Diferenciální rovnice 1. řádu

- Metoda separace proměnných
- Lineární diferenciální rovnice 1. řádu
- Řešení diferenciálních rovnic 1. řádu

Metoda separace proměnných

- Příklad 8.1.1 Nalezněte řešení diferenciální rovnice $y' = \dfrac{xy^2 - x}{x^2y - y}$, které vyhovuje počáteční podmínce $y(\frac{1}{2}) = -2$.
- Příklad 8.1.2 Nalezněte obecné řešení diferenciální rovnice $y' = 6x^2\sqrt{y}$.
- Příklad 8.1.3 Nalezněte řešení diferenciální rovnice $y' = \dfrac{x}{2y+1}$, které vyhovuje počáteční podmínce $y(0) = -1$.

Zpět

Příklad 8.1.1

Nalezněte řešení diferenciální rovnice $y' = \dfrac{xy^2 - x}{x^2 y - y}$, které vyhovuje počáteční podmínce $y(\frac{1}{2}) = -2$.

? Zpět

Příklad 8.1.1

Nalezněte řešení diferenciální rovnice $y' = \dfrac{xy^2 - x}{x^2y - y}$, které vyhovuje počáteční podmínce $y(\frac{1}{2}) = -2$.

Výsledek:

$y(x) = -\sqrt{5 - 4x^2}\,, \quad x \in (-1, 1)\,.$

Zpět

Příklad 8.1.1

Nalezněte řešení diferenciální rovnice $y' = \dfrac{xy^2 - x}{x^2y - y}$, které vyhovuje počáteční podmínce $y(\frac{1}{2}) = -2$.

Návod:

Použijeme metodu separace proměnných.

Zpět

Příklad 8.1.1

Nalezněte řešení diferenciální rovnice $y' = \dfrac{xy^2 - x}{x^2y - y}$, které vyhovuje počáteční podmínce $y(\frac{1}{2}) = -2$.

Řešení:

Postup rozdělíme do čtyř kroků.

1. krok: Z úpravy

$$y' = \frac{xy^2 - x}{x^2y - y} \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{x(y^2-1)}{(x^2-1)y}$$

plyne:

$$g(x) = \frac{x}{x^2-1}\,, \quad x \neq \pm 1\,,$$
$$h(y) = \frac{y^2-1}{y}\,, \quad y \neq 0\,.$$

2. krok: Nalezneme všechna konstantní řešení. Hledejme kořeny rovnice $h(y) = 0$.

$$\frac{y^2-1}{y} = 0 \quad \Rightarrow \quad y^2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad (y-1)(y+1) = 0 \quad \Rightarrow \quad y = \pm 1$$

Rovnice má konstantní řešení $y(x) = -1$ a $y(x) = 1$. Ani jedno ovšem nesplňuje počáteční podmínku $y(\frac{1}{2}) = -2$.

Další

Příklad 8.1.1

Nalezněte řešení diferenciální rovnice $y' = \dfrac{xy^2 - x}{x^2y - y}$, které vyhovuje počáteční podmínce $y(\frac{1}{2}) = -2$.

Řešení:

3. krok: Najdeme obdélník, kde je $h(y) \neq 0$ a kde leží bod $(\frac{1}{2}, -2)$. Tedy $\frac{1}{2} \in (-1, 1)$ a $-2 \in (-\infty, -1)$. Graf hledaného řešení leží v obdélníku $(-1, 1) \times (-\infty, -1)$. Hledejme toto řešení.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{x(y^2 - 1)}{(x^2 - 1)y} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{y}{y^2 - 1}\,\mathrm{d}y = \int \frac{x}{x^2 - 1}\,\mathrm{d}x \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{2y}{y^2 - 1}\,\mathrm{d}y = \int \frac{2x}{x^2 - 1}\,\mathrm{d}x \quad \Rightarrow \quad \ln|y^2 - 1| = \ln|x^2 - 1| + C$$

Spočteme hodnotu integrační konstanty:

$$\ln|(-2)^2 - 1| = \ln|(\tfrac{1}{2})^2 - 1| + C \quad \Rightarrow \quad \ln 3 - \ln(\tfrac{3}{4}) = C \quad \Rightarrow \quad C = \ln 4\,.$$

Hledejme dál funkční předpis řešení.

$$\ln|y^2 - 1| = \ln|x^2 - 1| + \ln 4 \quad \Rightarrow \quad \ln|y^2 - 1| = \ln 4|x^2 - 1| \quad \Rightarrow \quad |y^2 - 1| = 4|x^2 - 1|$$

Pro $x \in (-1, 1)$ je $x^2 - 1 < 0$ a $|x^2 - 1| = -(x^2 - 1)$. Pro $y \in (-\infty, -1)$ je $y^2 - 1 > 0$ a $|y^2 - 1| = y^2 - 1$.

$$y^2 - 1 = -4(x^2 - 1) \quad \Rightarrow \quad y^2 = 1 - 4(x^2 - 1) \quad \Rightarrow \quad |y| = \sqrt{5 - 4x^2}$$

Další

Příklad 8.1.1

Nalezněte řešení diferenciální rovnice $y' = \dfrac{xy^2 - x}{x^2y - y}$, které vyhovuje počáteční podmínce $y(\frac{1}{2}) = -2$.

