Taylorova formule

- Taylorova formule

Taylorova formule

- Příklad 5.1.1 Najděte Taylorův polynom třetího stupně funkce $f(x) = \ln(2x-1)$, který aproximuje funkci f v okolí bodu $x_0 = 1$.
- Příklad 5.1.2 Napište Taylorův polynom 4. stupně pro funkci $f(x) = e^{-x^2}$ v bodě $x_0 = 0$ a pomocí něho vypočtěte přibližně hodnotu $f(0,1)$.
- Příklad 5.1.3 Spočtěte přibližně hodnotu $\sqrt[3]{30}$ pomocí Taylorova polynomu 2. stupně. Odhadněte shora absolutní hodnotu chyby, které se při výpočtu dopustíte.

Zpět

Příklad 5.1.1

Najděte Taylorův polynom třetího stupně funkce $f(x) = \ln(2x-1)$, který aproximuje funkci f v okolí bodu $x_0 = 1$.

? Zpět

Příklad 5.1.1

Najděte Taylorův polynom třetího stupně funkce $f(x) = \ln(2x-1)$, který aproximuje funkci f v okolí bodu $x_0 = 1$.

Výsledek:

$$T_3(x) = 2(x-1) - 2(x-1)^2 + \frac{8}{3}(x-1)^3.$$

Zpět

Příklad 5.1.1

Najděte Taylorův polynom třetího stupně funkce $f(x) = \ln(2x-1)$, který aproximuje funkci f v okolí bodu $x_0 = 1$.

Návod:

Taylorův polynom n-tého stupně T_n v okolí bodu x_0 je definovaný vztahem

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n .$$

Zpět

Příklad 5.1.1

Najděte Taylorův polynom třetího stupně funkce $f(x) = \ln(2x-1)$, který aproximuje funkci f v okolí bodu $x_0 = 1$.

Řešení:

Do vzorce pro $T_3(x)$ dosadíme funkční hodnotu $f(x_0)$ a hodnoty první, druhé a třetí derivace funkce f v bodě $x_0 = 1$:

$f(1) = 0$,

$$f'(x) = \frac{2}{2x-1} \quad \Rightarrow \quad f'(1) = 2,$$

$$f''(x) = -\frac{4}{(2x-1)^2} \quad \Rightarrow \quad f''(1) = -4,$$

$$f^{(3)}(x) = \frac{16}{(2x-1)^3} \quad \Rightarrow \quad f^{(3)}(1) = 16.$$

Taylorův polynom

$$T_3(x) = 0 + \frac{2}{1!}(x-1) + \frac{-4}{2!}(x-1)^2 + \frac{16}{3!}(x-1)^3 = 2(x-1) - 2(x-1)^2 + \frac{8}{3}(x-1)^3$$

bude dobře aproximovat funkci f na nějakém okolí I bodu $x_0 = 1$. (Toto okolí I musí nutně splňovat podmínku $I \subset D(f) = (\frac{1}{2}, \infty)$.)

Zpět

Příklad 5.1.1

Najděte Taylorův polynom třetího stupně funkce $f(x) = \ln(2x-1)$, který aproximuje funkci f v okolí bodu $x_0 = 1$.

Maple:

```
> f1 := x->ln(2*x-1);
```

$$f1 := x \to \ln(2\,x-1)$$

V Maplu existuje příkaz taylor(expr, eq, n) , který vytvoří Taylorův rozvoj ((n-1)-ního) stupně funkce expr v bodě, který je zadán rovností eq.

```
> T3 := taylor(f1(x),x=1,3+1);
```

$$T3 := 2\,(x-1) - 2\,(x-1)^2 + \frac{8}{3}\,(x-1)^3 + \mathrm{O}((x-1)^4)$$

Pokud chceme spočítat Taylorův polynom (n-1)ního stupně funkce expr v bodě eq/nm použijeme příkaz, který převádí rozvoj na polynom:.

```
> T3 := convert(taylor(f1(x),x=1,3+1),polynom);
```

$$T3 := 2\,x - 2 - 2\,(x-1)^2 + \frac{8\,(x-1)^3}{3}$$

Zpět

Příklad 5.1.1

Najděte Taylorův polynom třetího stupně funkce $f(x) = \ln(2x-1)$, který aproximuje funkci f v okolí bodu $x_0 = 1$.

