Derivace funkce a parciální derivace

- Derivace funkce jedné proměnné
- Derivace vyšších řádů
- L'Hospitalovo pravidlo
- Parciální derivace

Derivace funkce jedné proměnné

- Příklad 3.1.1 Vypočtěte z definice derivaci funkce $f(x) = x^2$ v bodě $x_0 = 3$.
- Příklad 3.1.2 Vypočtěte z definice derivaci funkce $f(x) = \frac{1}{x^2}$ v bodě $x_0 = 1$.
- Příklad 3.1.3 Vypočtěte z definice derivaci funkce $f(x) = \sin x$ v bodě $x_0 = \pi$.

Zpět

Příklad 3.1.1

Vypočtěte z definice derivaci funkce $f(x) = x^2$ v bodě $x_0 = 3$.

? Zpět

Příklad 3.1.1

Vypočtěte z definice derivaci funkce $f(x) = x^2$ v bodě $x_0 = 3$.

Výsledek:

$f'(3) = 6$.

Zpět

Příklad 3.1.1

Vypočtěte z definice derivaci funkce $f(x) = x^2$ v bodě $x_0 = 3$.

Návod:

Využijete definice derivace

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Zpět

Příklad 3.1.1

Vypočtěte z definice derivaci funkce $f(x) = x^2$ v bodě $x_0 = 3$.

Řešení:

K výpočtu využijeme definice derivace

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Podle této definice můžeme psát

$$f'(3) = \lim_{x \to 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{(x-3)(x+3)}{x - 3} = \lim_{x \to 3} (x + 3) = 6.$$

Zpět

Příklad 3.1.1

Vypočtěte z definice derivaci funkce $f(x) = x^2$ v bodě $x_0 = 3$.

Maple:

```
> f:=x->x^2;
```

$$f := x \to x^2$$

```
> derf3:=limit((f(x)-f(3))/(x-3),x=3);
```

$$derf3 := 6$$

Zpět

Příklad 3.1.1

Vypočtěte z definice derivaci funkce $f(x) = x^2$ v bodě $x_0 = 3$.

Mathematica:

f[x_] = x^2

x^2

derf3 = Limit[(f[x] − f[3])/(x − 3), x → 3]

6

Zpět

Příklad 3.1.2

Vypočtěte z definice derivaci funkce $f(x) = \frac{1}{x^2}$ v bodě $x_0 = 1$.

?

Zpět

Příklad 3.1.2

Vypočtěte z definice derivaci funkce $f(x) = \frac{1}{x^2}$ v bodě $x_0 = 1$.

Výsledek:

$f'(1) = -2$.

Zpět

Příklad 3.1.2

Vypočtěte z definice derivaci funkce $f(x) = \frac{1}{x^2}$ v bodě $x_0 = 1$.

Návod:

Využijete definice derivace

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} .$$

Zpět

Příklad 3.1.2

Vypočtěte z definice derivaci funkce $f(x) = \frac{1}{x^2}$ v bodě $x_0 = 1$.

Řešení:

K výpočtu využijeme definice derivace

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Podle této definice můžeme psát

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{\frac{1}{x^2} - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{\frac{1-x^2}{x^2}}{x - 1} = \\ &= \lim_{x \to 1} \frac{1 - x^2}{x^2\,(x - 1)} = \lim_{x \to 1} \frac{(1 - x)(1 + x)}{x^2\,(x - 1)} = \lim_{x \to 1} \frac{-(1 + x)}{x^2} = -2. \end{aligned}$$

Zpět

Příklad 3.1.2

Vypočtěte z definice derivaci funkce $f(x) = \frac{1}{x^2}$ v bodě $x_0 = 1$.

Maple:

```
> f:=x->1/x^2;
```

$$f := x \to \frac{1}{x^2}$$

```
> derf1:=limit((f(x)-f(1))/(x-1),x=1);
```

$$derf1 := -2$$

Zpět

Příklad 3.1.2

Vypočtěte z definice derivaci funkce $f(x) = \frac{1}{x^2}$ v bodě $x_0 = 1$.

Mathematica:

$\boldsymbol{f[\mathrm{x\_}] = 1/x\hat{}2}$

$\frac{1}{x^2}$

$\mathbf{derf1 = Limit[(\boldsymbol{f}[\boldsymbol{x}] - \boldsymbol{f}[1])/(\boldsymbol{x} - 1), \boldsymbol{x} \to 1]}$

-2

Zpět

Příklad 3.1.3

Vypočtěte z definice derivaci funkce $f(x) = \sin x$ v bodě $x_0 = \pi$.

? Zpět

Příklad 3.1.3

Vypočtěte z definice derivaci funkce $f(x) = \sin x$ v bodě $x_0 = \pi$.

Výsledek:

$f'(\pi) - 1$.

Zpět

Příklad 3.1.3

Vypočtěte z definice derivaci funkce $f(x) = \sin x$ v bodě $x_0 = \pi$.

