Parametrické rovnice křivek

- Kreslení křivek a tečný vektor
- Parametrizace křivek, tečna ke křivce

Kreslení křivek a tečný vektor

- **Příklad 6.1.1** Máme křivku $\mathcal{K}$ zadanou parametrickými rovnicemi

$$\mathcal{K}: \quad \begin{aligned} x &= 1 + t \\ y &= 2 - t\,, \;\; t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

a) Nakreslete tuto křivku.

b) Určete tečný vektor ke křivce $\mathcal{K}$ v každém jejím bodě.

- **Příklad 6.1.2** Máme dvě křivky $\mathcal{K}_1$, $\mathcal{K}_2$ zadané parametrickými rovnicemi

$$\mathcal{K}_1: \quad \begin{aligned} x &= -1 + t \\ y &= 3 - 2t\,, \;\; t \in \mathbb{R} \end{aligned} \qquad\qquad \mathcal{K}_2: \quad \begin{aligned} x &= -1 - 2s \\ y &= 3 + 4s\,, \;\; s \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

a) Ukažte, že tyto dvě parametrizace zadávají tutéž křivku.

b) Určete, jakou rychlostí se pohybují body po obou křivkách, chápeme-li jejich parametrické rovnice jako pohybové rovnice hmotného bodu.

- **Příklad 6.1.3** Máme křivku $\mathcal{K}$ zadanou parametrickými rovnicemi

$$\mathcal{K}: \quad \begin{aligned} x &= \tfrac{1}{t} \\ y &= \tfrac{1}{t^2}\,, \quad t \in (0, \infty). \end{aligned}$$

a) Nakreslete křivku, určete a nakreslete tečný vektor v bodě křivky $\mathcal{K}$, který odpovídá hodnotě parametru $t = \frac{3}{2}$.

b) Určete bod na křivce $\mathcal{K}$, ve kterém je tečna ke křivce $\mathcal{K}$ rovnoběžná s přímkou $y = x$.

Zpět

Příklad 6.1.1

Máme křivku $\mathcal{K}$ zadanou parametrickými rovnicemi

$$\mathcal{K}: \quad \begin{aligned} x &= 1 + t \\ y &= 2 - t\,, \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

a) Nakreslete tuto křivku.

b) Určete tečný vektor ke křivce $\mathcal{K}$ v každém jejím bodě.

? Zpět

Příklad 6.1.1

Máme křivku $\mathcal{K}$ zadanou parametrickými rovnicemi

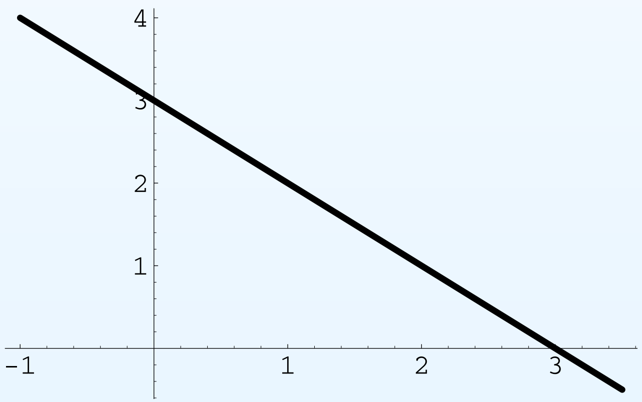
$$\mathcal{K}: \quad \begin{aligned} x &= 1 + t \\ y &= 2 - t\,, \ \ t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

a) Nakreslete tuto křivku.

b) Určete tečný vektor ke křivce $\mathcal{K}$ v každém jejím bodě.

Výsledek:

a)



b) $\vec{v} = (1, -1)$.

Zpět

Příklad 6.1.1

Máme křivku $\mathcal{K}$ zadanou parametrickými rovnicemi

$$\begin{aligned} \mathcal{K}: \quad x &= 1+t \\ y &= 2-t\,,\ \ t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

a) Nakreslete tuto křivku.

b) Určete tečný vektor ke křivce $\mathcal{K}$ v každém jejím bodě.

Návod:

a) Parametrickými rovnicemi je dána přímka se směrovým vektorem $(1,-1)$ procházející bodem $[1,2]$.

b) Souřadnice tečného vektoru v libovolném bodě spočteme takto: $\vec{v}(t) = (x'(t), y'(t))$.

Zpět

Příklad 6.1.1

Máme křivku $\mathcal{K}$ zadanou parametrickými rovnicemi

$$\mathcal{K}: \quad \begin{aligned} x &= 1+t \\ y &= 2-t\,, \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

a) Nakreslete tuto křivku.

b) Určete tečný vektor ke křivce $\mathcal{K}$ v každém jejím bodě.

Řešení:

a) Musíme vědět, že parametrické rovnice zadávají přímku. Přímo z rovnic je vidět, že prochází bodem $[1, 2]$ (bod odpovídá parametru $t = 0$) a dále např. bodem $[2, 1]$ $(t = 1)$.

b) Souřadnice tečného vektoru v libovolném bodě $[x, y]$, který odpovídá parametru t, spočteme takto: $\vec{v}(t) = (x'(t), y'(t)) = (1, -1)$. V tomto případě má tečný vektor v každém bodě křivky stejné souřadnice.

Zpět

Příklad 6.1.1

Máme křivku $\mathcal{K}$ zadanou parametrickými rovnicemi

$$\mathcal{K}: \quad \begin{aligned} x &= 1+t \\ y &= 2-t\,, \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

a) Nakreslete tuto křivku.

b) Určete tečný vektor ke křivce $\mathcal{K}$ v každém jejím bodě.