Mathematica:

f1[x_] = Log[2*x* − 1]

Log[−1 + 2*x*]

***R* = Series[f1[*x*], {*x*, 1, 3}]**

$2(x-1) - 2(x-1)^2 + \frac{8}{3}(x-1)^3 + O[x-1]^4$

T3 = Normal[*R*]

$2(-1+x) - 2(-1+x)^2 + \frac{8}{3}(-1+x)^3$

Zpět

Příklad 5.1.2

Napište Taylorův polynom 4. stupně pro funkci $f(x) = e^{-x^2}$ v bodě $x_0 = 0$ a pomocí něho vypočtěte přibližně hodnotu $f(0,1)$.

? Zpět

Příklad 5.1.2

Napište Taylorův polynom 4. stupně pro funkci $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$ v bodě $x_0 = 0$ a pomocí něho vypočtěte přibližně hodnotu $f(0,1)$.

Výsledek:

$T_4(x) = 1 - x^2 + \frac{1}{2}x^4$, $f(0,1) \doteq T_4(0,1) = 0,99005$.

Zpět

Příklad 5.1.2

Napište Taylorův polynom 4. stupně pro funkci $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$ v bodě $x_0 = 0$ a pomocí něho vypočtěte přibližně hodnotu $f(0,1)$.

Návod:

Buď lze klasicky spočítat hodnoty funkce $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$ a dalších čtyř derivací v bodě $x_0 = 0$ a získané hodnoty dosadit do vzorce (viz předchozí příklad):

$$T_4(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f^{(3)}(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \frac{f^{(4)}(x_0)}{4!}(x-x_0)^4 .$$

Přibližnou hodnotu funkce dostaneme ze vztahu

$$f(0,1) \doteq T_4(0,1) .$$

Zpět

Příklad 5.1.2

Napište Taylorův polynom 4. stupně pro funkci $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$ v bodě $x_0 = 0$ a pomocí něho vypočtěte přibližně hodnotu $f(0,1)$.

Řešení:

Taylorův polynom 2. stupně pro funkci $f(y) = \mathrm{e}^y$ v bodě $y_0 = 0$ (snadno zapamatovatelný) je roven

$$T_2(y) = 1 + \frac{1}{1!}\,y + \frac{1}{2!}\,y^2 = 1 + y + \frac{1}{2}\,y^2.$$

Položíme-li $y = -x^2$, dostáváme Taylorův polynom 4. stupně pro funkci $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$ v bodě $x_0 = 0$:

$$T_4(x) = 1 + (-x^2) + \frac{1}{2}(-x^2)^2 = 1 - x^2 + \frac{1}{2}\,x^4\,.$$

Pro přibližný výpočet hodnoty funkce $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$ v bodě $x = 0,1$ stačí položit

$$f(0,1) \doteq T_4(0,1) = 1 - 0,1^2 + \frac{0,1^4}{2} = 0,99005\,.$$

Tedy $\mathrm{e}^{-0,1^2} \doteq 0,99005$.

Zpět

Příklad 5.1.2

Napište Taylorův polynom 4. stupně pro funkci $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$ v bodě $x_0 = 0$ a pomocí něho vypočtěte přibližně hodnotu $f(0,1)$.

Maple:

```
> fe2:=x->exp(-x^2);
```

$$fe2 := x \to e^{(-x^2)}$$

```
> T4 := convert(taylor(fe2(x),x=0,4+1),polynom);
```

$$T4 := 1 - x^2 + \frac{1}{2}x^4$$

Do získaného polynomu 4. stupně T4 dosadíme zadaný bod a dostaneme přibližnou hodnotu funkce fe2 v tomto bodě.

```
> subs(x=0.1,T4);
```

$$0.9900500000$$

Pro porovnání spočítáme přesnou hodnotu zadané funkce fe2 v zadaném bodě.

```
> evalf(fe2(0.1));
```

$$0.9900498337$$

Zpět

Příklad 5.1.2

Napište Taylorův polynom 4. stupně pro funkci $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$ v bodě $x_0 = 0$ a pomocí něho vypočtěte přibližně hodnotu $f(0,1)$.

