Geometrie v $\mathbb{R}^n$ zvláště v $\mathbb{R}^3$

- Euklidovský prostor $\mathbb{R}^n$
- Norma, úhel vektorů, skalární a vektorový součin
- Parametrické rovnice přímky
- Parametrické rovnice roviny
- Obecná rovnice roviny

Euklidovský prostor $\mathbb{R}^n$

- **Příklad 11.1.1** Určete vektor $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = B - A$ s počátečním bodem $A = (2, 3, 0)$ a koncovým bodem $B = (9, 9, 1)$.
- **Příklad 11.1.2** Určete vzdálenost bodů $A = (2, 3, 0)$ a $B = (9, 9, 1)$.

Zpět

Příklad 11.1.1

Určete vektor $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = B - A$ s počátečním bodem $A = (2, 3, 0)$ a koncovým bodem $B = (9, 9, 1)$.

Zpět

Příklad 11.1.1

Určete vektor $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = B - A$ s počátečním bodem $A = (2, 3, 0)$ a koncovým bodem $B = (9, 9, 1)$.

Výsledek:

$\vec{v} = (7, 6, 1)$.

Zpět

Příklad 11.1.1

Určete vektor $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = B - A$ s počátečním bodem $A = (2, 3, 0)$ a koncovým bodem $B = (9, 9, 1)$.

Řešení:

$\vec{v} = \overrightarrow{AB} = B - A = (9, 9, 1) - (2, 3, 0) = (7, 6, 1)$.

Zpět

Příklad 11.1.1

Určete vektor $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = B - A$ s počátečním bodem $A = (2, 3, 0)$ a koncovým bodem $B = (9, 9, 1)$.

Maple:

```
> a:=<2,3,0>;
```

$$a := \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

```
> b:=<9,9,1>;
```

$$b := \begin{bmatrix} 9 \\ 9 \\ 1 \end{bmatrix}$$

```
> v:=b-a;
```

$$v := \begin{bmatrix} 7 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Zpět

Příklad 11.1.1

Určete vektor $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = B - A$ s počátečním bodem $A = (2, 3, 0)$ a koncovým bodem $B = (9, 9, 1)$.

Mathematica:

$\boldsymbol{a = \{2, 3, 0\}}$

$\{2, 3, 0\}$

$\boldsymbol{b = \{9, 9, 1\}}$

$\{9, 9, 1\}$

$\boldsymbol{v = b - a}$

$\{7, 6, 1\}$

Zpět

Příklad 11.1.2

Určete vzdálenost bodů $A = (2, 3, 0)$ a $B = (9, 9, 1)$.

Zpět

Příklad 11.1.2

Určete vzdálenost bodů $A = (2, 3, 0)$ a $B = (9, 9, 1)$.

Výsledek:

Vzdálenost bodů A a B je $\rho(A, B) = \sqrt{86} \doteq 9{,}27$.

Zpět

Příklad 11.1.2

Určete vzdálenost bodů $A = (2, 3, 0)$ a $B = (9, 9, 1)$.

Řešení:

$\rho(A, B) = \sqrt{(9-2)^2 + (9-3)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{86} \doteq 9{,}27.$

Zpět

Příklad 11.1.2

Určete vzdálenost bodů $A = (2, 3, 0)$ a $B = (9, 9, 1)$.

Maple:

```
> with(LinearAlgebra):
> a:=<2,3,0>;
```

$$a := \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

```
> b:=<9,9,1>;
```

$$b := \begin{bmatrix} 9 \\ 9 \\ 1 \end{bmatrix}$$

```
> v:=b-a;
```

$$v := \begin{bmatrix} 7 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}$$

```
> r:=Norm(v,2);
```

$$r := \sqrt{86}$$

```
> evalf(r);
```

$$9.273618495$$

Zpět

Příklad 11.1.2

Určete vzdálenost bodů $A = (2, 3, 0)$ a $B = (9, 9, 1)$.

Mathematica:

$\boldsymbol{a = \{2, 3, 0\}}$

$\{2, 3, 0\}$

$\boldsymbol{b = \{9, 9, 1\}}$

$\{9, 9, 1\}$

$\boldsymbol{v = b - a}$

$\{7, 6, 1\}$

$\boldsymbol{r = \mathbf{Norm}[v]}$

$\sqrt{86}$

$\boldsymbol{N[r]}$

9.27362

Zpět

Norma, úhel vektorů, skalární a vektorový součin

- Příklad 11.2.1 Spočtěte skalární součin vektorů $\vec{u} = (3, 2, 4)$ a $\vec{v} = (1, 2, 5)$.
- Příklad 11.2.2 Spočtěte normu vektoru $\vec{v} = (2, 3, 4)$.
- Příklad 11.2.3 Spočtěte úhel vektorů $\vec{u} = (3, 2, 4)$ a $\vec{v} = (1, 2, 5)$.
- Příklad 12.2.4 Najděte jednotkový vektor příslušný k vektoru $\vec{v} = (6, 0, 8)$.
- Příklad 12.2.5 Najděte pravoúhlou složku vektoru $\vec{u} = (1, 1, 5)$ ve směru vektoru $\vec{v} = (6, 0, 8)$.
- Příklad 12.2.6 Spočtěte vektorový součin vektorů $\vec{u} = (3, 2, 4)$ a $\vec{v} = (1, 2, 5)$.
- Příklad 12.2.7 Spočtěte smíšený součin vektorů $\vec{a} = (7, 4, 5)$, $\vec{b} = (2, 8, 3)$ a $\vec{c} = (1, 9, 6)$.

Zpět

Příklad 11.2.1

Spočtěte skalární součin vektorů $\vec{u} = (3, 2, 4)$ a $\vec{v} = (1, 2, 5)$.

Zpět

Příklad 11.2.1

Spočtěte skalární součin vektorů $\vec{u} = (3, 2, 4)$ a $\vec{v} = (1, 2, 5)$.

Výsledek:

Skalární součin vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$ je $\vec{u} \cdot \vec{v} = 27$.

Zpět

Příklad 11.2.1

Spočtěte skalární součin vektorů $\vec{u} = (3, 2, 4)$ a $\vec{v} = (1, 2, 5)$.

Řešení:

$\vec{u} \cdot \vec{v} = (3, 2, 4) \cdot (1, 2, 5) = 3 \times 1 + 2 \times 2 + 4 \times 5 = 27.$

Zpět

Příklad 11.2.1

Spočtěte skalární součin vektorů $\vec{u} = (3, 2, 4)$ a $\vec{v} = (1, 2, 5)$.

