Spojitost a limita funkce, limita posloupnosti

- Spojitost funkce
- Limita funkcí
- Limita posloupností

Spojitost funkce

- **Příklad 2.1.1** Vyšetřete spojitost funkce

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x} & \text{pro} \quad x \neq 0, \\ 1 & \text{pro} \quad x = 0. \end{cases}$$

- **Příklad 2.1.2** Určete číslo a tak, aby funkce f byla spojitá v bodě $x = 1$,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x^3 - 1} & \text{pro} \quad x \neq 1, \\ a & \text{pro} \quad x = 1. \end{cases}$$

- **Příklad 2.1.3** Vyšetřete spojitost funkce f na jejím definičním oboru,

$$f(x) = \begin{cases} 2 + x^2 & \text{pro} \quad x \in (-\infty, 0\rangle, \\ \dfrac{\sin(2x)}{x} & \text{pro} \quad x \in (0, 5\rangle. \end{cases}$$

Zpět

Příklad 2.1.1

Vyšetřete spojitost funkce

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x} & \text{pro} \quad x \neq 0, \\ 1 & \text{pro} \quad x = 0. \end{cases}$$

Zpět

Příklad 2.1.1

Vyšetřete spojitost funkce

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x} & \text{pro} \quad x \neq 0, \\ 1 & \text{pro} \quad x = 0. \end{cases}$$

Výsledek:

Funkce f je spojitá $\forall x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

Zpět

Příklad 2.1.1

Vyšetřete spojitost funkce

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x} & \text{pro} \quad x \neq 0, \\ 1 & \text{pro} \quad x = 0. \end{cases}$$

Návod:

V bodech $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ využijte vlastností elementárních funkcí. Nespojitost v bodě 0 plyne z toho, že $\lim\limits_{x \to 0} f(x) \neq f(0)$.

Zpět

Příklad 2.1.1

Vyšetřete spojitost funkce

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x} & \text{pro} \quad x \neq 0, \\ 1 & \text{pro} \quad x = 0. \end{cases}$$

Řešení:

Funkce $\dfrac{1}{x}$ je spojitá na svém definičním oboru, tedy spojitá ve všech bodech $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, její obor hodnot je $\mathbb{R}\backslash\{0\}$. Funkce $\sin t$ je spojitá $\forall t \in \mathbb{R}$, tedy i složená funkce $\sin \dfrac{1}{x}$ je spojitá na $\mathbb{R}\backslash\{0\}$. Funkce x je spojitá na $\mathbb{R}$ a součin dvou spojitých funkcí je funkce spojitá. Tedy funkce f je spojitá pro všechna $x \neq 0$. Zbývá vyšetřit spojitost v bodě $x = 0$. Vypočteme $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$. Protože funkce sin t je omezená na svém definičním oboru, je

$$\lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0 \quad \neq \quad f(0) = 1.$$

Tedy v bodě $x = 0$ není funkce f spojitá.

Zpět

Příklad 2.1.1

Vyšetřete spojitost funkce

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x} & \text{pro} \quad x \neq 0, \\ 1 & \text{pro} \quad x = 0. \end{cases}$$

Maple:

```
> discont(x*sin(1/x),x);
```

$$\{0\}$$

```
> L:=limit(x*sin(1/x), x=0);
```

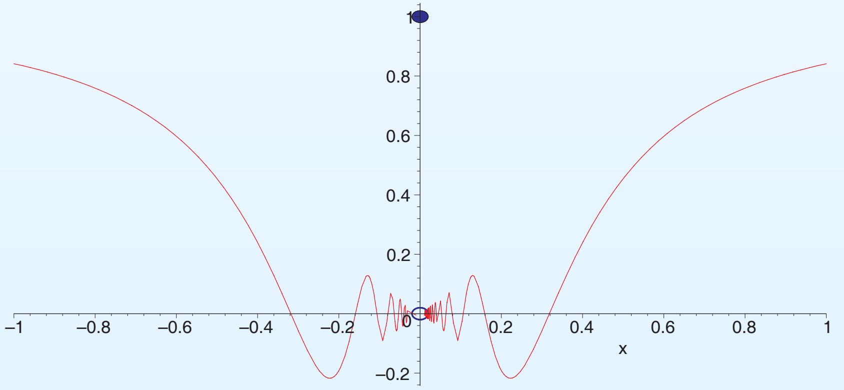
$$L := 0$$

```
> f(0):=1;
```

$$\mathrm{f}(0) := 1$$

Funkce není spojitá v bodě x=0.

```
> p1:=plot(x*sin(1/x),x=-1..0): p2:=plot(x*sin(1/x),x=0..1): p3:=
point([0,1],color=blue): plots[display](p1,p2,p3);
```