Návod:

Využijte definici derivace

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

a vzorec

$$\sin(x) - \sin(y) = 2\,\sin(\frac{x-y}{2})\,\cos(\frac{x+y}{2})\,.$$

Zpět

Příklad 3.1.3

Vypočtěte z definice derivaci funkce $f(x) = \sin x$ v bodě $x_0 = \pi$.

Řešení:

K výpočtu využijeme definice derivace

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \, .$$

Podle této definice můžeme psát

$$\begin{aligned} f'(\pi) \quad &= \quad \lim_{x\to\pi} \frac{f(x) - f(\pi)}{x - \pi} = \lim_{x\to\pi} \frac{\sin(x) - \sin(\pi)}{x - \pi} = \lim_{x\to\pi} \frac{2\cos(\frac{x+\pi}{2})\ \sin(\frac{x-\pi}{2})}{x - \pi} = \\ &= \quad \lim_{x\to\pi} \cos(\frac{x+\pi}{2})\ \frac{\sin(\frac{x-\pi}{2})}{\frac{x-\pi}{2}} = \cos(\pi) = -1 \, . \end{aligned}$$

Použili jsme vzorec

$$\sin(x) - \sin(y) = 2\ \sin(\frac{x-y}{2})\ \cos(\frac{x+y}{2})$$

Zpět

Příklad 3.1.3

Vypočtěte z definice derivaci funkce $f(x) = \sin x$ v bodě $x_0 = \pi$.

Maple:

```
> f:=x->sin(x);
```

$$f := x \to \sin(x)$$

```
> derf1:=limit((f(x)-f(Pi))/(x-Pi),x=Pi);
```

$$derf1 := -1$$

Zpět

Příklad 3.1.3

Vypočtěte z definice derivaci funkce $f(x) = \sin x$ v bodě $x_0 = \pi$.

Mathematica:

f[x_] = Sin[x]

Sin[x]

derf1 = Limit[(f[x] − f[Pi])/(x − Pi), x → Pi]

-1

Zpět

Derivace vyšších řádů

- Příklad 3.2.1 Vypočtěte druhou derivaci funkce $f(x) = x^2 \sin(x)$.
- Příklad 3.2.2 Vypočtěte druhou derivaci funkce $f(x) = \dfrac{x^2}{\ln(x)}$.
- Příklad 3.2.3 Vypočtěte třetí derivaci funkce $f(x) = \frac{3}{x^2+1}$ v bodě $x_0 = 1$.

Zpět

Příklad 3.2.1

Vypočtěte druhou derivaci funkce $f(x) = x^2 \sin(x)$.

? Zpět

Příklad 3.2.1

Vypočtěte druhou derivaci funkce $f(x) = x^2 \sin(x)$.

Výsledek:

$f''(x) = -\sin(x)x^2 + 4\cos(x)x + 2\sin(x)$.

Zpět

Příklad 3.2.1

Vypočtěte druhou derivaci funkce $f(x) = x^2 \sin(x)$.

Návod:

$f''(x) = \Big(f'(x)\Big)'$.

Zpět

Příklad 3.2.1

Vypočtěte druhou derivaci funkce $f(x) = x^2 \sin(x)$.

Řešení:

$$
\begin{aligned}
f''(x) &= \Big((x^2 \sin(x))'\Big)' = \Big(2x \sin(x) + x^2 \cos(x)\Big)' = \\
&= 2\sin(x) + 2x\cos(x) + 2x\cos(x) - x^2 \sin(x) = \\
&= -x^2 \sin(x) + 4x\cos(x) + 2\sin(x)\,.
\end{aligned}
$$

Zpět

Příklad 3.2.1

Vypočtěte druhou derivaci funkce $f(x) = x^2 \sin(x)$.

Maple:

Definice funkce

```
>   f:=x->x^2*sin(x);
```

$$f := x \rightarrow x^2 \sin(x)$$

První derivace:

```
>   f1:=unapply(diff(f(x),x),x);
```

$$f1 := x \rightarrow 2\,x \sin(x) + x^2 \cos(x)$$

Druhá derivace:

```
>   f2:=unapply(diff(f1(x),x),x);
```

$$f2 := x \rightarrow 2 \sin(x) + 4\,x \cos(x) - x^2 \sin(x)$$

Zpět

Příklad 3.2.1

Vypočtěte druhou derivaci funkce $f(x) = x^2 \sin(x)$.

Mathematica:

$\boldsymbol{f[\mathrm{x\_}] = x\hat{}2\mathrm{Sin}[x]}$

$x^2\mathrm{Sin}[x]$

$\boldsymbol{D[f[x], x]}$

$x^2\mathrm{Cos}[x] + 2x\mathrm{Sin}[x]$

$\boldsymbol{D[D[f[x], x], x]}$

$4x\mathrm{Cos}[x] + 2\mathrm{Sin}[x] - x^2\mathrm{Sin}[x]$

Zpět

Příklad 3.2.2

Vypočtěte druhou derivaci funkce $f(x) = \dfrac{x^2}{\ln(x)}$.