Maple:

```
> with(LinearAlgebra):
> u:=<3,2,4>;
```

$$u := \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

```
> v:=<1,2,5>;
```

$$v := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

```
> u.v;
```

$$27$$

Zpět

Příklad 11.2.1

Spočtěte skalární součin vektorů $\vec{u} = (3, 2, 4)$ a $\vec{v} = (1, 2, 5)$.

Mathematica:

$\boldsymbol{u = \{3, 2, 4\}}$

$\{3, 2, 4\}$

$\boldsymbol{v = \{1, 2, 5\}}$

$\{1, 2, 5\}$

$\boldsymbol{u.v}$

27

Zpět

Příklad 11.2.2

Spočtěte normu vektoru $\vec{v} = (2, 3, 4)$.

Zpět

Příklad 11.2.2

Spočtěte normu vektoru $\vec{v} = (2, 3, 4)$.

Výsledek:

Norma vektoru $\vec{v}$ je $||\vec{v}|| = \sqrt{29} \doteq 5{,}385$.

Zpět

Příklad 11.2.2

Spočtěte normu vektoru $\vec{v} = (2, 3, 4)$.

Řešení:

$||\vec{v}|| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{29}$.

Zpět

Příklad 11.2.2

Spočtěte normu vektoru $\vec{v} = (2, 3, 4)$.

Maple:

```
> with(LinearAlgebra):
> v:=<2,3,4>;
```

$$v := \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

```
> r:=Norm(v,2);
```

$$r := \sqrt{29}$$

```
> evalf(r);
```

$$5.385164807$$

Zpět

Příklad 11.2.2

Spočtěte normu vektoru $\vec{v} = (2, 3, 4)$.

Mathematica:

$\boldsymbol{v = \{2, 3, 4\}}$

$\{2, 3, 4\}$

$\boldsymbol{r = \mathbf{Norm}[v]}$

$\sqrt{29}$

$\boldsymbol{N[r]}$

5.38516

Zpět

Příklad 11.2.3

Spočtěte úhel vektorů $\vec{u} = (3, 2, 4)$ a $\vec{v} = (1, 2, 5)$.

Zpět

Příklad 11.2.3

Spočtěte úhel vektorů $\vec{u} = (3, 2, 4)$ a $\vec{v} = (1, 2, 5)$.

Výsledek:

Úhel vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$ je $\varphi \doteq 24^\circ$.

Zpět

Příklad 11.2.3

Spočtěte úhel vektorů $\vec{u} = (3, 2, 4)$ a $\vec{v} = (1, 2, 5)$.

Řešení:

$$\varphi = \arccos \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{||\vec{u}||\ ||\vec{v}||} = \arccos \frac{3 \times 1 + 2 \times 2 + 4 \times 5}{\sqrt{3^2 + 2^2 + 4^2}\ \sqrt{1^2 + 2^2 + 5^2}} =$$

$$= \arccos(9 \sqrt{\frac{3}{290}}) \doteq 0{,}414 \text{ rad } \doteq 24^\circ.$$

Zpět

Příklad 11.2.3

Spočtěte úhel vektorů $\vec{u} = (3, 2, 4)$ a $\vec{v} = (1, 2, 5)$.

Maple:

```
> with(LinearAlgebra):
> u:=<3,2,4>;
```

$$u := \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

```
> v:=<1,2,5>;
```

$$v := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

```
> uhel:=arccos(u.v/( Norm(u,2)*Norm(v,2) ));
```

$$uhel := \arccos(\frac{9\sqrt{29}\sqrt{30}}{290})$$

```
> evalf(uhel);
```

$$0.4143312975$$

Zpět

Příklad 11.2.3

Spočtěte úhel vektorů $\vec{u} = (3, 2, 4)$ a $\vec{v} = (1, 2, 5)$.

Mathematica:

$\boldsymbol{u = \{3, 2, 4\}}$

$\{3, 2, 4\}$

$\boldsymbol{v = \{1, 2, 5\}}$

$\{1, 2, 5\}$

uhel = ArcCos[*u*.*v*/(Norm[*u*] ∗ Norm[*v*])]

$\mathrm{ArcCos}[9\sqrt{\frac{3}{290}}]$

***N*[uhel]**

0.414331

***N*[uhel ∗ 180/Pi]**

23.7394

Zpět

Příklad 11.2.4

Najděte jednotkový vektor příslušný k vektoru $\vec{v} = (6, 0, 8)$.

Zpět

Příklad 11.2.4

Najděte jednotkový vektor příslušný k vektoru $\vec{v} = (6, 0, 8)$.

Výsledek:

Jednotkový vektor příslušný k vektoru $\vec{v} = (6, 0, 8)$ je vektor $\vec{v_0} = (3/5, 0, 4/5)$.

Zpět

Příklad 11.2.4

Najděte jednotkový vektor příslušný k vektoru $\vec{v} = (6, 0, 8)$.

Řešení:

Příslušný jednotkový vektor je

$$\vec{v_0} = \frac{1}{||\vec{v}||}\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{6^2 + 0^2 + 8^2}}(6, 0, 8) = \frac{1}{10}(6, 0, 8) = (3/5, 0, 4/5).$$

Zpět

Příklad 11.2.4

Najděte jednotkový vektor příslušný k vektoru $\vec{v} = (6, 0, 8)$.

Maple:

```
> with(LinearAlgebra):
> v:=<6,0,8>;
```

$$v := \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix}$$

```
> v0:=v/Norm(v,2);
```

$$v0 := \begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ 0 \\ \frac{4}{5} \end{bmatrix}$$

Zpět

Příklad 11.2.4

Najděte jednotkový vektor příslušný k vektoru $\vec{v} = (6, 0, 8)$.

Mathematica:

$\boldsymbol{v = \{6, 0, 8\}}$

$\{6, 0, 8\}$

$\mathbf{v0} = \boldsymbol{v}/\mathbf{Norm}[\boldsymbol{v}]$

$\{\frac{3}{5}, 0, \frac{4}{5}\}$

Zpět

Příklad 11.2.5

Najděte pravoúhlou složku vektoru $\vec{u} = (1, 1, 5)$ ve směru vektoru $\vec{v} = (6, 0, 8)$.

Zpět

Příklad 11.2.5

Najděte pravoúhlou složku vektoru $\vec{u} = (1, 1, 5)$ ve směru vektoru $\vec{v} = (6, 0, 8)$.

