Integrální počet funkcí jedné proměnné

- Neurčité integrály
- Určité a nevlastní integrály
- Geometrické aplikace určitého integrálu

Zpět

Neurčité integrály

- Příklad 7.1.1 Vhodnou metodou vypočítejte neurčitý integrál $\displaystyle\int \cos(\ln x)\ \mathrm{d}x$.
- Příklad 7.1.2 Vhodnou metodou vypočítejte neurčitý integrál $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}\ \mathrm{d}x$.
- Příklad 7.1.3 Vhodnou metodou vypočítejte neurčitý integrál $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^6}}\ \mathrm{d}x$.

Zpět

Příklad 7.1.1

Vhodnou metodou vypočítejte neurčitý integrál $\int \cos(\ln x)\ \mathrm{d}x$.

? Zpět

Příklad 7.1.1

Vhodnou metodou vypočítejte neurčitý integrál $\int \cos(\ln x)\ \mathrm{d}x$.

Výsledek:

$$\int \cos(\ln x)\ \mathrm{d}x = \frac{x}{2}\left(\cos(\ln x) + \sin(\ln x)\right)\ .$$

Zpět

Příklad 7.1.1

Vhodnou metodou vypočítejte neurčitý integrál $\int \cos(\ln x)\,\mathrm{d}x$.

Návod:

Dvakrát po sobě použijte metodu per partes, přičemž v 1. kroku položte:
$u'(x) = 1$, $v(x) = \cos(\ln x)$. Hledaný integrál pak vypočtěte ze vzniklé rovnice.

Zpět

Příklad 7.1.1

Vhodnou metodou vypočítejte neurčitý integrál $\int \cos(\ln x)\ \mathrm{d}x$.

Řešení:

$$\int \cos(\ln x)\ \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} u'(x) = 1 & u(x) = \int 1\ \mathrm{d}x = x \\ v(x) = \cos(\ln x) & v'(x) = -\sin(\ln x)\cdot \frac{1}{x} \end{array} \right| = x\cos(\ln x) + \int \sin(\ln x)\ \mathrm{d}x =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} u'(x) = 1 & u(x) = \int 1\ \mathrm{d}x = x \\ v(x) = \sin(\ln x) & v'(x) = \cos(\ln x)\cdot \frac{1}{x} \end{array} \right| = x\cos(\ln x) + \left(x\sin(\ln x) - \int \cos(\ln x)\ \mathrm{d}x \right) =$$

$$= x\cos(\ln x) + x\sin(\ln x) - \int \cos(\ln x)\ \mathrm{d}x$$

Vypustíme-li z uvedeného řetězce rovností „vnitřní“ členy, můžeme psát:

$$\int \cos(\ln x)\ \mathrm{d}x = x\cos(\ln x) + x\sin(\ln x) - \int \cos(\ln x)\ \mathrm{d}x$$

Převedením posledního členu z pravé strany na stranu levou dostaneme:

$$2\int \cos(\ln x)\ \mathrm{d}x = x\cos(\ln x) + x\sin(\ln x)$$

Odtud pak plyne:

$$\int \cos(\ln x)\ \mathrm{d}x = \frac{x\cos(\ln x) + x\sin(\ln x)}{2} = \frac{x}{2}\left(\cos(\ln x) + \sin(\ln x)\right).$$

Zpět

Příklad 7.1.1

Vhodnou metodou vypočítejte neurčitý integrál $\int \cos(\ln x)\ \mathrm{d}x$.

Maple:

```
> Int(cos(ln(x)),x)=int(cos(ln(x)),x);
```

$$\int \cos(\ln(x))\,dx = \frac{1}{2}\cos(\ln(x))\,x + \frac{1}{2}\sin(\ln(x))\,x$$

Zpět

Příklad 7.1.1

Vhodnou metodou vypočítejte neurčitý integrál $\int \cos(\ln x)\, \mathrm{d}x$.

Mathematica:

Integrate[Sin[Log[*x*]], *x*]

$-\frac{1}{2}x\mathrm{Cos}[\mathrm{Log}[x]] + \frac{1}{2}x\mathrm{Sin}[\mathrm{Log}[x]]$

Zpět

Příklad 7.1.2

Vhodnou metodou vypočítejte neurčitý integrál $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}\,\mathrm{d}x$.

