Průběh funkce jedné proměnné

- Průběh funkce
- Newtonova metoda

Průběh funkce

- Příklad 4.1.1 Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \ln^3 x$.
- Příklad 4.1.2 Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$.
- Příklad 4.1.3 Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2}$.

Zpět

Příklad 4.1.1

Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \ln^3 x$.

? Zpět

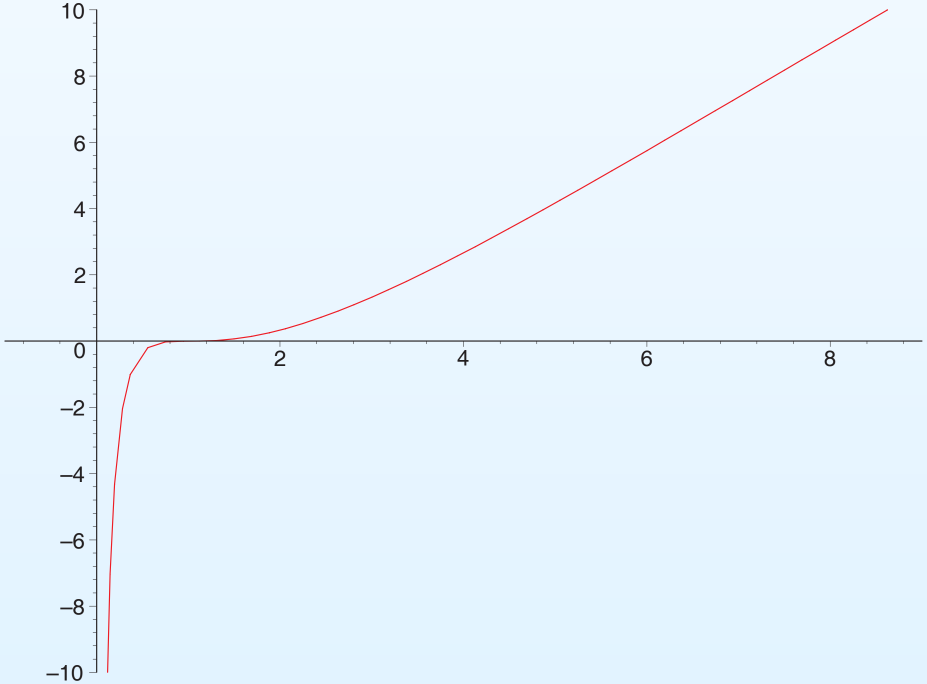
Příklad 4.1.1

Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \ln^3 x$.

Výsledek:

Funkce $f(x) = \ln^3 x$.

x	0	$(0,1)$	1	$(1,\mathrm{e}^2)$	e^2	(e^2,∞)	∞
$f(x)$	$-\infty$	-	0	$+$	8	$+$	∞
$f'(x)$		$+$	0	$+$	$+$	$+$	
$f''(x)$		-	0	$+$	0	-	
f		$/\ \frown$	infl.	$/\ \smile$	infl.	$/\ \frown$	
as.	$x = 0$						



Zpět

Příklad 4.1.1

Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \ln^3 x$.

Návod:

Průběh funkce se vyšetřuje v následujících bodech:
1. $D(f)$, sudost, lichost, periodicita, průsečíky se souřadnicovými osami,
2. limity v krajních bodech intervalů, které tvoří D(f), spojitost,
3. monotonnost, extrémy,
4. intervaly konkavity a konvexity, inflexní body,
5. asymptoty,
6. graf funkce.

Zpět

Příklad 4.1.1

Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \ln^3 x$.

Řešení:

1. Definiční obor: Jelikož je funkce y^3 definována pro všechna $y \in \mathbb{R}$ a vnitřní funkce $\ln x$ je definována pouze pro $x \in (0, \infty)$, je $\boxed{D(f) = (0, \infty)}$.
Množina $D(f)$ není symetrická podle počátku a tedy vyšetřovaná funkce není ani sudá ani lichá. Funkce není ani periodická.
Průsečík se souřadnicovou osou x :
$\ln^3 x = 0 \quad \Rightarrow \quad \ln x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1 \quad \Rightarrow \quad$ bod $\boxed{[1, 0]}$.
Zřejmě je funkce záporná v intervalu $(0, 1)$ a kladná v $(1, \infty)$.
2. Funkce je spojitá na $D(f)$.
Limity v krajních bodech $D(f)$: $\boxed{\lim_{x \to 0+} \ln^3 x = -\infty}$, $\boxed{\lim_{x \to \infty} \ln^3 x = \infty}$.
3. Vypočteme první derivaci f' a pro určení monotonnosti funkce stanovíme, kdy je f' rovna 0, kladná a záporná (přičemž se omezíme pouze na $D(f)$):

$$f'(x) = \frac{3 \ln^2 x}{x} \,,$$

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1 \,,$$

$$f'(x) > 0 \,, \text{ pro } \forall x \in (0, \infty) \setminus \{1\} \,.$$

Funkce je tedy na celém definičním oboru rostoucí a nenabývá lokálních ani globálních extrémů. Tečnou ke grafu funkce v bodě $[1, 0]$ je osa x ($f'(x) = 0$).

Další

Příklad 4.1.1

Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \ln^3 x$.

Řešení:

4. Vypočteme druhou derivaci f'' a upravíme ji na tvar vhodný pro určení intervalů konvexity, konkavity funkce a pro stanovení inflexních bodů (omezíme se znovu pouze na $D(f)$):

$$f''(x) = \frac{3\ln x\,(2 - \ln x)}{x^2} \,,$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = \mathrm{e}^2 \,.$$

Snadno zjistíme, že

$$f''(x) < 0 \text{ pro } x \in (0,1) \cup (\mathrm{e}^2, \infty) \;\Rightarrow\; f \text{ je konkávní na } (0,1) \text{ a na } (\mathrm{e}^2, \infty)\,,$$

$$f''(x) > 0 \text{ pro } x \in (1, \mathrm{e}^2) \;\Rightarrow\; f \text{ je konvexní na } (1, \mathrm{e}^2)\,.$$

Funkce má v bodech $x = 1$ a $x = \mathrm{e}^2$ inflexi. Body $\boxed{[1,0]}$ a $\boxed{[\mathrm{e}^2, 8]}$ jsou tedy inflexními body funkce.

5. Svislou asymptotou funkce f je přímka $x = 0$ (to plyne z limity zjištěné v bodě 2.). Hledejme šikmou asymptotu pro $x \to +\infty$ ve tvaru $y = kx + q$:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln^3 x}{x} = 0 \;, \quad q = \lim_{x\to\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to\infty} \ln^3 x = \infty$$

Při výpočtu limity pro výpočet konstanty k jsme použili 3x l'Hospitalova pravidla. Poslední limita pro q je nevlastní (viz 2.), tedy šikmá asymptota neexistuje.

Další

Příklad 4.1.1

Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \ln^3 x$.

Řešení:

6. Výsledky shrnuté do tabulky :

Funkce $f(x) = \ln^3 x$.

x	0	$(0,1)$	1	$(1,\mathrm{e}^2)$	e^2	(e^2,∞)	∞
$f(x)$	$-\infty$	-	0	$+$	8	$+$	∞
$f'(x)$		$+$	0	$+$	$+$	$+$	
$f''(x)$		-	0	$+$	0	-	
f		$/ \frown$	infl.	$/ \smile$	infl.	$/ \frown$	
as.	$x = 0$						

Graf funkce: viz řešeni v systému Maple.

Zpět

Příklad 4.1.1

Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \ln^3 x$.

Maple:

```
> with(plots):
> f1:=x->(ln(x))^3;
```

$$f1 := x \to \ln(x)^3$$

1. Definiční obor:

```
> solve(x>0,x);
```

$$\mathrm{RealRange}(\mathrm{Open}(0),\ \infty)$$

Nebylo potřeba řešit, ihned patrné, že D(f1) = $(0, \infty)$. Průsečíky s osami:
Našel se průsečík s osou y, y =0.

```
> {solve(f1(x)=0,x)};
```

$$\{1\}$$

Našel se průsečík s osou x, x =1.
2. Limity v krajních bodech intervalů, které tvoří D(f):
$\lim_{x\to 0} \mathrm{f}(x) = -\infty$, $\lim_{x\to\infty} \mathrm{f}(x) = \infty$

```
> limit(f1(x), x = 0);
```

$$-\infty$$

```
> limit(f1(x), x = infinity);
```

$$\infty$$

Fce je spojitá v D(f1) = $(0, \infty)$.

Další

Příklad 4.1.1

Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \ln^3 x$.

Maple:

3. Stacionární body, intervaly monotonie, extrémy:

```
> df1:=D(f1);
```

$$df1 := x \to \frac{3\ln(x)^2}{x}$$

```
> solve(df1(x)>0,x);
```

$$\mathrm{RealRange}(\mathrm{Open}(0), \mathrm{Open}(1)), \mathrm{RealRange}(\mathrm{Open}(1), \infty)$$

```
> solve(df1(x)=0,x);
```

$$1$$

Bod "1" je tzv. stacionární bod, muže v něm být extrém. Není v něm lokální extrém funkce. První derivace funkce je kromě bodu "1" kladná, funkce je všude v definičním oboru rostoucí.

4. Intervaly konvexnosti resp. konkávnosti, inflexní body .

$$0$$

```
> ddf1:=D(df1);
```

$$ddf1 := x \to \frac{6\ln(x)}{x^2} - \frac{3\ln(x)^2}{x^2}$$

```
> solve(ddf1(x)<0,x);
```

$$\mathrm{RealRange}(\mathrm{Open}(0), \mathrm{Open}(1)), \mathrm{RealRange}(\mathrm{Open}(e^2), \infty)$$

Další

Příklad 4.1.1

Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \ln^3 x$.

