
\end{array}$$

Výsledek:

$x_1 = 1,\ x_2 = 0,\ x_3 = 2,\ x_4 = 0.$

Zpět

Příklad 10.2.2

Gaussovou-Jordanovou metodou řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & + & x_4 & = & -5, \\ 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & 0, \\ 7x_1 & - & x_2 & + & 4x_3 & - & 3x_4 & = & 15, \\ x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & - & x_4 & = & -3. \end{array}$$

Návod:

Pomocí ekvivalentních úprav převedeme rozšířenou matici soustavy na matici

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_4 \end{array}\right).$$

Zpět

Příklad 10.2.2

Gaussovou-Jordanovou metodou řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & + & x_4 & = & -5, \\ 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & 0, \\ 7x_1 & - & x_2 & + & 4x_3 & - & 3x_4 & = & 15, \\ x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & - & x_4 & = & -3. \end{array}$$

Řešení:

$$(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -3 & 1 & -5 \\ 2 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ 7 & -1 & 4 & -3 & 15 \\ 1 & 1 & -2 & -1 & -3 \end{array}\right) \sim^1 \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -3 & 1 & -5 \\ 0 & -1 & 5 & 0 & 10 \\ 0 & -15 & 25 & -10 & 50 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 2 \end{array}\right) \sim^2 \dots$$

$$\dots \sim^2 \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 7 & 3 & 15 \\ 0 & -1 & 5 & 0 & 10 \\ 0 & 3 & -5 & 2 & -10 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 2 \end{array}\right) \sim^3 \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 7 & 3 & 15 \\ 0 & -1 & 5 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 10 & 2 & 20 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 8 \end{array}\right) \sim^4 \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 7 & 3 & 15 \\ 0 & -1 & 5 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 4 \end{array}\right) \sim^5 \dots$$

$$\dots \sim^5 \left(\begin{array}{rrrr|r} -5 & 0 & 0 & -8 & -5 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim^6 \left(\begin{array}{rrrr|r} -15 & 0 & 0 & 0 & -15 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -15 & 0 & -30 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim^7 \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Další

Příklad 10.2.2

Gaussovou-Jordanovou metodou řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & + & x_4 & = & -5, \\ 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & 0, \\ 7x_1 & - & x_2 & + & 4x_3 & - & 3x_4 & = & 15, \\ x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & - & x_4 & = & -3. \end{array}$$

Řešení:

Ekvivalentní úpravy:
$\sim^1$: Od druhého řádku jsme odečetli dvojnásobek prvního, od třetího řádku jsme odečetli sedminásobek prvního a od čtvrtého řádku jsme první odečetli.
$\sim^2$: K prvnímu řádku jsme přičetli dvojnásobek druhého řádku, třetí řádek jsme vydělili číslem -5.
$\sim^3$: K třetímu řádku jsme přičetli trojnásobek druhého, k (-1)krát čtvrtému řádku jsme přičetli druhý.
$\sim^4$: Vydělili jsme třetí a čtvrtý řádek číslem 2.
$\sim^5$: K (-5)tinásobku prvního řádku jsme přičetli sedminásobek třetího, od druhého řádku jsme odečetli třetí, od pětinásobku čtvrtého řádku jsme odečetli dvojnásobek třetího.
$\sim^6$: K trojnásobku prvního řádku jsme přičetli osminásobek čtvrtého, k trojnásobku druhého jsme přičetli čtvrtý a k (-3)násobku třetího jsme přičetli poslední řádek.
$\sim^7$: Nakonec vydělíme každý řádek diagonálním prvkem, abychom získali na diagonále jedničky.
Soustava má právě jedno řešení $\mathbf{x} = (1, 0, 2, 0)^{\mathrm{T}}$.