Zpět

Příklad 2.1.1

Vyšetřete spojitost funkce

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x} & \text{pro} \quad x \neq 0, \\ 1 & \text{pro} \quad x = 0. \end{cases}$$

Mathematica:

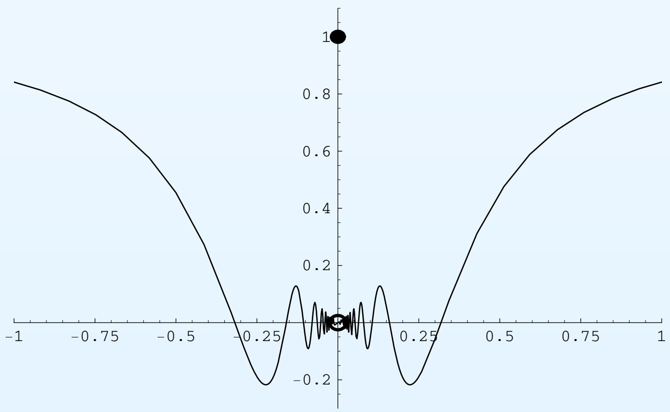
$\boldsymbol{f[\mathrm{x\_}]{:=}\mathrm{Piecewise}[\{\{x\mathrm{Sin}[1/x], x \neq 0\}, \{1, x == 0\}\}]}$

$\boldsymbol{\mathrm{Limit}[f[x], x \to 0]}$

0

Funkce není spojitá v bodě $x = 0$.

$\boldsymbol{g = \mathrm{Plot}[f[x], \{x, -1, 1\}, \mathrm{PlotRange} \to \{\{-1, 1\}, \{-0.3, 1.1\}\},}$
$\boldsymbol{\mathrm{Epilog} \to \{\{\mathrm{Disk}[\{0, 1\}, \{0.025, 0.025\}]\},}$
$\boldsymbol{\{\mathrm{Thickness}[0.005], \mathrm{Circle}[\{0, 0\}, \{0.025, 0.025\}]\}\}]}$



Zpět

Příklad 2.1.2

Určete číslo a tak, aby funkce f byla spojitá v bodě $x = 1$,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x^3 - 1} & \text{pro} \quad x \neq 1, \\ a & \text{pro} \quad x = 1. \end{cases}$$

? Zpět

Příklad 2.1.2

Určete číslo a tak, aby funkce f byla spojitá v bodě $x = 1$,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x^3 - 1} & \text{pro} \quad x \neq 1, \\ a & \text{pro} \quad x = 1. \end{cases}$$

Výsledek:

$a = 2/3\,.$

Zpět

Příklad 2.1.2

Určete číslo a tak, aby funkce f byla spojitá v bodě $x = 1$,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x^3 - 1} & \text{pro} \quad x \neq 1, \\ a & \text{pro} \quad x = 1. \end{cases}$$

Návod:

Využijte větu, že funkce je spojitá v bodě $x = 1$ právě když $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1) = a$.

Zpět

Příklad 2.1.2

Určete číslo a tak, aby funkce f byla spojitá v bodě $x = 1$,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x^3 - 1} & \text{pro} \quad x \neq 1, \\ a & \text{pro} \quad x = 1. \end{cases}$$

Řešení:

Protože $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$ a $x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)$, je

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x^3-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{x+1}{x^2+x+1} = \frac{1+1}{1+1+1} = \frac{2}{3}.$$

Tedy položíme-li $a := 2/3$, bude funkce $f(x)$ spojitá v bodě $x = 1$.