Řešení:

Funkční hodnoty hledané funkce leží v intervalu $(-\infty, -1)$, tedy $y < 0$. Proto

$$y(x) = -\sqrt{5 - 4x^2}\,.$$

4. krok: Určíme definiční obor řešení. Výraz $-\sqrt{5-4x^2}$ má smysl, pokud

$$5 - 4x^2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad (\sqrt{5} - 2x)(\sqrt{5} + 2x) \geq 0\,.$$

Nerovnici řeší $x \in \langle -\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{\sqrt{5}}{2} \rangle \supset (-1, 1)$. Definičním oborem řešení bude celý interval $(-1, 1)$, pokud pro každé $x \in (-1, 1)$ je $y(x) < -1$.

$$-\sqrt{5 - 4x^2} < -1 \quad \Rightarrow \quad 5 - 4x^2 > 1 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 1 < 0$$

Poslední nerovnost je splněna právě na intervalu $(-1, 1)$. Funkce

$$y(x) = -\sqrt{5 - 4x^2}\,, \quad x \in (-1, 1)$$

je řešením rovnice $y' = \dfrac{xy^2 - x}{x^2y - y}$ vyhovujícím počáteční podmínce $y(\frac{1}{2}) = -2$.

Zpět

Příklad 8.1.1

Nalezněte řešení diferenciální rovnice $y' = \dfrac{xy^2 - x}{x^2y - y}$, které vyhovuje počáteční podmínce $y(\frac{1}{2}) = -2$.

Maple:

```
> DR:=(diff(y(x),x)=(x*(y(x))^2-x)/(x^2*y(x)-y(x)));
```

$$DR := \frac{d}{dx}\,\mathrm{y}(x) = \frac{x\,\mathrm{y}(x)^2 - x}{x^2\,\mathrm{y}(x) - \mathrm{y}(x)}$$

```
> PP:=y(0.5)=-2;
```

$$PP := \mathrm{y}(0.5) = -2$$

```
> dsolve({DR,PP},y(x));
```

$$\mathrm{y}(x) = -\sqrt{5 - 4\,x^2}$$

Zpět

Příklad 8.1.1

Nalezněte řešení diferenciální rovnice $y' = \dfrac{xy^2 - x}{x^2y - y}$, které vyhovuje počáteční podmínce $y(\frac{1}{2}) = -2$.

Mathematica:

$\mathbf{DR = y'[x]==(x(y[x])\hat{}2 - x)/(x\hat{}2 * y[x] - y[x])}$

$y'[x] == \frac{-x+xy[x]^2}{-y[x]+x^2y[x]}$

$\mathbf{PP = y[1/2] == -2}$

$y\left[\frac{1}{2}\right] == -2$

$\mathbf{DSolve[\{DR, PP\}, y[x], x]}$

Solve::ifun : Inverse functions are being
used by Solve, so some solutions may not be found;
use Reduce for complete solution information. More...

Solve::ifun : Inverse functions are being
used by Solve, so some solutions may not be found;
use Reduce for complete solution information. More...

DSolve::bvnul :
For some branches of the general solution, the given
boundary conditions lead to an empty solution. More...

$\left\{\left\{y[x] \to -\sqrt{5 - 4x^2}\right\}\right\}$

Zpět

Příklad 8.1.2

Nalezněte obecné řešení diferenciální rovnice $y' = 6x^2\sqrt{y}$.

? Zpět

Příklad 8.1.2

Nalezněte obecné řešení diferenciální rovnice $y' = 6x^2\sqrt{y}$.

Výsledek:

$y(x) = 0\,,\ \ x \in \mathbb{R}\,,$

$y_K(x) = \left(x^3 + K\right)^2,\ \ K \in \mathbb{R}\,, \quad x \in (-\sqrt[3]{K}, \infty)\,.$

Zpět

Příklad 8.1.2

Nalezněte obecné řešení diferenciální rovnice $y' = 6x^2\sqrt{y}\,.$

Návod:

Použijeme metodu separace proměnných.

Zpět

Příklad 8.1.2

Nalezněte obecné řešení diferenciální rovnice $y' = 6x^2\sqrt{y}$.

Řešení:

Postup rozdělíme do čtyř kroků.

1. krok: $g(x) = 6x^2$, $x \in \mathbb{R}$, $\quad h(y) = \sqrt{y}$, $y \in \langle 0, \infty)$.