Maple:

Zřejmě v uvedených intervalech je funkce konkávní , jinde konvexní. Druhá derivace funkce f1 v bodě "1" a " e^2" je rovna 0 a funkce zde má inflexní body.

```
> solve(ddf1(x)=0,x);
```

$$1,\ e^2$$

```
> f1(1);
```

$$0$$

```
> f1(exp(2));
```

$$8$$

V bodech [1 , 0], [e^2 , 8] se nacházejí inflexní body grafu funkce f1. 5. Asymptoty:

Funkce má svislou asymptotu x=0 , nebot funkce má v "0" nevlastní jednostrannou limitu. Šikmé asymptoty nemá, neboť

```
> k:=limit((ln(x))/x,x=infinity); q:=limit(f1(x)-k*x,x=infinity);
```

$$k := 0$$
$$q := \infty$$

Další

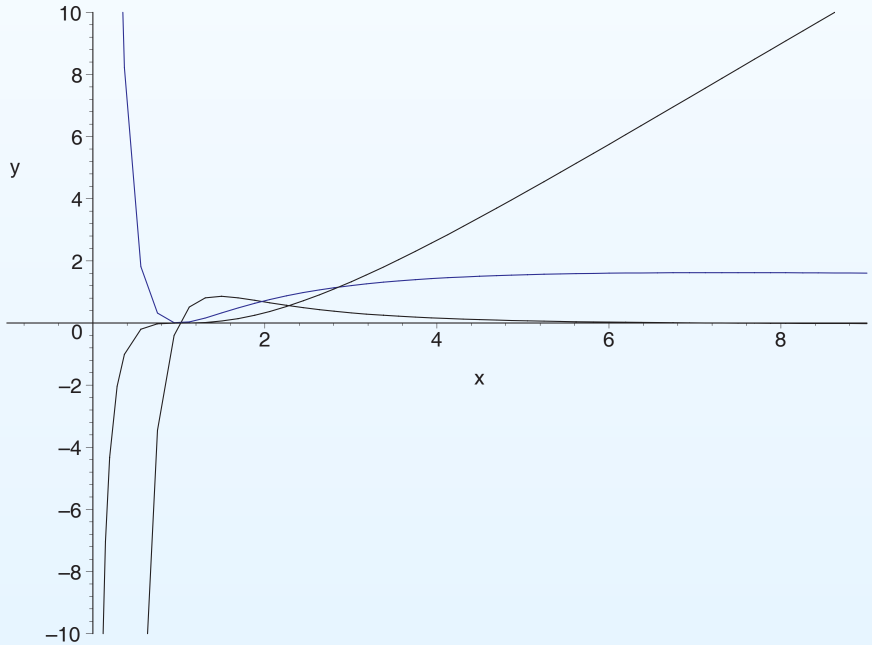
Příklad 4.1.1

Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \ln^3 x$.

Maple:

6) Graf funkce, H(f): Zobrazíme graf (červená barva.) spolu s grafem první (modrá barva) a druhé derivace funkce (zelená barva):

```
>  plot([f1(x),df1(x),ddf1(x)],x = -1..15,y = -10..15, discont =
true,color=[red,blue,green]);
```



Zřejmě H(f)=(- ∞,∞).

Zpět

Příklad 4.1.1

Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \ln^3 x$.

Mathematica:

$\boldsymbol{f}$**[x_] = Log[**$\boldsymbol{x}$**]^3**

$\mathrm{Log}[x]^3$

1. Definiční obor:
Není potřeba řešit, ihned patrné, že D(f) = (0, ∞).
Průsečíky s osami:

Solve[$\boldsymbol{f}$**[**$\boldsymbol{x}$**] == 0,** $\boldsymbol{x}$**]**
$\{\{x \to 1\}\}$
Našel se průsečík s osou x, x =1.

2. Limity v krajních bodech intervalů, které tvoří D(f):

Limit[$\boldsymbol{f}$**[**$\boldsymbol{x}$**],** $\boldsymbol{x}$ **→ 0, Direction → −1]**
$-\infty$
Limit[$\boldsymbol{f}$**[**$\boldsymbol{x}$**],** $\boldsymbol{x}$ **→ Infinity]**
∞

3. Stacionární body, intervaly monotonie, extrémy:

f1[x_] = $\boldsymbol{D}$**[**$\boldsymbol{f}$**[**$\boldsymbol{x}$**],** $\boldsymbol{x}$**]**
$\frac{3\mathrm{Log}[x]^2}{x}$
Solve[f1[$\boldsymbol{x}$**] == 0,** $\boldsymbol{x}$**]**
$\{\{x \to 1\}\}$

Další

Příklad 4.1.1

Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \ln^3 x$.

Mathematica:

$\mathbf{Simplify[f1[}\boldsymbol{x}\mathbf{] > 0]}$

$\frac{\mathrm{Log}[x]^2}{x} > 0$

Bod "1" je tzv. stacionární bod, muže v něm být extrém. Není v něm lokální extrém funkce. První derivace funkce je kromě bodu "1" kladná, funkce je všude v definičním oboru rostoucí.

4. Intervaly konvexnosti resp. konkávnosti, inflexní body .

$\mathbf{f2[}\boldsymbol{x}\mathbf{] = }\boldsymbol{D}\mathbf{[f1[}\boldsymbol{x}\mathbf{], }\boldsymbol{x}\mathbf{]}$

$\frac{6\mathrm{Log}[x]}{x^2} - \frac{3\mathrm{Log}[x]^2}{x^2}$

$\mathbf{Solve[f2[}\boldsymbol{x}\mathbf{] == 0, }\boldsymbol{x}\mathbf{]}$

$\{\{x \to 1\}, \{x \to e^2\}\}$

$\mathbf{Simplify[f2[}\boldsymbol{x}\mathbf{] > 0]}$

$\frac{(-2+\mathrm{Log}[x])\mathrm{Log}[x]}{x^2} < 0$

$\mathbf{Simplify[-2 + Log[}\boldsymbol{x}\mathbf{] < 0\&\&Log[}\boldsymbol{x}\mathbf{] > 0\|}$
$\mathbf{-2 + Log[}\boldsymbol{x}\mathbf{] > 0\&\&Log[}\boldsymbol{x}\mathbf{] < 0]}$

$0 < \mathrm{Log}[x] < 2$

$\mathbf{Simplify[f2[}\boldsymbol{x}\mathbf{] < 0]}$

$\frac{(-2+\mathrm{Log}[x])\mathrm{Log}[x]}{x^2} > 0$

$\mathbf{Simplify[-2 + Log[}\boldsymbol{x}\mathbf{] < 0\&\&Log[}\boldsymbol{x}\mathbf{] < 0\|}$
$\mathbf{-2 + Log[}\boldsymbol{x}\mathbf{] > 0\&\&Log[}\boldsymbol{x}\mathbf{] > 0]}$

$\mathrm{Log}[x] > 2\|\mathrm{Log}[x] < 0$

Další

Příklad 4.1.1

Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \ln^3 x$.

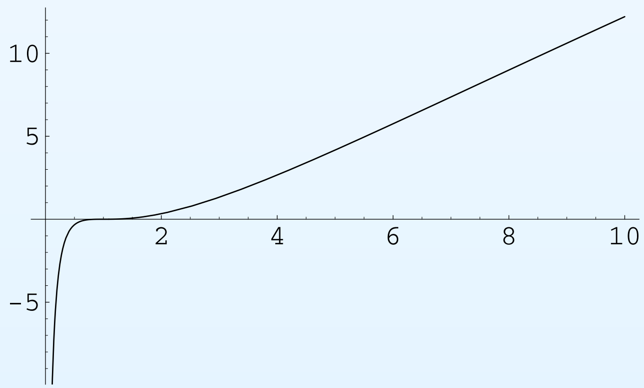
Mathematica:

Zřejmě v intervalech $(0,1)$ a (e^2,∞) je funkce konkávní , jinde konvexní. V bodech [1 , 0], [e^2 , 8] se nacházejí inflexní body grafu funkce f.

5. Asymptoty: Funkce má svislou asymptotu x=0 , nebot funkce má v "0" nevlastní jednostrannou limitu. Šikmé asymptoty nemá, neboť

k = Limit[f[x]/x, x → Infinity]
0
q = Limit[f[x] − kx, x → Infinity]
∞

6) Graf funkce, H(f):
Plot[f[x], {x, 0, 10}]



;

Zřejmě H(f)=(- ∞,∞).

Zpět

Příklad 4.1.2

Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$.

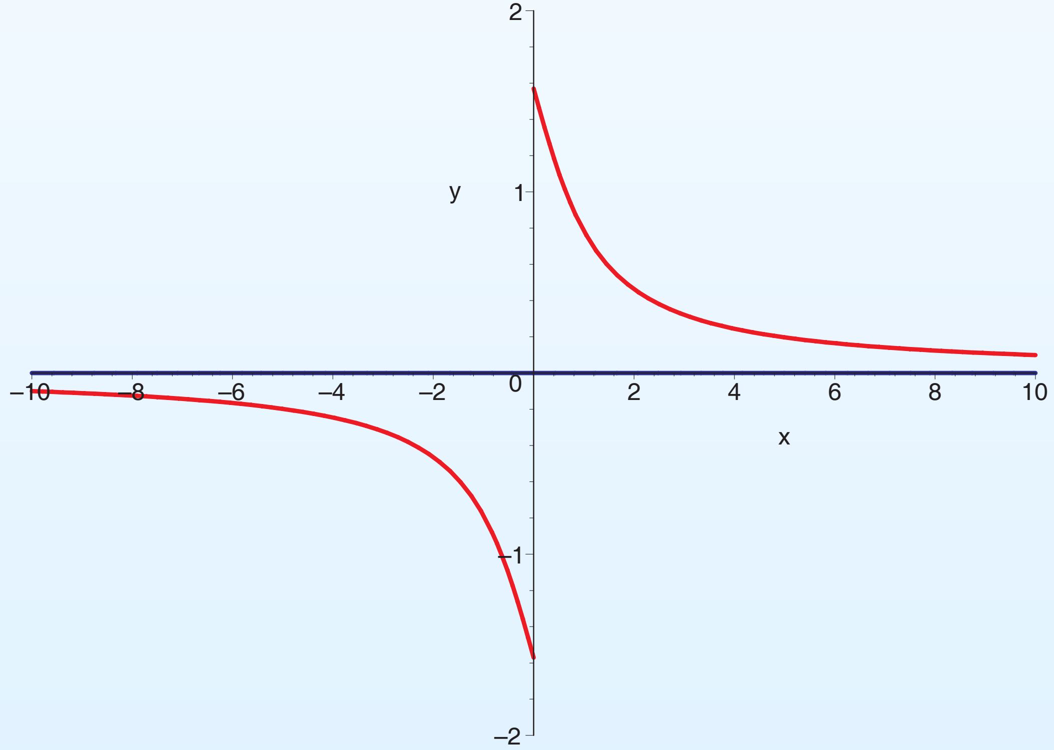
? Zpět

Příklad 4.1.2

Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$.