Výsledek:

Pravoúhlá složka vektoru $\vec{u}$ ve směru vektoru $\vec{v}$ je
$\vec{p} = (69/25, 0, 92/25)$.

Zpět

Příklad 11.2.5

Najděte pravoúhlou složku vektoru $\vec{u} = (1, 1, 5)$ ve směru vektoru $\vec{v} = (6, 0, 8)$.

Řešení:

$$\vec{p} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\vec{v} \cdot \vec{v}} \vec{v} = \frac{1 \times 6 + 1 \times 0 + 5 \times 8}{6^2 + 0^2 + 8^2}(6, 0, 8) = (69/25, 0, 92/25).$$

Zpět

Příklad 11.2.5

Najděte pravoúhlou složku vektoru $\vec{u} = (1, 1, 5)$ ve směru vektoru $\vec{v} = (6, 0, 8)$.

Maple:

```
> with(LinearAlgebra):
> u:=<1,1,5>;
```

$$u := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

```
> v:=<6,0,8>;
```

$$v := \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix}$$

```
> p:=u.v/(v.v)*v;
```

$$p := \begin{bmatrix} \frac{69}{25} \\ 0 \\ \frac{92}{25} \end{bmatrix}$$

Zpět

Příklad 11.2.5

Najděte pravoúhlou složku vektoru $\vec{u} = (1, 1, 5)$ ve směru vektoru $\vec{v} = (6, 0, 8)$.

Mathematica:

$\boldsymbol{u = \{1, 1, 5\}}$

$\{1, 1, 5\}$

$\boldsymbol{v = \{6, 0, 8\}}$

$\{6, 0, 8\}$

$\boldsymbol{p = u.v/(v.v) * v}$

$\{\frac{69}{25}, 0, \frac{92}{25}\}$

Zpět

Příklad 11.2.6

Spočtěte vektorový součin vektorů $\vec{u} = (3, 2, 4)$ a $\vec{v} = (1, 2, 5)$.

Zpět

Příklad 11.2.6

Spočtěte vektorový součin vektorů $\vec{u} = (3, 2, 4)$ a $\vec{v} = (1, 2, 5)$.

Výsledek:

Vektorový součin vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$ je $\vec{u} \times \vec{v} = (2, -11, 4)$.

Zpět

Příklad 11.2.6

Spočtěte vektorový součin vektorů $\vec{u} = (3, 2, 4)$ a $\vec{v} = (1, 2, 5)$.

Řešení:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 3 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = (2 \times 5 - 4 \times 2,\ 4 \times 1 - 3 \times 5,\ 3 \times 2 - 2 \times 1) = (2, -11, 4).$$

Zpět

Příklad 11.2.6

Spočtěte vektorový součin vektorů $\vec{u} = (3, 2, 4)$ a $\vec{v} = (1, 2, 5)$.

Maple:

```
> with(LinearAlgebra):
> u:=<3,2,4>;
```

$$u := \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

```
> v:=<1,2,5>;
```

$$v := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

```
> w:=CrossProduct(u,v);
```

$$w := \begin{bmatrix} 2 \\ -11 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Zpět

Příklad 11.2.6

Spočtěte vektorový součin vektorů $\vec{u} = (3, 2, 4)$ a $\vec{v} = (1, 2, 5)$.

Mathematica:

$\boldsymbol{u = \{3, 2, 4\}}$

$\{3, 2, 4\}$

$\boldsymbol{v = \{1, 2, 5\}}$

$\{1, 2, 5\}$

$\boldsymbol{w = \mathbf{Cross}[u, v]}$

$\{2, -11, 4\}$

Zpět

Příklad 11.2.7

Spočtěte smíšený součin vektorů $\vec{a} = (7, 4, 5)$, $\vec{b} = (2, 8, 3)$ a $\vec{c} = (1, 9, 6)$.

Zpět

Příklad 11.2.7

Spočtěte smíšený součin vektorů $\vec{a} = (7, 4, 5)$, $\vec{b} = (2, 8, 3)$ a $\vec{c} = (1, 9, 6)$.

Výsledek:

Smíšený součin vektorů $\vec{a}$, $\vec{b}$ a $\vec{c}$ je 161.

Zpět

Příklad 11.2.7

Spočtěte smíšený součin vektorů $\vec{a} = (7, 4, 5)$, $\vec{b} = (2, 8, 3)$ a $\vec{c} = (1, 9, 6)$.

Řešení:

$$V = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} 7 & 4 & 5 \\ 2 & 8 & 3 \\ 1 & 9 & 6 \end{vmatrix} = 161$$

Zpět

Příklad 11.2.7

Spočtěte smíšený součin vektorů $\vec{a} = (7, 4, 5)$, $\vec{b} = (2, 8, 3)$ a $\vec{c} = (1, 9, 6)$.

Maple:

```
> with(LinearAlgebra):
> a:=<7,4,5>;
```

$$a := \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

```
> b:=<2,8,3>;
```

$$b := \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ 3 \end{bmatrix}$$

```
> c:=<1,9,6>;
```

$$c := \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \\ 6 \end{bmatrix}$$

```
> v:=a.CrossProduct(b,c);
```

$$v := 161$$

Zpět

Příklad 11.2.7

Spočtěte smíšený součin vektorů $\vec{a} = (7, 4, 5)$, $\vec{b} = (2, 8, 3)$ a $\vec{c} = (1, 9, 6)$.

Mathematica:

$\boldsymbol{a = \{7, 4, 5\}}$

$\{7, 4, 5\}$

$\boldsymbol{b = \{2, 8, 3\}}$

$\{2, 8, 3\}$

$\boldsymbol{c = \{1, 9, 6\}}$

$\{1, 9, 6\}$

$\boldsymbol{v = a.\mathrm{Cross}[b, c]}$

161

Můžeme také použít determinant: $\boldsymbol{v = \mathrm{Det}[\{a, b, c\}]}$

161

Zpět

Parametrické rovnice přímky

- Příklad 11.3.1 Určete parametrické rovnice přímky AB, je-li $A = (1, 2, 4)$, $B = (2, 5, 3)$.
- Příklad 11.3.2 Určete společné body přímek AB a CD, je-li $A = (3, 4, 3)$ $B = (4, 5, 5)$ $C = (8, 0, 10)$ $D = (12, -2, 16)$.
- Příklad 11.3.3 Určete vzájemnou polohu přímek AB a CD, je-li $A = (1, 2, 4)$, $B = (2, 5, 3)$, $C = (8, 9, 1)$ a $D = (6, 4, 7)$.
- Příklad 11.3.4 Určete souřadnice těžiště T trojúhelníku ABC, kde $A = (4, 2, 8)$, $B = (3, 7, 1)$, $C = (8, 9, 6)$.