? Zpět

Příklad 7.1.2

Vhodnou metodou vypočítejte neurčitý integrál $\int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}\, \mathrm{d}x$.

Výsledek:

$$\int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}\, \mathrm{d}x = 2\, \sqrt{\sin x}\, .$$

Zpět

Příklad 7.1.2

Vhodnou metodou vypočítejte neurčitý integrál $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}\,\mathrm{d}x$.

Návod:

Integrál vypočítejte pomocí substituce $\sin x = t$.

Zpět

Příklad 7.1.2

Vhodnou metodou vypočítejte neurčitý integrál $\int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}\, \mathrm{d}x$.

Řešení:

$$\int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}\, \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{rcr} \sin x & = & t \\ \cos x\ \mathrm{d}x & = & \mathrm{d}t \end{array} \right| = \int \frac{1}{\sqrt{t}}\, \mathrm{d}t =$$

$$= \int t^{-\frac{1}{2}}\, \mathrm{d}t = \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{t} = 2\sqrt{\sin x}$$

Zpět

Příklad 7.1.2

Vhodnou metodou vypočítejte neurčitý integrál $\int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}\,\mathrm{d}x$.

Maple:

```
> Int(cos(x)/sqrt(sin(x)),x)=int(cos(x)/sqrt(sin(x)),x);
```

$$\int \frac{\cos(x)}{\sqrt{\sin(x)}}\,dx = 2\sqrt{\sin(x)}$$

Zpět

Příklad 7.1.2

Vhodnou metodou vypočítejte neurčitý integrál $\int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}\, dx$.

Mathematica:

Integrate[Cos[*x*]/Sqrt[Sin[*x*]], *x*]

$2\sqrt{\mathrm{Sin}[x]}$

Zpět

Příklad 7.1.3

Vhodnou metodou vypočítejte neurčitý integrál $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^6}}\,\mathrm{d}x$.

? Zpět

Příklad 7.1.3

Vhodnou metodou vypočítejte neurčitý integrál $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^6}}\,\mathrm{d}x$.

Výsledek:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^6}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\,\arcsin x^3\,.$$

Zpět

Příklad 7.1.3

Vhodnou metodou vypočítejte neurčitý integrál $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^6}}\,\mathrm{d}x$.

Návod:

Integrand nejprve upravte, a to tak, abyste mohli použít substituci $x^3 = t$.

Zpět

Příklad 7.1.3

Vhodnou metodou vypočítejte neurčitý integrál $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^6}}\,\mathrm{d}x$.

Řešení:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^6}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x^2}{\sqrt{1-(x^3)^2}}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{rcr} x^3 & = & t \\ 3x^2\ \mathrm{d}x & = & \mathrm{d}t \\ x^2\ \mathrm{d}x & = & \frac{1}{3}\ \mathrm{d}t \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\ \arcsin t = \frac{1}{3}\ \arcsin x^3$$

Zpět

Příklad 7.1.3

Vhodnou metodou vypočítejte neurčitý integrál $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^6}}\,\mathrm{d}x$.

Maple:

```
> Int(x^2/sqrt(1-x^6),x)=int(x^2/sqrt(1-x^6),x);
```

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^6}}\,dx = \frac{1}{3}\arcsin(x^3)$$

Zpět

Příklad 7.1.3

Vhodnou metodou vypočítejte neurčitý integrál $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^6}}\,\mathrm{d}x$.

Mathematica:

Integrate[$\boldsymbol{x}$^2/Sqrt[1 − $\boldsymbol{x}$^6], $\boldsymbol{x}$]

$\frac{\mathrm{ArcSin}\left[x^3\right]}{3}$

Zpět

Určité integrály

- Příklad 7.2.1 Vypočtěte určitý integrál $\int\limits_{-1}^{3} x \cdot \mathrm{e}^{3-x^2}\,\mathrm{d}x$.
- Příklad 7.2.2 Vypočtěte určitý integrál $\int\limits_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} 3x \cdot \ln x\,\mathrm{d}x$.
- Příklad 7.2.3 Vypočtěte nevlastní integrál $\int\limits_{0}^{1} \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.