? Zpět

Příklad 3.2.2

Vypočtěte druhou derivaci funkce $f(x) = \dfrac{x^2}{\ln(x)}$.

Výsledek:

$$f''(x) = \frac{2}{\ln(x)} - \frac{3}{\ln^2(x)} + \frac{2}{\ln^3(x)} \,.$$

Zpět

Příklad 3.2.2

Vypočtěte druhou derivaci funkce $f(x) = \dfrac{x^2}{\ln(x)}$.

Návod:

$f''(x) = \Big(f'(x)\Big)'$.

Zpět

Příklad 3.2.2

Vypočtěte druhou derivaci funkce $f(x) = \dfrac{x^2}{\ln(x)}$.

Řešení:

$$
\begin{aligned}
f''(x) &= \left(\left(\frac{x^2}{\ln(x)}\right)'\right)' = \left(\frac{2x\ln(x) - x^2\,\frac{1}{x}}{\ln^2(x)}\right)' = \left(\frac{2x}{\ln(x)} - \frac{x}{\ln^2(x)}\right)' = \\
&= \frac{2\ln(x) - 2x\,\frac{1}{x}}{\ln^2(x)} - \frac{\ln^2(x) - x\,2\,\ln(x)\,\frac{1}{x}}{\ln^4(x)} = \frac{2}{\ln(x)} - \frac{3}{\ln^2(x)} + \frac{2}{\ln^3(x)}\,.
\end{aligned}
$$

Zpět

Příklad 3.2.2

Vypočtěte druhou derivaci funkce $f(x) = \dfrac{x^2}{\ln(x)}$.

Maple:

Definice funkce

```
> f:=x->x^2/ln(x);
```

$$f := x \to \frac{x^2}{\ln(x)}$$

První derivace:

```
> f1:=unapply(diff(f(x),x),x);
```

$$f1 := x \to \frac{2\,x}{\ln(x)} - \frac{x}{\ln(x)^2}$$

Druhá derivace:

```
> f2:=unapply(diff(f1(x),x),x);
```

$$f2 := x \to \frac{2}{\ln(x)} - \frac{3}{\ln(x)^2} + \frac{2}{\ln(x)^3}$$

Zpět

Příklad 3.2.2

Vypočtěte druhou derivaci funkce $f(x) = \dfrac{x^2}{\ln(x)}$.

Mathematica:

$\boldsymbol{f[\mathrm{x\_}] = x\hat{}2/\mathrm{Log}[x]}$

$$\frac{x^2}{\mathrm{Log}[x]}$$

$\boldsymbol{D[f[x], x]}$

$$-\frac{x}{\mathrm{Log}[x]^2} + \frac{2x}{\mathrm{Log}[x]}$$

$\boldsymbol{D[D[f[x], x], x]}$

$$\frac{2}{\mathrm{Log}[x]^3} - \frac{3}{\mathrm{Log}[x]^2} + \frac{2}{\mathrm{Log}[x]}$$

Zpět

Příklad 3.2.3

Vypočtěte třetí derivaci funkce $f(x) = \frac{3}{x^2+1}$ v bodě $x_0 = 1$.

? Zpět

Příklad 3.2.3

Vypočtěte třetí derivaci funkce $f(x) = \frac{3}{x^2+1}$ v bodě $x_0 = 1$.

Výsledek:

$$f'''(x) = -\frac{72\,x\,(x^2-1)}{(x^2+1)^4}\,,\ f'''(1) = 0\,.$$

Zpět

Příklad 3.2.3

Vypočtěte třetí derivaci funkce $f(x) = \frac{3}{x^2+1}$ v bodě $x_0 = 1$.

Návod:

$f'''(x) = (((f'(x))')'$, do vypočtené třetí derivace dosadíme $x = 1$.

Zpět

Příklad 3.2.3

Vypočtěte třetí derivaci funkce $f(x) = \frac{3}{x^2+1}$ v bodě $x_0 = 1$.

Řešení:

Nejdříve vypočteme první, druhou a třetí derivaci:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= -\frac{6x}{(x^2+1)^2} \\
f''(x) &= -\left(\frac{6x}{(x^2+1)^2}\right)' = -\frac{6(x^2+1)^2 - 6x2(x^2+1)2x}{(x^2+1)^4} = -\frac{6(x^2+1) - 24x^2}{(x^2+1)^3} = \\
&= \frac{6\,(3\,x^2-1)}{(x^2+1)^3} \\
f'''(x) &= \left(\frac{6\,(3\,x^2-1)}{(x^2+1)^3}\right)' = \frac{36x(x^2+1)^3 - (6(3x^2-1)3(x^2+1)^2 2x}{(x^2+1)^6} = \\
&= \frac{36x(x^2+1) - 36(3x^2-1)x}{(x^2+1)^4} = -\frac{72\,x\,(x^2-1)}{(x^2+1)^4}
\end{aligned}
$$

Nyní dosadíme do třetí derivace za x jedničku:
$f'''(1) = 0$.

Zpět

Příklad 3.2.3

Vypočtěte třetí derivaci funkce $f(x) = \frac{3}{x^2+1}$ v bodě $x_0 = 1$.