Zpět

Příklad 10.2.2

Gaussovou-Jordanovou metodou řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & + & x_4 & = & -5, \\ 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & 0, \\ 7x_1 & - & x_2 & + & 4x_3 & - & 3x_4 & = & 15, \\ x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & - & x_4 & = & -3. \end{array}$$

Maple:

```
> with(linalg):
> A := array(
[[1,2,-3,1,-5],[2,3,-1,2,0],[7,-1,4,-3,15],[1,1,-2,-1,-3]] );
```

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & -5 \\ 2 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ 7 & -1 & 4 & -3 & 15 \\ 1 & 1 & -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

```
> B:=gaussjord(A);
```

$$B := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> x:=vector(4,[]);
```

$$x := \mathrm{array}(1..4,\ [])$$

Další

Příklad 10.2.2

Gaussovou-Jordanovou metodou řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & + & x_4 & = & -5, \\
2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & 0, \\
7x_1 & - & x_2 & + & 4x_3 & - & 3x_4 & = & 15, \\
x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & - & x_4 & = & -3.
\end{array}$$

Maple:

```
> for i to 4 do x[i] := B[i,5]; end do:
> print(x);
```

$$[1, 0, 2, 0]$$

Zpět

Příklad 10.2.2

Gaussovou-Jordanovou metodou řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & + & x_4 & = & -5, \\ 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & 0, \\ 7x_1 & - & x_2 & + & 4x_3 & - & 3x_4 & = & 15, \\ x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & - & x_4 & = & -3. \end{array}$$

Mathematica:

Definujeme rozšířenou matici soustavy a provedeme Gaussovu-Jordanovu eliminaci:

Ab = {{1, 2, −3, 1, −5}, {2, 3, −1, 2, 0}, {7, −1, 4, −3, 15}, {1, 1, −2, −1, −3}}

{{1, 2, −3, 1, −5}, {2, 3, −1, 2, 0}, {7, −1, 4, −3, 15}, {1, 1, −2, −1, −3}}

***B* = RowReduce[Ab]**

{{1, 0, 0, 0, 1}, {0, 1, 0, 0, 0}, {0, 0, 1, 0, 2}, {0, 0, 0, 1, 0}}

***B*//MatrixForm**

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

reseni = Transpose[*B*][[5]]

{1, 0, 2, 0}

Zpět

Inverzní matice

- **Příklad 10.3.1** Pomocí inverzní matice řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcr} 4x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 7, \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 7, \\ x_1 & - & 4x_2 & - & 4x_3 & = & 7. \end{array}$$

- **Příklad 10.3.2** Pomocí inverzní matice řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & = & -4, \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 6, \\ x_1 & & & + & x_3 & = & 5. \end{array}$$

  Výsledek znázorněte graficky.

Zpět

Příklad 10.3.1

Pomocí inverzní matice řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcl} 4x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 7, \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 7, \\ x_1 & - & 4x_2 & - & 4x_3 & = & 7. \end{array}$$

? Zpět

Příklad 10.3.1

Pomocí inverzní matice řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcl} 4x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 7, \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 7, \\ x_1 & - & 4x_2 & - & 4x_3 & = & 7. \end{array}$$

Výsledek:

$x_1 = 3,\ x_2 = -2,\ x_3 = 1\,.$

Zpět

Příklad 10.3.1