Zpět

Příklad 7.2.1

Vypočtěte určitý integrál $\int_{-1}^{3} x \cdot \mathrm{e}^{3-x^2}\,\mathrm{d}x$.

? Zpět

Příklad 7.2.1

Vypočtěte určitý integrál $\int\limits_{-1}^{3} x \cdot \mathrm{e}^{3-x^2}\,\mathrm{d}x$.

Výsledek:

$$\int\limits_{-1}^{3} x \cdot \mathrm{e}^{3-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^2 - \frac{1}{\mathrm{e}^6}\right).$$

Zpět

Příklad 7.2.1

Vypočtěte určitý integrál $\int\limits_{-1}^{3} x \cdot \mathrm{e}^{3-x^2}\ \mathrm{d}x$.

Návod:

Integrovaná funkce $f(x) = x \cdot \mathrm{e}^{3-x^2}$ je definovaná na množině $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$, na níž je navíc spojitá. Protože platí, že $\langle -1; 3\rangle \subset \mathcal{D}(f)$, je tím spíše spojitá na intervalu $\langle -1; 3\rangle$. Tím je zaručena existence primitivní funkce $F(x)$ k funkci $f(x)$ na intervalu $\langle -1; 3\rangle$. Zadaný integrál tudíž existuje. Primitivní funkce $F(x)$ se vypočítá pomocí substituce $3 - x^2 = t$.

Zpět

Příklad 7.2.1

Vypočtěte určitý integrál $\int\limits_{-1}^{3} x \cdot \mathrm{e}^{3-x^2}\ \mathrm{d}x$.

Řešení:

$$\int\limits_{-1}^{3} x \cdot \mathrm{e}^{3-x^2}\ \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{rcl} 3 - x^2 & = & t \\ -2x\ \mathrm{d}x & = & \mathrm{d}t \\ x\ \mathrm{d}x & = & -\frac{1}{2}\ \mathrm{d}t \\ x = -1 & \Rightarrow & t = 2 \\ x = 3 & \Rightarrow & t = -6 \end{array} \right| = \frac{-1}{2} \int\limits_{2}^{-6} \mathrm{e}^{t}\ \mathrm{d}t = \frac{-1}{2}\ \left[\mathrm{e}^{t}\right]_{2}^{-6} =$$

$$= \frac{-1}{2}\left(\mathrm{e}^{-6} - \mathrm{e}^{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{2} - \frac{1}{\mathrm{e}^{6}}\right)$$

Zpět

Příklad 7.2.1

Vypočtěte určitý integrál $\displaystyle\int\limits_{-1}^{3} x \cdot \mathrm{e}^{3-x^2}\,\mathrm{d}x$.

Maple:

```
>  Int(x*exp(3-x^2),x=-1..3)=int(x*exp(3-x^2),x=-1..3);
```

$$\int_{-1}^{3} x\, e^{(3-x^2)}\, dx = \frac{1}{2}\, e^2 - \frac{1}{2}\, e^{(-6)}$$

Zpět

Příklad 7.2.1

Vypočtěte určitý integrál $\int\limits_{-1}^{3} x \cdot \mathrm{e}^{3-x^2}\ \mathrm{d}x.$

Mathematica:

Integrate[$x * $Exp[3 − x^2], {x, −1, 3}]

$\frac{-1+e^8}{2e^6}$

Zpět

Příklad 7.2.2

Vypočtěte určitý integrál $\int\limits_{e}^{e^2} 3x \cdot \ln x \, dx$.

? Zpět

Příklad 7.2.2

Vypočtěte určitý integrál $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} 3x \cdot \ln x \;\mathrm{d}x$.

Výsledek:

$$\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} 3x \cdot \ln x \;\mathrm{d}x = \frac{9}{4}\mathrm{e}^4 - \frac{3}{4}\mathrm{e}^2 \,.$$

Zpět

Příklad 7.2.2

Vypočtěte určitý integrál $\int\limits_{e}^{e^2} 3x \cdot \ln x \, \mathrm{d}x$.