Maple:

```
> f:=x->3/(x^2+1);
```

$$f := x \to \frac{3}{x^2+1}$$

První derivace:

```
> fd1:=diff(f(x),x);
```

$$fd1 := -\frac{6\,x}{(x^2+1)^2}$$

Druhá derivace:

```
> fd2:=simplify(diff(f(x),x$2));
```

$$fd2 := \frac{6\,(3\,x^2-1)}{(x^2+1)^3}$$

Třetí derivace:

```
> fd3:=unapply(simplify(diff(f(x),x$3)),x);
```

$$fd3 := x \to -\frac{72\,x\,(x^2-1)}{(x^2+1)^4}$$

Dosazení hodnoty:

```
> fd3(1);
```

$$0$$

Zpět

Příklad 3.2.3

Vypočtěte třetí derivaci funkce $f(x) = \frac{3}{x^2+1}$ v bodě $x_0 = 1$.

Mathematica:

$\boldsymbol{f[\text{x\_}] = 3/(x\hat{}2+1)}$

$\frac{3}{1+x^2}$

První derivace:
$\boldsymbol{\text{fd1}[\text{x\_}] = D[f[x], x]}$

$-\frac{6x}{(1+x^2)^2}$

Druhá derivace:
$\boldsymbol{\text{fd2}[\text{x\_}] = \text{Simplify}[D[f[x], \{x, 2\}]]}$

$\frac{6\left(-1+3x^2\right)}{(1+x^2)^3}$

Třetí derivace:
$\boldsymbol{\text{fd3}[\text{x\_}] = \text{Simplify}[D[f[x], \{x, 3\}]]}$

$-\frac{72x\left(-1+x^2\right)}{(1+x^2)^4}$

Dosazení hodnoty do třetí derivace:
fd3[1]

0

Zpět

L'Hospitalovo pravidlo

- Příklad 3.3.1 Vypočtěte limitu $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^4+2x^3-21x^2-22x+40}{x^4-5x^2+4}$.
- Příklad 3.3.2 Vypočtěte limitu $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{\arcsin x}$.
- Příklad 3.3.3 Vypočtěte limitu $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x^2}-1}{x-1}$.
- Příklad 3.3.4 Vypočtěte limitu $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln x}{x^2-1}$.
- Příklad 3.3.5 Vypočtěte limitu $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{x^2-2x+4}$.

Zpět

Příklad 3.3.1

Vypočtěte limitu $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^4+2x^3-21x^2-22x+40}{x^4-5x^2+4}$.

? Zpět

Příklad 3.3.1

Vypočtěte limitu $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^4+2x^3-21x^2-22x+40}{x^4-5x^2+4}$.

Výsledek:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^4+2x^3-21x^2-22x+40}{x^4-5x^2+4} = 9\,.$$

Zpět

Příklad 3.3.1

Vypočtěte limitu $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^4+2x^3-21x^2-22x+40}{x^4-5x^2+4}$.

Návod:

Limita je typu "$\frac{0}{0}$", použijeme l'Hospitalovo pravidlo

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} ,$$

Zpět

Příklad 3.3.1

Vypočtěte limitu $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^4+2x^3-21x^2-22x+40}{x^4-5x^2+4}$.

Řešení:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1} \frac{x^4+2x^3-21x^2-22x+40}{x^4-5x^2+4} &= „\frac{0}{0}“ = \lim_{x\to 1} \frac{(x^4+2x^3-21x^2-22x+40)'}{(x^4-5x^2+4)'} = \\ &= \lim_{x\to 1} \frac{4x^3+6x^2-42x-22}{4x^3-10x} = \frac{-54}{-6} = 9\,.\end{aligned}$$

Zpět

Příklad 3.3.1

Vypočtěte limitu $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^4+2x^3-21x^2-22x+40}{x^4-5x^2+4}$.

Maple:

Nejdříve si definujeme funkci, z které počítame limitu

```
> f:=x->(x^4 + 2*x^3 - 21*x^2 - 22*x + 40)/(x^4 - 5*x^2 + 4);
```

$$f := x \to \frac{x^4 + 2\,x^3 - 21\,x^2 - 22\,x + 40}{x^4 - 5\,x^2 + 4}$$

Maple nám samozřejmě vypočte limitu přímo

```
> limit(f(x),x=1);
```

$$9$$

Chceme-li použít l'Hospitalovo pravidlo, definujeme si následující funkci

```
> g:=unapply(diff((x^4 + 2*x^3 - 21*x^2 - 22*x + 40),x)/diff((x^4 -
5*x^2 + 4),x),x);
```

$$g := x \to \frac{4\,x^3 + 6\,x^2 - 42\,x - 22}{4\,x^3 - 10\,x}$$

Nyní vypočteme limitu z funkce, která vznikla derivací čitatele a derivací jmenovatele

```
> limit(g(x),x=1);
```

$$9$$

Zpět

Příklad 3.3.1

Vypočtěte limitu $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^4+2x^3-21x^2-22x+40}{x^4-5x^2+4}$.