Maple:

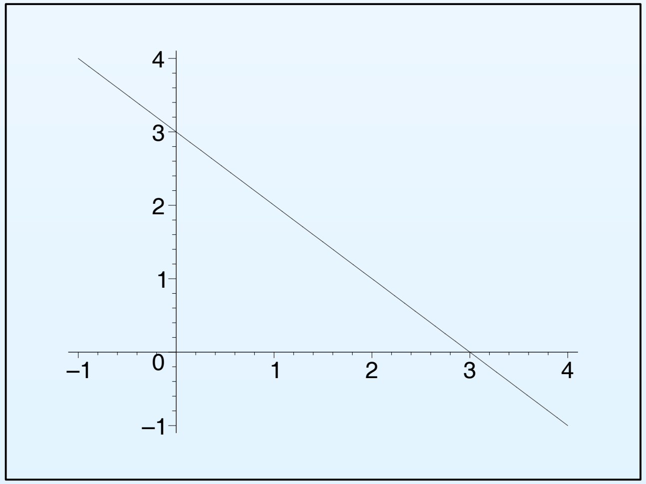
```
> x:=t->1+t;
```

$$x := t \to 1+t$$

```
> y:=t->2-t;
```

$$y := t \to 2-t$$

```
> plot([x(t),y(t),t=-2..3]);
```



Další

Příklad 6.1.1

Máme křivku $\mathcal{K}$ zadanou parametrickými rovnicemi

$$\mathcal{K}: \quad \begin{aligned} x &= 1+t \\ y &= 2-t\,, \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

a) Nakreslete tuto křivku.

b) Určete tečný vektor ke křivce $\mathcal{K}$ v každém jejím bodě.

Maple:

Tečný vektor:

```
> v:=[diff(x(t),t),diff(y(t),t)];
```

$$v := [1,\ -1]$$

Zpět

Příklad 6.1.1

Máme křivku $\mathcal{K}$ zadanou parametrickými rovnicemi

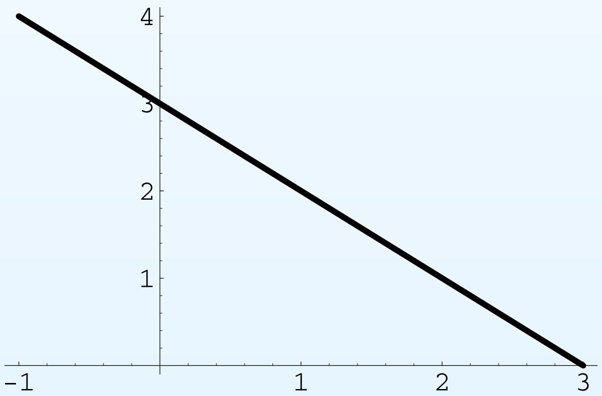
$$\mathcal{K}: \quad \begin{aligned} x &= 1+t \\ y &= 2-t\,, \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

a) Nakreslete tuto křivku.

b) Určete tečný vektor ke křivce $\mathcal{K}$ v každém jejím bodě.

Mathematica:

x[t_] = 1 + t;
y[t_] = 2 − t;
ParametricPlot[{x[t], y[t]}, {t, −2, 2}, PlotStyle → Thickness[0.01]]



Tečný vektor:

v = {D[x[t], t], D[y[t], t]}
{1, −1}

Zpět

Příklad 6.1.2

Máme dvě křivky $\mathcal{K}_1$, $\mathcal{K}_2$ zadané parametrickými rovnicemi

$$\mathcal{K}_1: \quad \begin{aligned} x &= -1 + t \\ y &= 3 - 2t\,, \;\; t \in \mathbb{R} \end{aligned} \qquad\qquad \mathcal{K}_2: \quad \begin{aligned} x &= -1 - 2s \\ y &= 3 + 4s\,, \;\; s \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

a) Ukažte, že tyto dvě parametrizace zadávají tutéž křivku.

b) Určete, jakou rychlostí se pohybují body po obou křivkách, chápeme-li jejich parametrické rovnice jako pohybové rovnice hmotného bodu.

? Zpět

Příklad 6.1.2

Máme dvě křivky $\mathcal{K}_1$, $\mathcal{K}_2$ zadané parametrickými rovnicemi

$$\mathcal{K}_1: \quad \begin{aligned} x &= -1 + t \\ y &= 3 - 2t\,, \ \ t \in \mathbb{R} \end{aligned} \qquad\qquad \mathcal{K}_2: \quad \begin{aligned} x &= -1 - 2s \\ y &= 3 + 4s\,, \ \ s \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

a) Ukažte, že tyto dvě parametrizace zadávají tutéž křivku.

b) Určete, jakou rychlostí se pohybují body po obou křivkách, chápeme-li jejich parametrické rovnice jako pohybové rovnice hmotného bodu.

Výsledek:

a) Obě parametrizace dávají přímku se směrovým vektorem $(1, -2)$ procházející bodem $[-1, 3]$.

b) $|\vec{v}_1| = \sqrt{5}$, $|\vec{v}_2| = 2\sqrt{5}$.

Zpět

Příklad 6.1.2

Máme dvě křivky $\mathcal{K}_1$, $\mathcal{K}_2$ zadané parametrickými rovnicemi

$$\mathcal{K}_1: \quad \begin{aligned} x &= -1+t \\ y &= 3-2t\,,\ \ t\in\mathbb{R} \end{aligned} \qquad\qquad \mathcal{K}_2: \quad \begin{aligned} x &= -1-2s \\ y &= 3+4s\,,\ \ s\in\mathbb{R}. \end{aligned}$$

a) Ukažte, že tyto dvě parametrizace zadávají tutéž křivku.

b) Určete, jakou rychlostí se pohybují body po obou křivkách, chápeme-li jejich parametrické rovnice jako pohybové rovnice hmotného bodu.