Pomocí inverzní matice řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcr} 4x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 7, \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 7, \\ x_1 & - & 4x_2 & - & 4x_3 & = & 7. \end{array}$$

Návod:

Nejprve ověříme, že matice soustavy je regulární, pak vypočteme inverzní matici, kterou zprava vynásobíme vektorem pravé strany.

Zpět

Příklad 10.3.1

Pomocí inverzní matice řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcl} 4x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 7, \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 7, \\ x_1 & - & 4x_2 & - & 4x_3 & = & 7. \end{array}$$

Řešení:

Matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -4 & -4 \end{pmatrix}$ je regulární, protože (determinant je počítán rozvojem podle prvního sloupce)

$$\det\mathbf{A} = 4\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -4 & -4 \end{vmatrix} + 2\cdot(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -4 & -4 \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 4(-4+12) - 2(-12+4) + 1(9-1) = 56 \neq 0.$$

Nyní vypočteme inverzní matici pomocí Gaussovy-Jordanovy metody:

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 4 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim^1 \left(\begin{array}{rrr|rrr} 4 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 19 & 17 & 1 & 0 & -4 \end{array}\right) \sim^2 \left(\begin{array}{rrr|rrr} 4 & 0 & 16 & -2 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 112 & -18 & 38 & -4 \end{array}\right) \ldots$$

Další

Příklad 10.3.1

Pomocí inverzní matice řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcl} 4x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 7, \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 7, \\ x_1 & - & 4x_2 & - & 4x_3 & = & 7. \end{array}$$

Řešení:

$$\dots \sim^3 \left(\begin{array}{rrr|rrr} -28 & 0 & 0 & -4 & -4 & -4 \\ 0 & 112 & 0 & 22 & -34 & -20 \\ 0 & 0 & 112 & -18 & 38 & -4 \end{array} \right) \sim^4 \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{11}{56} & -\frac{17}{56} & -\frac{5}{28} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{9}{56} & \frac{19}{56} & -\frac{1}{28} \end{array} \right).$$

Ekvivalentní úpravy:
$\sim^1$: (-2)krát 2.řádek + 1. řádek, (-4)krát 3. řádek + 1. řádek; $\sim^2$: 1.řádek + (-3)krát 2. řádek, 3. řádek + (-19)krát 2. řádek;
$\sim^3$: (-7)krát 1.řádek + 3. řádek, 112krát 2. řádek + 5krát 3. řádek; $\sim^4$: vydělení každého řádku diagonálním prvkem.
Tedy

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{56} \begin{pmatrix} 8 & 8 & 8 \\ 11 & -17 & -10 \\ -9 & 19 & -2 \end{pmatrix} \qquad \text{a konečně}$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} = \frac{1}{56} \begin{pmatrix} 8 & 8 & 8 \\ 11 & -17 & -10 \\ -9 & 19 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{56} \begin{pmatrix} 56+56+56 \\ 77-119-70 \\ -63+133-14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Zpět

Příklad 10.3.1

Pomocí inverzní matice řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcl} 4x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 7, \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 7, \\ x_1 & - & 4x_2 & - & 4x_3 & = & 7. \end{array}$$

Maple:

```
> with(linalg):
> A := array( [[4,3,1],[2,1,3],[1,-4,-4]] );
```

$$A := \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -4 & -4 \end{bmatrix}$$

```
> det(A);
```

$$56$$

```
> B:=inverse(A);
```

$$B := \begin{bmatrix} \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{11}{56} & \frac{-17}{56} & \frac{-5}{28} \\ \frac{-9}{56} & \frac{19}{56} & \frac{-1}{28} \end{bmatrix}$$

Další

Příklad 10.3.1

Pomocí inverzní matice řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcl} 4x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 7, \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 7, \\ x_1 & - & 4x_2 & - & 4x_3 & = & 7. \end{array}$$

Maple:

```
> b:=vector([[7],[7],[7]]);
```

$$b := [[7],\ [7],\ [7]]$$

```
> x:=B&*b;
```

$$x := B \mathbin{\&*} b$$

```
> evalm(x);
```

$$\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Zpět

Příklad 10.3.1

Pomocí inverzní matice řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcl} 4x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 7, \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 7, \\ x_1 & - & 4x_2 & - & 4x_3 & = & 7. \end{array}$$

Mathematica:

$\boldsymbol{A = \{\{4,3,1\},\{2,1,3\},\{1,-4,-4\}\};}$
$\boldsymbol{b = \{7,7,7\};}$

A1 = Inverse[*A*]

$\left\{\left\{\frac{1}{7},\frac{1}{7},\frac{1}{7}\right\},\left\{\frac{11}{56},-\frac{17}{56},-\frac{5}{28}\right\},\left\{-\frac{9}{56},\frac{19}{56},-\frac{1}{28}\right\}\right\}$

Inverzní matice je tedy tvaru:

A1//MatrixForm

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{11}{56} & -\frac{17}{56} & -\frac{5}{28} \\ -\frac{9}{56} & \frac{19}{56} & -\frac{1}{28} \end{pmatrix}$$

Řešení:

$\boldsymbol{x = \mathbf{A1}.b}$

$\{3,-2,1\}$

Zpět

Příklad 10.3.2

Pomocí inverzní matice řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 2x_1 &+ x_2 &- 3x_3 &= -4, \\ x_1 &+ x_2 &+ x_3 &= 6, \\ x_1 & &+ x_3 &= 5. \end{aligned}$$

Výsledek znázorněte graficky.

? Zpět

Příklad 10.3.2

Pomocí inverzní matice řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & = & -4, \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 6, \\ x_1 & & & + & x_3 & = & 5. \end{array}$$

Výsledek znázorněte graficky.

Výsledek:

$x_1 = 2,\ x_2 = 1,\ x_3 = 3$. Graficky úloha představuje průnik tří rovin. V tomto případě je průnikem bod - viz Maple.

Zpět

Příklad 10.3.2

Pomocí inverzní matice řešte soustavu rovnic

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
2x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & = & -4, \\
x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 6, \\
x_1 & & & + & x_3 & = & 5.
\end{array}
$$

Výsledek znázorněte graficky.

Návod:

Nejprve ověříme, že matice soustavy je regulární, pak vypočteme inverzní matici, kterou zprava vynásobíme vektorem pravé strany.

Zpět

Příklad 10.3.2

Pomocí inverzní matice řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & = & -4, \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 6, \\ x_1 & & & + & x_3 & = & 5. \end{array}$$

Výsledek znázorněte graficky.

Řešení:

Matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ je regulární ($\det A \neq 0$).

$$\det \mathbf{A} = 1 \cdot (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1(1+3) + 1(2-1) = 5 \neq 0.$$

Nyní vypočteme inverzní matici pomocí Gaussovy-Jordanovy metody:

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 2 & 1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim^1 \left(\begin{array}{rrr|rrr} 2 & 1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right) \sim^2 \left(\begin{array}{rrr|rrr} 2 & 0 & -8 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -10 & 2 & -2 & -2 \end{array}\right)$$

$$\ldots \sim^3 \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & -4 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim^4 \left(\begin{array}{rrr|rrr} 5 & 0 & 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim^5 \ldots$$

Další

Příklad 10.3.2

Pomocí inverzní matice řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & = & -4, \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 6, \\ x_1 & & & + & x_3 & = & 5. \end{array}$$

Výsledek znázorněte graficky.

Řešení:

$$\dots \sim^5 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{4}{5} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{array} \right).$$

Ekvivalentní úpravy:
$\sim^1$: (-2)krát 2.řádek + 1. řádek, (-2)krát 3. řádek + 1. řádek;
$\sim^2$: 1.řádek + 2. řádek, 3. řádek + 2. řádek;
$\sim^3$: první a třetí řádek vydělíme 2;
$\sim^4$: 5krát 1.řádek + (-4)krát 3. řádek, 2. řádek - 3. řádek;
$\sim^5$: vydělení každého řádku diagonálním prvkem.
Tedy

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 5 & -5 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{a konečně}$$

Další

Příklad 10.3.2

Pomocí inverzní matice řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & = & -4, \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 6, \\ x_1 & & & + & x_3 & = & 5. \end{array}$$

Výsledek znázorněte graficky.

Řešení:

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 5 & -5 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -4-6+20 \\ 0+30-25 \\ 4+6+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Graficky úloha představuje průnik tří rovin. V tomto případě je průnikem bod. Grafické řešení - viz. Maple.

Zpět

Příklad 10.3.2

Pomocí inverzní matice řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & = & -4, \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 6, \\ x_1 & & & + & x_3 & = & 5. \end{array}$$

Výsledek znázorněte graficky.

Maple:

```
> with(linalg): with(plots):
> A := array( [[2,1,-3],[1,1,1],[1,0,1]] );
```

$$A := \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> det(A);
```

$$5$$

```
> B:=inverse(A);
```

$$B := \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{-1}{5} & \frac{4}{5} \\ 0 & 1 & -1 \\ \frac{-1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

Další

Příklad 10.3.2

Pomocí inverzní matice řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & = & -4, \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 6, \\ x_1 & & & + & x_3 & = & 5. \end{array}$$

Výsledek znázorněte graficky.