Návod:

Integrovaná funkce $f(x) = 3x \cdot \ln x$ je definovaná na množině $\mathcal{D}(f) = (0, \infty)$, na níž je navíc spojitá. Protože platí, že $\langle e, e^2 \rangle \subset \mathcal{D}(\mathrm{f})$, je tím spíše spojitá na intervalu $\langle e, e^2 \rangle$. Tím je zaručena existence primitivní funkce $F(x)$ k funkci $f(x)$ na intervalu $\langle e, e^2 \rangle$. Zadaný integrál tudíž existuje. Vypočítáme jej pomocí metody per partes, a to tak, že položíme: $u' = 3x$, $v = \ln x$.

Zpět

Příklad 7.2.2

Vypočtěte určitý integrál $\int\limits_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} 3x \cdot \ln x \, \mathrm{d}x$.

Řešení:

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} 3x \cdot \ln x \, \mathrm{d}x &= \left| \begin{array}{ccc} u' = 3x & \Rightarrow & u = \frac{3x^2}{2} \\ v = \ln x & \Rightarrow & v' = \frac{1}{x} \end{array} \right| = \left[\frac{3x^2}{2} \cdot \ln x \right]_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} - \int\limits_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{3x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = \\
&= \left[\frac{3x^2}{2} \cdot \ln x \right]_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} - \frac{3}{2} \int\limits_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} x \, \mathrm{d}x = \left[\frac{3x^2}{2} \cdot \ln x \right]_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} - \frac{3}{2} \left[\frac{x^2}{2} \right]_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} = \\
&= \left[\frac{3x^2}{2} \cdot \left(\ln x - \frac{1}{2} \right) \right]_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} = \frac{3\mathrm{e}^4}{2} \left(\ln \mathrm{e}^2 - \frac{1}{2} \right) - \frac{3\mathrm{e}^2}{2} \left(\ln \mathrm{e} - \frac{1}{2} \right) = \\
&= \frac{9}{4}\mathrm{e}^4 - \frac{3}{4}\mathrm{e}^2
\end{aligned}$$

Zpět

Příklad 7.2.2

Vypočtěte určitý integrál $\int\limits_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} 3x \cdot \ln x \; \mathrm{d}x$.

Maple:

```
>   Int(3*x*ln(x),x=exp(1)..exp(2))=int(3*x*ln(x),x=exp(1)..exp(2));
```

$$\int_{e}^{e^2} 3\,x\ln(x)\,dx = -\frac{3}{4}\,e^2 + \frac{9}{4}\,e^4$$

Zpět

Příklad 7.2.2

Vypočtěte určitý integrál $\int_{e}^{e^2} 3x \cdot \ln x \, dx$.

Mathematica:

Integrate[3*x*Log[*x*], {*x*, Exp[1], Exp[2]}]

$\frac{3}{4}e^2\left(-1+3e^2\right)$

Zpět

Příklad 7.2.3

Vypočtěte nevlastní integrál $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx$.

? Zpět

Příklad 7.2.3

Vypočtěte nevlastní integrál $\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.

Výsledek:

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 2(\mathrm{e}-1)\,.$$

Zpět

Příklad 7.2.3

Vypočtěte nevlastní integrál $\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\ \mathrm{d}x$.

Návod:

Integrovaná funkce $f(x) = \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$ je definovaná na množině $\mathcal{D}(f) = (0, \infty)$. Protože uzavřený interval $\langle 0, 1\rangle$ není podmnožinou $\mathcal{D}(f)$, funkce $f(x)$ nemůže mít na intervalu $\langle 0, 1\rangle$ primitivní funkci. Zadaný integrál tudíž neexistuje.
Platí však, že $(0, 1\rangle \subset \mathcal{D}(f)$ a protože funkce $f(x)$ je na $\mathcal{D}(f)$ spojitá, je tím spíše spojitá na intervalu $(0, 1\rangle$. Tím je zaručena existence primitivní funkce $F(x)$ k funkci $f(x)$ „alespoň“ na intervalu $(0, 1\rangle$. Jedná se tedy o nevlastní integrál, který se vypočítá takto:

$$\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\ \mathrm{d}x = [F(x)]_0^1 = F(1) - \lim_{x\to 0_+} F(x),$$

pokud ovšem bude uvedená limita vlastní. Primitivní funkci $F(x)$ vypočítáme pomocí substituce $t = \sqrt{x}$.

Zpět

Příklad 7.2.3

Vypočtěte nevlastní integrál $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$.