Návod:

a) Parametrické rovnice přímky lze převést na obecnou rovnici. Obecná rovnice přímky je jednoznačně dána až na její nenulový násobek.

b) Rychlost hmotného bodu vyčíslíme jako velikost tečného vektoru. Souřadnice tečného vektoru v libovolném bodě spočteme takto: $\vec{v}(t) = (x'(t), y'(t))$.

Zpět

Příklad 6.1.2

Máme dvě křivky $\mathcal{K}_1$, $\mathcal{K}_2$ zadané parametrickými rovnicemi

$$\mathcal{K}_1: \quad \begin{aligned} x &= -1 + t \\ y &= 3 - 2t\,,\ \ t \in \mathbb{R} \end{aligned} \qquad\qquad \mathcal{K}_2: \quad \begin{aligned} x &= -1 - 2s \\ y &= 3 + 4s\,,\ \ s \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

a) Ukažte, že tyto dvě parametrizace zadávají tutéž křivku.

b) Určete, jakou rychlostí se pohybují body po obou křivkách, chápeme-li jejich parametrické rovnice jako pohybové rovnice hmotného bodu.

Řešení:

a) Musíme vědět, že dané parametrické rovnice zadávají dvě přímky. Přímo z rovnic je vidět, že jak přímka $\mathcal{K}_1$, tak přímka $\mathcal{K}_2$ procházejí bodem $[-1, 3]$ a že jejich směrové vektory $(1, -2), (-2, 4)$ určují tentýž směr, neboť jeden je násobkem druhého.

b) Souřadnice tečného vektoru v libovolném bodě $[x, y]$, který odpovídá parametru t (resp. s), spočteme takto: $\vec{v}_1(t) = (x'(t), y'(t)) = (1, -2)$ a $\vec{v}_2(s) = (x'(s), y'(s)) = (-2, 4)$. Jejich velikost je: $|\vec{v}_1(t)| = \sqrt{(1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$ a $|\vec{v}_2(s)| = \sqrt{(-2)^2 + (4)^2} = 2\sqrt{5}$. Hmotný bod se po přímce $\mathcal{K}_1$ pohybuje rychlostí $\sqrt{5}$ a po přímce $\mathcal{K}_2$ rychlostí $2\sqrt{5}$.

Zpět

Příklad 6.1.2

Máme dvě křivky $\mathcal{K}_1$, $\mathcal{K}_2$ zadané parametrickými rovnicemi

$$\mathcal{K}_1: \quad \begin{aligned} x &= -1 + t \\ y &= 3 - 2t\,, \ \ t \in \mathbb{R} \end{aligned} \qquad\qquad \mathcal{K}_2: \quad \begin{aligned} x &= -1 - 2s \\ y &= 3 + 4s\,, \ \ s \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

a) Ukažte, že tyto dvě parametrizace zadávají tutéž křivku.

b) Určete, jakou rychlostí se pohybují body po obou křivkách, chápeme-li jejich parametrické rovnice jako pohybové rovnice hmotného bodu.

Maple:

```
> x1:=t->-1+t;
```

$$x1 := t \to -1 + t$$

```
> y1:=t->3-2*t;
```

$$y1 := t \to 3 - 2\,t$$

```
> x2:=t->-1-2*t;
```

$$x2 := t \to -1 - 2\,t$$

```
> y2:=t->3+4*t;
```

$$y2 := t \to 3 + 4\,t$$

```
> solve(x2(t)=-1);
```

$$0$$

Křivky jsou totožné.

```
> [x2(0),y2(0)],[x1(0),y1(0)];
```

$$[-1,\,3],\ [-1,\,3]$$

Další

Příklad 6.1.2

Máme dvě křivky $\mathcal{K}_1$, $\mathcal{K}_2$ zadané parametrickými rovnicemi

$$\mathcal{K}_1: \quad \begin{aligned} x &= -1 + t \\ y &= 3 - 2t\,, \ \ t \in \mathbb{R} \end{aligned} \qquad\qquad \mathcal{K}_2: \quad \begin{aligned} x &= -1 - 2s \\ y &= 3 + 4s\,, \ \ s \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

a) Ukažte, že tyto dvě parametrizace zadávají tutéž křivku.

b) Určete, jakou rychlostí se pohybují body po obou křivkách, chápeme-li jejich parametrické rovnice jako pohybové rovnice hmotného bodu.

Maple:

Rychlost křivky $\mathcal{K}_1$:

```
> v1:=linalg[norm]([diff(x1(t),t),diff(y1(t),t)],2);
```

$$v1 := \sqrt{5}$$

Rychlost křivky $\mathcal{K}_2$:

```
> v2:=linalg[norm]([diff(x2(t),t),diff(y2(t),t)],2);
```

$$v2 := 2\sqrt{5}$$

Zpět

Příklad 6.1.2

Máme dvě křivky $\mathcal{K}_1$, $\mathcal{K}_2$ zadané parametrickými rovnicemi

$$\mathcal{K}_1: \quad \begin{aligned} x &= -1 + t \\ y &= 3 - 2t\,, \;\; t \in \mathbb{R} \end{aligned} \qquad\qquad \mathcal{K}_2: \quad \begin{aligned} x &= -1 - 2s \\ y &= 3 + 4s\,, \;\; s \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

a) Ukažte, že tyto dvě parametrizace zadávají tutéž křivku.

b) Určete, jakou rychlostí se pohybují body po obou křivkách, chápeme-li jejich parametrické rovnice jako pohybové rovnice hmotného bodu.