Výsledek:

x	$-\infty$	$(-\infty, 0)$	0_-	0_+	$(0, \infty)$	∞
$f(x)$	0	-	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$+$	0
$f'(x)$		-			-	
$f''(x)$		-			$+$	
f		$\setminus \frown$			$\setminus \smile$	
as.	$y = 0$					$y = 0$



Zpět

Příklad 4.1.2

Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$.

Návod:

Průběh funkce se vyšetřuje v následujících bodech:

1. $D(f)$, sudost, lichost, periodicita, průsečíky se souřadnicovými osami,
2. limity v krajních bodech intervalů, které tvoří D(f), spojitost,
3. monotonnost, extrémy,
4. intervaly konkavity a konvexity, inflexní body,
5. asymptoty,
6. graf funkce.

Zpět

Příklad 4.1.2

Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$.

Řešení:

1. Definiční obor: Funkce $\operatorname{arctg} y$ je definována pro všechna $y \in \mathbb{R}$. Vnitřní funkce $y = \frac{1}{x}$ je definována pouze pro $x \neq 0$. Tedy

$$\boxed{D(f) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)}.$$

Množina $D(f)$ je symetrická podle počátku, vyšetříme tedy, zda je funkce sudá, případně lichá. Platí

$$f(-x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{-x} = \operatorname{arctg} \left(-\frac{1}{x}\right) = -\operatorname{arctg} \frac{1}{x} = -f(x)\,,$$

tedy funkce je lichá a stačí vyšetřovat její průběh na intervalu $(0, \infty)$. Funkce není zřejmě periodická.
Průsečík se souřadnicovou osou y neexistuje, neboť v bodě $x = 0$ není funkce definována. Průsečíky se souřadnicovou osou x nejsou dosud zjistitelné.
2. Funkce je spojitá na $D(f)$.
Limity v krajních bodech $D(f)$: $\boxed{\lim\limits_{x \to 0+} \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}}$, $\boxed{\lim\limits_{x \to \infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = 0}$.
Jelikož je funkce lichá je $\boxed{\lim\limits_{x \to 0-} \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}}$, $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = 0}$.
3. Vypočteme první derivaci f' a pro určení monotonnosti funkce stanovíme, kdy je f' rovna 0, kladná a záporná (přičemž se omezíme pouze na $D(f)$):

Další

Příklad 4.1.2

Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \operatorname{arctg}\frac{1}{x}$.

Řešení:

$$f'(x) = \frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} = \frac{-1}{x^2+1}\,,\ f'(x) < 0\,,\ \text{pro } \forall x \in (0,\infty)\ .$$

Funkce je tedy na intervalu $(0,\infty)$ klesající a nenabývá zde lokálních extrémů. (Např. z lichosti funkce usoudíme, že je klesající i na intervalu $(-\infty,0)$) .
Funkce nenabývá na svém definičním oboru lokálních ani globálních extrémů.
4. Vypočteme druhou derivaci f'' a určíme intervaly konvexity, konkavity funkce (přičemž se omezíme pouze na $D(f) = D(f')$):

$$f''(x) = \frac{2x}{(x^2+1)^2}\ .$$

Snadno zjistíme, že

$$f''(x) > 0 \text{ pro } x \in (0,\infty) \ \Rightarrow\ f \text{ je konvexní na } (0,\infty)$$

$$(f''(x) < 0 \text{ pro } x \in (-\infty,0) \ \Rightarrow\ f \text{ je konkávní na } (-\infty,0)\,).$$

Bod $x = 0$ není inflexe funkce!
5. Svislou asymptotu funkce f nemá, neboť neexistuje bod z $D(f)$, kde by funkce měla nevlastní limitu.
Není třeba hledat šikmou asymptotu pro $x \to +\infty$ ve tvaru $y = kx + q$, neboť v 2. jsme již zjistili, že existuje vlastní limita $\lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{arctg}\frac{1}{x} = 0$. Tedy funkce má vodorovnou (horizontální) asymptotu $y = 0$ pro $x \to +\infty$. Z limity pro $x \to -\infty$ nebo z toho, že je funkce lichá, zjistíme, že přímka $y = 0$ je vodorovná asymptota funkce i pro $x \to -\infty$.

Další

Příklad 4.1.2

Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$.

Řešení:

6. Výsledky shrnuté do tabulky:

x	$-\infty$	$(-\infty, 0)$	0_-	0_+	$(0, \infty)$	∞
$f(x)$	0	-	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$+$	0
$f'(x)$		-			-	
$f''(x)$		-			$+$	
f		$\setminus\ \frown$			$\setminus\ \smile$	
as.	$y = 0$					$y = 0$

Graf funkce: viz řešeni v systému Maple. Zpět

Příklad 4.1.2

Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$.

Maple:

```
> with(plots):
> f2:= x ->arctan(1/x);
```

$$f2 := x \to \operatorname{arctan}(\frac{1}{x})$$

1. Definiční obor: D(f) = R -{0}.
Lichost:

```
> f2(-x);
```

$$-\operatorname{arctan}(\frac{1}{x})$$

tedy f2 je lichá funkce.
Průsečík s osami:

```
> {solve(f2(x)=0,x)};
```

$$\{\}$$

Maple hledá řešení , ale nenachází..
2. Limity v krajních bodech intervalů, které tvoří D(f):
$\lim_{x\to\infty}$ f(x) = $-$($\lim_{x\to(-\infty)}$ f(x)), nebot¡ funkce je lichá.

```
> limit(f2(x), x = infinity);
```

$$0$$

Totéž pro limitu v "0" zleva, zprava.

Další

Příklad 4.1.2

Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$.

Maple:

```
> limit(f2(x), x = 0,left);
```

$$-\frac{\pi}{2}$$

```
> limit(f2(x), x = 0,right);
```

$$\frac{\pi}{2}$$

3. Stacionární body, intervaly monotonie, extrémy:

```
> df2:=D(f2);
```

$$df2 := x \to -\frac{1}{x^2\,(\frac{1}{x^2}+1)}$$

```
> {solve(df2(x)=0,x)};
```

$$\{\}$$

f´<0 v (0, ∞) tj. funkce je zde klesající. Funkce rovněž klesá v intervalu (- ∞,0) (to plyne také z lichosti funkce). 4. Intervaly konvexnosti resp. konkávnosti, inflexní body:

```
> dff2:=D(df2);
```

$$dff2 := x \to \frac{2}{x^3\,(\frac{1}{x^2}+1)} - \frac{2}{x^5\,(\frac{1}{x^2}+1)^2}$$

Další

Příklad 4.1.2

Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$.

Maple:

```
> {solve(dff2(x)=0,x)};
```

$$\{0\}$$

```
> {solve(dff2(x)>0,x)};
```

$$\{\mathrm{RealRange}(\mathrm{Open}(0), \infty)\}$$

```
> {solve(dff2(x)<0,x)};
```

$$\{\mathrm{RealRange}(-\infty, \mathrm{Open}(0))\}$$

5. Asymptoty: Svislé asymptoty funkce nemá. To plyne z neexistence bodů na ose x, kde by funkce měla nevlastní jednostranné limity.

```
> k1:=limit(f2(x)/x,x=-infinity); q1:=limit(f2(x)-k1*x,x=-infinity);
```

$$k1 := 0$$

$$q1 := 0$$

```
> k2:=limit(f2(x)/x,x=infinity); q2:=limit(f2(x)-k2*x,x=infinity);
```

$$k2 := 0$$

$$q2 := 0$$

Šikmé asymptoty jsou :

```
> y1:= x -> 0*x - 0;
```

$$y1 := 0$$

Další

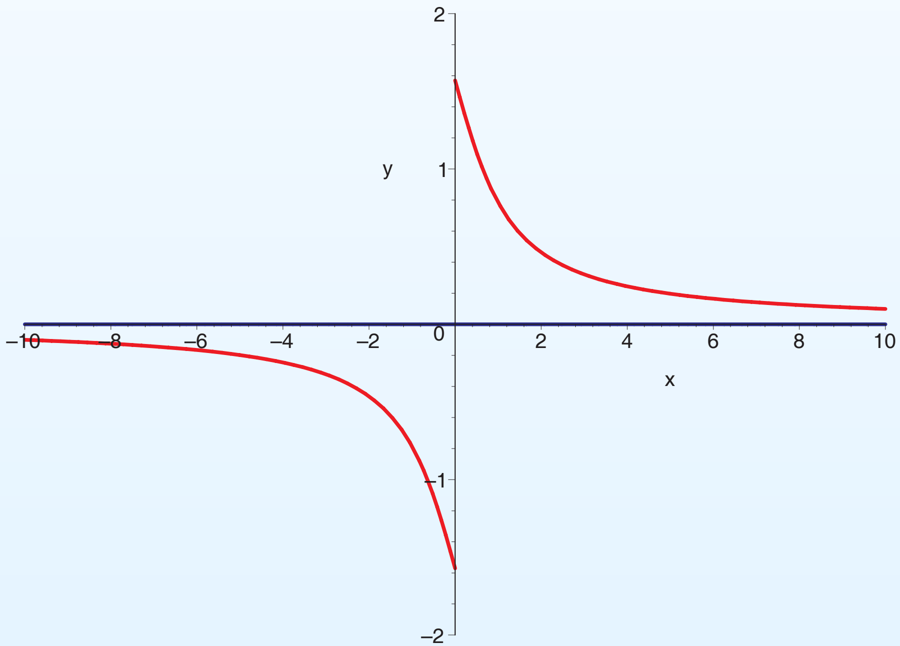
Příklad 4.1.2

Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$.