Řešení:

Nejprve si přečtěte Návod.

$$F(x) = \int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx \quad = \quad \left| \begin{array}{rcl} \sqrt{x} & = & t \\ \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx & = & dt \\ \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx & = & 2\,dt \end{array} \right| = 2\int e^t\,dt = 2e^t = 2\,e^{\sqrt{x}}$$

$$\int_0^1 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = \left[2\,e^{\sqrt{x}}\right]_0^1 = 2\,e^{\sqrt{1}} - \lim_{x\to 0_+} 2\,e^{\sqrt{x}} = 2e - 2e^0 = 2e - 2 = 2(e-1)$$

Zpět

Příklad 7.2.3

Vypočtěte nevlastní integrál $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x\,.$

Maple:

```
>   Int(exp(sqrt(x))/sqrt(x),x=0..1)=int(exp(sqrt(x))/sqrt(x),x=0..1);
```

$$\int_0^1 \frac{e^{(\sqrt{x})}}{\sqrt{x}}\,dx = 2\,e - 2$$

Zpět

Příklad 7.2.3

Vypočtěte nevlastní integrál $\int\limits_0^1 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx$.

Mathematica:

Přímý výpočet pomocí programu Mathematica:
$\mathbf{Integrate[Exp[Sqrt[\boldsymbol{x}]]/Sqrt[\boldsymbol{x}], \{\boldsymbol{x}, 0, 1\}]}$

$2(-1 + e)$

nebo vypočteme neurčitý integrál a spočteme nevlastní integrál pomocí limit:
$\boldsymbol{v} = \mathbf{Integrate[Exp[Sqrt[\boldsymbol{x}]]/Sqrt[\boldsymbol{x}], \boldsymbol{x}]}$

$2e^{\sqrt{x}}$

$\mathbf{integral = Limit[\boldsymbol{v}, \boldsymbol{x} \to 1] - Limit[\boldsymbol{v}, \boldsymbol{x} \to 0, Direction \to -1]}$

$-2 + 2e$

Zpět

- Příklad 7.3.1 Vypočtěte plošný obsah rovinného obrazce ohraničeného grafem funkce
$$f(x) = x\sqrt{x+4}\ ,\ \ x \in \langle -4, 0\rangle$$
a osou x.
- Příklad 7.3.2 Vypočtěte plošný obsah rovinného obrazce ohraničeného grafy funkcí
$$f(x) = \sin^2 x\ ,\ \ g(x) = \sin^3 x\ ,\ \ x \in \langle -\pi, 0\rangle .$$

Zpět

Příklad 7.3.1

Vypočtěte plošný obsah rovinného obrazce ohraničeného grafem funkce

$$f(x) = x\sqrt{x+4}\,,\ x \in \langle -4, 0\rangle$$

a osou x.

? Zpět

Příklad 7.3.1

Vypočtěte plošný obsah rovinného obrazce ohraničeného grafem funkce

$$f(x) = x\,\sqrt{x+4}\,,\ \ x \in \langle -4, 0\rangle$$

a osou x.

Výsledek:

$P = \frac{128}{15}$.

Zpět

Příklad 7.3.1

Vypočtěte plošný obsah rovinného obrazce ohraničeného grafem funkce

$$f(x) = x\,\sqrt{x+4}\,,\ x \in \langle -4, 0\rangle$$

a osou x.

Návod:

Vypočtěte určitý integrál $-\int_{-4}^{0} x\,\sqrt{x+4}\,\mathrm{d}x\,.$ Zpět

Příklad 7.3.1

Vypočtěte plošný obsah rovinného obrazce ohraničeného grafem funkce

$$f(x) = x\,\sqrt{x+4}\,,\ x \in \langle -4, 0\rangle$$

a osou x.