Mathematica:

x1[t_] = −1 + *t*;
y1[t_] = 3 − 2*t*;
x2[t_] = −1 − 2*t*;
y2[t_] = 3 + 4*t*;

Přímky jsou stejné:

Solve[x1[*t*] == x2[*s*], *t*]
$\{\{t \to -2s\}\}$
Solve[y1[*t*] == y2[*s*], *t*]
$\{\{t \to -2s\}\}$

Tečné vektory:

v1 = {*D*[x1[*t*], *t*], *D*[y1[*t*], *t*]}
$\{1, -2\}$
v2 = {*D*[x2[*t*], *t*], *D*[y2[*t*], *t*]}
$\{-2, 4\}$

Další

Příklad 6.1.2

Máme dvě křivky $\mathcal{K}_1$, $\mathcal{K}_2$ zadané parametrickými rovnicemi

$$\mathcal{K}_1: \quad \begin{aligned} x &= -1 + t \\ y &= 3 - 2t\,, \;\; t \in \mathbb{R} \end{aligned} \qquad\qquad \mathcal{K}_2: \quad \begin{aligned} x &= -1 - 2s \\ y &= 3 + 4s\,, \;\; s \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

a) Ukažte, že tyto dvě parametrizace zadávají tutéž křivku.

b) Určete, jakou rychlostí se pohybují body po obou křivkách, chápeme-li jejich parametrické rovnice jako pohybové rovnice hmotného bodu.

Mathematica:

Rychlost křivky $\mathcal{K}_1$:

Norm[v1]
$\sqrt{5}$

Rychlost křivky $\mathcal{K}_2$:

Norm[v2]
$2\sqrt{5}$

Zpět

Příklad 6.1.3

Máme křivku $\mathcal{K}$ zadanou parametrickými rovnicemi

$$\mathcal{K}: \quad \begin{aligned} x &= \tfrac{1}{t} \\ y &= \tfrac{1}{t^2}, \quad t \in (0, \infty). \end{aligned}$$

a) Nakreslete křivku, určete a nakreslete tečný vektor v bodě křivky $\mathcal{K}$, který odpovídá hodnotě parametru $t = \frac{3}{2}$.

b) Určete bod na křivce $\mathcal{K}$, ve kterém je tečna ke křivce $\mathcal{K}$ rovnoběžná s přímkou $y = x$.

Příklad 6.1.3

Máme křivku $\mathcal{K}$ zadanou parametrickými rovnicemi

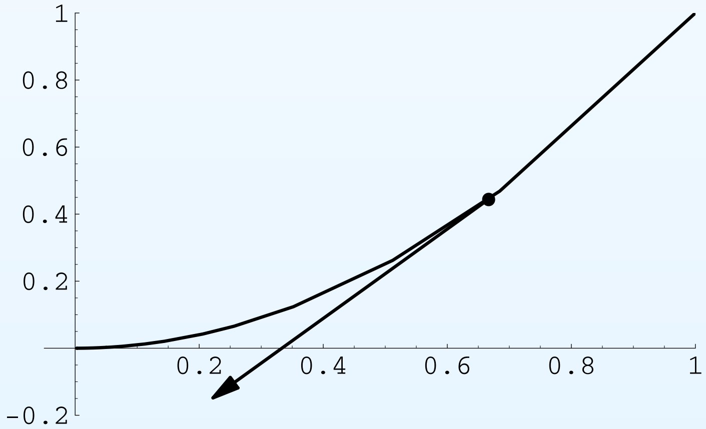
$$\mathcal{K}: \quad \begin{aligned} x &= \tfrac{1}{t} \\ y &= \tfrac{1}{t^2}, \quad t \in (0, \infty). \end{aligned}$$

a) Nakreslete křivku, určete a nakreslete tečný vektor v bodě křivky $\mathcal{K}$, který odpovídá hodnotě parametru $t = \frac{3}{2}$.

b) Určete bod na křivce $\mathcal{K}$, ve kterém je tečna ke křivce $\mathcal{K}$ rovnoběžná s přímkou $y = x$.

Výsledek:

a) $\vec{v} = (-\frac{4}{9}, -\frac{16}{27})$,



b) $[\frac{1}{2}, \frac{1}{4}]$

Zpět

Příklad 6.1.3

Máme křivku $\mathcal{K}$ zadanou parametrickými rovnicemi

$$\mathcal{K}: \begin{aligned} x &= \tfrac{1}{t} \\ y &= \tfrac{1}{t^2}, \quad t \in (0, \infty). \end{aligned}$$

a) Nakreslete křivku, určete a nakreslete tečný vektor v bodě křivky $\mathcal{K}$, který odpovídá hodnotě parametru $t = \frac{3}{2}$.

b) Určete bod na křivce $\mathcal{K}$, ve kterém je tečna ke křivce $\mathcal{K}$ rovnoběžná s přímkou $y = x$.

Návod:

a) Parametrickými rovnicemi je dán graf funkce proměnné x. Souřadnice tečného vektoru v libovolném bodě spočteme takto: $\vec{v}(t) = (x'(t), y'(t))$. Tečný vektor umístíme do bodu křivky, který odpovídá danému parametru.

b) V daném bodě musí být tečný vektor násobkem směrového vektoru přímky $y = x$.

Zpět

Příklad 6.1.3

Máme křivku $\mathcal{K}$ zadanou parametrickými rovnicemi

$$\mathcal{K}: \quad \begin{aligned} x &= \frac{1}{t} \\ y &= \frac{1}{t^2}, \quad t \in (0, \infty). \end{aligned}$$

a) Nakreslete křivku, určete a nakreslete tečný vektor v bodě křivky $\mathcal{K}$, který odpovídá hodnotě parametru $t = \frac{3}{2}$.

b) Určete bod na křivce $\mathcal{K}$, ve kterém je tečna ke křivce $\mathcal{K}$ rovnoběžná s přímkou $y = x$.