Zpět

Příklad 11.3.1

Určete parametrické rovnice přímky AB, je-li $A = (1, 2, 4)$, $B = (2, 5, 3)$.

Zpět

Příklad 11.3.1

Určete parametrické rovnice přímky AB, je-li $A = (1, 2, 4)$, $B = (2, 5, 3)$.

Výsledek:

Parametrické rovnice přímky jsou

$$\begin{aligned} x &= 1 + t \\ y &= 2 + 3t \\ z &= 4 - t, \qquad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Zpět

Příklad 11.3.1

Určete parametrické rovnice přímky AB, je-li $A = (1, 2, 4)$, $B = (2, 5, 3)$.

Řešení:

Obecný bod přímky AB je
$X(t) = A + t(B - A) = (1, 2, 4) + t(2 - 1,\ 5 - 2,\ 3 - 4) = (1, 2, 4) + t(1,\ 3,\ -1)$.
Parametrické rovnice přímky jsou

$$\begin{aligned} x &= 1 + t \\ y &= 2 + 3t \\ z &= 4 - t, \qquad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Zpět

Příklad 11.3.1

Určete parametrické rovnice přímky AB, je-li $A = (1, 2, 4)$, $B = (2, 5, 3)$.

Maple:

```
> a:=<1,2,4>: b:=<2,5,3>: x:=a+t*(b-a);
```

$$x := \begin{bmatrix} 1 + t \\ 2 + 3\,t \\ 4 - t \end{bmatrix}$$

Zpět

Příklad 11.3.1

Určete parametrické rovnice přímky AB, je-li $A = (1, 2, 4)$, $B = (2, 5, 3)$.

Mathematica:

$\boldsymbol{a = \{1, 2, 4\}; b = \{2, 5, 3\}; x = a + t * (b - a)}$

$\{1 + t, 2 + 3t, 4 - t\}$

Zpět

Příklad 11.3.2

Určete společné body přímek AB a CD, je-li $A = (3, 4, 3)$ $B = (4, 5, 5)$ $C = (8, 0, 10)$ $D = (12, -2, 16)$.

Zpět

Příklad 11.3.2

Určete společné body přímek AB a CD, je-li $A = (3, 4, 3)$ $B = (4, 5, 5)$ $C = (8, 0, 10)$ $D = (12, -2, 16)$.

Výsledek:

Přímky mají jediný společný bod $P = (2, 3, 1)$.

Zpět

Příklad 11.3.2

Určete společné body přímek AB a CD, je-li $A = (3, 4, 3)$ $B = (4, 5, 5)$ $C = (8, 0, 10)$ $D = (12, -2, 16)$.

Řešení:

Obecný bod přímky AB je $X(t) = A + t(B - A)$ a obecný bod přímky CD je $Y(s) = C + s(D - C)$. Soustava třech lineárních rovnic o dvou neznámých t, s

$$X(t) = Y(s),$$

tedy

$$\begin{aligned} 3 + t &= 8 + 4s \\ 4 + t &= -2s \\ 3 + 2t &= 10 + 6s \end{aligned}$$

má jediné řešení $t = -1,\ s = -3/2$, takže přímky mají jediný společný bod $P = (2, 3, 1)$.

Zpět

Příklad 11.3.2

Určete společné body přímek AB a CD, je-li $A = (3, 4, 3)$ $B = (4, 5, 5)$ $C = (8, 0, 10)$ $D = (12, -2, 16)$.

Maple:

```
> with(LinearAlgebra):
> a:=<3,4,3>: b:=<4,5,5>: c:=<8,0,10>: d:=<12,-2,16>:
> m:=<b-a|c-d|c-a>:
> r:=LinearSolve(m);
```

$$r := \begin{bmatrix} -1 \\ \dfrac{-3}{2} \end{bmatrix}$$

```
> p:=a+r[1]*(b-a);
```

$$p := \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Zpět

Příklad 11.3.2

Určete společné body přímek AB a CD, je-li $A = (3, 4, 3)$ $B = (4, 5, 5)$ $C = (8, 0, 10)$ $D = (12, -2, 16)$.

Mathematica:

$\boldsymbol{a = \{3, 4, 3\}; b = \{4, 5, 5\}; c = \{8, 0, 10\}; d = \{12, -2, 16\};}$

$\boldsymbol{x = a + t(b - a); y = c + s(d - c);}$

$\boldsymbol{r = \textbf{Solve}[x == y]}$

$\{\{s \to -\frac{3}{2}, t \to -1\}\}$

$\boldsymbol{p = x/.r}$

$\{\{2, 3, 1\}\}$

$\boldsymbol{p = y/.r}$

$\{\{2, 3, 1\}\}$

Zpět

Příklad 11.3.3

Určete vzájemnou polohu přímek AB a CD, je-li $A = (1, 2, 4)$, $B = (2, 5, 3)$, $C = (8, 9, 1)$ a $D = (6, 4, 7)$.

Zpět

Příklad 11.3.3

Určete vzájemnou polohu přímek AB a CD, je-li $A = (1, 2, 4)$, $B = (2, 5, 3)$, $C = (8, 9, 1)$ a $D = (6, 4, 7)$.

Výsledek:

Přímky jsou mimoběžné, jejich vzdálenost je $v = \sqrt{\frac{600}{31}} \doteq 4{,}4$.

Zpět

Příklad 11.3.3

Určete vzájemnou polohu přímek AB a CD, je-li $A = (1, 2, 4)$, $B = (2, 5, 3)$, $C = (8, 9, 1)$ a $D = (6, 4, 7)$.

Řešení:

Nejdříve zjistíme, mají-li přímky společné body. Obecný bod přímky AB je $X(t) = A + t(B - A)$ a obecný bod přímky CD je $Y(s) = C + s(D - C)$. Soustava

$$X(t) = Y(s)$$

třech lineárních rovnic o dvou neznámých t, s nemá řešení, protože hodnost matice soustavy

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \\ -1 & -6 \end{pmatrix}$$

je 2, zatímco hodnost rozšířené matice

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 3 & 5 & 7 \\ -1 & -6 & -3 \end{pmatrix}$$

je 3, takže přímky nemají žádný společný bod, což je typický případ pro dvě přímky v prostoru dimenze větší než 2.