Mathematica:

Nejdříve si definujeme funkci, z které počítame limitu
$\boldsymbol{f[\mathrm{x\_}] = (x\hat{\ }4 + 2x\hat{\ }3 - 21x\hat{\ }2 - 22x + 40)/(x\hat{\ }4 - 5x\hat{\ }2 + 4);}$

Mathematica nám samozřejmě vypočte limitu přímo
$\boldsymbol{\mathrm{Limit}[f[x], x \to 1]}$

9

Chceme-li použít l'Hospitalovo pravidlo, definujeme si následující funkci
$\boldsymbol{g[\mathrm{x\_}] = D[x\hat{\ }4 + 2x\hat{\ }3 - 21x\hat{\ }2 - 22x + 40, x]/D[x\hat{\ }4 - 5x\hat{\ }2 + 4, x]}$

$\frac{-22-42x+6x^2+4x^3}{-10x+4x^3}$

Nyní vypočteme limitu z funkce, která vznikla derivací čitatele a derivací jmenovatele
$\boldsymbol{\mathrm{Limit}[g[x], x \to 1]}$

9

Zpět

Příklad 3.3.2

Vypočtěte limitu $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{\arcsin x}$.

? Zpět

Příklad 3.3.2

Vypočtěte limitu $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{\arcsin x}$.

Výsledek:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\arcsin x} = 1 \,.$$

Zpět

Příklad 3.3.2

Vypočtěte limitu $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{\arcsin x}$.

Návod:

Limita je typu "$\frac{0}{0}$", použijeme l'Hospitalovo pravidlo

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} ,$$

Zpět

Příklad 3.3.2

Vypočtěte limitu $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{\arcsin x}$.

Řešení:

Protože platí $\lim\limits_{x\to 0} \sin x = 0$ a $\lim\limits_{x\to 0} \arcsin x = 0$, můžeme použít l'Hospitalovo pravidlo.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\arcsin x} \overset{\mathrm{l'Hospital}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{(\sin x)'}{(\arcsin x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} = \frac{1}{\frac{1}{1}} = 1\,.$$

Zpět

Příklad 3.3.2

Vypočtěte limitu $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{\arcsin x}$.

Maple:

Nejdříve si definujeme funkci, z které počítame limitu

```
> f:=x->sin(x)/arcsin(x);
```

$$f := x \to \frac{\sin(x)}{\arcsin(x)}$$

Maple nám samozřejmě vypočte limitu přímo

```
> limit(f(x),x=0);
```

$$1$$

Chceme-li použít l'Hospitalovo pravidlo, definujeme si následující funkci

```
> g:=unapply(diff(sin(x),x)/diff(arcsin(x),x),x);
```

$$g := x \to \cos(x)\sqrt{1 - x^2}$$

Nyní vypočteme limitu z funkce, která vznikla derivací čitatele a derivací jmenovatele

```
> limit(g(x),x=0);
```

$$1$$

Zpět

Příklad 3.3.2

Vypočtěte limitu $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{\arcsin x}$.

Mathematica:

Nejdříve si definujeme funkci, z které počítame limitu

$\boldsymbol{f[\mathrm{x\_}] = \mathrm{Sin}[x]/\mathrm{ArcSin}[x];}$

Mathematica nám samozřejmě vypočte limitu přímo

$\boldsymbol{\mathrm{Limit}[f[x], x \to 0]}$

1

Chceme-li použít l'Hospitalovo pravidlo, definujeme si následující funkci

$\boldsymbol{g[\mathrm{x\_}] = D[\mathrm{Sin}[x], x]/D[\mathrm{ArcSin}[x], x]}$

$\sqrt{1 - x^2}\mathrm{Cos}[x]$

Nyní vypočteme limitu z funkce, která vznikla derivací čitatele a derivací jmenovatele

$\boldsymbol{\mathrm{Limit}[g[x], x \to 0]}$

1

Zpět

Příklad 3.3.3

Vypočtěte limitu $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x^2} - 1}{x - 1}$.

? Zpět

Příklad 3.3.3

Vypočtěte limitu $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\sqrt[3]{x^2}-1}{x-1}$.

Výsledek:

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt[3]{x^2}-1}{x-1} = \frac{2}{3}.$$

Zpět

Příklad 3.3.3

Vypočtěte limitu $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\sqrt[3]{x^2}-1}{x-1}$.

Návod:

Limita je typu "$\frac{0}{0}$", použijeme l'Hospitalovo pravidlo

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} ,$$

Zpět

Příklad 3.3.3

Vypočtěte limitu $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x^2}-1}{x-1}$.

Řešení:

Protože platí $\lim\limits_{x\to 1} \sqrt[3]{x^2} - 1 = 0$ a $\lim\limits_{x\to 1} x - 1 = 0$, můžeme použít l'Hospitalovo pravidlo.