Řešení:

a) Funkce $x = \frac{1}{t}, \ t > 0$ je prostá, existuje k ní inverzní $t = \frac{1}{x}, \ x > 0$. Pak $y = \frac{1}{t^2} = x^2, \ x > 0$. Křivka je část paraboly. Souřadnice tečného vektoru v libovolném bodě $[x, y]$, který odpovídá parametru t, spočteme takto: $\vec{v}(t) = (x'(t), y'(t)) = (-\frac{1}{t^2}, -\frac{2}{t^3})$. Tedy $\vec{v}(\frac{3}{2}) = (-\frac{4}{9}, -\frac{16}{27})$. Tečný vektor umístíme do bodu $[\frac{2}{3}, \frac{4}{9}]$ (dosadíme do rovnic $t = \frac{3}{2}$) a pak jeho koncový bod je $[\frac{2}{3}, \frac{4}{9}] + (-\frac{4}{9}, -\frac{16}{27}) = [\frac{2}{9}, -\frac{4}{27}]$.

b) Tečný vektor musí být násobkem směrového vektoru přímky $y = x$, tj. vektoru $(1, 1)$. Tedy $\vec{v}(t) = (-\frac{1}{t^2}, -\frac{2}{t^3}) = (k, k)$. Odtud $-\frac{1}{t^2} = -\frac{2}{t^3} \ \Rightarrow \ t = 2$. Příslušný bod má souřadnice $[\frac{1}{2}, \frac{1}{4}]$.

Zpět

Příklad 6.1.3

Máme křivku $\mathcal{K}$ zadanou parametrickými rovnicemi

$$\mathcal{K}: \quad \begin{aligned} x &= \tfrac{1}{t} \\ y &= \tfrac{1}{t^2}, \quad t \in (0, \infty). \end{aligned}$$

a) Nakreslete křivku, určete a nakreslete tečný vektor v bodě křivky $\mathcal{K}$, který odpovídá hodnotě parametru $t = \frac{3}{2}$.

b) Určete bod na křivce $\mathcal{K}$, ve kterém je tečna ke křivce $\mathcal{K}$ rovnoběžná s přímkou $y = x$.

Maple:

```
> x:=t->1/t;
```

$$x := t \to \frac{1}{t}$$

```
> y:=t->1/t^2;
```

$$y := t \to \frac{1}{t^2}$$

Tečný vektor:

```
> v:=[diff(x(t),t),diff(y(t),t)];
```

$$v := [-\frac{1}{t^2}, -\frac{2}{t^3}]$$

Tečný vektor pro $t = 3/2$:

```
> v1:=subs(t=3/2,v);
```

$$v1 := [\frac{-4}{9}, \frac{-16}{27}]$$

Další

Příklad 6.1.3

Máme křivku $\mathcal{K}$ zadanou parametrickými rovnicemi

$$\mathcal{K}: \quad \begin{aligned} x &= \tfrac{1}{t} \\ y &= \tfrac{1}{t^2}, \quad t \in (0, \infty). \end{aligned}$$

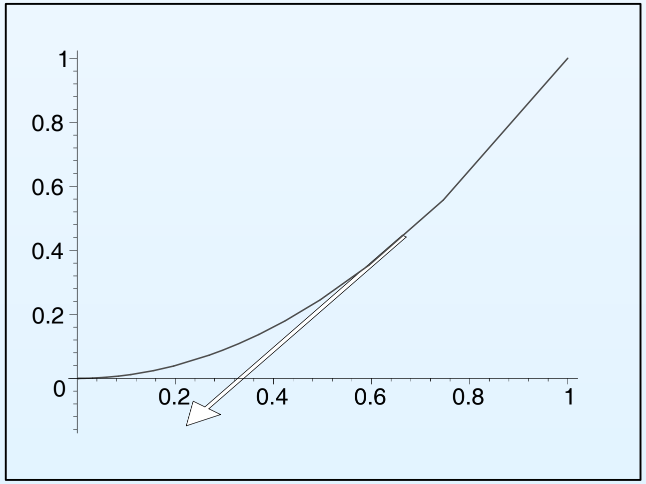
a) Nakreslete křivku, určete a nakreslete tečný vektor v bodě křivky $\mathcal{K}$, který odpovídá hodnotě parametru $t = \frac{3}{2}$.

b) Určete bod na křivce $\mathcal{K}$, ve kterém je tečna ke křivce $\mathcal{K}$ rovnoběžná s přímkou $y = x$.

Maple:

Graf křivky a zobrazení tečného vektoru:

```
>  g1:=plot([x(t),y(t),t=1..500]):
>  g2:=plots[arrow]([x(3/2),y(3/2)],[v1[1],v1[2]],width=0.005,head_width
=0.07,head_length=0.07):
>  plots[display](g1,g2);
```



Další

Příklad 6.1.3

Máme křivku $\mathcal{K}$ zadanou parametrickými rovnicemi

$$\mathcal{K}: \quad \begin{aligned} x &= \tfrac{1}{t} \\ y &= \tfrac{1}{t^2}, \quad t \in (0, \infty). \end{aligned}$$

a) Nakreslete křivku, určete a nakreslete tečný vektor v bodě křivky $\mathcal{K}$, který odpovídá hodnotě parametru $t = \frac{3}{2}$.

b) Určete bod na křivce $\mathcal{K}$, ve kterém je tečna ke křivce $\mathcal{K}$ rovnoběžná s přímkou $y = x$.