Zpět

Příklad 2.1.2

Určete číslo a tak, aby funkce f byla spojitá v bodě $x = 1$,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x^3 - 1} & \text{pro} \quad x \neq 1, \\ a & \text{pro} \quad x = 1. \end{cases}$$

Maple:

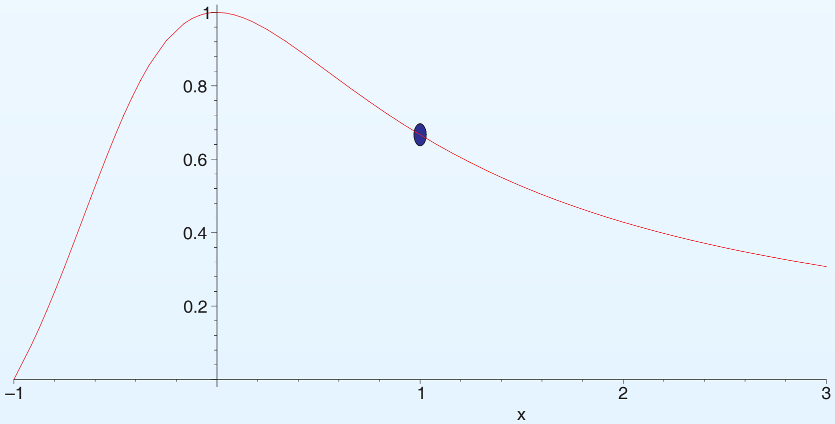
```
> discont((x^2-1)/(x^3-1),x);
```

$$\{1\}$$

```
> a:=limit((x^2-1)/(x^3-1), x=1);
```

$$a := \frac{2}{3}$$

```
> p1:=plot((x^2-1)/(x^3-1),x=-1..5): p2:=point([1,a], color=blue):
display(p1,p2,axes=normal);
```



Zpět

Příklad 2.1.2

Určete číslo a tak, aby funkce f byla spojitá v bodě $x = 1$,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x^3 - 1} & \text{pro} \quad x \neq 1, \\ a & \text{pro} \quad x = 1. \end{cases}$$

Mathematica:

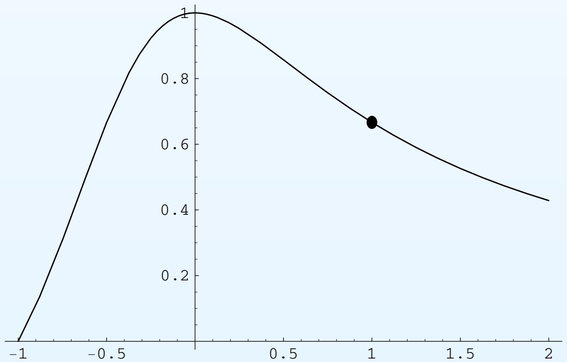
$\mathbf{Limit[(x\char`^2 - 1)/(x\char`^3 - 1), x \to 1]}$

$\frac{2}{3}$

Dodefinujeme funkci v bod2 $x = 1$ hodnotou $f(1) = 2/3$.

$\mathbf{f[x\_]{:=}Piecewise[\{\{(x\char`^2 - 1)/(x\char`^3 - 1), x \neq 1\}, \{2/3, x == 0\}\}]}$

$\mathbf{g = Plot[f[x], \{x, -1, 2\}, Epilog \to \{\{Disk[\{1, 2/3\}, \{0.03, 0.02\}]\}\}]}$



Zpět

Příklad 2.1.3

Vyšetřete spojitost funkce f na jejím definičním oboru,

$$f(x) = \begin{cases} 2 + x^2 & \text{pro} \quad x \in (-\infty, 0\rangle, \\ \dfrac{\sin(2x)}{x} & \text{pro} \quad x \in (0, 5\rangle. \end{cases}$$

? Zpět

Příklad 2.1.3

Vyšetřete spojitost funkce f na jejím definičním oboru,

$$f(x) = \begin{cases} 2 + x^2 & \text{pro} \quad x \in (-\infty, 0\rangle, \\ \dfrac{\sin(2x)}{x} & \text{pro} \quad x \in (0, 5\rangle. \end{cases}$$

Výsledek:

f je spojitá v každém bodě $x \in (-\infty, 5)$ a f je spojitá zleva v bodě $x = 5$.