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x^2} - 1}{x - 1} \overset{\text{l}'\text{Hospital}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{(\sqrt[3]{x^2} - 1)'}{(x - 1)'} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{2}{3}\frac{1}{x^{(1/3)}}}{1} = \frac{\frac{2}{3}\frac{1}{1}}{1} = \frac{2}{3} .$$

Zpět

Příklad 3.3.3

Vypočtěte limitu $\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt[3]{x^2}-1}{x-1}$.

Maple:

Nejdříve si definujeme funkci, z které počítame limitu

```
>   f:=x->((x^2)^(1/3) - 1)/(x - 1);
```

$$f := x \to \frac{(x^2)^{(1/3)} - 1}{x - 1}$$

Maple nám samozřejmě vypočte limitu přímo

```
>   limit(f(x),x=1);
```

$$\frac{2}{3}$$

Chceme-li použít l'Hospitalovo pravidlo, definujeme si následující funkci

```
>   g:=unapply(diff(((x)^(2/3) - 1),x)/diff((x - 1),x),x);
```

$$g := x \to \frac{2}{3}\,\frac{1}{x^{(1/3)}}$$

Nyní vypočteme limitu z funkce, která vznikla derivací čitatele a derivací jmenovatele

```
>   limit(g(x),x=1);
```

$$\frac{2}{3}$$

Zpět

Příklad 3.3.3

Vypočtěte limitu $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x^2}-1}{x-1}$.

Mathematica:

Nejdříve si definujeme funkci, z které počítame limitu
$\boldsymbol{f[\mathrm{x\_}] = ((x\hat{\ }2)\hat{\ }(1/3) - 1)/(x - 1);}$

Mathematica nám samozřejmě vypočte limitu přímo
$\mathbf{Limit}[\boldsymbol{f[x], x \to 1}]$
$\frac{2}{3}$

Chceme-li použít l'Hospitalovo pravidlo, definujeme si následující funkci
$\boldsymbol{g[\mathrm{x\_}] = \mathbf{Simplify}[D[((x\hat{\ }2)\hat{\ }(1/3) - 1), x]/D[(x - 1), x]]}$
$\frac{2x}{3\left(x^2\right)^{2/3}}$

Nyní vypočteme limitu z funkce, která vznikla derivací čitatele a derivací jmenovatele
$\mathbf{Limit}[\boldsymbol{g[x], x \to 1}]$
$\frac{2}{3}$

Zpět

Příklad 3.3.4

Vypočtěte limitu $\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x^2 - 1}$.

? Zpět

Příklad 3.3.4

Vypočtěte limitu $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln x}{x^2-1}$.

Výsledek:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x^2-1} = \frac{1}{2} \, .$$

Zpět

Příklad 3.3.4

Vypočtěte limitu $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln x}{x^2-1}$.

Návod:

Limita je typu "$\frac{0}{0}$", použijeme l'Hospitalovo pravidlo

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} ,$$

Zpět

Příklad 3.3.4

Vypočtěte limitu $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln x}{x^2-1}$.

Řešení:

Protože platí $\lim\limits_{x\to 1} \ln x = 0$ a $\lim\limits_{x\to 1} x^2 - 1 = 0$, můžeme použít l'Hospitalovo pravidlo.

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x^2-1} \overset{\mathrm{l'Hospital}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{(\ln x)'}{(x^2-1)'} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x}}{2x} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{2x^2} = \frac{1}{2}\,.$$

Zpět

Příklad 3.3.4

Vypočtěte limitu $\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x^2-1}$.

Maple:

Nejdříve si definujeme funkci, z které počítame limitu

```
>   f:=x->(ln(x))/(x^2 - 1);
```

$$f := x \to \frac{\ln(x)}{x^2 - 1}$$

Maple nám samozřejmě vypočte limitu přímo

```
>   limit(f(x),x=1);
```

$$\frac{1}{2}$$

Chceme-li použít l'Hospitalovo pravidlo, definujeme si následující funkci

```
>   g:=unapply(diff(ln(x),x)/diff((x^2 - 1),x),x);
```

$$g := x \to \frac{1}{2}\,\frac{1}{x^2}$$

Nyní vypočteme limitu z funkce, která vznikla derivací čitatele a derivací jmenovatele

```
>   limit(g(x),x=1);
```

$$\frac{1}{2}$$

Zpět

Příklad 3.3.4

Vypočtěte limitu $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln x}{x^2-1}$.

Mathematica:

Nejdříve si definujeme funkci, z které počítame limitu

f[x_] = Log[x]/(x^2 − 1)

$\frac{\text{Log}[x]}{-1+x^2}$

Mathematica nám samozřejmě vypočte limitu přímo

Limit[f[x], $x \to$ 1]

$\frac{1}{2}$

Chceme-li použít l'Hospitalovo pravidlo, definujeme si následující funkci

g[x_] = Simplify[D[Log[x], x]/D[(x^2 − 1), x]]

$\frac{1}{2x^2}$

Nyní vypočteme limitu z funkce, která vznikla derivací čitatele a derivací jmenovatele

Limit[g[x], $x \to$ 1]

$\frac{1}{2}$

Zpět

Příklad 3.3.5

Vypočtěte limitu $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{x^2-2x+4}$.