Maple:

Jelikož je funkce lichá, stačilo vyšetřit pouze $x \to \infty$. Dokonce nebylo třeba složitě počítat šikmé asymptoty. (Proč??)
6) Graf funkce, H(f): Zobrazíme graf (červená barva) spolu s grafem horizontální asymptoty (modrá barva):

```
> plot([f2(x),y1(x)], x = -10..10,y = -2..2,discont =
true,color=[red,blue],thickness=[2,2]);
```



Zřejmě H(f) = $< -\pi/2, \pi/2 >$-{0}, pokud funkci dodefinujeme v bodě ”0” limitami zprava a zleva, jinak H(f) = (- $\pi/2$,$\pi/2$) -{0}.

Zpět

Příklad 4.1.2

Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$.

Mathematica:

1. Definiční obor: $\mathrm{D(f)} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

f[x_] = ArcTan[1/x]
ArcTan$\left[\frac{1}{x}\right]$

Lichost:

$f[x] == f[-x]$
ArcTan$\left[\frac{1}{x}\right]$ == −ArcTan$\left[\frac{1}{x}\right]$
$f[x] == -f[-x]$
True

Funkce je lichá.

Průsečík s osami:

Solve[$f[x] == 0, x$]
$\{\{x \to \text{ComplexInfinity}\}\}$

Funkce nemá průsečíky s osami.

2. Limity v krajních bodech intervalů, které tvoří D(f):

Limit[$f[x], x \to 0$, Direction $\to -1$]
$\frac{\pi}{2}$
Limit[$f[x], x \to 0$, Direction $\to 1$]
$-\frac{\pi}{2}$

Další

Příklad 4.1.2

Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$.

Mathematica:

Limit[f[x], $x \to$ Infinity]
0

$\lim_{x\to\infty}$ f(x) = $-$($\lim_{x\to(-\infty)}$ f(x)), neboť funkce je lichá.

3. Stacionární body, intervaly monotonie, extrémy:

f1[x_] = Simplify[D[f[x], x]]
$-\frac{1}{1+x^2}$
Solve[f1[x] == 0, x]
{}
Simplify[f1[x] < 0]
True

$f' < 0$ v (0, ∞) tj. funkce je zde klesající. Funkce rovněž klesá v intervalu (- ∞,0) (to plyne také z lichosti funkce).

4. Intervaly konvexnosti resp. konkávnosti, inflexní body:

f2[x] = Simplify[D[f1[x], x]]
$\frac{2x}{(1+x^2)^2}$
Solve[f2[x] == 0, x]
$\{\{x \to 0\}\}$

Další

Příklad 4.1.2

Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$.

Mathematica:

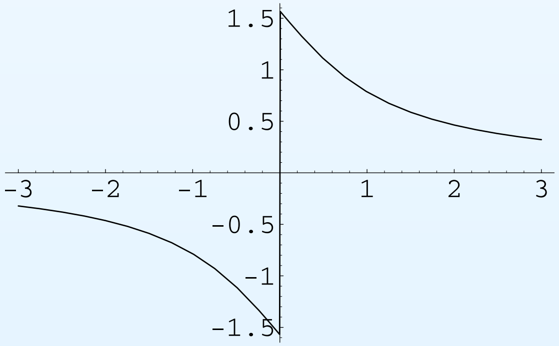
5. Asymptoty:

$\boldsymbol{k = \mathbf{Limit}[f[x]/x, x \to \mathbf{Infinity}]}$
0
$\boldsymbol{q = \mathbf{Limit}[f[x] - kx, x \to \mathbf{Infinity}]}$
0

Svislé asymptoty funkce nemá. To plyne z neexistence bodů na ose x, kde by funkce měla nevlastní jednostranné limity. Jelikož je funkce lichá, stačilo vyšetřit pouze $x \to \infty$. Funkce má asymptotu $y = 0$.

6) Graf funkce, H(f): Zobrazíme graf spolu s grafem horizontální asymptoty:

$\boldsymbol{g = \mathbf{Plot}[f[x], \{x, -3, 3\}]}$



Zřejmě $\mathrm{H}(f) = (-\pi/2, \pi/2) \setminus \{0\}$.

Zpět

Příklad 4.1.3

Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2}$.

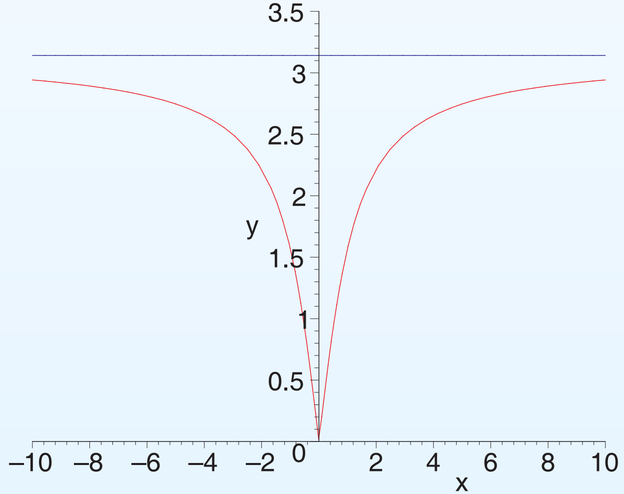
? Zpět

Příklad 4.1.3

Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2}$.

Výsledek:

x	$-\infty$	$(-\infty, 0)$	0	$(0, \infty)$	∞
$f(x)$	π		0		π
$f'(x)$		-	není def.	$+$	
$f''(x)$		-	není def.	-	
f		$\searrow \frown$	lok.min.	$\nearrow \frown$	
as.	$y = \pi$				$y = \pi$



Zpět

Příklad 4.1.3

Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2}$.

Návod:

Průběh funkce se vyšetřuje v následujících bodech:

1. $D(f)$, sudost, lichost, periodicita, průsečíky se souřadnicovými osami,
2. limity v krajních bodech intervalů, které tvoří D(f), spojitost,
3. monotonnost, extrémy,
4. intervaly konkavity a konvexity, inflexní body,
5. asymptoty,
6. graf funkce.

Zpět

Příklad 4.1.3

Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2}$.

Řešení:

1. Definiční obor: Funkce $\arccos y$ je definována pro $-1 \le y \le 1$. Pro vnitřní funkci musí platit $-1 \le \dfrac{1-x^2}{1+x^2} \le 1$, což je splněno pro $\forall x \in \mathbb{R}$. Tedy

$$\boxed{D(f) = (-\infty, \infty)}.$$

Množina $D(f)$ je symetrická podle počátku. Platí

$$f(-x) = \arccos \frac{1-(-x)^2}{1+(-x)^2} = \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2} = f(x)\,,$$

Funkce je zřejmě sudá, stačí vyšetřovat její průběh na intervalu $(0, \infty)$.
Funkce není zřejmě periodická.
Průsečík se souřadnicovou osou y je v bodě $\boxed{[0,0]}$ neboť $f(0) = 0$. Jelikož je vždy $\arccos y \ge 0$, jedná se o dotykový bod.
Zatím nezjistíme jiné dotykové body grafu funkce a osy x .
2. Funkce je spojitá na $D(f)$.
Limity v krajních bodech $D(f)$: $\lim\limits_{x\to\infty} \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2} = \arccos(-1) = \pi$.
Jelikož je funkce sudá je

$$\boxed{\lim_{x\to\pm\infty} \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2} = \pi}.$$

Další

Příklad 4.1.3

Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2}$.

Řešení:

3. Vypočteme první derivaci f' a pro určení monotonnosti funkce stanovíme, kdy je f' rovna 0, kladná a záporná:

$$f'(x) = -\frac{\frac{-2x(1+x^2)-2x(1-x^2)}{(1+x^2)^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}} = \frac{4x}{(1+x^2)\sqrt{4x^2}} = \frac{4x}{(1+x^2)\ |x|} = \frac{2\,\mathrm{sgn}\,x}{1+x^2}\,, \qquad \text{pro} \quad x \neq 0\,,$$

přičemž $\quad f'(0_+) = \lim_{x\to 0_+} \frac{2\,\mathrm{sgn}\,x}{1+x^2} = 2 \quad$ a $\quad f'(0_-) = -2\,.$

Derivace $f'(x)$ není tedy v bodě "0" spojitá a nebudeme ji tudíž dodefinovávat v tomto bodě nějakou hodnotou.
Platí: $f'(x) > 0\,,$ pro $\forall x \in (0,\infty)$,
funkce je tedy na intervalu $(0,\infty)$ rostoucí.
(Ze sudosti funkce plyne, že je klesající na intervalu $(-\infty,0)$) .
Funkce je v bodě "0" spojitá, ale nemá v tomto bodě derivaci. Tedy vzhledem k monotonnosti funkce, má funkce v bodě $\boxed{x=0}$ lokální minimum, které je zároveň globálním minimem funkce. Jiné lokální ani globální extrémy funkce nemá.
4. Vypočteme druhou derivaci f'' a určíme intervaly konvexity, konkavity funkce (přičemž se omezíme pouze na $D(f') = (-\infty,0)\cup(0,\infty)$):

$$f''(x) = \left(\frac{2\,\mathrm{sgn}\,x}{1+x^2}\right)' = \frac{-2\,\mathrm{sgn}\,x\; 2\,x}{(1+x^2)^2} = \frac{-4|x|}{(1+x^2)^2}\,.$$

Další

Příklad 4.1.3

Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2}$.