Zpět

Příklad 2.1.3

Vyšetřete spojitost funkce f na jejím definičním oboru,

$$f(x) = \begin{cases} 2 + x^2 & \text{pro} \quad x \in (-\infty, 0\rangle, \\ \dfrac{\sin(2x)}{x} & \text{pro} \quad x \in (0, 5\rangle. \end{cases}$$

Návod:

Pro $x \in (-\infty, 0)$ a pro $x \in (0, 5\rangle$ využijte věty o spojitosti elementárních funkcí a o spojitosti podílu dvou funkcí. V bodě $x = 0$ vypočtěte $\lim\limits_{x \to 0+} f(x)$ a a porovnejte s $f(0)$.

Zpět

Příklad 2.1.3

Vyšetřete spojitost funkce f na jejím definičním oboru,

$$f(x)=\begin{cases} 2+x^2 & \text{pro} \quad x\in(-\infty,0\rangle, \\ \dfrac{\sin(2x)}{x} & \text{pro} \quad x\in(0,5\rangle. \end{cases}$$

Řešení:

Definiční obor funkce f je $\mathcal{D}(f)=(-\infty,5\rangle$. Je-li $x\in(-\infty,0\rangle$ je $f(x)=2+x^2$, a f je spojitá pro $x\in(-\infty,0)$. 0 je pravým krajním bodem intervalu, funkce f je v bodě $x=0$ spojitá zleva a $f(0)=2+0=2$. Funkce $\sin(2x)$ a funkce x jsou spojité na $(0,5)$, $x\neq 0$ na $(0,5)$, tedy i jejich podíl je funkce spojitá na $(0,5)$. Bod $x=5$ je pravým krajním bodem intervalu $(0,5\rangle$, funkce f je v bodě $x=5$ spojitá zleva. Zbývá vyšetřit spojitost v bodě $x=0$. Protože $\lim\limits_{t\to 0+}\dfrac{\sin\ t}{t}=1$, dostaneme

$$\lim_{x\to 0+}\frac{\sin(2x)}{x}=\lim_{x\to 0+}\frac{2\sin(2x)}{2x}=2\lim_{x\to 0+}\frac{\sin(2x)}{2x}=2\ =\ f(0).$$

Funkce f je tedy spojitá na celém svém definičním oboru $(-\infty,5\rangle$ (v bodě $x=5$ spojitá zleva).

Zpět

Příklad 2.1.3

Vyšetřete spojitost funkce f na jejím definičním oboru,

$$f(x) = \begin{cases} 2 + x^2 & \text{pro} \quad x \in (-\infty, 0\rangle, \\ \dfrac{\sin(2x)}{x} & \text{pro} \quad x \in (0, 5\rangle. \end{cases}$$

Maple:

```
> discont(2+x^2,x);
```

$$\{\}$$

```
> discont(sin(2*x)/x,x);
```

$$\{0\}$$

```
> f(0):=2;
```

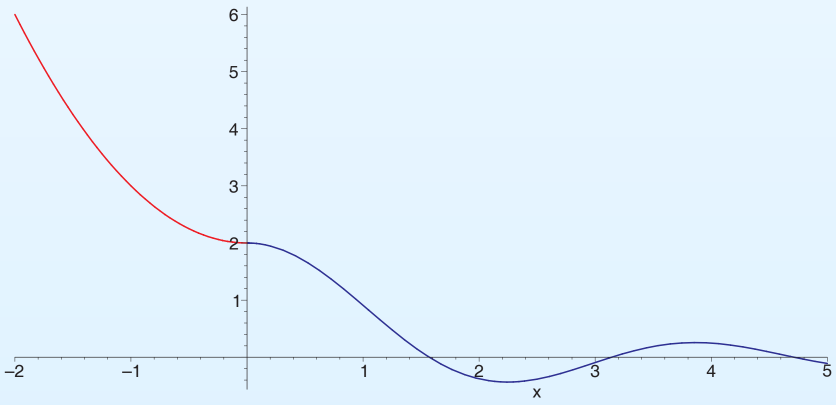
$$\mathrm{f}(0) := 2$$

```
> L:=limit(sin(2*x)/x,x=0);
```

$$L := 2$$

Funkce je spojitá i v bodě x=0.

```
> p1:=plot(2+x^2,x=-2..0, color=red):
p2:=plot(sin(2*x)/x,x=0..5,color=blue): display(p1,p2);
```



Zpět

Příklad 2.1.3

Vyšetřete spojitost funkce f na jejím definičním oboru,

$$f(x) = \begin{cases} 2 + x^2 & \text{pro} \quad x \in (-\infty, 0\rangle, \\ \dfrac{\sin(2x)}{x} & \text{pro} \quad x \in (0, 5\rangle. \end{cases}$$