Další

Příklad 11.3.3

Určete vzájemnou polohu přímek AB a CD, je-li $A = (1, 2, 4)$, $B = (2, 5, 3)$, $C = (8, 9, 1)$ a $D = (6, 4, 7)$.

Řešení:

Mohou být tedy rovnoběžné nebo mimoběžné. To rozhodneme porovnáním jejich směrových vektorů $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{CD}$. Ty tvoří sloupce matice M_1. Její hodnost je 2, tedy směrové vektory jsou lineárně nezávislé a přímky jsou mimoběžné. Vzdálenost přímek určíme jako odmocninu z minima funkce dvou proměnných

$$w(t, s) = (X(t) - Y(s)) \cdot (X(t) - Y(s)).$$

Zpět

Příklad 11.3.3

Určete vzájemnou polohu přímek AB a CD, je-li $A = (1, 2, 4)$, $B = (2, 5, 3)$, $C = (8, 9, 1)$ a $D = (6, 4, 7)$.

Maple:

```
> with(LinearAlgebra):
> a:=<1,2,4>: b:=<2,5,3>: c:=<8,9,1>: d:=<6,4,7>:
> x:=a+t*(b-a): y:=c+s*(d-c):
> m1:=<b-a|c-d>;
```

$$m1 := \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \\ -1 & -6 \end{bmatrix}$$

```
> m2:=<b-a|c-d|c-a>;
```

$$m2 := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 3 & 5 & 7 \\ -1 & -6 & -3 \end{bmatrix}$$

```
> Rank(m1);
```

$$2$$

```
> Rank(m2);
```

$$3$$

Další

Příklad 11.3.3

Určete vzájemnou polohu přímek AB a CD, je-li $A = (1, 2, 4)$, $B = (2, 5, 3)$, $C = (8, 9, 1)$ a $D = (6, 4, 7)$.

Maple:

```
> w:=minimize((x-y).(x-y));
```

$$w := \frac{600}{31}$$

```
> v:=evalf(sqrt(w));
```

$$v := 4.399413452$$

Zpět

Příklad 11.3.3

Určete vzájemnou polohu přímek AB a CD, je-li $A = (1, 2, 4)$, $B = (2, 5, 3)$, $C = (8, 9, 1)$ a $D = (6, 4, 7)$.

Mathematica:

$\boldsymbol{a = \{1, 2, 4\}; b = \{2, 5, 3\}; c = \{8, 9, 1\}; d = \{6, 4, 7\};}$

$\boldsymbol{x = a + t * (b - a); y = c + s * (d - c);}$

$\mathbf{m1} = \boldsymbol{\{b - a, c - d\}}$

$\{\{1, 3, -1\}, \{2, 5, -6\}\}$

$\mathbf{m2} = \boldsymbol{\{b - a, c - d, c - a\}}$

$\{\{1, 3, -1\}, \{2, 5, -6\}, \{7, 7, -3\}\}$

MatrixRank[m1]

2

MatrixRank[m2]

3

$\boldsymbol{w} = \mathbf{Minimize}[\boldsymbol{(x - y).(x - y), \{t, s\}}]$

$\{\frac{600}{31}, \{t \to \frac{79}{31}, s \to \frac{4}{31}\}\}$

$\boldsymbol{v = N}[\mathbf{Sqrt}[\boldsymbol{w}[[1]]]]$

4.39941

Zpět

Příklad 11.3.4

Určete souřadnice těžiště T trojúhelníku ABC, kde $A = (4, 2, 8)$, $B = (3, 7, 1)$, $C = (8, 9, 6)$.

Zpět

Příklad 11.3.4

Určete souřadnice těžiště T trojúhelníku ABC, kde $A = (4, 2, 8)$, $B = (3, 7, 1)$, $C = (8, 9, 6)$.

Výsledek:

Těžiště má souřadnice $T = (5, 6, 5)$.

Zpět

Příklad 11.3.4

Určete souřadnice těžiště T trojúhelníku ABC, kde $A = (4, 2, 8)$, $B = (3, 7, 1)$, $C = (8, 9, 6)$.

Řešení:

$T = (A + B + C)/3 = ((4 + 3 + 8)/3, (2 + 7 + 9)/3, (8 + 1 + 6)/3) = (5, 6, 5).$

Zpět

Příklad 11.3.4

Určete souřadnice těžiště T trojúhelníku ABC, kde $A = (4, 2, 8)$, $B = (3, 7, 1)$, $C = (8, 9, 6)$.

Maple:

```
> a:=<4,2,8>: b:=<3,7,1>: c:=<8,9,6>:
> t:=(a+b+c)/3;
```

$$t := \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Zpět

Příklad 11.3.4

Určete souřadnice těžiště T trojúhelníku ABC, kde $A = (4, 2, 8)$, $B = (3, 7, 1)$, $C = (8, 9, 6)$.

Mathematica:

$\boldsymbol{a = \{4, 2, 8\}; b = \{3, 7, 1\}; c = \{8, 9, 6\};}$

$\boldsymbol{t = (a + b + c)/3}$

$\{5, 6, 5\}$

Zpět

Parametrické rovnice roviny

- **Příklad 11.4.1** Určete parametrické rovnice roviny ABC, je-li $A = (1, 2, 4)$, $B = (2, 5, 3)$, $C = (6, 2, 8)$.
- **Příklad 11.4.2** Určete společné body roviny ABC a přímky DE, je-li $A = (4, 2, 7)$, $B = (1, 9, 4)$, $C = (2, 5, 0)$, $D = (3, 6, 8)$, $E = (9, 1, 7)$.

Zpět

Příklad 11.4.1

Určete parametrické rovnice roviny ABC, je-li $A = (1, 2, 4)$, $B = (2, 5, 3)$, $C = (6, 2, 8)$.

Zpět

Příklad 11.4.1

Určete parametrické rovnice roviny ABC, je-li $A = (1, 2, 4)$, $B = (2, 5, 3)$, $C = (6, 2, 8)$.

Výsledek:

Parametrické rovnice roviny ABC jsou

$$\begin{aligned} x &= 1 + t + 5s \\ y &= 2 + 3t \\ z &= 4 - t + 4s, \qquad t, s \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Zpět

Příklad 11.4.1

Určete parametrické rovnice roviny ABC, je-li $A = (1, 2, 4)$, $B = (2, 5, 3)$, $C = (6, 2, 8)$.