Řešení:

Snadno zjistíme, že

$$f''(x) < 0 \text{ pro } x \in (0, \infty) \;\Rightarrow\; f \text{ je konkávní na } (0, \infty)$$

$$(f''(x) < 0 \text{ pro } x \in (-\infty, 0) \;\Rightarrow\; f \text{ je konkávní na } (-\infty, 0)).$$

Bod $x = 0$ není inflexním bodem funkce, jelikož $f'(x)$ není v bodě "0" definována.
5. Svislou asymptotu funkce f nemá, neboť neexistuje bod z $D(f)$, kde by funkce měla nevlastní limitu.
Není třeba hledat šikmou asymptotu pro $x \to +\infty$ ve tvaru $y = kx + q$, neboť v 2. jsme již zjistili, že existuje vlastní limita $\lim_{x\to\infty} f(x) = \pi$. Tedy funkce má vodorovnou (horizontální) asymptotu $y = \pi$ pro $x \to +\infty$. Z limity pro $x \to -\infty$ nebo z toho, že je funkce sudá, zjistíme, že přímka $y = \pi$ je vodorovná asymptota funkce i pro $x \to -\infty$.
6. Výsledky shrnuté do tabulky:

x	$-\infty$	$(-\infty, 0)$	0	$(0, \infty)$	∞
$f(x)$	π		0		π
$f'(x)$		-	není def.	$+$	
$f''(x)$		-	není def.	-	
f		$\setminus \frown$	lok.min.	$/ \frown$	
as.	$y = \pi$				$y = \pi$

Graf funkce: viz řešeni v systému Maple.

Zpět

Příklad 4.1.3

Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2}$.

Maple:

```
> with(plots):
> f3:=x->arccos((1-x^2)/(1+x^2));
```

$$f3 := x \to \arccos(\frac{1-x^2}{1+x^2})$$

1. Definiční obor:

```
> solve(((1-x^2)/(1+x^2))>=-1 and (1-x^2)/(1+x^2)<=1,x);
```

$$x$$

Tímto příkazem jsme nenalezli hodnoty, ve kterých není funkce definována, tedy $D(f) = \mathbb{R}$. Sudost:

```
> f3(-x);
```

$$\arccos(\frac{1-x^2}{1+x^2})$$

tedy f2 je sudá funkce.
Průsečíky s osami:

```
> f3(0);
```

$$0$$

Našel se průsečík s osou y, y =0.

```
> {solve(f3(x)=0,x)};
```

$$\{0\}$$

Nenašel se jiný průsečík s osou x než $x = 0$.

Další

Příklad 4.1.3

Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2}$.

Maple:

2. Funkce je spojitá v D(f) .
Limity v krajních bodech intervalů, které tvoří D(f):
$\lim_{x\to\infty}$ f(x) = $\lim_{x\to(-\infty)}$ f(x), neboť funkce je sudá, stačí vyšetřit tuto limitu .

```
> limit(f3(x), x = infinity);
```

$$\pi$$

a spočítat hodnotu

```
> f3(0);
```

$$0$$

3. Stacionární body, intervaly monotonie, extrémy:

```
> df3:=diff(f3(x),x);
```

$$df3 := -\frac{-\dfrac{2\,x}{1+x^2} - \dfrac{2\,(1-x^2)\,x}{(1+x^2)^2}}{\sqrt{1-\dfrac{(1-x^2)^2}{(1+x^2)^2}}}$$

```
> df3:=normal(%);
```

$$df3 := \frac{2\,x}{(1+x^2)^2\sqrt{\dfrac{x^2}{(1+x^2)^2}}}$$

Další

Příklad 4.1.3

Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2}$.

Maple:

```
> df3:=simplify(%,assume=real);
```

$$df3 := \frac{2\,\mathrm{signum}(x)}{1+x^2}$$

První derivace funkce f3 není spojitá v bodě "0". Je kladná (f3 je rostoucí) pro kladná x a záporná (f3 je klesající) pro záporná x. Tedy f3 nabývá lokálního extrému v "0". Funkce nabývá lokálního i globálního minima v "0".

```
> solve(df3<0);
```

$$\mathrm{RealRange}(-\infty,\ \mathrm{Open}(0))$$

```
> solve(df3>0);
```

$$\mathrm{RealRange}(\mathrm{Open}(0),\ \infty)$$

4. Intervaly konvexnosti resp. konkavnosti, inflexní body. Ačkoliv první derivace funkce f3 není spojitá v bodě "0", zkusíme derivovat v systému Maple .

```
> dff3:=normal(diff(f3(x),x,x));
```

$$dff3 := -\frac{4\,x^4}{(1+x^2)^5\,\left(\frac{x^2}{(1+x^2)^2}\right)^{(3/2)}}$$

```
> df33:=simplify(%,assume=real);
```

$$df33 := -\frac{4\,|x|}{(1+x^2)^2}$$

Funkce je všude konkávní. Bod [0,0] však není inflexním bodem funkce, nebot první derivace v "0" neexistuje.

Příklad 4.1.3

Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2}$.

Maple:

5. Asymptoty: Svislé asymptoty funkce nemá. To plyne z vyšetřování limit v bodě 2.
Horizontální asymptoty: funkce $y = \pi$ pro $x \to -\infty$ i pro $x \to \infty$

```
> k:=limit(f3(x)/x,x=infinity); q:=limit(f3(x)-k*x,x=infinity);
```

$$k := 0 \quad q := \pi$$

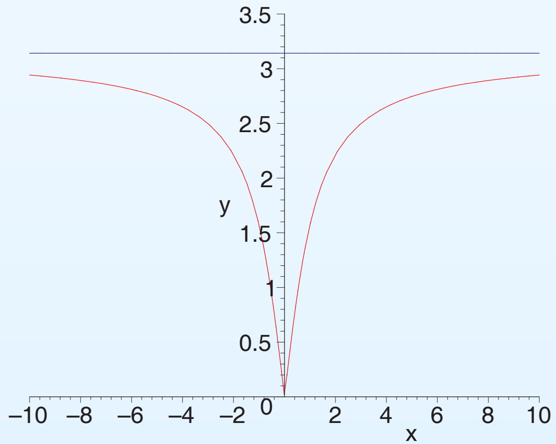
To již plyne z vyšetřování limit v bodě 2.

```
> y1:= x -> 0*x +Pi;
```

$$y1 := x \to 0\,x + \pi$$

6) Graf funkce, H(f):

```
> plot([f3(x),y1(x)], x = -10..10,y = 0..3.5,discont =
true,color=[red,blue],thickness=[2,2]);
```



Zřejmě H(f)= $< 0, \pi$).

Zpět

Příklad 4.1.3

Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2}$.

Mathematica:

$\boldsymbol{f[\mathrm{x\_}] = \mathrm{ArcCos}[(1 - x\hat{}2)/(1 + x\hat{}2)]}$
$\mathrm{ArcCos}\left[\frac{1-x^2}{1+x^2}\right]$

1. Definiční obor:

$\boldsymbol{\mathrm{Simplify}[-1 < (1 - x\hat{}2)/(1 + x\hat{}2) < 1]}$
$0 < \frac{x^2}{1+x^2} < 1$

Tímto příkazem jsme zjistili, že funkce je definována všude, tedy $D(f) = \mathbb{R}$.

Sudost, lichost:

$\boldsymbol{f[x] == f[-x]}$
True
$\boldsymbol{f[x] == -f[-x]}$
$\mathrm{ArcCos}\left[\frac{1-x^2}{1+x^2}\right] == -\mathrm{ArcCos}\left[\frac{1-x^2}{1+x^2}\right]$

Funkce je sudá

$\boldsymbol{\mathrm{Solve}[f[x] == 0, x]}$
$\{\{x \to 0\}\}$

Nenašel se jiný průsečík s osou x než $x = 0$.

Další

Příklad 4.1.3

Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2}$.

Mathematica:

2. Funkce je spojitá v D(f) .
Limity v krajních bodech intervalů, které tvoří D(f):

Limit[*f*[*x*], *x* → Infinity]
π

$\lim_{x\to\infty}$ f(x) = $\lim_{x\to(-\infty)}$ f(x), neboť funkce je sudá, stačí vyšetřit tuto limitu .
3. Stacionární body, intervaly monotonie, extrémy:

f1[x_] = Simplify[*D*[*f*[*x*], *x*]]
$$\frac{2\sqrt{\frac{x^2}{(1+x^2)^2}}}{x}$$
Assuming[*x* > 0, Simplify[f1[*x*]]]
$$\frac{2}{1+x^2}$$
Assuming[*x* < 0, Simplify[f1[*x*]]]
$$-\frac{2}{1+x^2}$$

První derivace funkce f není spojitá v bodě "0". Je kladná (f je rostoucí) pro kladná x a záporná (f je klesající) pro záporná x. Tedy f nabývá lokálního extrému v "0". Funkce nabývá lokálního i globálního minima v "0".

4. Intervaly konvexnosti resp. konkavnosti, inflexní body.
Ačkoliv první derivace funkce f není spojitá v bodě "0", zkusíme derivovat v systému Mathematica .

Další

Příklad 4.1.3

Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2}$.

Mathematica:

$$\mathbf{f2}[x] = \mathbf{Simplify}[D[\mathbf{f1}[x], x]]$$

$$-\frac{4\sqrt{\frac{x^2}{(1+x^2)^2}}}{1+x^2}$$

$$\mathbf{Solve}[\mathbf{f2}[x] == 0, x]$$

$$\{\{x \to 0\}\}$$

$$\mathbf{Assuming}[x > 0, \mathbf{Simplify}[\mathbf{f2}[x]]]$$

$$-\frac{4x}{(1+x^2)^2}$$

$$\mathbf{Assuming}[x < 0, \mathbf{Simplify}[\mathbf{f2}[x]]]$$

$$\frac{4x}{(1+x^2)^2}$$

Funkce je všude konkávní. Bod [0,0] však není inflexním bodem funkce, nebot první derivace v "0" neexistuje.