Mathematica:

$\boldsymbol{f}$**[x_]:=Piecewise[{{2 +** $\boldsymbol{x}$**^2,** $\boldsymbol{x \leq 0}$**}, {Sin[2**$\boldsymbol{x}$**]/**$\boldsymbol{x}$**,** $\boldsymbol{x > 0}$**}}]**

Limit[$\boldsymbol{f}$**[**$\boldsymbol{x}$**],** $\boldsymbol{x \to 0}$**]**

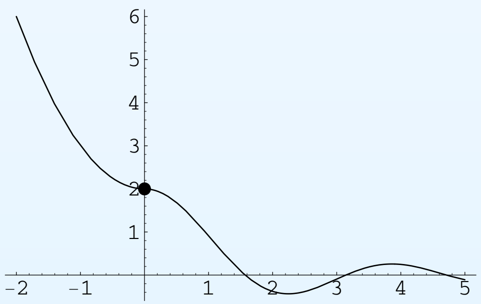
2

$\boldsymbol{f}$**[0]**

2

Funkce je spojitá v bodě $x = 0$, je tedy spojitá v celém intervalu $(\infty, 5\rangle$.

$\boldsymbol{g}$ **= Plot[**$\boldsymbol{f}$**[**$\boldsymbol{x}$**], {**$\boldsymbol{x}$**, −2, 5}, Epilog → {{Disk[{0, 2}, {0.1, .15}]}}]**



Zpět

Limity

- **Příklad 2.2.1** Vypočtěte limitu

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x + x}{\operatorname{arccotg} x}.$$

- **Příklad 2.2.2** Vypočtěte následující limitu:

$$\lim_{x\to 1-} \frac{x^2}{\arccos x} \ .$$

- **Příklad 2.2.3** Vypočtěte limitu

$$\lim_{x\to 1-} \frac{x^2}{\arcsin x} \ .$$

- **Příklad 2.2.4** Vypočtěte limitu

$$\lim_{x\to -3} \frac{\sqrt{6-x}+x}{3-2x-x^2}.$$

- **Příklad 2.2.5** Vypočtěte limity

$$\text{a)} \quad \lim_{x\to 0+} \frac{\ln x^2}{x^2} \qquad \text{b)} \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x^2}{x^2}.$$

Zpět

Příklad 2.2.1

Vypočtěte limitu

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\, x + x}{\operatorname{arccotg}\, x}.$$

? Zpět

Příklad 2.2.1

Vypočtěte limitu

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x + x}{\operatorname{arccotg} x}.$$

Výsledek:

$+\infty$.

Zpět

Příklad 2.2.1

Vypočtěte limitu

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x + x}{\operatorname{arccotg} x}.$$

Návod:

Aplikujeme větu o limitě součtu, o limitě podílu a o limitě součinu.

Zpět

Příklad 2.2.1

Vypočtěte limitu
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\, x + x}{\operatorname{arccotg}\, x}.$$

Řešení:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\, x + x}{\operatorname{arccotg}\, x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\operatorname{arccotg}\, x}(\ln\, x + x).$$

Protože $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\, x = +\infty$, je i $\lim\limits_{x\to+\infty} (\ln\, x + x) = +\infty$.
Protože $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{arccotg}\, x = 0+$ (funkce arccotg x je kladná na svém definičním oboru), je $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\operatorname{arccotg}\, x} = +\infty$.

Výsledná limita je tedy "$(+\infty)\cdot(+\infty)$" $= +\infty$.

Zpět

Příklad 2.2.1

Vypočtěte limitu

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x + x}{\operatorname{arccotg} x}.$$

Maple:

```
> limit((ln(x)+x)/arccot(x), x=infinity);
```

$$\infty$$

Zpět

Příklad 2.2.1

Vypočtěte limitu

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x + x}{\operatorname{arccotg} x}.$$

Mathematica:

Limit[(Log[x] + x)/ArcCot[x], $x \rightarrow$ Infinity]

∞

Zpět

Příklad 2.2.2

Vypočtěte následující limitu:

$$\lim_{x \to 1-} \frac{x^2}{\arccos x} \,.$$

? Zpět

Příklad 2.2.2

Vypočtěte následující limitu:

$$\lim_{x \to 1-} \frac{x^2}{\arccos x} .$$

Výsledek:

$+\infty$.