Řešení:

Obecný bod roviny ABC je $X(t) = A + t(B - A) + s(C - A) =$
$(1, 2, 4) + t(2-1,\ 5-2,\ 3-4) + s(6-1,\ 2-2,\ 8-4) = (1, 2, 4) + t(1,\ 3,\ -1) + s(5,\ 0,\ 4)$.
Parametrické rovnice roviny ABC jsou

$$
\begin{aligned}
x &= 1 + t + 5s \\
y &= 2 + 3t \\
z &= 4 - t + 4s, \qquad t, s \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

Zpět

Příklad 11.4.1

Určete parametrické rovnice roviny ABC, je-li $A = (1, 2, 4)$, $B = (2, 5, 3)$, $C = (6, 2, 8)$.

Maple:

```
> a:=<1,2,4>: b:=<2,5,3>: c:=<6,2,8>: x:=a+t*(b-a)+s*(c-a);
```

$$x := \begin{bmatrix} 1 + t + 5\,s \\ 2 + 3\,t \\ 4 - t + 4\,s \end{bmatrix}$$

Zpět

Příklad 11.4.1

Určete parametrické rovnice roviny ABC, je-li $A = (1, 2, 4)$, $B = (2, 5, 3)$, $C = (6, 2, 8)$.

Mathematica:

$\boldsymbol{a = \{1, 2, 4\}; b = \{2, 5, 3\}; c = \{6, 2, 8\}; x = a + t * (b - a) + s * (c - a)}$

$\{1 + 5s + t, 2 + 3t, 4 + 4s - t\}$

Zpět

Příklad 11.4.2

Určete společné body roviny ABC a přímky DE, je-li $A = (4, 2, 7)$, $B = (1, 9, 4)$, $C = (2, 5, 0)$, $D = (3, 6, 8)$, $E = (9, 1, 7)$.

Zpět

Příklad 11.4.2

Určete společné body roviny ABC a přímky DE, je-li $A = (4, 2, 7)$, $B = (1, 9, 4)$, $C = (2, 5, 0)$, $D = (3, 6, 8)$, $E = (9, 1, 7)$.

Výsledek:

Rovina a přímka mají jediný společný bod $P = (42/17,\ 219/34,\ 275/34)$.

Zpět

Příklad 11.4.2

Určete společné body roviny ABC a přímky DE, je-li $A = (4, 2, 7)$, $B = (1, 9, 4)$, $C = (2, 5, 0)$, $D = (3, 6, 8)$, $E = (9, 1, 7)$.

Řešení:

Obecný bod roviny ABC je $X(t, s) = A + t(B - A) + s(C - A)$ a obecný bod přímky DE je $Y(u) = D + u(E - D)$. Soustava třech lineárních rovnic o třech neznámých t, s, u

$$X(t, s) = Y(u),$$

tedy

$$\begin{aligned} 4 - 2s - 3t &= 3 + 6u \\ 2 + 3s + 7t &= 6 - 5u \\ 7 - 7s - 3t &= 8 - u \end{aligned}$$

má jediné řešení $t = 73/85$, $s = -89/170$, $u = -3/34$, takže rovina a přímka mají jediný společný bod $P = (42/17,\ 219/34,\ 275/34)$.

Zpět

Příklad 11.4.2

Určete společné body roviny ABC a přímky DE, je-li $A = (4, 2, 7)$, $B = (1, 9, 4)$, $C = (2, 5, 0)$, $D = (3, 6, 8)$, $E = (9, 1, 7)$.

Maple:

```
> with(LinearAlgebra):
> a:=<4,2,7>: b:=<1,9,4>: c:=<2,5,0>: d:=<3,6,8>: e:=<9,1,7>:
> m:=<b-a|c-a|d-e|d-a>:
> r:=LinearSolve(m);
```

$$r := \begin{bmatrix} \frac{73}{85} \\ \frac{-89}{170} \\ \frac{-3}{34} \end{bmatrix}$$

```
> pr:=a+r[1]*(b-a)+r[2]*(c-a);
```

$$pr := \begin{bmatrix} \frac{42}{17} \\ \frac{219}{34} \\ \frac{275}{34} \end{bmatrix}$$

Další

Příklad 11.4.2

Určete společné body roviny ABC a přímky DE, je-li $A = (4, 2, 7)$, $B = (1, 9, 4)$, $C = (2, 5, 0)$, $D = (3, 6, 8)$, $E = (9, 1, 7)$.

Maple:

```
> pp:=d+r[3]*(e-d);
```

$$pp := \begin{bmatrix} \dfrac{42}{17} \\ \dfrac{219}{34} \\ \dfrac{275}{34} \end{bmatrix}$$

Zpět

Příklad 11.4.2

Určete společné body roviny ABC a přímky DE, je-li $A = (4, 2, 7)$, $B = (1, 9, 4)$, $C = (2, 5, 0)$, $D = (3, 6, 8)$, $E = (9, 1, 7)$.

Mathematica:

$\boldsymbol{a = \{4, 2, 7\}; b = \{1, 9, 4\}; c = \{2, 5, 0\}; d = \{3, 6, 8\}; e = \{9, 1, 7\};}$

$\boldsymbol{x = a + t(b - a) + s(c - a); y = d + u(e - d);}$

$\boldsymbol{r = \mathrm{Solve}[x == y]}$

$\{\{s \to -\frac{89}{170}, t \to \frac{73}{85}, u \to -\frac{3}{34}\}\}$

$\boldsymbol{x/.r}$

$\{\{\frac{42}{17}, \frac{219}{34}, \frac{275}{34}\}\}$

$\boldsymbol{y/.r}$

$\{\{\frac{42}{17}, \frac{219}{34}, \frac{275}{34}\}\}$

Zpět

Obecná rovnice roviny

- Příklad 11.5.1 Určete vzdálenost bodu $A = (3, 2, 7)$ od roviny σ, jejíž obecná rovnice je $5x + 2y - z + 9 = 0$.
- Příklad 11.5.2 Najděte obecnou rovnici roviny σ procházející body $A = (3, 7, 2)$, $B = (2, 1, 0)$, $C = (5, 8, 4)$.
- Příklad 11.5.3 Vypočtěte vzdálenost bodu A od přímky BC, je-li $A = (0, 5, 1)$, $B = (2, 3, 9)$, $C = (4, 7, 6)$.
- Příklad 11.5.4 Určete bod S souměrně sdružený s bodem $P = (3, -1, 0)$ podle roviny ABC procházející body $A = (-1, 5, 0)$, $B = (3, -2, 1)$, $C = (0, 2, 4)$.