5. Asymptoty:

$$k = \mathbf{Limit}[f[x]/x, x \to \mathbf{Infinity}]$$

$$0$$

$$q = \mathbf{Limit}[f[x] - kx, x \to \mathbf{Infinity}]$$

$$\pi$$

Svislé asymptoty funkce nemá. To plyne z vyšetřování limit. Horizontální asymptoty: $y = \pi$ pro $x \to \pm\infty$.

Další

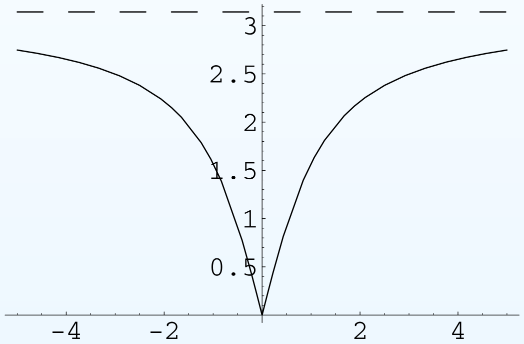
Příklad 4.1.3

Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2}$.

Mathematica:

6) Graf funkce, H(f):

$$\boldsymbol{g = \mathrm{Plot}[\{f[x], \mathrm{Pi}\}, \{x, -5, 5\},}$$
$$\boldsymbol{\mathrm{PlotStyle} \to \{\{\}, \{\mathrm{Dashing}[\{0.05, 0.05, 0.05\}]\}\}]}$$



−Graphics−

Zřejmě $\mathrm{H}(f) = \langle 0,\ \pi)$.

Zpět

Newtonova metoda

- **Příklad 4.2.1** Určete počet kořenů rovnice

$$\ln x + \sin x = 0\,.$$

  Zvolte vhodný separační interval a Newtonovou metodou spočítejte přibližně alespoň jeden kořen.

- **Příklad 4.2.2** Určete počet kořenů rovnice

$$2x - \ln x - 4\,.$$

  Zvolte vhodný separační interval a Newtonovou metodou spočítejte přibližně alespoň jeden kořen.

Zpět

Příklad 4.2.1

Určete počet kořenů rovnice

$$\ln x + \sin x = 0\,.$$

Zvolte vhodný separační interval a Newtonovou metodou spočítejte přibližně alespoň jeden kořen.

? Zpět

Příklad 4.2.1

Určete počet kořenů rovnice

$$\ln x + \sin x = 0\,.$$

Zvolte vhodný separační interval a Newtonovou metodou spočítejte přibližně alespoň jeden kořen.

Výsledek:

Funkce $\boxed{f(x) = \ln x + \sin x}$ nabývá v $D(f) = (0, \infty)$ jak kladných tak záporných hodnot. Rovnice má v $D(f)$ $\boxed{\text{právě jedno}}$ řešení. Vhodným separačním intervalem je např. $\boxed{\langle 0,1; 1\rangle}$ a volba počáteční aproximace $\boxed{x_0 = 0,1}$. Hodnota $\boxed{x = 0.57871}$ je přibližné řešení rovnice.

Výpočet čtyř iterací Newtonovou metodou

x_0	$0,1$
x_1	$0,30034$
x_2	$0,51202$
x_3	$0,57555$
x_4	$0,57871$

Zpět

Příklad 4.2.1

Určete počet kořenů rovnice
$$\ln x + \sin x = 0\,.$$

Zvolte vhodný separační interval a Newtonovou metodou spočítejte přibližně alespoň jeden kořen.

Návod:

Graficky určíme (pokud to lze) počet kořenů rovnice.
Hledáme-li kořen funkce $f(x) = 0$ Newtonovou metodou, je podstatné stanovit separační interval $\langle a, b\rangle$, kde existuje pouze jeden kořen, a v něm vhodně zvolit počáteční aproximaci x_0. V intervalu $\langle a, b\rangle$ ověříme:
(i) $f(a)\cdot f(b) < 0$,
(ii) $f'(x) \neq 0$ v (a, b),
(iii) $f''(x) \neq 0$ v $\langle a, b\rangle$.
(iv) Za x_0 volíme ten z krajních bodů $\langle a, b\rangle$, kde $f(x_0)\cdot f''(x_0) > 0$.

Postupné aproximace kořene vypočteme z rekurentního vzorce

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \qquad n = 0, 1, \dots$$

Zpět

Příklad 4.2.1

Určete počet kořenů rovnice

$$\ln x + \sin x = 0\,.$$

Zvolte vhodný separační interval a Newtonovou metodou spočítejte přibližně alespoň jeden kořen.

Řešení:

Grafické znázornění pro určení počtu kořenů:
Rovnici přepíšeme do tvaru

$$\ln x = -\sin x\,.$$

V tomto případě jsme ihned schopni nakreslit obě funkce vlevo i vpravo od rovnítka.
Je patrné, že existuje pouze jeden průsečík grafů funkcí, tedy původní rovnice má pouze jeden kořen a to v intervalu $(0, 1\rangle$.
Označíme

$$f(x) = \ln x + \sin x$$

funkci, pro kterou hledáme bod, kde se funkce anuluje. $D(f) = (0, \infty)$. Funkce nabývá jak kladných tak záporných hodnot.
Nalezneme separační interval. Vyjdeme při tom z předchozího grafického znázornění.
Zvolíme například interval $\langle 0,1; 1\rangle$ a ověříme, zda je to skutečně separační interval:
(i) $\quad f(0,1) \cdot f(1) =$
$= (\ln(0,1) + \sin(0,1)) \cdot (\ln 1 + \sin 1) = (-2,20275) \cdot (0,84147) < 0$
(ii) $\quad f'(x) = \dfrac{1}{x} + \cos x > 0$ pro $\forall x \in (0,1; 1)$,
(iii) $\quad f''(x) = -\dfrac{1}{x^2} - \sin x < 0$ pro $\forall x \in \langle 0,1; 1\rangle$.

Další

Příklad 4.2.1

Určete počet kořenů rovnice

$$\ln x + \sin x = 0\,.$$

Zvolte vhodný separační interval a Newtonovou metodou spočítejte přibližně alespoň jeden kořen.

Řešení:

(iv) Za x_0 volíme ten z krajních bodů $0,1$ nebo 1, kde $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$. To je splněno pro $x_0 = 0,1$, neboť $f(0,1) \cdot f''(0,1) = (-2,20275) \cdot f''(0,1) > 0$

První aproximaci kořene vypočteme pomocí počáteční aproximace x_0 z rekurentního vzorce

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 0,1 - \frac{-2,20275}{\frac{1}{0,1} + \cos(0,1)} = 0,30034$$

Další aproximace kořene dostaneme opět dosazením do rekurentního vzorce

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \qquad n = 0, 1, \ldots$$

Tedy

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 0,51202\,,$$

atd.

Zpět

Příklad 4.2.1

Určete počet kořenů rovnice

$$\ln x + \sin x = 0\,.$$

Zvolte vhodný separační interval a Newtonovou metodou spočítejte přibližně alespoň jeden kořen.

Maple:

Grafické znázornění pro určení počtu kořenů:
Rovnici přepíšeme do tvaru ln x = -sin x. Obě funkce vlevo i vpravo od rovnítka nakreslime.

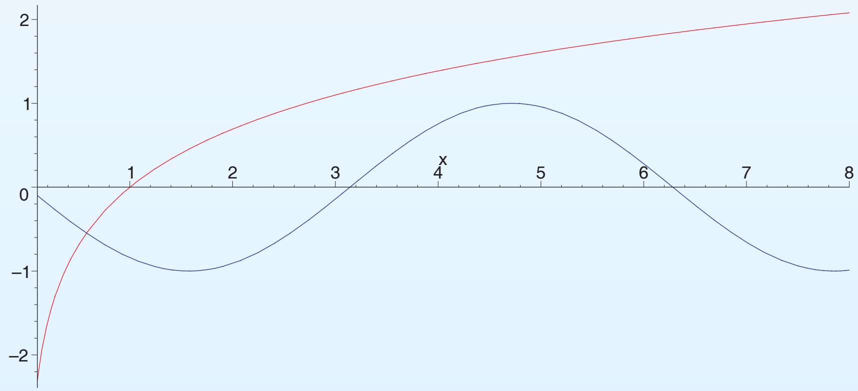
```
> f1:=x->-sin(x);
```

$$f1 := x \to -\sin(x)$$

```
> f2:=x->ln(x);
```

$$f2 := x \to \ln(x)$$

```
> plot([f1(x),f2(x)],x=0..8,discont=true,color=[blue,red]);
```



Další

Příklad 4.2.1

Určete počet kořenů rovnice

$$\ln x + \sin x = 0\,.$$

Zvolte vhodný separační interval a Newtonovou metodou spočítejte přibližně alespoň jeden kořen.

Maple:

Je patrné, že existuje pouze jeden průsečík grafů funkcí, tedy původní rovnice má pouze jeden kořen a to v intervalu <0,1 ;1 >. Cyklus pro výpočet Newtonovou metodou:

```
> f:=x->ln(x) +sin(x);
```

$$f := x \to \ln(x) + \sin(x)$$

Nejdříve jeden krok Newtonovy metody.

```
> g:=x->x-f(x)/D(f)(x);
```

$$g := x \to x - \frac{\mathrm{f}(x)}{\mathrm{D}(f)(x)}$$

```
> nmax:=5;
```

$$nmax := 5$$

Nyní napíšeme cyklus

```
> x[0]:=0.1;
```

$$x_0 := 0.1$$

```
> for n from 0 to nmax do x[n+1]:=evalf(g(x[n])) end do;
```

Další

Příklad 4.2.1

Určete počet kořenů rovnice

$$\ln x + \sin x = 0\,.$$

Zvolte vhodný separační interval a Newtonovou metodou spočítejte přibližně alespoň jeden kořen.