Maple:

Bod A, ve kterém je tečný vektor rovnoběžný s přímkou $y = x$:

```
> solve({v[1]=k,v[2]=k});
```

$$\{t = 2,\ k = \frac{-1}{4}\}$$

```
> A:=[x(2),y(2)];
```

$$A := [\frac{1}{2},\ \frac{1}{4}]$$

Zpět

Příklad 6.1.3

Máme křivku $\mathcal{K}$ zadanou parametrickými rovnicemi

$$\mathcal{K}: \quad \begin{aligned} x &= \tfrac{1}{t} \\ y &= \tfrac{1}{t^2}, \quad t \in (0, \infty). \end{aligned}$$

a) Nakreslete křivku, určete a nakreslete tečný vektor v bodě křivky $\mathcal{K}$, který odpovídá hodnotě parametru $t = \frac{3}{2}$.

b) Určete bod na křivce $\mathcal{K}$, ve kterém je tečna ke křivce $\mathcal{K}$ rovnoběžná s přímkou $y = x$.

Mathematica:

x[t_] = 1/t;
y[t_] = 1/t^2;

Tečný vektor:

v = {D[x[t], t], D[y[t], t]}

$$\left\{-\frac{1}{t^2}, -\frac{2}{t^3}\right\}$$

Tečný vektor pro $t = 3/2$:

v1 = v/.t → 3/2

$$\left\{-\frac{4}{9}, -\frac{16}{27}\right\}$$

<< Graphics`Arrow`

Další

Příklad 6.1.3

Máme křivku $\mathcal{K}$ zadanou parametrickými rovnicemi

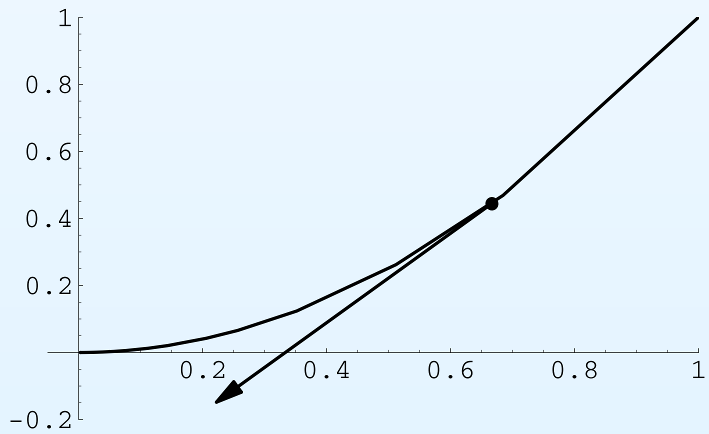
$$\mathcal{K}: \quad \begin{aligned} x &= \tfrac{1}{t} \\ y &= \tfrac{1}{t^2}, \quad t \in (0, \infty). \end{aligned}$$

a) Nakreslete křivku, určete a nakreslete tečný vektor v bodě křivky $\mathcal{K}$, který odpovídá hodnotě parametru $t = \frac{3}{2}$.

b) Určete bod na křivce $\mathcal{K}$, ve kterém je tečna ke křivce $\mathcal{K}$ rovnoběžná s přímkou $y = x$.

Mathematica:

**g1 = ParametricPlot[{x[t], y[t]}, {t, 1, 400}, PlotPoints → 50,
PlotRange → {{−0.05, 1.0}, {−0.2, 1.0}}, PlotStyle → Thickness[0.005],
Epilog → {Thickness[0.005],
Arrow[{x[3/2], y[3/2]}, {x[3/2] + v1[[1]], y[3/2] + v1[[2]]}, HeadLength → .05],
PointSize[0.02], Point[{x[3/2], y[3/2]}]}]**



Další

Příklad 6.1.3

Máme křivku $\mathcal{K}$ zadanou parametrickými rovnicemi

$$\begin{aligned}\mathcal{K}: \quad x &= \tfrac{1}{t} \\ y &= \tfrac{1}{t^2}, \quad t \in (0, \infty).\end{aligned}$$

a) Nakreslete křivku, určete a nakreslete tečný vektor v bodě křivky $\mathcal{K}$, který odpovídá hodnotě parametru $t = \frac{3}{2}$.

b) Určete bod na křivce $\mathcal{K}$, ve kterém je tečna ke křivce $\mathcal{K}$ rovnoběžná s přímkou $y = x$.

Mathematica:

Bod A, ve kterém je tečný vektor rovnoběžný s přímkou $y = x$:

Solve[{*v*[[1]] == *k*, *v*[[2]] == *k*}, {*t*, *k*}]

$\left\{\left\{k \to -\frac{1}{4}, t \to 2\right\}\right\}$

$\boldsymbol{A = v/.t \to 2}$

$\left\{-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right\}$

Zpět

Parametrizace křivek, tečna ke křivce

- Příklad 6.2.1 Parametrizujte křivku, která je průnikem kulové plochy $\mathcal{K}$

$$\mathcal{K} : (x-3)^2 + (y-4)^2 + (z-8)^2 = 20$$

  a roviny $\varrho : z = 10$.

- Příklad 6.2.2 Napište rovnice tečen k elipse o rovnici $4x^2 + 9y^2 = 36$, jejichž směrnice je rovna 1.

Zpět

Příklad 6.2.1

Parametrizujte křivku, která je průnikem kulové plochy $\mathcal{K}$

$$\mathcal{K} : (x-3)^2 + (y-4)^2 + (z-8)^2 = 20$$

a roviny $\varrho : z = 10$.

? Zpět

Příklad 6.2.1

Parametrizujte křivku, která je průnikem kulové plochy $\mathcal{K}$

$$\mathcal{K} : (x-3)^2 + (y-4)^2 + (z-8)^2 = 20$$

a roviny $\varrho : z = 10$.

Výsledek:

Kružnice k: $x(t) = 3 + 4\cos t,\ y(t) = 4 + 4\sin t,\ z(t) = 10,\ t \in \langle 0, 2\pi \rangle$.

Zpět

Příklad 6.2.1

Parametrizujte křivku, která je průnikem kulové plochy $\mathcal{K}$

$$\mathcal{K} : (x-3)^2 + (y-4)^2 + (z-8)^2 = 20$$

a roviny $\varrho : z = 10$.