Zpět

Příklad 11.5.1

Určete vzdálenost bodu $A = (3, 2, 7)$ od roviny σ, jejíž obecná rovnice je $5x + 2y - z + 9 = 0$.

Zpět

Příklad 11.5.1

Určete vzdálenost bodu $A = (3, 2, 7)$ od roviny σ, jejíž obecná rovnice je $5x + 2y - z + 9 = 0$.

Výsledek:

Vzdálenost bodu A od roviny σ je $7\sqrt{\frac{3}{10}} \doteq 3{,}83$.

Zpět

Příklad 11.5.1

Určete vzdálenost bodu $A = (3, 2, 7)$ od roviny σ, jejíž obecná rovnice je $5x + 2y - z + 9 = 0$.

Řešení:

Vzdálenost bodu $A = (x_0, y_0, z_0)$ od roviny σ s obecnou rovnicí $\vec{n} \cdot X + d = 0$, kde $\vec{n} = (a, b, c)$ je normálový vektor roviny, je

$$v(A, \sigma) = \frac{|\vec{n} \cdot A + d|}{||\vec{n}||} = \frac{|(a, b, c) \cdot (x_0, y_0, z_0) + d|}{||(a, b, c)||} = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} =$$

$$= \frac{|5 \times 3 + 2 \times 2 - 7 + 9|}{\sqrt{5^2 + 2^2 + (-1)^2}} = 7\sqrt{\frac{3}{10}} \doteq 3{,}83.$$

Zpět

Příklad 11.5.1

Určete vzdálenost bodu $A = (3, 2, 7)$ od roviny σ, jejíž obecná rovnice je $5x + 2y - z + 9 = 0$.

Maple:

```
> with(LinearAlgebra):
> a:=<3,2,7>: n:=<5,2,-1>: d:=9: v:=abs(n.a+d)/Norm(n,2);
```

$$v := \frac{7\sqrt{30}}{10}$$

```
> evalf(v);
```

$$3.834057902$$

Zpět

Příklad 11.5.1

Určete vzdálenost bodu $A = (3, 2, 7)$ od roviny σ, jejíž obecná rovnice je $5x + 2y - z + 9 = 0$.

Mathematica:

$\boldsymbol{a = \{3, 2, 7\}; n = \{5, 2, -1\}; d = 9; v = \mathbf{Abs}[n.a + d]/\mathbf{Norm}[n]}$

$7\sqrt{\frac{3}{10}}$

$\boldsymbol{N[v]}$

3.83406

Zpět

Příklad 11.5.2

Najděte obecnou rovnici roviny σ procházející body $A = (3, 7, 2)$, $B = (2, 1, 0)$, $C = (5, 8, 4)$.

Zpět

Příklad 11.5.2

Najděte obecnou rovnici roviny σ procházející body $A = (3, 7, 2)$, $B = (2, 1, 0)$, $C = (5, 8, 4)$.

Výsledek:

Obecná rovnice roviny je $-10x - 2y + 11z + 22 = 0$.

Zpět

Příklad 11.5.2

Najděte obecnou rovnici roviny σ procházející body $A = (3, 7, 2)$, $B = (2, 1, 0)$, $C = (5, 8, 4)$.

Řešení:

Normálový vektor roviny je kolný na každý vektor roviny, tedy i na vektory $\overrightarrow{AB} = B - A = (-1, -6, -2)$ a $\overrightarrow{AC} = C - A = (2, 1, 2)$. To splňuje vektorový součin

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ -1 & -6 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (-10, -2, 11).$$

Absolutní člen d v rovnici $-10x - 2y + 11z + d = 0$ určíme dosazením souřadnic libovolného z bodů A, B nebo C, např. A: $d = -\vec{n} \cdot A = -(-10, -2, 11) \cdot (3, 7, 2) = 22$. Obecná rovnice roviny je potom $-10x - 2y + 11z + 22 = 0$.

Zpět

Příklad 11.5.2

Najděte obecnou rovnici roviny σ procházející body $A = (3, 7, 2)$, $B = (2, 1, 0)$, $C = (5, 8, 4)$.

Maple:

```
> with(LinearAlgebra):
> n:=CrossProduct(b-a,c-a);
```

$$n := \begin{bmatrix} -10 \\ -2 \\ 11 \end{bmatrix}$$

```
> d:=-n.a;
```

$$d := 22$$

Zpět

Příklad 11.5.2

Najděte obecnou rovnici roviny σ procházející body $A = (3, 7, 2)$, $B = (2, 1, 0)$, $C = (5, 8, 4)$.

Mathematica:

$\boldsymbol{a = \{3, 7, 2\}; b = \{2, 1, 0\}; c = \{5, 8, 4\};}$

$\boldsymbol{n = \mathbf{Cross}[(b - a), (c - a)]}$

$\{-10, -2, 11\}$

$\boldsymbol{d = -n.a}$

22

Zpět

Příklad 11.5.3

Vypočtěte vzdálenost bodu A od přímky BC, je-li $A = (0, 5, 1)$, $B = (2, 3, 9)$, $C = (4, 7, 6)$.

Zpět

Příklad 11.5.3

Vypočtěte vzdálenost bodu A od přímky BC, je-li $A = (0, 5, 1)$, $B = (2, 3, 9)$, $C = (4, 7, 6)$.

Výsledek:

Vzdálenost bodu A od přímky BC je $2\sqrt{\frac{326}{29}} \doteq 6{,}7$.

Zpět

Příklad 11.5.3

Vypočtěte vzdálenost bodu A od přímky BC, je-li $A = (0, 5, 1)$, $B = (2, 3, 9)$, $C = (4, 7, 6)$.

Řešení:

Obecný bod přímky BC je

$$X(t) = B + t(C - B).$$

Směrový vektor $\overrightarrow{BC} = C - B$ této přímky je současně normálový vektor roviny kolmé na přímku BC. Tedy obecná rovnice roviny σ kolmé na přímku BC jdoucí bodem A je

$$(C - B) \cdot X = (C - B) \cdot A.$$

Pozor! Tuto rovnici nelze závorkou $(C - B)$ vydělit, protože nejde o součin čísel, ale o skalární součin vektorů. Tato rovnice neříká, že X se rovná A, ale pouze, že průmět X do $(C - B)$ se rovná průmětu A do $(C - B)$. V důsledku toho nelze ve zlomcích krátit vektor, který se objevuje ve skalárním součinu.
Hodnotu parametru t odpovídající průsečíku přímky BC s rovninou σ najdeme z rovnice

$$(C - B) \cdot (B + t(C - B)) = (C - B) \cdot A$$

$$(C - B) \cdot B + t(C - B) \cdot (C - B) = (C - B) \cdot A$$

$$t = \frac{(C - B) \cdot (A - B)}{(C - B) \cdot (C - B)}.$$

Další

Příklad 11.5.3

Vypočtěte vzdálenost bodu A od přímky BC, je-li $A = (0, 5, 1)$, $B = (2, 3, 9)$, $C = (4, 7, 6)$.