Maple:

$$x_1 := 0.3003411406$$

$$x_2 := 0.5120181992$$

$$x_3 := 0.5755471765$$

$$x_4 := 0.5787067299$$

$$x_5 := 0.5787136435$$

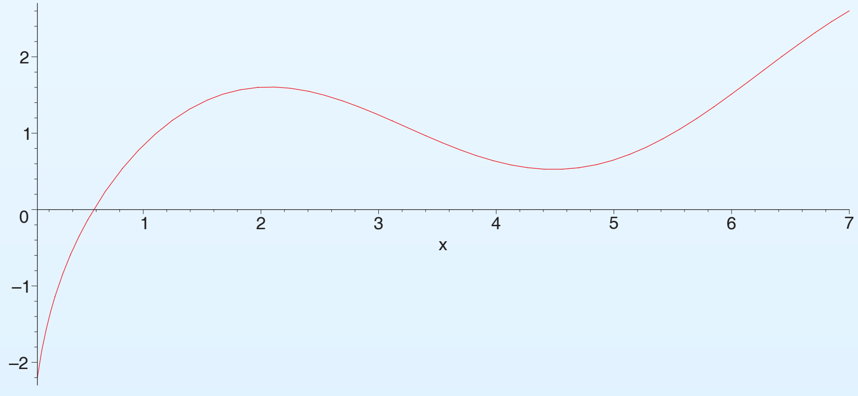
$$x_6 := 0.5787136435$$

Poslední aproximaci budeme považovat za přibližné řešení rovnice.

Ověření systémem Maple:

Na závěr z grafu funkce f(x) na intervalu (0,7) ověříme, že průsečíku fce s osou x skutečně odpovídá jediná hodnota, přibližně x=0,57871.

```
> plot([f(x)],x = 0..7, discont = true);
```



Zpět

Příklad 4.2.1

Určete počet kořenů rovnice

$$\ln x + \sin x = 0\,.$$

Zvolte vhodný separační interval a Newtonovou metodou spočítejte přibližně alespoň jeden kořen.

Mathematica:

Grafické znázornění pro určení počtu kořenů:
Rovnici přepíšeme do tvaru $\ln x = -\sin x$. Obě funkce vlevo i vpravo od rovnítka nakreslime.

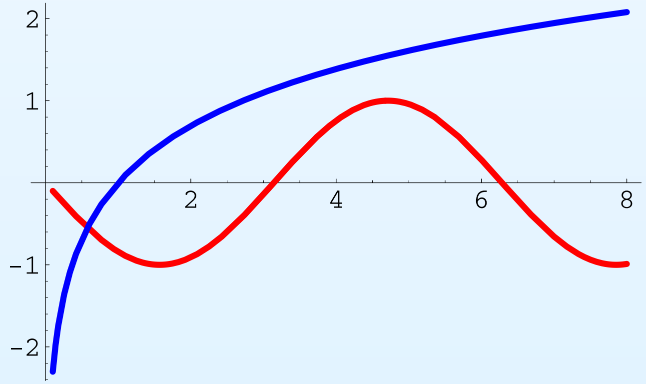
f1[x_] = −Sin[x]

−Sin[x]

f2[x_] = Log[x]

Log[x]

Plot[{f1[x], f2[x]}, {x, 0.1, 8},
PlotStyle → {{Thickness[0.01], RGBColor[1, 0, 0]},
{Thickness[0.01], RGBColor[0, 0, 1]}}]



Další

Příklad 4.2.1

Určete počet kořenů rovnice

$$\ln x + \sin x = 0\,.$$

Zvolte vhodný separační interval a Newtonovou metodou spočítejte přibližně alespoň jeden kořen.

Mathematica:

Je patrné, že existuje pouze jeden průsečík grafů funkcí, tedy původní rovnice má pouze jeden kořen a to v intervalu $\langle 0,1; 1\rangle$.

Cyklus pro výpočet Newtonovou metodou:

f[x_] = Log[x] + Sin[x]

Log[x] + Sin[x]

g[x_] = x − f[x]/D[f[x], x]

$x - \frac{\mathrm{Log}[x]+\mathrm{Sin}[x]}{\frac{1}{x}+\mathrm{Cos}[x]}$

```
nmax = 5;
x0 = 0.1;
xn = Table[0, {i, 1, nmax}];
xn[[1]] = x0;
For[i = 1, i < nmax, xn[[i + 1]] = N[g[xn[[i]]]]; i++]
```

Další

Příklad 4.2.1

Určete počet kořenů rovnice

$$\ln x + \sin x = 0\,.$$

Zvolte vhodný separační interval a Newtonovou metodou spočítejte přibližně alespoň jeden kořen.

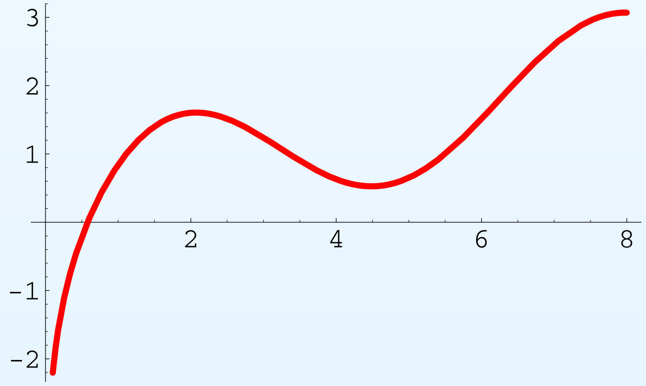
Mathematica:

xn

$\{0.1, 0.300341, 0.512018, 0.575547, 0.578707\}$

Poslední aproximaci budeme považovat za přibližné řešení rovnice.
Ověření systémem Mathematica (nakreslíme graf funkce):

Plot[f[x], {x, 0.1, 8},
PlotStyle → {Thickness[0.01], RGBColor[1, 0, 0]}]



Zpět

Příklad 4.2.2

Určete počet kořenů rovnice

$$2x - \ln x - 4\,.$$

Zvolte vhodný separační interval a Newtonovou metodou spočítejte přibližně alespoň jeden kořen.

? Zpět

Příklad 4.2.2

Určete počet kořenů rovnice

$$2x - \ln x - 4\,.$$

Zvolte vhodný separační interval a Newtonovou metodou spočítejte přibližně alespoň jeden kořen.

Výsledek:

Funkce $\boxed{f(x) = 2x - \ln x - 4}$ nabývá v $D(f) = (0, \infty)$ jak kladných, tak záporných hodnot. Rovnice má v $D(f)$ $\boxed{\text{právě dvě}}$ řešení. Vhodným separačním intervalem pro větší kořen je např. $\boxed{\langle 2, 3\rangle}$ a volba počáteční aproximace $\boxed{x_0 = 3}$. Hodnota $\boxed{x = 2,44754}$ je přibližné řešení rovnice v intervalu $\langle 2, 3\rangle$.

Výpočet čtyř iterací Newtonovou metodou

x_0	3
x_1	2,45917
x_2	2,44755
x_3	2.44754
x_4	2.44754

Zpět

Příklad 4.2.2

Určete počet kořenů rovnice

$$2x - \ln x - 4\,.$$

Zvolte vhodný separační interval a Newtonovou metodou spočítejte přibližně alespoň jeden kořen.

Návod:

Graficky určíme (pokud to lze) počet kořenů rovnice.
Hledáme-li kořen funkce $f(x) = 0$ Newtonovou metodou, je podstatné stanovit separační interval $\langle a, b\rangle$, kde existuje pouze jeden kořen, a v něm vhodně zvolit počáteční aproximaci x_0. V intervalu $\langle a, b\rangle$ ověříme:
(i) $f(a) \cdot f(b) < 0$,
(ii) $f'(x) \neq 0$ v (a, b),
(iii) $f''(x) \neq 0$ v $\langle a, b\rangle$.
(iv) Za x_0 volíme ten z krajních bodů $\langle a, b\rangle$, kde $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$.

Postupné aproximace kořene vypočteme z rekurentního vzorce

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \qquad n = 0, 1, \ldots$$

Zpět

Příklad 4.2.2

Určete počet kořenů rovnice

$$2x - \ln x - 4\,.$$

Zvolte vhodný separační interval a Newtonovou metodou spočítejte přibližně alespoň jeden kořen.

Řešení:

Grafické znázornění pro určení počtu kořenů:
Rovnici přepíšeme do tvaru

$$\ln x = 2x - 4\,.$$

V tomto případě jsme ihned schopni nakreslit obě funkce vlevo i vpravo od rovnítka. Není ihned patrné, že existují dva průsečíky grafů funkcí, systémem Maple (zmenšováním intervalů) lze však oba kořeny velmi dobře separovat. Tedy původní rovnice má právě dva kořeny a to v intervalu $(0, 1\rangle$ a $\langle 2, 3\rangle$.
Označíme

$$f(x) = 2x - \ln x - 4$$

funkci, pro kterou hledáme body, kde se tato funkce anuluje. $D(f) = (0, \infty)$. Funkce nabývá jak kladných tak záporných hodnot.
Nalezneme separační interval pro větší ze dvou kořenů. Vyjdeme při tom z předchozího grafického znázornění. Ověříme, zda je $\langle 2, 3\rangle$ skutečně separační interval:
(i) $f(2) \cdot f(3) =$
$= (2 \cdot 2 - \ln(2) - 4) \cdot (2 \cdot 3 - \ln(3) - 4) = (-0,693147) \cdot (0,901388) < 0$

(ii) $f'(x) = 2 - \dfrac{1}{x} > 0$ pro $\forall x \in (2, 3)$,

Další

Příklad 4.2.2

Určete počet kořenů rovnice

$$2x - \ln x - 4\,.$$

Zvolte vhodný separační interval a Newtonovou metodou spočítejte přibližně alespoň jeden kořen.

Řešení:

(iii) $f''(x) = \dfrac{1}{x^2} > 0$ pro $\forall x \in \langle 2, 3\rangle$.