Mathematica:

f2[x_] = Exp[−*x*^2]

e^{-x^2}

Taylorův vzorec:
R = Series[f2[x], {x, 0, 4}]

$1 - x^2 + \frac{x^4}{2} + O[x]^5$

Taylorův polynom:
T4 = Normal[R]

$1 - x^2 + \frac{x^4}{2}$

hodpriplizna = InputForm[T4/.{$x \to$ 0.1}]

0.99005

hodpresna = InputForm[fe2[0.1]]

0.9900498337491681

Zpět

Příklad 5.1.3

Spočtěte přibližně hodnotu $\sqrt[3]{30}$ pomocí Taylorova polynomu 2. stupně. Odhadněte shora absolutní hodnotu chyby, které se při výpočtu dopustíte.

? Zpět

Příklad 5.1.3

Spočtěte přibližně hodnotu $\sqrt[3]{30}$ pomocí Taylorova polynomu 2. stupně. Odhadněte shora absolutní hodnotu chyby, které se při výpočtu dopustíte.

Výsledek:

$\sqrt[3]{30} \doteq 3,106996\,, \; |R_2(30)| \leq 0,000254\,.$

Zpět

Příklad 5.1.3

Spočtěte přibližně hodnotu $\sqrt[3]{30}$ pomocí Taylorova polynomu 2. stupně. Odhadněte shora absolutní hodnotu chyby, které se při výpočtu dopustíte.

Návod:

Zvolíme vhodně bod x_0. Taylorův polynom druhého stupně T_2 v okolí bodu x_0 je definovaný vztahem

$$T_2(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 .$$

Chybu aproximace, které se dopustíme, lze vyjádřit pomocí vzorce:

$$R_2(x) = \frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}(x - x_0)^3 , \quad \text{kde } \xi \in (x_0, x) \text{ (nebo } \xi \in (x, x_0)\text{)} .$$

Zpět

Příklad 5.1.3

Spočtěte přibližně hodnotu $\sqrt[3]{30}$ pomocí Taylorova polynomu 2. stupně. Odhadněte shora absolutní hodnotu chyby, které se při výpočtu dopustíte.

Řešení:

Zvolíme bod $x_0 = 27$ (leží "blízko" bodu $x = 30$), neboť funkční hodnotu $f(27) = \sqrt[3]{27} = 3$ a hodnoty prvních dvou derivací funkce f v bodě $x_0 = 27$ dokážeme snadno spočítat:

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} \quad \Rightarrow \quad f'(27) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{9} \doteq 0,037037\,,$$

$$f''(x) = -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}} \quad \Rightarrow \quad f''(27) = -\frac{2}{9} \cdot \frac{1}{243} \doteq -0,000457\,.$$

Dostáváme Taylorův polynom a hledanou přibližnou funkční hodnotu:

$$T_2(x) = 3 + \tfrac{1}{27}(x-27) - \tfrac{1}{2187}(x-27)^2\,,$$

$$\sqrt[3]{30} \doteq T_2(30) \doteq 3 + 0,037037(30-27) - 0,0009144(30-27)^2 \doteq 3,1069963\,.$$

K vyjádření chyby aproximace potřebujeme třetí derivaci funkce:

$$f^{(3)}(x) = \frac{10}{27}\, x^{-\frac{8}{3}}\,.$$

Další

Příklad 5.1.3

Spočtěte přibližně hodnotu $\sqrt[3]{30}$ pomocí Taylorova polynomu 2. stupně. Odhadněte shora absolutní hodnotu chyby, které se při výpočtu dopustíte.