Maple:

```
> b:=array([[-4],[6],[5]]);
```

$$b := \begin{bmatrix} -4 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix}$$

```
> x:=evalm(B&*b);
```

$$x := \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Graficky představuje řešení soustavy tří rovnic o třech neznámých hledání průsečnice tří rovin, které jsou zadány obecnými rovnicemi odpovídajícími řádkům rozšířené matice soustavy. Protože soustava má právě jedno řešení, mají tyto tři roviny jeden společný bod.

```
> implicitplot3d({2*x+y-3*z=-4,x+y+z=6,x+z=5},x=1..3,y=0..2,z=2..4,
axes=boxed);
```

Další

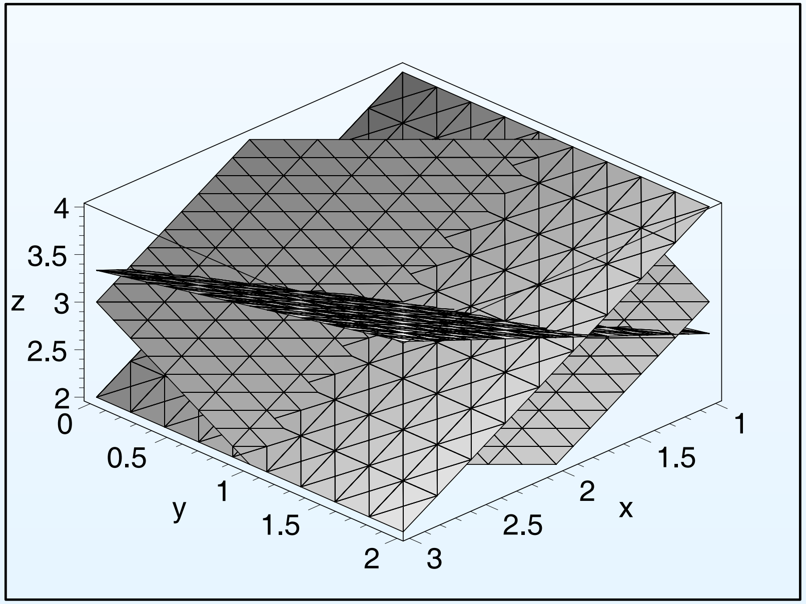
Příklad 10.3.2

Pomocí inverzní matice řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & = & -4, \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 6, \\ x_1 & & & + & x_3 & = & 5. \end{array}$$

Výsledek znázorněte graficky.

Maple:



Zpět

Příklad 10.3.2

Pomocí inverzní matice řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & = & -4, \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 6, \\ x_1 & & & + & x_3 & = & 5. \end{array}$$

Výsledek znázorněte graficky.

Mathematica:

$\boldsymbol{A = \{\{2, 1, -3\}, \{1, 1, 1\}, \{1, 0, 1\}\};}$
$\boldsymbol{b = \{4, 6, 5\};}$

$\mathbf{A1 = Inverse}[\boldsymbol{A}]$

$\left\{\left\{\frac{1}{5}, -\frac{1}{5}, \frac{4}{5}\right\}, \{0, 1, -1\}, \left\{-\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right\}\right\}$

Inverzní matice je tedy tvaru:

A1//MatrixForm

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{4}{5} \\ 0 & 1 & -1 \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

Inverzní matice pomocí Gaussovy-Jordánovy eliminace:

$\mathbf{AE = \{\{2, 1, -3, 1, 0, 0\}, \{1, 1, 1, 0, 1, 0\},}$
$\mathbf{\{1, 0, 1, 0, 0, 1\}\};}$

Další

Příklad 10.3.2

Pomocí inverzní matice řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & = & -4, \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 6, \\ x_1 & & & + & x_3 & = & 5. \end{array}$$

Výsledek znázorněte graficky.