Návod:

Nejprve vypočteme průnik $\mathcal{K} \bigcap \varrho$, poté provedeme parametrizaci vzniklé křivky s využitím polárních (resp. válcových) souřadnic.

Zpět

Příklad 6.2.1

Parametrizujte křivku, která je průnikem kulové plochy $\mathcal{K}$

$$\mathcal{K} : (x-3)^2 + (y-4)^2 + (z-8)^2 = 20$$

a roviny $\varrho : z = 10$.

Řešení:

Průnik $\mathcal{K} \bigcap \varrho$ určíme dosazením $z = 10$ do rovnice kulové plochy:

$$(x-3)^2 + (y-4)^2 + (10-8)^2 = 20\,, \quad \text{tj.} \quad (x-3)^2 + (y-4)^2 = 16\,.$$

Je zřejmé, že se jedná o kružnici se středem v bodě $S = [3; 4]$ a poloměrem $r = 4$, která leží v rovině $z = 10$. Parametrické vyjádření kružnice se středem v bodě $S = [s_1, s_2]$ a poloměrem R, ležící v rovině $z = 0$ je

$$\left.\begin{array}{lcl} x(t) & = & s_1 + R\cos t \\ y(t) & = & s_2 + R\sin t \end{array}\right\} \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle\,.$$

V našem případě stačí dosadit a přidat třetí souřadnici $z = 10$. Hledaná parametrizace má tedy tvar

$$\left.\begin{array}{lcl} x(t) & = & 3 + 4\cos t \\ y(t) & = & 4 + 4\sin t \\ z(t) & = & 10 \end{array}\right\} \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle\,.$$

Zpět

Příklad 6.2.1

Parametrizujte křivku, která je průnikem kulové plochy $\mathcal{K}$

$$\mathcal{K} : (x-3)^2 + (y-4)^2 + (z-8)^2 = 20$$

a roviny $\varrho : z = 10$.

Maple:

```
> koule:=(x-3)^2+(y-4)^2+(z-8)^2=20;
```

$$koule := (x-3)^2 + (y-4)^2 + (z-8)^2 = 20$$

```
> kruznice:=subs(z=10,koule);
```

$$kruznice := (x-3)^2 + (y-4)^2 + 4 = 20$$

Parametrizaci kružnice musíme udělat sami. Můžeme se jen přesvědčit dosazením do rovnice kružnice, že jsme parametrizaci udělali správně.

```
> x:=t->3+4*cos(t);
```

$$x := t \to 3 + 4\cos(t)$$

```
> y:=t->4+4*sin(t);
```

$$y := t \to 4 + 4\sin(t)$$

```
> k:=subs(x=x(t),y=y(t),kruznice);
```

$$k := 16\cos(t)^2 + 16\sin(t)^2 + 4 = 20$$

```
> simplify(k);
```

$$20 = 20$$

Zpět

Příklad 6.2.1

Parametrizujte křivku, která je průnikem kulové plochy $\mathcal{K}$

$$\mathcal{K} : (x-3)^2 + (y-4)^2 + (z-8)^2 = 20$$

a roviny $\varrho : z = 10$.

Mathematica:

$\mathbf{koule = (x-3)\hat{}2 + (y-4)\hat{}2 + (z-8)\hat{}2{==}20}$

$(-3+x)^2 + (-4+y)^2 + (-8+z)^2 == 20$

$\mathbf{kruznice = koule/.z \to 10}$

$4 + (-3+x)^2 + (-4+y)^2 == 20$

Parametrizaci kružnice musíme udělat sami. Můžeme se jen přesvědčit dosazením do rovnice kružnice, že jsme parametrizaci udělali správně.

$\mathbf{x[t\_] = 3 + 4Cos[t]}$

$3 + 4\mathrm{Cos}[t]$

$\mathbf{y[t\_] = 4 + 4Sin[t]}$

$4 + 4\mathrm{Sin}[t]$

$\mathbf{dosazeni = kruznice/.\{x \to x[t], y \to y[t]\}}$

$4 + 16\mathrm{Cos}[t]^2 + 16\mathrm{Sin}[t]^2 == 20$

Simplify[dosazeni]

True

Zpět

Příklad 6.2.2

Napište rovnice tečen k elipse o rovnici $4x^2 + 9y^2 = 36$, jejichž směrnice je rovna 1.

? Zpět

Příklad 6.2.2

Napište rovnice tečen k elipse o rovnici $4x^2 + 9y^2 = 36$, jejichž směrnice je rovna 1.

Výsledek:

Tečna $t_1 : y = x + \sqrt{13}$, $t_2 : y = x - \sqrt{13}$.

Zpět

Příklad 6.2.2

Napište rovnice tečen k elipse o rovnici $4x^2 + 9y^2 = 36$, jejichž směrnice je rovna 1.

Návod:

Rovnice hledané tečny bude $y = x + q$ ($q \in \mathbb{R}$), neboť její směrnice $k = 1$. Hledáme tedy společný bod této přímky a elipsy.

Zpět

Příklad 6.2.2

Napište rovnice tečen k elipse o rovnici $4x^2 + 9y^2 = 36$, jejichž směrnice je rovna 1.