Řešení:

Chyba, které jsme se dopustili při aproximaci hodnoty $\sqrt[3]{30}$, je

$$R_2(30) = \frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}(30-27)^3 = \frac{10}{3!\,27\,\sqrt[3]{\xi^8}}\,(30-27)^3 = \frac{5}{3\,\sqrt[3]{\xi^8}}\,, \quad \text{kde } \xi \in (27\,, 30)\,.$$

Provedeme horní odhad velikosti chyby. Můžeme využít toho, že funkce $x^{-\frac{8}{3}}$ je na intervalu $\langle 27\,, 30\rangle$ klesající (zjistíme záporné znaménko čtvrté derivace). Nebo lze použít úvahy, že z nerovnosti $\xi^8 \geq (27)^8$, plyne $\frac{1}{\xi^8} \leq (\frac{1}{27})^8$. Odhad chyby, které jsme se dopustili, tedy je:

$$|R_2(30)| \leq \frac{5}{3\,\sqrt[3]{27}^8} \doteq 0,000254\,.$$

Zpět

Příklad 5.1.3

Spočtěte přibližně hodnotu $\sqrt[3]{30}$ pomocí Taylorova polynomu 2. stupně. Odhadněte shora absolutní hodnotu chyby, které se při výpočtu dopustíte.

Maple:

```
> fs := x -> surd(x, 3); fce třetí odmocnina z x
```

$$fs := x \to \mathrm{surd}(x,\, 3)$$

```
> T2 := convert(taylor(fs(x),x=27,2+1),polynom);
```

$$T2 := 27^{(1/3)} + \frac{27^{(1/3)}\,(x-27)}{81} - \frac{27^{(1/3)}\,(x-27)^2}{6561}$$

```
> T2 := evalf(convert(taylor(fs(x),x=27,2+1),polynom));
```

$$T2 := 2.000000000 + 0.03703703703\,x - 0.0004572473709\,(x-27.)^2$$

```
> subs(x=30,T2);
```

$$3.106995885$$

následuje vypočet třetí derivace funkce fs v bodě 27:

```
> treti_d:= (D@@3)(fs);
```

$$treti\_d := x \to \frac{10}{27}\,\frac{\mathrm{surd}(x,\, 3)}{x^3}$$

```
> odhad_chyby=abs(evalf(treti_d(27))/3! *(30-27)^3);
```

$$odhad\_chyby = 0.0002540263171$$

V systému Maple samozřejmě dokážeme vypočítat přímo třetí odmocninu z čísla 30.

```
> evalf(fs(30));
```

$$3.107232506$$

Zpět

Příklad 5.1.3

Spočtěte přibližně hodnotu $\sqrt[3]{30}$ pomocí Taylorova polynomu 2. stupně. Odhadněte shora absolutní hodnotu chyby, které se při výpočtu dopustíte.

Mathematica:

$\mathbf{f3[x\_] = \boldsymbol{x}\hat{}\{1/3\}}$

$\left\{x^{1/3}\right\}$

$\mathbf{\boldsymbol{R} = Series[f3[\boldsymbol{x}], \{\boldsymbol{x}, 27, 2\}]}$

$\left\{3 + \frac{x-27}{27} - \frac{(x-27)^2}{2187} + O[x-27]^3\right\}$

$\mathbf{T2 = Normal[\boldsymbol{R}]}$

$\left\{3 + \frac{1}{27}(-27+x) - \frac{(-27+x)^2}{2187}\right\}$

$\mathbf{hodpriblizna = \boldsymbol{N}[InputForm[T4/.\{\boldsymbol{x} \to 30\}]]}$

$\{3.1069958847736627\}$

$\mathbf{dddf3 = \boldsymbol{D}[f3[\boldsymbol{x}], \{\boldsymbol{x}, 3\}][[1]]}$

$\frac{10}{27x^{8/3}}$

$\mathbf{chyba = \boldsymbol{N}[Abs[(dddf3/.\{\boldsymbol{x} \to 27\})(3\hat{}3)/3!]]}$

0.000254026

$\mathbf{hodpresna = \boldsymbol{N}[InputForm[f3[30]]]}$

$\{3.1072325059538586\}$

Zpět