Řešení:

Tuto hodnotu parametru t dosadíme do parametrické rovnice přímky BC a dostaneme bod P přímky BC, který je nejblíže bodu A

$$P = B + \frac{(C - B) \cdot (A - B)}{(C - B) \cdot (C - B)} (C - B).$$

Potom vzdálenost v bodu A od přímky BC je rovna vzdálenosti bodu A od bodu P

$$v = ||AP|| = ||P - A|| = ||B - A + \frac{(C - B) \cdot (A - B)}{(C - B) \cdot (C - B)} (C - B)||.$$

Tento obecný výsledek je vhodný při použití počítače, protože potom stačí zadat pouze souřadnice daných bodů a tento výsledný vztah.

Zpět

Příklad 11.5.3

Vypočtěte vzdálenost bodu A od přímky BC, je-li $A = (0, 5, 1)$, $B = (2, 3, 9)$, $C = (4, 7, 6)$.

Maple:

```
> with(LinearAlgebra):
> a:=<0,5,1>: b:=<2,3,9>: c:=<4,7,6>:
> p:=b+((c-b).(a-b))*(c-b)/((c-b).(c-b));
```

$$p := \begin{bmatrix} \frac{114}{29} \\ \frac{199}{29} \\ \frac{177}{29} \end{bmatrix}$$

```
> v:=Norm(p-a,2);
```

$$v := \frac{2\sqrt{9454}}{29}$$

```
> evalf(v);
```

$$6.705633247$$

Zpět

Příklad 11.5.3

Vypočtěte vzdálenost bodu A od přímky BC, je-li $A = (0, 5, 1)$, $B = (2, 3, 9)$, $C = (4, 7, 6)$.

Mathematica:

$\boldsymbol{a = \{0, 5, 1\}; b = \{2, 3, 9\}; c = \{4, 7, 6\};}$

$\boldsymbol{p = b + ((c - b).(a - b)) * (c - b)/((c - b).(c - b))}$

$\{\frac{114}{29}, \frac{199}{29}, \frac{177}{29}\}$

$\boldsymbol{v = \mathrm{Norm}[p - a]}$

$2\sqrt{\frac{326}{29}}$

$\boldsymbol{N[v]}$

6.70563

Zpět

Příklad 11.5.4

Určete bod S souměrně sdružený s bodem $P = (3, -1, 0)$ podle roviny ABC procházející body $A = (-1, 5, 0)$, $B = (3, -2, 1)$, $C = (0, 2, 4)$.

Zpět

Příklad 11.5.4

Určete bod S souměrně sdružený s bodem $P = (3, -1, 0)$ podle roviny ABC procházející body $A = (-1, 5, 0)$, $B = (3, -2, 1)$, $C = (0, 2, 4)$.

Výsledek:

Bod S má souřadnice $S = (17/7,\ -47/35,\ -4/35)$.

Zpět

Příklad 11.5.4

Určete bod S souměrně sdružený s bodem $P = (3, -1, 0)$ podle roviny ABC procházející body $A = (-1, 5, 0)$, $B = (3, -2, 1)$, $C = (0, 2, 4)$.

Řešení:

Nejprve najdeme normálový vektor $\vec{n}$ roviny ABC

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}.$$

Obecná rovnice roviny ABC je

$$\vec{n} \cdot X = \vec{n} \cdot A.$$

Bodem P vedeme přímku p kolmou k rovině ABC

$$X(t) = P + t\vec{n}.$$

Najdeme hodnotu parametru t_R příslušející průsečíku R přímky p s rovinou ABC

$$\vec{n} \cdot (P + t\vec{n}) = \vec{n} \cdot A$$

$$t_R = \frac{\vec{n} \cdot (A - P)}{\vec{n} \cdot \vec{n}}.$$

Další

Příklad 11.5.4

Určete bod S souměrně sdružený s bodem $P = (3, -1, 0)$ podle roviny ABC procházející body $A = (-1, 5, 0)$, $B = (3, -2, 1)$, $C = (0, 2, 4)$.

Řešení:

Hodnota parametru t_S příslušející bodu S bude

$$t_S = 2t_R.$$

Potom bod S bude

$$S = P + t_S\vec{n} = P + 2\frac{\vec{n}\cdot(A-P)}{\vec{n}\cdot\vec{n}}\vec{n}.$$

Tento způsob výpočtu, kdy nejprve najdeme obecný výsledek a teprve potom dosadíme konkrétní číselné hodnoty, je vhodný při použití počítače.

Zpět

Příklad 11.5.4

Určete bod S souměrně sdružený s bodem $P = (3, -1, 0)$ podle roviny ABC procházející body $A = (-1, 5, 0)$, $B = (3, -2, 1)$, $C = (0, 2, 4)$.

Maple:

```
> with(LinearAlgebra):
> p:=<3,-1,0>: a:=<-1,5,0>: b:=<3,-2,1>: c:=<0,2,4>:
> n:=CrossProduct(b-a,c-a):
> s:=p+2*(n.(a-p))/(n.n)*n;
```

$$s := \begin{bmatrix} \frac{17}{7} \\ \frac{-47}{35} \\ \frac{-4}{35} \end{bmatrix}$$

Zpět

Příklad 11.5.4

Určete bod S souměrně sdružený s bodem $P = (3, -1, 0)$ podle roviny ABC procházející body $A = (-1, 5, 0)$, $B = (3, -2, 1)$, $C = (0, 2, 4)$.

Mathematica:

$\boldsymbol{p = \{3, -1, 0\}; a = \{-1, 5, 0\}; b = \{3, -2, 1\}; c = \{0, 2, 4\};}$

$\boldsymbol{n = \mathrm{Cross}[b - a, c - a];}$

$\boldsymbol{s = p + 2(n.(a - p))/(n.n)n}$

$\{\frac{17}{7}, -\frac{47}{35}, -\frac{4}{35}\}$

Zpět