Mathematica:

RowReduce[AE]//MatrixForm

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{4}{5} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{x} = \mathbf{A1}.\boldsymbol{b}$

$\left\{ \frac{18}{5}, 1, \frac{7}{5} \right\}$

Graficky představuje řešení soustavy tří rovnic o třech neznámých hledání průsečnice tří rovin, které jsou zadány obecnými rovnicemi odpovídajícími řádkům rozšířené matice soustavy. Protože soustava má právě jedno řešení, mají tyto tři roviny jeden společný bod.

r1 = 4 − 2x1 − x2;
r2 = 6 − x2 − x1;
r3 = 5 − x1;

Další

Příklad 10.3.2

Pomocí inverzní matice řešte soustavu rovnic

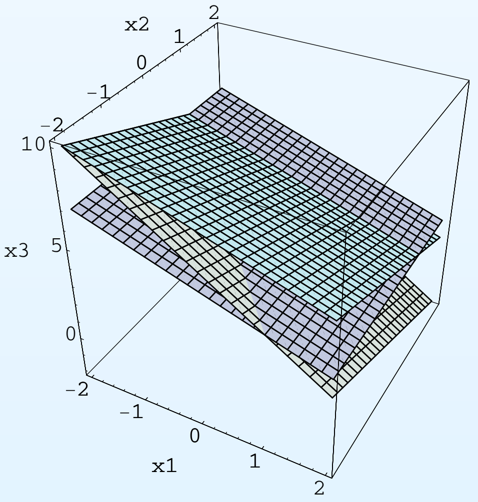
$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & = & -4, \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 6, \\ x_1 & & & + & x_3 & = & 5. \end{array}$$

Výsledek znázorněte graficky.

Mathematica:

g1 = Plot3D[r1, {x1, −2, 2}, {x2, −2, 2},DisplayFunction → Identity];
g2 = Plot3D[r2, {x1, −2, 2}, {x2, −2, 2},DisplayFunction → Identity];
g3 = Plot3D[r3, {x1, −2, 2}, {x2, −2, 2},DisplayFunction → Identity];

Show[{g1, g2, g3}, DisplayFunction → $DisplayFunction,
BoxRatios → {1, 1, 1}, AxesLabel → {x1, x2, x3}];



Zpět

Cramerovo pravidlo

- Příklad 10.4.1 Cramerovým pravidlem řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcr} 5x_1 & + & 6x_2 & = & -3, \\ 4x_1 & - & 3x_2 & = & 1. \end{array}$$

- Příklad 10.4.2 Pomocí Cramerova pravidla řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcr} 5x_1 & - & 6x_2 & + & 4x_3 & = & 3, \\ 3x_1 & & & + & 2x_3 & = & 5, \\ 4x_1 & - & 5x_2 & + & 2x_3 & = & 1. \end{array}$$

Zpět

Příklad 10.4.1

Cramerovým pravidlem řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcr} 5x_1 & + & 6x_2 & = & -3, \\ 4x_1 & - & 3x_2 & = & 1. \end{array}$$

? Zpět

Příklad 10.4.1

Cramerovým pravidlem řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 5x_1 &+ 6x_2 = -3, \\ 4x_1 &- 3x_2 = 1. \end{aligned}$$

Výsledek:

$x_1 = -\dfrac{1}{13},\ x_2 = -\dfrac{17}{39}.$

Zpět

Příklad 10.4.1

Cramerovým pravidlem řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcr} 5x_1 & + & 6x_2 & = & -3, \\ 4x_1 & - & 3x_2 & = & 1. \end{array}$$

Návod:

Vypočteme příslušné determinanty D, D_1 a D_2 a jednotlivé složky řešení

$$x_1 = \frac{\mathrm{D}_1}{\mathrm{D}},\ x_2 = \frac{\mathrm{D}_2}{\mathrm{D}}.$$

Zpět

Příklad 10.4.1

Cramerovým pravidlem řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcr} 5x_1 & + & 6x_2 & = & -3, \\ 4x_1 & - & 3x_2 & = & 1. \end{array}$$

Řešení:

$$\mathrm{D} = \det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -15 - 24 = -39,$$

$$\mathrm{D}_1 = \det \mathbf{A}_1 = \begin{vmatrix} -3 & 6 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 9 - 6 = 3, \qquad \mathrm{D}_2 = \det \mathbf{A}_2 = \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 5 + 12 = 17.$$

$$x_1 = \frac{\mathrm{D}_1}{\mathrm{D}} = -\frac{3}{39} = -\frac{1}{13}, \quad x_2 = \frac{\mathrm{D}_2}{\mathrm{D}} = -\frac{17}{39}.$$