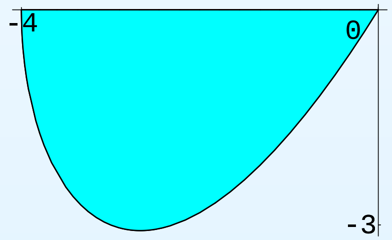
Řešení:

Nejprve budeme hledat průsečíky grafu funkce $f(x)$ s osou x. Jejich x-ové souřadnice získáme jako řešení rovnice $f(x) = 0$, tj. $x\,\sqrt{x+4} = 0$.
Tedy:

$$x\,\sqrt{x+4} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \quad \vee \quad \sqrt{x+4} = 0 \quad ,$$

přičemž: $\sqrt{x+4} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x+4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -4 \quad .$
Rovnice $x\,\sqrt{x+4} = 0$ má tedy 2 řešení: $x_1 = 0$ a $x_2 = -4$, což jsou právě krajní body uvažovaného intervalu $\langle -4, 0\rangle$. Vzhledem k tomu, že spojitá funkce nemůže mezi dvěma sousedními nulovými body střídat znaménko, je jasné, že bude platit buďto
$f(x) > 0 \ \ \forall x \in (-4, 0)$, nebo naopak
$f(x) < 0 \ \ \forall x \in (-4, 0)$. Zda platí první, či druhá alternativa, zjistíme např. tak, že určíme znaménko funkční hodnoty funkce f v některém (zcela libovolně zvoleném) bodě ležícím v intervalu $(-4, 0)$. Protože např. $-2 \in (-4, 0)$ a $f(-2) < 0$, platí: $f(x) < 0 \ \ \forall x \in (-4, 0)$.

Obrazec jehož obsah počítáme:



Další

Příklad 7.3.1

Vypočtěte plošný obsah rovinného obrazce ohraničeného grafem funkce

$$f(x) = x\,\sqrt{x+4}\,,\ x \in \langle -4, 0\rangle$$

a osou x.

Řešení:

Plošný obsah P zadaného obrazce tedy spočteme takto:

$$P = -\int_{-4}^{0} x\,\sqrt{x+4}\,\mathrm{d}x \quad = \quad \left| \begin{array}{rcl} x+4 & = & t \\ x & = & t-4 \\ \mathrm{d}x & = & \mathrm{d}t \\ x=-4 & \Rightarrow & t=0 \\ x=0 & \Rightarrow & t=4 \end{array} \right| = -\int_{0}^{4} (t-4)\,\sqrt{t}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \quad -\int_{0}^{4} \left(t\sqrt{t} - 4\sqrt{t}\right)\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{4} \left(-t^{\frac{3}{2}} + 4t^{\frac{1}{2}}\right)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \quad \left[-\frac{2}{5}\sqrt{t^5} + 4\cdot\frac{2}{3}\sqrt{t^3}\right]_0^4 = \left(-\frac{2}{5}\sqrt{4^5} + 4\cdot\frac{2}{3}\sqrt{4^3}\right) - 0 =$$

$$= \quad \frac{-64}{5} + \frac{64}{3} = \frac{128}{15}$$

Zpět

Příklad 7.3.1

Vypočtěte plošný obsah rovinného obrazce ohraničeného grafem funkce

$$f(x) = x\,\sqrt{x+4}\,,\ x \in \langle -4, 0\rangle$$

a osou x.

Maple:

```
> Int(-x*sqrt(x+4),x=-4..0)=int(-x*sqrt(x+4),x=-4..0);
```

$$\int_{-4}^{0} -x\,\sqrt{x+4}\,dx = \frac{128}{15}$$

Zpět

Příklad 7.3.1

Vypočtěte plošný obsah rovinného obrazce ohraničeného grafem funkce

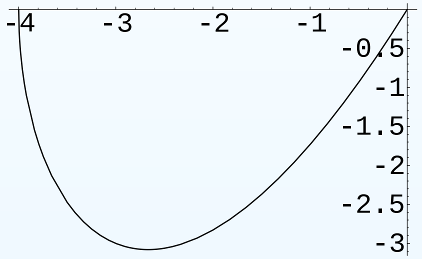
$$f(x) = x\,\sqrt{x+4}\,,\ x \in \langle -4, 0\rangle$$

a osou x.