Zpět

Příklad 2.2.2

Vypočtěte následující limitu:

$$\lim_{x\to 1-} \frac{x^2}{\arccos x} \ .$$

Návod:

Využijte spojitost funkce $y = x^2$ v bodě $x = 1$ a větu o limitě podílu, je-li jmenovatel kladný a limita jmenovatele je 0.

Zpět

Příklad 2.2.2

Vypočtěte následující limitu:

$$\lim_{x\to 1-} \frac{x^2}{\arccos x}\ .$$

Řešení:

Protože funkce $y = x^2$ je spojitá v bodě $x = 1$, je limita funkce rovna v tomto bodě funkční hodnotě: $\lim\limits_{x\to 1-} x^2 = 1$. Funkce $\arccos x$ je nezáporná na svém definičním oboru a $\arccos 1 = 0$, tedy $\lim\limits_{x\to 1-} \arccos x = 0+$. Limita podílu je "$1/(0+)$" $= +\infty$.

Zpět

Příklad 2.2.2

Vypočtěte následující limitu:

$$\lim_{x \to 1-} \frac{x^2}{\arccos\, x} \; .$$

Maple:

```
> limit(x^2/arccos(x), x=1,left);
```

$$\infty$$

Zpět

Příklad 2.2.2

Vypočtěte následující limitu:

$$\lim_{x \to 1-} \frac{x^2}{\arccos\, x} \, .$$

Mathematica:

Limit[x^2/ArcCos[x], x → 1, Direction → 1]

∞

Zpět

Příklad 2.2.3

Vypočtěte limitu

$$\lim_{x \to 1-} \frac{x^2}{\arcsin\ x}\ .$$

? Zpět

Příklad 2.2.3

Vypočtěte limitu

$$\lim_{x \to 1-} \frac{x^2}{\arcsin x} \,.$$

Výsledek:

$2/\pi$.

Zpět

Příklad 2.2.3

Vypočtěte limitu

$$\lim_{x \to 1-} \frac{x^2}{\arcsin x} \, .$$

Návod:

Využijte spojitost obou funkcí a větu o limitě podílu.

Zpět

Příklad 2.2.3

Vypočtěte limitu

$$\lim_{x\to 1-} \frac{x^2}{\arcsin x} \ .$$

Řešení:

Protože funkce $y = x^2$ je spojitá v bodě $x = 1$, je limita funkce rovna v tomto bodě funkční hodnotě: $\lim\limits_{x\to 1-} x^2 = 1$. Protože funkce $y = \arcsin x$ je spojitá zleva v bodě $x = 1$, je $\lim\limits_{x\to 1-} \arcsin x = \pi/2$. Limita podílu je "$1/(\pi/2)$" $= 2/\pi$.

Zpět

Příklad 2.2.3

Vypočtěte limitu

$$\lim_{x \to 1-} \frac{x^2}{\arcsin\, x} \; .$$

Maple:

```
>  limit(x^2/arcsin(x), x=1,left);
```

$$\frac{2}{\pi}$$

Zpět

Příklad 2.2.3

Vypočtěte limitu

$$\lim_{x \to 1-} \frac{x^2}{\arcsin x} .$$

Mathematica:

Limit[x^2/ArcSin[x], x → 1, Direction → 1]

$\frac{2}{\pi}$

Zpět

Příklad 2.2.4

Vypočtěte limitu

$$\lim_{x\to -3} \frac{\sqrt{6-x}+x}{3-2x-x^2}.$$

= ?

Zpět

Příklad 2.2.4

Vypočtěte limitu

$$\lim_{x \to -3} \frac{\sqrt{6-x}+x}{3-2x-x^2}.$$

Výsledek:

$5/24$.

Zpět

Příklad 2.2.4

Vypočtěte limitu

$$\lim_{x\to -3} \frac{\sqrt{6-x}+x}{3-2x-x^2}.$$

Návod:

Zlomek rozšíříme výrazem $\sqrt{6-x}-x$, vzniklé kvadratické trojčleny rozložíme na kořenové činitele. Zkrátíme-li členy $x+3$, dostaneme funkci, která se na prstencovém okolí bodu -3 rovná funkci, jejíž limitu počítáme, a tedy obě limity se sobě rovnají.