Zpět

Příklad 10.4.1

Cramerovým pravidlem řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcr} 5x_1 & + & 6x_2 & = & -3, \\ 4x_1 & - & 3x_2 & = & 1. \end{array}$$

Maple:

```
> with(linalg):
> x1:=det(array([[-3,6],[1,-3]]))/det(array( [[5,6],[4,-3]] ));
```

$$x1 := \frac{-1}{13}$$

```
> x2:=det(array([[5,-3],[4,1]]))/det(array( [[5,6],[4,-3]] ));
```

$$x2 := \frac{-17}{39}$$

Zpět

Příklad 10.4.1

Cramerovým pravidlem řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcr} 5x_1 & + & 6x_2 & = & -3, \\ 4x_1 & - & 3x_2 & = & 1. \end{array}$$

Mathematica:

$\boldsymbol{A = \{\{5,6\},\{4,-3\}\}}$

$\{\{5,6\},\{4,-3\}\}$

$\mathbf{A1 = \{\{-3,6\},\{1,-3\}\}}$

$\{\{-3,6\},\{1,-3\}\}$

$\mathbf{A2 = \{\{5,-3\},\{4,1\}\}}$

$\{\{5,-3\},\{4,1\}\}$

$\mathbf{x1 = Det[A1]/Det[A1]}$

1

$\mathbf{x2 = Det[A2]/Det[A1]}$

$\frac{17}{3}$

$\boldsymbol{x} = \mathbf{\{x1, x2\}}$

$\left\{1, \frac{17}{3}\right\}$

Zpět

Příklad 10.4.2

Pomocí Cramerova pravidla řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcr} 5x_1 & - & 6x_2 & + & 4x_3 & = & 3, \\ 3x_1 & & & + & 2x_3 & = & 5, \\ 4x_1 & - & 5x_2 & + & 2x_3 & = & 1. \end{array}$$

? Zpět

Příklad 10.4.2

Pomocí Cramerova pravidla řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcr} 5x_1 & - & 6x_2 & + & 4x_3 & = & 3, \\ 3x_1 & & & + & 2x_3 & = & 5, \\ 4x_1 & - & 5x_2 & + & 2x_3 & = & 1. \end{array}$$

Výsledek:

$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}} = (1, 1, 1)^{\mathrm{T}}.$

Zpět

Příklad 10.4.2

Pomocí Cramerova pravidla řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcl} 5x_1 & - & 6x_2 & + & 4x_3 & = & 3, \\ 3x_1 & & & + & 2x_3 & = & 5, \\ 4x_1 & - & 5x_2 & + & 2x_3 & = & 1. \end{array}$$

Návod:

Vypočteme příslušné determinanty D, D_1, D_2 a D_3 a jednotlivé složky řešení

$$x_1 = \frac{\mathrm{D}_1}{\mathrm{D}},\ x_2 = \frac{\mathrm{D}_2}{\mathrm{D}},\ x_3 = \frac{\mathrm{D}_3}{\mathrm{D}}.$$

Zpět

Příklad 10.4.2

Pomocí Cramerova pravidla řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcr} 5x_1 & - & 6x_2 & + & 4x_3 & = & 3, \\ 3x_1 & & & + & 2x_3 & = & 5, \\ 4x_1 & - & 5x_2 & + & 2x_3 & = & 1. \end{array}$$

Řešení:

Vypočteme determinanty D (rozvojem podle 2. řádku), D_1 (rozvojem podle 2. řádku), D_2 (rozvojem podle 1. řádku) a D_3 (rozvojem podle 2. řádku):

$$D = \det \begin{vmatrix} 5 & -6 & 4 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -5 & 2 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} -6 & 4 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 5 & -6 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = -3(-12+20)-2(-25+24) = -22.$$

$$D_1 = \det \begin{vmatrix} 3 & -6 & 4 \\ 5 & 0 & 2 \\ 1 & -5 & 2 \end{vmatrix} = -5 \begin{vmatrix} -6 & 4 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = -5(-12+20)-2(-15+6) = -22.$$

$$D_2 = \det \begin{vmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 5\cdot 8-3\cdot(-2)+4\cdot(-17) = -22.$$