Řešení:

Ze zadání plyne, že rovnice hledané tečny bude $y = x + q$ ($q \in \mathbb{R}$), neboť její směrnice $k = 1$. Řešíme tedy soustavu

$$\begin{aligned} 4x^2 + 9y^2 &= 36 \\ y &= x + q\,. \end{aligned}$$

za předpokladu, že má právě jedno řešení (průnik tečny a elipsy je jednobodový - bod dotyku). Dosazením y z druhé rovnice do první získáme kvadratickou rovnici

$$4x^2 + 9(x+q)^2 = 36\,,$$

po upravení

$$13x^2 + 18qx + 9q^2 - 36 = 0$$

s diskriminantem $D = (18q)^2 - 52(9q^2 - 36) = -144q^2 + 1872$. Podmínkou pro jeden dvojnásobný kořen je $D = 0$, tj. $q^2 = 13$. Zadání úlohy tedy splňují tečny $t_1 : y = x + \sqrt{13}$, $t_2 : y = x - \sqrt{13}$.

Zpět

Příklad 6.2.2

Napište rovnice tečen k elipse o rovnici $4x^2 + 9y^2 = 36$, jejichž směrnice je rovna 1.

Maple:

```
> elipsa:=4*x^2+9*y^2-36=0;
```

$$elipsa := 4\,x^2 + 9\,y^2 - 36 = 0$$

```
> rovnice:=subs(y=x+q,elipsa);
```

$$rovnice := 4\,x^2 + 9\,(x+q)^2 - 36 = 0$$

Nyní jsme provedli dosazení z rovnice tečny do rovnice elipsy a budeme hledat podmínku, kdy je diskriminant této kvadratické rovnice roven 0, tj. kdy daná přímka bude tečnou elipsy:

```
> expand(rovnice);
```

$$13\,x^2 + 18\,x\,q + 9\,q^2 - 36 = 0$$

```
> diskriminant:=discrim(lhs(rovnice),x);
```

$$diskriminant := 1872 - 144\,q^2$$

```
> q:=solve(diskriminant=0);
```

$$q := -\sqrt{13},\ \sqrt{13}$$

Vidíme, že jsme dostali dvě možnosti - zadání budou vyhovovat dvě tečny s požadovanou směrnicí k=1 a kvocientem q.

Další

Příklad 6.2.2

Napište rovnice tečen k elipse o rovnici $4x^2 + 9y^2 = 36$, jejichž směrnice je rovna 1.

Maple:

```
> q1:=q[1];
```

$$q1 := -\sqrt{13}$$

```
> q2:=q[2];
```

$$q2 := \sqrt{13}$$

Rovnice tečny t1 bude:

```
> t1:=y=x+q2;
```

$$t1 := y = x + \sqrt{13}$$

Rovnice tečny t2 bude:

```
> t2:=y=x+q1;
```

$$t2 := y = x - \sqrt{13}$$

Zpět

Příklad 6.2.2

Napište rovnice tečen k elipse o rovnici $4x^2 + 9y^2 = 36$, jejichž směrnice je rovna 1.

Mathematica:

$\mathbf{elipsa = 4 * \boldsymbol{x}\hat{}2 + 9 * \boldsymbol{y}\hat{}2 - 36 == 0}$

$-36 + 4x^2 + 9y^2 == 0$

$\mathbf{rovnice = elipsa/.\boldsymbol{y} \to \boldsymbol{x} + \boldsymbol{q}}$

$-36 + 4x^2 + 9(q + x)^2 == 0$

$\mathbf{\boldsymbol{r} = Solve[rovnice, \boldsymbol{x}]}$

$$\left\{\left\{x \to \frac{3}{13}\left(-3q - 2\sqrt{13 - q^2}\right)\right\}, \left\{x \to \frac{3}{13}\left(-3q + 2\sqrt{13 - q^2}\right)\right\}\right\}$$

Najdeme hodnotu q, pro kterou má elipsa a rovnice přímky $y = x + q$ právě jeden společný bod.

$\mathbf{lr = \boldsymbol{r}[[1, 1, 2]]}$

$$\frac{3}{13}\left(-3q - 2\sqrt{13 - q^2}\right)$$

$\mathbf{pr = \boldsymbol{r}[[2, 1, 2]]}$

$$\frac{3}{13}\left(-3q + 2\sqrt{13 - q^2}\right)$$

$\mathbf{qq = Solve[lr == pr, \boldsymbol{q}]}$

$$\left\{\left\{q \to -\sqrt{13}\right\}, \left\{q \to \sqrt{13}\right\}\right\}$$

Další

Příklad 6.2.2

Napište rovnice tečen k elipse o rovnici $4x^2 + 9y^2 = 36$, jejichž směrnice je rovna 1.

Mathematica:

t1 = $\boldsymbol{x}$ + qq[[1, 1, 2]]
t2 = $\boldsymbol{x}$ + qq[[2, 1, 2]]

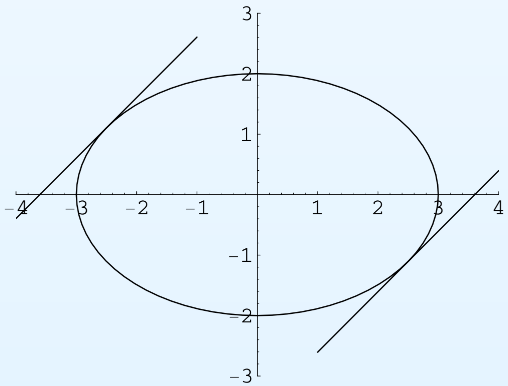
$-\sqrt{13} + x$

$\sqrt{13} + x$

Zobrazíme si elipsu a obě tečny graficky

<< Graphics`ImplicitPlot`

g1 = ImplicitPlot[elipsa, {$\boldsymbol{x}$, −3, 3}, DisplayFunction → Identity];
g2 = Plot[t1, {$\boldsymbol{x}$, 1, 4}, DisplayFunction → Identity];
g3 = Plot[t2, {$\boldsymbol{x}$, −4, −1}, DisplayFunction → Identity];
Show[{g1, g2, g3}, DisplayFunction → $DisplayFunction,
PlotRange → {{−4, 4}, {−3, 3}}];



Zpět