Zpět

Příklad 2.2.4

Vypočtěte limitu

$$\lim_{x\to -3} \frac{\sqrt{6-x}+x}{3-2x-x^2}.$$

Řešení:

$$\lim_{x\to -3} \frac{\sqrt{6-x}+x}{3-2x-x^2} = \lim_{x\to -3} \frac{\sqrt{6-x}+x}{3-2x-x^2}\,\frac{\sqrt{6-x}-x}{\sqrt{6-x}-x} =$$

$$= \lim_{x\to -3} \frac{6-x-x^2}{(3-2x-x^2)(\sqrt{6-x}-x)} = \lim_{x\to -3} \frac{(x+3)(2-x)}{(x+3)(1-x)(\sqrt{6-x}-x)} =$$

$$\lim_{x\to -3} \frac{(2-x)}{(1-x)(\sqrt{6-x}-x)} = \frac{(2-(-3))}{(1-(-3))(\sqrt{6-(-3)}-(-3))} = \frac{5}{4\cdot 6} = \frac{5}{24},$$

kde jsme využili spojitosti funkcí $2-x,\ 1-x$ a $\sqrt{6-x}-x$ v bodě $x=-3$ a faktu, že

$$\frac{\sqrt{6-x}+x}{3-2x-x^2} = \frac{(2-x)}{(1-x)(\sqrt{6-x}-x)} \quad \forall x \in P_\delta(-3),\ \delta > 0,$$

a tedy limity obou funkcí pro $x \to -3$ se sobě rovnají.

Zpět

Příklad 2.2.4

Vypočtěte limitu

$$\lim_{x\to -3} \frac{\sqrt{6-x}+x}{3-2x-x^2}.$$

Maple:

```
>  limit((\sqrt(6-x)+x)/(3-2*x-x^2), x=-3);
```

$$\frac{5}{24}$$

Zpět

Příklad 2.2.4

Vypočtěte limitu

$$\lim_{x \to -3} \frac{\sqrt{6-x}+x}{3-2x-x^2}.$$

Mathematica:

$$\mathbf{Limit[(Sqrt[(6-x)]+x)/(3-2x-x\hat{\ }2), x \to -3]}$$

$\frac{5}{24}$

Zpět

Příklad 2.2.5

Vypočtěte limity

$$\text{a)} \quad \lim_{x \to 0+} \frac{\ln x^2}{x^2} \qquad \text{b)} \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x^2}{x^2}.$$

? Zpět

Příklad 2.2.5

Vypočtěte limity

$$\text{a)} \quad \lim_{x \to 0+} \frac{\ln x^2}{x^2} \qquad \text{b)} \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x^2}{x^2}.$$

Výsledek:

a) $-\infty$, b) 0.

Zpět

Příklad 2.2.5

Vypočtěte limity

$$\text{a)} \quad \lim_{x\to 0+} \frac{\ln x^2}{x^2} \qquad \text{b)} \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x^2}{x^2}.$$

Návod:

a) Převeďte na součin ”$(+\infty)\cdot(-\infty)$”. b) Na výraz ”$\dfrac{+\infty}{+\infty}$” aplikujte L’Hospitalovo pravidlo.

Zpět

Příklad 2.2.5

Vypočtěte limity

$$\text{a)} \quad \lim_{x\to 0+} \frac{\ln x^2}{x^2} \qquad \text{b)} \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x^2}{x^2}.$$

Řešení:

a)

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\ln x^2}{x^2} = \lim_{x\to 0+} \frac{1}{x^2} \ln x^2 = \text{"}(+\infty)\cdot(-\infty)\text{"} = -\infty.$$

Protože $\lim\limits_{x\to 0+} x^2 = 0+$ (funkce je kladná na prstencovém okolí bodu 0), je $\lim\limits_{x\to 0+} \frac{1}{x^2} = +\infty$ a $\lim\limits_{x\to 0+} \ln x^2 = -\infty$.

b) Protože $\lim\limits_{x\to +\infty} x^2 = +\infty$ a $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln x^2 = +\infty$, počítáme limitu neurčitého výrazu "$\frac{+\infty}{+\infty}$". Aplikujeme L'Hospitalovo pravidlo a pokud existuje limita podílu derivací, obě limity se rovnají:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x^2}{x^2} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{1}{x^2}\, 2x}{2x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0.$$