Mathematica:

Nejdříve si nakreslíme graf dané funkce:

$\boldsymbol{g = \mathrm{Plot}[x\mathrm{Sqrt}[x+4], \{x, -4, 0\}]}$



−Graphics−

Nyní vypočteme plochu obrazce:

$\boldsymbol{P = \mathrm{Integrate}[-x\mathrm{Sqrt}[x+4], \{x, -4, 0\}]}$

$\frac{128}{15}$

Zpět

Příklad 7.3.2

Vypočtěte plošný obsah rovinného obrazce ohraničeného grafy funkcí

$$f(x) = \sin^2 x\ ,\quad g(x) = \sin^3 x\ ,\ x \in \langle -\pi, 0\rangle .$$

? Zpět

Příklad 7.3.2

Vypočtěte plošný obsah rovinného obrazce ohraničeného grafy funkcí

$$f(x) = \sin^2 x \ , \quad g(x) = \sin^3 x \ , \ x \in \langle -\pi, 0 \rangle .$$

Výsledek:

$P = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{3}$.

Zpět

Příklad 7.3.2

Vypočtěte plošný obsah rovinného obrazce ohraničeného grafy funkcí

$$f(x) = \sin^2 x\ , \quad g(x) = \sin^3 x\ , \ x \in \langle -\pi, 0\rangle.$$

Návod:

Pro plošný obsah obrazce platí

$$P = \int_{-\pi}^{0} (\sin^2 x - \sin^3 x)\ \mathrm{d}x.$$

Zpět

Příklad 7.3.2

Vypočtěte plošný obsah rovinného obrazce ohraničeného grafy funkcí

$$f(x) = \sin^2 x\ ,\quad g(x) = \sin^3 x\ ,\ x \in \langle -\pi, 0\rangle .$$

Řešení:

Nejprve budeme hledat průsečíky grafů funkcí $f(x)$ a $g(x)$. Jejich x-ové souřadnice získáme jako řešení rovnice $f(x) = g(x)$, tj. $\sin^2 x = \sin^3 x$.
Tedy:

$$\sin^2 x = \sin^3 x \quad\Leftrightarrow\quad \sin^2 x - \sin^3 x = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \sin^2 x\ \cdot (1 - \sin x) = 0 \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad \sin^2 x = 0 \ \vee\ 1 - \sin x = 0\ ,$$

přičemž:

$$\sin^2 x = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \sin x = 0 \quad\Leftrightarrow\quad x = k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}$$

a

$$1 - \sin x = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \sin x = 1 \quad\Leftrightarrow\quad x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Z bodů tvaru $k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$, leží v intervalu $\langle -\pi, 0\rangle$ dva body, a to: $x = -\pi$ a $x = 0$. Z bodů tvaru $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$, neleží v intervalu $\langle -\pi, 0\rangle$ žádný z nich. Rovnice $\sin^2 x = \sin^3 x$ má tedy v intervalu $\langle -\pi, 0\rangle$ 2 řešení: $x_1 = -\pi$ a $x_2 = 0$, což jsou právě krajní body uvažovaného intervalu $\langle -\pi, 0\rangle$. Vzhledem k tomu, že je funkce $f(x) - g(x) = \sin^2 x - \sin^3 x$ spojitá, nemůže mezi dvěma sousedními nulovými body střídat znaménko.

Další

Příklad 7.3.2

Vypočtěte plošný obsah rovinného obrazce ohraničeného grafy funkcí

$$f(x) = \sin^2 x\ , \quad g(x) = \sin^3 x\ , \ x \in \langle -\pi, 0 \rangle .$$

Řešení:

Musí tudíž platit buďto $\sin^2 x - \sin^3 x > 0 \ \ \forall x \in (-\pi, 0)$, neboli $\sin^2 x > \sin^3 x \ \ \forall x \in (-\pi, 0)$, nebo naopak $\sin^2 x - \sin^3 x < 0 \ \ \forall x \in (-\pi, 0)$, neboli $\sin^2 x < \sin^3 x \ \ \forall x \in (-\pi, 0)$. Zda platí první, či druhá alternativa, zjistíme např. tak, že určíme znaménko funkční hodnoty funkce $f - g$ v některém (zcela libovolně zvoleném) bodě ležícím v intervalu $(-\pi, 0)$. Protože např. $-\frac{\pi}{2} \in (-\pi, 0)$ a $f(-\frac{\pi}{2}) - g(-\frac{\pi}{2}) = \sin^2(-\frac{\pi}{2}) - \sin^3(-\frac{\pi}{2}) = (-1)^2 - (-1)^3 = 1 + 1 = 2 > 0$, platí: $\sin^2 x - \sin^3 x > 0 \ \ \forall x \in (-\pi, 0)$, neboli $\sin^2 x > \sin^3 x \ \ \forall x \in (-\pi, 0)$.
Plošný obsah P zadaného obrazce tedy spočteme takto:

$$P = \int_{-\pi}^{0} (\sin^2 x - \sin^3 x)\ \mathrm{d}x .$$

Nejprve si spočteme primitivní funkci k funkci $\sin^2 x - \sin^3 x$:

$$\int (\sin^2 x - \sin^3 x)\ \mathrm{d}x = \int \sin^2 x\ \mathrm{d}x - \int \sin^3 x\ \mathrm{d}x\ ,$$

přičemž každý z posledních dvou integrálů vypočteme samostatně:

Další

Příklad 7.3.2

Vypočtěte plošný obsah rovinného obrazce ohraničeného grafy funkcí

$$f(x) = \sin^2 x \ , \quad g(x) = \sin^3 x \ , \ x \in \langle -\pi, 0 \rangle .$$

Řešení:

$$\begin{aligned}
\int \sin^2 x \ dx &= \int \frac{1-\cos 2x}{2} \ dx = \frac{1}{2}\int (1-\cos 2x) \ dx = \\
&= \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x \ dx = \frac{1}{2} \ x - \frac{1}{4}\int 2\cos 2x \ dx = \\
&= \left| \begin{array}{rcr} 2x &=& t \\ 2\,dx &=& dt \end{array} \right| = \frac{1}{2} \ x - \frac{1}{4}\int \cos t \ dt = \\
&= \frac{1}{2} \ x - \frac{1}{4}\sin t = \frac{1}{2} \ x - \frac{1}{4}\sin 2x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int \sin^3 x \ dx &= \int \sin x \cdot \sin^2 x \ dx = \int \sin x \cdot (1-\cos^2 x) \ dx = \\
&= \left| \begin{array}{rcr} \cos x &=& t \\ -\sin x\,dx &=& dt \end{array} \right| = -\int (1-t^2) \ dt = \\
&= -t + \frac{t^3}{3} = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3}
\end{aligned}$$

Další

Příklad 7.3.2

Vypočtěte plošný obsah rovinného obrazce ohraničeného grafy funkcí

$$f(x) = \sin^2 x\ ,\quad g(x) = \sin^3 x\ ,\ x \in \langle -\pi, 0\rangle .$$

Řešení:

Tedy:

$$\int (\sin^2 x - \sin^3 x)\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,x - \frac{1}{4}\sin 2x + \cos x - \frac{\cos^3 x}{3}$$

Tudíž:

$$\begin{aligned} P &= \int_{-\pi}^{0} (\sin^2 x - \sin^3 x)\ \mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}\,x - \frac{1}{4}\sin 2x + \cos x - \frac{\cos^3 x}{3}\right]_{-\pi}^{0} = \\ &= \left(1 - \frac{1}{3}\right) - \left(-\frac{\pi}{2} - 1 + \frac{1}{3}\right) = 2 - \frac{2}{3} + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{3} \end{aligned}$$

Zpět

Příklad 7.3.2

Vypočtěte plošný obsah rovinného obrazce ohraničeného grafy funkcí

$$f(x) = \sin^2 x\ ,\quad g(x) = \sin^3 x\ ,\ x \in \langle -\pi, 0\rangle.$$

Maple:

```
>  Int((sin(x))^2-(sin(x))^3,x=-Pi..0)=int((sin(x))^2-(sin(x))^3,x=-Pi..
0);
```

$$\int_{-\pi}^{0} \sin(x)^2 - \sin(x)^3\, dx = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{3}$$

Zpět

Příklad 7.3.2

Vypočtěte plošný obsah rovinného obrazce ohraničeného grafy funkcí

$$f(x) = \sin^2 x \ , \quad g(x) = \sin^3 x \ , \ x \in \langle -\pi, 0 \rangle .$$

Mathematica:

$\boldsymbol{P} = \textbf{Integrate[Sin[}\boldsymbol{x}\textbf{]\^{}2} - \textbf{Sin[}\boldsymbol{x}\textbf{]\^{}3, \{}\boldsymbol{x}\textbf{, }-\textbf{Pi, 0\}]}$

$\frac{1}{6}(8 + 3\pi)$

Zpět