(iv) Za x_0 volíme ten z krajních bodů 2 nebo 3, kde $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$. To je splněno pro $x_0 = 3$, neboť $f(3) \cdot f''(3) = 0{,}901388 \cdot \dfrac{1}{9} > 0$

První aproximaci kořene vypočteme pomocí počáteční aproximace x_0 z rekurentního vzorce

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 3 - \frac{0{,}901388}{2 - \frac{1}{3}} = 2{,}45917$$

Další aproximace kořene dostaneme opět dosazením do rekurentního vzorce

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \qquad n = 0, 1, \ldots$$

Tedy

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 2{,}44755\,,$$

atd.

Zpět

Příklad 4.2.2

Určete počet kořenů rovnice

$$2x - \ln x - 4\,.$$

Zvolte vhodný separační interval a Newtonovou metodou spočítejte přibližně alespoň jeden kořen.

Maple:

Grafické znázornění pro určení počtu kořenů:
Rovnici přepíšeme do tvaru ln x = 2x - 4. Obě funkce vlevo i vpravo od rovnítka nakreslime.

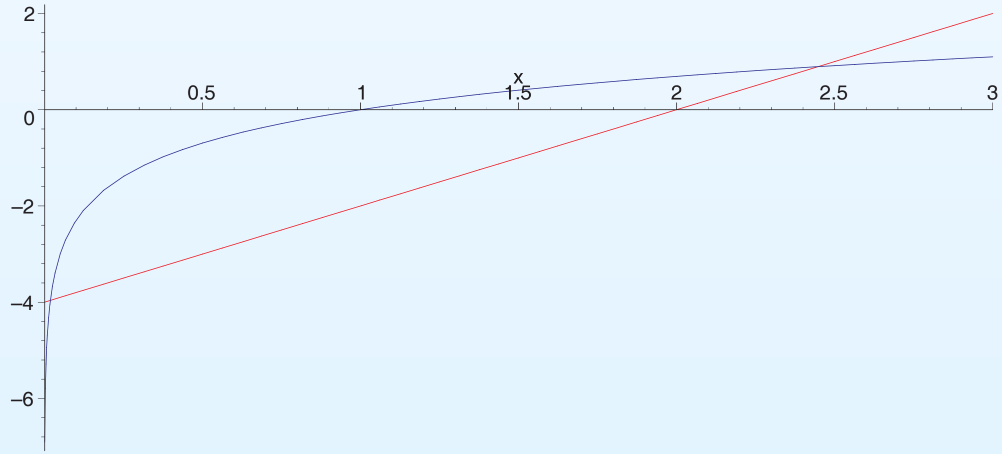
```
> f1:=x->ln(x);
```

$$f1 := x \rightarrow \ln(x)$$

```
> f2:=x->2*x-4;
```

$$f2 := x \rightarrow 2\,x - 4$$

```
> plot([f1(x),f2(x)],x=0..3,discont=true,color=[blue,red]);
```



Další

Příklad 4.2.2

Určete počet kořenů rovnice

$$2x - \ln x - 4\,.$$

Zvolte vhodný separační interval a Newtonovou metodou spočítejte přibližně alespoň jeden kořen.

Maple:

Je patrné, že existují právě dva průsečíky grafů funkcí, tedy původní rovnice má dva kořeny a to v intervalu (0,3 >. V intervalu <2,,3 > existuje právě jeden kořen rovnice. Druhý kořen, který se nalézá v intervalu (0 ; 0,3 > zde hledat nebudeme. (Pro tento kořen doporučujeme systémem Maple graficky odhadnout separační interval a Newtonovu metodu na něm použít samostatně.)
Cyklus pro výpočet Newtonovou metodou:

```
> f:=x->2*x-ln(x) -4;
```

$$f := x \to 2\,x - \ln(x) - 4$$

Nejdříve jeden krok Newtonovy metody.

```
> g:=x->x-f(x)/D(f)(x);
```

$$g := x \to x - \frac{\mathrm{f}(x)}{\mathrm{D}(f)(x)}$$

```
> nmax:=5;
```

$$nmax := 5$$

Nyní napíšeme cyklus

```
> x[0]:=3;
```

$$x_0 := 3$$

```
> for n from 0 to nmax do x[n+1]:=evalf(g(x[n])) end do;
```

Další

Příklad 4.2.2

Určete počet kořenů rovnice

$$2x - \ln x - 4\,.$$

Zvolte vhodný separační interval a Newtonovou metodou spočítejte přibližně alespoň jeden kořen.

Maple:

$$x_1 := 2.459167373$$

$$x_2 := 2.447549195$$

$$x_3 := 2.447542160$$

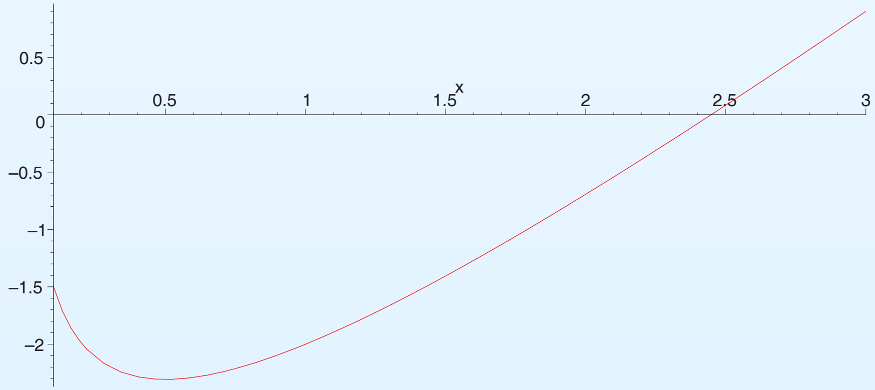
$$x_4 := 2.447542161$$

$$x_5 := 2.447542160$$

$$x_6 := 2.447542161$$

Poslední aproximaci budeme považovat za přibližné řešení rovnice.
Ověření systémem Maple:
Na závěr z grafu funkce $f(x)$ ověříme, že průsečíku fce s osou x na intervalu $\langle 2, 3\rangle$ skutečně odpovídá jediná hodnota, přibližně $x = 2,44754$.

```
> plot([f(x)],x = 0..3, discont = true);
```



Zpět

Příklad 4.2.2

Určete počet kořenů rovnice

$$2x - \ln x - 4 \,.$$

Zvolte vhodný separační interval a Newtonovou metodou spočítejte přibližně alespoň jeden kořen.

Mathematica:

Grafické znázornění pro určení počtu kořenů:
Rovnici přepíšeme do tvaru $\ln x = 2x - 4$. Obě funkce vlevo i vpravo od rovnítka nakreslíme.

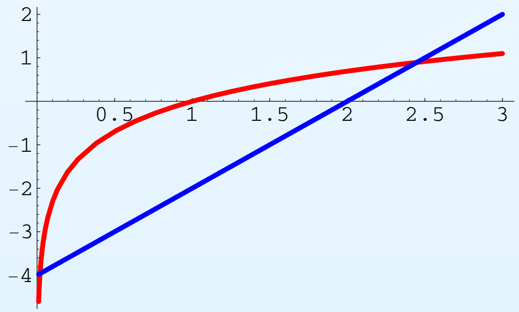
f1[x_] = Log[*x*]

Log[x]

f2[x_] = 2*x* − 4

$-4 + 2x$

Plot[{f1[*x*], f2[*x*]}, {*x*, 0.01, 3},
PlotStyle → {{Thickness[0.01], RGBColor[1, 0, 0]},
{Thickness[0.01], RGBColor[0, 0, 1]}}]



Další

Příklad 4.2.2

Určete počet kořenů rovnice

$$2x - \ln x - 4\,.$$

Zvolte vhodný separační interval a Newtonovou metodou spočítejte přibližně alespoň jeden kořen.

Mathematica:

Je patrné, že existují právě dva průsečíky grafů funkcí, tedy původní rovnice má dva kořeny a to v intervalu $(0,3\rangle$. V intervalu $\langle 2,3\rangle$ existuje právě jeden kořen rovnice. Druhý kořen, který se nalézá v intervalu $(0;0,3\rangle$ zde hledat nebudeme. (Pro tento kořen doporučujeme systémem Maple graficky odhadnout separační interval a Newtonovu metodu na něm použít samostatně.)

Cyklus pro výpočet Newtonovou metodou:

$\boldsymbol{f[\mathrm{x\_}] = 2x - \mathrm{Log}[x] - 4}$

$-4 + 2x - \mathrm{Log}[x]$

$\boldsymbol{g[\mathrm{x\_}] = x - f[x]/D[f[x], x]}$

$x - \frac{-4+2x-\mathrm{Log}[x]}{2-\frac{1}{x}}$

nmax = 5;
x0 = 3;
xn = Table[0, {*i*, 1, nmax}];

xn[[1]] = x0;

For[*i* = 1, *i* < nmax, xn[[*i* + 1]] = *N*[*g*[xn[[*i*]]]]; *i*++]

Další

Příklad 4.2.2

Určete počet kořenů rovnice

$$2x - \ln x - 4\,.$$

Zvolte vhodný separační interval a Newtonovou metodou spočítejte přibližně alespoň jeden kořen.

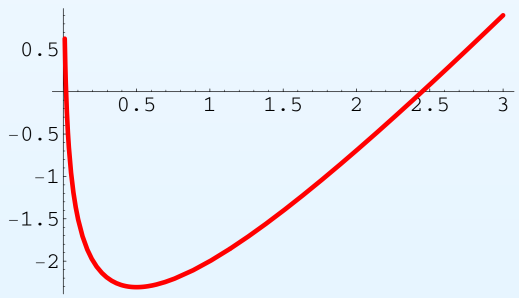
Mathematica:

xn

$\{3, 2.45917, 2.44755, 2.44754, 2.44754\}$

Poslední aproximaci budeme považovat za přibližné řešení rovnice.
Ověření systémem Mathematica:
Na závěr z grafu funkce $f(x)$ ověříme, že průsečíku fce s osou x na intervalu $\langle 2, 3\rangle$ skutečně odpovídá jediná hodnota, přibližně $x = 2,44754$.

Plot[*f*[*x*], {*x*, 0.01, 3},
PlotStyle → {Thickness[0.01], RGBColor[1, 0, 0]}]



Zpět