? Zpět

Příklad 3.3.5

Vypočtěte limitu $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{x^2-2x+4}$.

Výsledek:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{x^2-2x+4} = 0\,.$$

Zpět

Příklad 3.3.5

Vypočtěte limitu $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{x^2-2x+4}$.

Návod:

Limita je typu "$\frac{\infty}{\infty}$", použijeme l'Hospitalovo pravidlo

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \, ,$$

Zpět

Příklad 3.3.5

Vypočtěte limitu $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{x^2-2x+4}$.

Řešení:

Protože platí $\lim\limits_{x\to\infty} \ln(x^2+1) = \infty$ a $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 - 2x + 4 = \infty$, můžeme použít l'Hospitalovo pravidlo.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{x^2-2x+4} \overset{\text{l}'\text{Hospital}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{(\ln(x^2+1))'}{(x^2-2x+4)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x}{x^2+1}}{2x-2} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x}{(x^2+1)(x-1)} = \text{„}\frac{\infty}{\infty}\text{"} =$$

$$\overset{\text{l}'\text{Hospital}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{(x)'}{(x^3-x^2+x-1)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{3x^2-2x+1} = 0\,.$$

Zpět

Příklad 3.3.5

Vypočtěte limitu $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{x^2-2x+4}$.

Maple:

Nejdříve si definujeme funkci, z které počítame limitu

```
>   f:=x->(ln(x^2+1))/(x^2 -2*x + 4);
```

$$f := x \to \frac{\ln(x^2+1)}{x^2 - 2\,x + 1}$$

Maple nám samozřejmě vypočte limitu přímo

```
>   limit(f(x),x=infty);
```

$$0$$

Chceme-li použít l'Hospitalovo pravidlo, definujeme si následující funkci

```
>   g:=unapply(diff(ln(x^2+1),x)/diff(x^2 -2*x + 4,x),x);
```

$$g := x \to \frac{2\,x}{(x^2+1)\,(2\,x-2)}$$

Na tuto funkci musíme opět použít l'Hospitalovo pravidlo

```
>   g:=unapply(diff(2*x,x)/expand(diff((x^2+1)*(2*x-2),x)),x);
```

$$g := x \to \frac{2}{6\,x^2 - 4\,x + 2}$$

Nyní vypočteme limitu z funkce, která vznikla dvakrát derivací čitatele a dvakrát derivací jmenovatele

```
>   limit(g(x),x=infty);
```

$$0$$

Zpět

Příklad 3.3.5

Vypočtěte limitu $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{x^2-2x+4}$.

Mathematica:

Nejdříve si definujeme funkci, z které počítame limitu

$\boldsymbol{f[\mathrm{x\_}] = \mathrm{Log}[x\hat{}2+1]/(x\hat{}2-2x+1)}$

$\frac{\mathrm{Log}\left[1+x^2\right]}{1-2x+x^2}$

Mathematica nám samozřejmě vypočte limitu přímo

$\boldsymbol{\mathrm{Limit}[f[x], x \longrightarrow \mathrm{Infinity}]}$

0

Chceme-li použít l'Hospitalovo pravidlo, definujeme si následující funkci

$\boldsymbol{g[\mathrm{x\_}] = \mathrm{Simplify}[D[\mathrm{Log}[x\hat{}2+1], x]/D[(x\hat{}2-2x+1), x]]}$

$\frac{x}{-1+x-x^2+x^3}$

$\boldsymbol{g[\mathrm{x\_}] = \mathrm{Simplify}[D[x, x]/D[(x\hat{}3-x\hat{}2+x-1), x]]}$

$\frac{1}{1-2x+3x^2}$

Nyní vypočteme limitu z funkce, která vznikla druhou derivací čitatele a druhou derivací jmenovatele

$\boldsymbol{\mathrm{Limit}[g[x], x \longrightarrow \mathrm{Infinity}]}$

0

Zpět

Parciální derivace

- Příklad 3.4.1 Vypočtěte parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ pro funkci $f(x, y) = x^2\, y^3$.
- Příklad 3.4.2 Vypočtěte parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ pro funkci $f(x, y) = x\, \ln(1 + x^2 + y^2)$.

Zpět

Příklad 3.4.1

Vypočtěte parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ pro funkci $f(x, y) = x^2\, y^3$.

? Zpět

Příklad 3.4.1

Vypočtěte parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ pro funkci $f(x,y) = x^2\,y^3$.

Výsledek:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2\,x\,y^3\,,\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3\,x^2\,y^2\,.$$

Zpět

Příklad 3.4.1

Vypočtěte parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ pro funkci $f(x,y)=x^2\,y^3$.

Návod:

Derivujeme funkci $f(x,y)=F(x)$, na y se díváme jako na parametr. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=F'(x)$.

Derivujeme funkci $f(x,y)=G(y)$, na x se díváme jako na parametr. $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=G'(y)$.

Zpět

Příklad 3.4.1

Vypočtěte parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ pro funkci $f(x,y) = x^2\,y^3$.