Další

Příklad 10.4.2

Pomocí Cramerova pravidla řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcl} 5x_1 & - & 6x_2 & + & 4x_3 & = & 3, \\ 3x_1 & & & + & 2x_3 & = & 5, \\ 4x_1 & - & 5x_2 & + & 2x_3 & = & 1. \end{array}$$

Řešení:

$$\mathrm{D}_3 = \det \begin{vmatrix} 5 & -6 & 3 \\ 3 & 0 & 5 \\ 4 & -5 & 1 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} -6 & 3 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 5 & -6 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = -3(-6+15)-5(-25+24) = -22.$$

$$x_1 = \frac{\mathrm{D}_1}{\mathrm{D}} = 1, \quad x_2 = \frac{\mathrm{D}_2}{\mathrm{D}} = 1, \quad x_3 = \frac{\mathrm{D}_3}{\mathrm{D}} = 1.$$

Zpět

Příklad 10.4.2

Pomocí Cramerova pravidla řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcl} 5x_1 & - & 6x_2 & + & 4x_3 & = & 3, \\ 3x_1 & & & + & 2x_3 & = & 5, \\ 4x_1 & - & 5x_2 & + & 2x_3 & = & 1. \end{array}$$

Maple:

```
> with(linalg):
> A := array( [[5,-6,4],[3,0,2],[4,-5,2]] );
```

$$A := \begin{bmatrix} 5 & -6 & 4 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -5 & 2 \end{bmatrix}$$

```
> A1 := array( [[3,-6,4],[5,0,2],[1,-5,2]] );
```

$$A1 := \begin{bmatrix} 3 & -6 & 4 \\ 5 & 0 & 2 \\ 1 & -5 & 2 \end{bmatrix}$$

```
> A2 := array( [[5,3,4],[3,5,2],[4,1,2]] );
```

$$A2 := \begin{bmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Další

Příklad 10.4.2

Pomocí Cramerova pravidla řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcl} 5x_1 & - & 6x_2 & + & 4x_3 & = & 3, \\ 3x_1 & & & + & 2x_3 & = & 5, \\ 4x_1 & - & 5x_2 & + & 2x_3 & = & 1. \end{array}$$

Maple:

```
> A3 := array( [[5,-6,3],[3,0,5],[4,-5,1]] );
```

$$A3 := \begin{bmatrix} 5 & -6 & 3 \\ 3 & 0 & 5 \\ 4 & -5 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> x1:=det(A1)/det(A); x2:=det(A2)/det(A); x3:=det(A3)/det(A);
```

$$x1 := 1$$

$$x2 := 1$$

$$x3 := 1$$

Zpět

Příklad 10.4.2

Pomocí Cramerova pravidla řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcl} 5x_1 & - & 6x_2 & + & 4x_3 & = & 3, \\ 3x_1 & & & + & 2x_3 & = & 5, \\ 4x_1 & - & 5x_2 & + & 2x_3 & = & 1. \end{array}$$

Mathematica:

$\boldsymbol{A = \{\{5, -6, 4\}, \{3, 0, 2\}, \{4, -5, 2\}\}}$

$\{\{5, -6, 4\}, \{3, 0, 2\}, \{4, -5, 2\}\}$

A1 = {{3, −6, 4}, {5, 0, 2}, {1, −5, 2}}

$\{\{3, -6, 4\}, \{5, 0, 2\}, \{1, -5, 2\}\}$

A2 = {{5, 3, 4}, {3, 5, 2}, {4, 1, 2}}

$\{\{5, 3, 4\}, \{3, 5, 2\}, \{4, 1, 2\}\}$

A3 = {{5, −6, 3}, {3, 0, 5}, {4, −5, 1}}

$\{\{5, -6, 3\}, \{3, 0, 5\}, \{4, -5, 1\}\}$

x1 = Det[A1]/Det[A1];

x2 = Det[A2]/Det[A1];

x3 = Det[A3]/Det[A1];

$\boldsymbol{x = \{\mathrm{x1}, \mathrm{x2}, \mathrm{x3}\}}$

$\{1, 1, 1\}$

Zpět