Zpět

Příklad 2.2.5

Vypočtěte limity

$$\text{a)} \quad \lim_{x \to 0+} \frac{\ln x^2}{x^2} \qquad \text{b)} \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x^2}{x^2}.$$

Maple:

a)

```
> limit(ln(x^2)/x^2, x=0,right);
```

$$-\infty$$

b)

```
> limit(ln(x^2)/x^2, x=infinity);
```

$$0$$

Zpět

Příklad 2.2.5

Vypočtěte limity

$$\text{a)} \quad \lim_{x \to 0+} \frac{\ln x^2}{x^2} \qquad \text{b)} \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x^2}{x^2}.$$

Mathematica:

a)

Limit[Log[*x*^2]/*x*^2, *x* → 0, Direction → 1]

$-\infty$

b)

Limit[Log[*x*^2]/*x*^2, *x* → Infinity]

0

Zpět

Limita posloupností

- Příklad 2.3.1 Vypočtěte limitu posloupnosti:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n - 1}{2^n + 1}.$$

- Příklad 2.3.2 Vypočtěte limitu posloupnosti:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{3n}\right)^{6n+5}.$$

Zpět

Příklad 2.3.1

Vypočtěte limitu posloupnosti:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n - 1}{2^n + 1}.$$

? Zpět

Příklad 2.3.1

Vypočtěte limitu posloupnosti:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n - 1}{2^n + 1}.$$

Výsledek:

1 .

Zpět

Příklad 2.3.1

Vypočtěte limitu posloupnosti:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n - 1}{2^n + 1}.$$

Návod:

Vytkneme v čitateli i ve jmenovateli 2^n.

Zpět

Příklad 2.3.1

Vypočtěte limitu posloupnosti:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n - 1}{2^n + 1}.$$

Řešení:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n - 1}{2^n + 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n(1 - \frac{1}{2^n})}{2^n(1 + \frac{1}{2^n})} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 + \frac{1}{2^n}} = \frac{1-0}{1+0} = 1.$$

Využili jsme toho, že $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$.

Zpět

Příklad 2.3.1

Vypočtěte limitu posloupnosti:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n - 1}{2^n + 1}.$$

Maple:

```
> limit((2^n-1)/(2^n+1), n=infinity);
```

$$1$$

Zpět

Příklad 2.3.1

Vypočtěte limitu posloupnosti:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n - 1}{2^n + 1}.$$

Mathematica:

Limit[(2^*n* − 1)/(2^*n* + 1), *n* → Infinity]

1

Zpět

Příklad 2.3.2

Vypočtěte limitu posloupnosti:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3n}\right)^{6n+5}.$$

Zpět

Příklad 2.3.2

Vypočtěte limitu posloupnosti:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{3n}\right)^{6n+5} .$$

Výsledek:

e^2 .

Zpět

Příklad 2.3.2

Vypočtěte limitu posloupnosti:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3n}\right)^{6n+5}.$$

Návod:

Využijte toho, že $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}=\mathrm{e}.$

Zpět

Příklad 2.3.2

Vypočtěte limitu posloupnosti:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{3n}\right)^{6n+5}.$$

Řešení:

Protože $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n} = \mathrm{e}$, dostaneme

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{3n}\right)^{6n+5} = \lim_{m\to\infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{2m+5} =$$

(substituce $m := 3n,\ n \to +\infty \ \Rightarrow\ m \to +\infty$)

$$\lim_{m\to\infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{2m} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{5} = \lim_{m\to\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m}\right)^{2} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{5} =$$

$$= \mathrm{e}^2 (1+0)^5 = \mathrm{e}^2.$$

Zpět

Příklad 2.3.2

Vypočtěte limitu posloupnosti:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3n}\right)^{6n+5}.$$

Maple:

```
>   limit((1+(1/(3*n)))^(6*n+5), n=infinity);
```

$$e^2$$

Zpět

Příklad 2.3.2

Vypočtěte limitu posloupnosti:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{3n}\right)^{6n+5}.$$

Mathematica:

Limit[(1 + (1/(3 * *n*)))^(6 * *n* + 5), *n* → Infinity]

e^2

Zpět