Řešení:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (x^2)'\,y^3 = 2\,x\,y^3\,,\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2\,(y^3)' = x^2\,3\,y^2 = 3\,x^2\,y^2\,.$$

Zpět

Příklad 3.4.1

Vypočtěte parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ pro funkci $f(x,y) = x^2\,y^3$.

Maple:

```
> f:=(x,y)->x^2*y^3;
```

$$f := (x,\ y) \to x^2\,y^3$$

```
> Diff(f(x,y),x)=diff(f(x,y),x);
```

$$\frac{\partial}{\partial x}\,(x^2\,y^3) = 2\,x\,y^3$$

```
> Diff(f(x,y),y)=diff(f(x,y),y);
```

$$\frac{\partial}{\partial y}\,(x^2\,y^3) = 3\,x^2\,y^2$$

Zpět

Příklad 3.4.1

Vypočtěte parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ pro funkci $f(x,y) = x^2\,y^3$.

Mathematica:

Nejdříve si definujeme funkci

f[x_, y_] = $x^{2}y$^3

x^2y^3

Nyní vypočteme parciální derivaci $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$

***D*[*f*[*x*, *y*], *x*]**

$2xy^3$

a parciální derivaci $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$

***D*[*f*[*x*, *y*], *y*]**

$3x^2y^2$

Zpět

Příklad 3.4.2

Vypočtěte parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ pro funkci $f(x, y) = x \ln(1 + x^2 + y^2)$.

? Zpět

Příklad 3.4.2

Vypočtěte parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ pro funkci $f(x,y) = x\ \ln(1+x^2+y^2)$.

Výsledek:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \ln(1+x^2+y^2) + \frac{2\,x^2}{1+x^2+y^2}\ ,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2\,x\,y}{1+x^2+y^2}\ .$$

Zpět

Příklad 3.4.2

Vypočtěte parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ pro funkci $f(x,y) = x\ \ln(1+x^2+y^2)$.

Návod:

Derivujeme funkci $f(x,y) = F(x)$, na y se díváme jako na parametr. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = F'(x)$.

Derivujeme funkci $f(x,y) = G(y)$, na x se díváme jako na parametr. $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = G'(y)$.

Zpět

Příklad 3.4.2

Vypočtěte parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ pro funkci $f(x,y) = x\ \ln(1+x^2+y^2)$.

Řešení:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \quad &= \quad (x)'\ln(1+x^2+y^2) + x\,\frac{\partial}{\partial x}\ln(1+x^2+y^2) = \\
&= \quad 1\ \ln(1+x^2+y^2) + x\,\frac{1}{1+x^2+y^2}\,\frac{\partial}{\partial x}(1+x^2+y^2) \\
&= \quad \ln(1+x^2+y^2) + \frac{x}{1+x^2+y^2}\,2\,x = \ln(1+x^2+y^2) + \frac{2\,x^2}{1+x^2+y^2}\,, \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \quad &= \quad x\,\frac{\partial}{\partial y}\ln(1+x^2+y^2) = x\,\frac{1}{1+x^2+y^2}\,\frac{\partial}{\partial y}(1+x^2+y^2) = x\,\frac{1}{1+x^2+y^2}\,2\,y = \\
&= \quad \frac{2\,x\,y}{1+x^2+y^2}\,.
\end{aligned}$$

Zpět

Příklad 3.4.2

Vypočtěte parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ pro funkci $f(x, y) = x\ \ln(1 + x^2 + y^2)$.

Maple:

```
> f:=(x,y)->x*ln(1+x^2+y^2);
```

$$f := (x,\ y) \to x \ln(1 + x^2 + y^2)$$

```
> Diff(f(x,y),x)=diff(f(x,y),x);
```

$$\frac{\partial}{\partial x}\,(x \ln(1 + x^2 + y^2)) = \ln(1 + x^2 + y^2) + \frac{2\,x^2}{1 + x^2 + y^2}$$

```
> Diff(f(x,y),y)=diff(f(x,y),y);
```

$$\frac{\partial}{\partial y}\,(x \ln(1 + x^2 + y^2)) = \frac{2\,x\,y}{1 + x^2 + y^2}$$

Zpět

Příklad 3.4.2

Vypočtěte parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ pro funkci $f(x,y) = x\ \ln(1+x^2+y^2)$.

Mathematica:

Nejdříve si definujeme funkci

$\boldsymbol{f}$**[x_, y_] =** $\boldsymbol{x}$**Log[1 +** $\boldsymbol{x}$**^2 +** $\boldsymbol{y}$**^2]**

$x\mathrm{Log}\left[1+x^2+y^2\right]$

Nyní vypočteme parciální derivaci $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$

$\boldsymbol{D[f[x,y],x]}$

$\frac{2x^2}{1+x^2+y^2}+\mathrm{Log}\left[1+x^2+y^2\right]$

a parciální derivaci $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$

$\boldsymbol{D[f[x,y],y]}$

$\frac{2xy}{1+x^2+y^2}$

Zpět