2. krok: Kořeny rovnice $h(y) = 0$ odpovídají konstantním řešením.

$$\sqrt{y} = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0$$

Rovnice má jedno konstantní řešení $y(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$.

3. krok: V obdélníku $(-\infty, \infty) \times (0, \infty)$ je $h(y) \neq 0$. Tam leží grafy hledaných řešení. Najděme je.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 6x^2\sqrt{y} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{1}{\sqrt{y}}\,\mathrm{d}y = \int 6x^2\,\mathrm{d}x \quad \Rightarrow \quad \int y^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}y = \int 6x^2\,\mathrm{d}x \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 2y^{\frac{1}{2}} = 2x^3 + C \quad \Rightarrow \quad y^{\frac{1}{2}} = x^3 + \frac{C}{2}$$

Integrační konstantu $\frac{C}{2}$ označme K . Z poslední rovnosti vyjádříme y . Umocnění na druhou je ekvivalentní úprava pouze tehdy, když obě strany rovnice jsou kladné nebo záporné. Protože $y^{\frac{1}{2}} > 0$, musí být $x^3 + K > 0$. Tedy

$$y_K(x) = \left(x^3 + K\right)^2 , \quad x^3 + K > 0 , \quad K \in \mathbb{R} .$$

4. krok: Řešení existuje pro všechna reálná x , pro která $x^3 + K > 0$, tedy pro $x > -\sqrt[3]{K}$. Navíc musí platit nerovnost $y > 0$ a zároveň platí $\left(x^3 + K\right)^2 > 0$. Obecným řešením rovnice je množina funkcí $y_K(x) = \left(x^3 + K\right)^2$, $x \in (-\sqrt[3]{K}, \infty)$ plus konstantní řešení $y(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$.

Zpět

Příklad 8.1.2

Nalezněte obecné řešení diferenciální rovnice $y' = 6x^2\sqrt{y}$.

Maple:

```
> DR:=(diff(y(x),x)=6*x^2*sqrt(y(x)));
```

$$DR := \frac{d}{dx}\,\mathrm{y}(x) = 6\,x^2\,\sqrt{\mathrm{y}(x)}$$

```
> dsolve(DR,y(x));
```

$$\sqrt{\mathrm{y}(x)} - x^3 - \_C1 = 0$$

Zpět

Příklad 8.1.2

Nalezněte obecné řešení diferenciální rovnice $y' = 6x^2\sqrt{y}$.

Mathematica:

DR = $y'[x]$ == 6x^2Sqrt[$y[x]$]

$y'[x] == 6x^2\sqrt{y[x]}$

DSolve[DR, $y[x]$, x]

$\{\{y[x] \to \frac{1}{4}\left(4x^6 + 4x^3C[1] + C[1]^2\right)\}\}$

Simplify[%]

$\left\{\left\{y[x] \to \frac{1}{4}\left(2x^3 + C[1]\right)^2\right\}\right\}$

Lehce se můžete přesvědčit, že řešení je stejné jako v našem výpočtu.

Zpět

Příklad 8.1.3

Nalezněte řešení diferenciální rovnice $y' = \dfrac{x}{2y+1}$, které vyhovuje počáteční podmínce $y(0) = -1$.

? Zpět

Příklad 8.1.3

Nalezněte řešení diferenciální rovnice $y' = \dfrac{x}{2y+1}$, které vyhovuje počáteční podmínce $y(0) = -1$.

Výsledek:

$$y(x) = -\frac{1+\sqrt{2x^2+1}}{2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Zpět

Příklad 8.1.3

Nalezněte řešení diferenciální rovnice $y' = \dfrac{x}{2y+1}$, které vyhovuje počáteční podmínce $y(0) = -1$.

Návod:

Použijeme metodu separace proměnných.

Zpět

Příklad 8.1.3

Nalezněte řešení diferenciální rovnice $y' = \dfrac{x}{2y+1}$, které vyhovuje počáteční podmínce $y(0) = -1$.

Řešení:

Postup rozdělíme do tří kroků.

1. krok: Pravá strana rovnice je ve tvaru $g(x) \cdot h(y)$, kde

$$g(x) = x\,, \ \ x \in \mathbb{R}\,,$$
$$h(y) = \frac{1}{2y+1}\,, \ \ y \neq -\frac{1}{2}\,.$$

2. krok: Protože vždy $h(y) \neq 0$, rovnice nemá žádné konstantní řešení.

3. krok: Najdeme obdélník, kde je $h(y) \neq 0$ a kde leží bod $(0,-1)$. Protože $-1 \in (-\infty, -\frac{1}{2})$, leží graf hledaného řešení v obdélníku $(-\infty,\infty) \times (-\infty,-\frac{1}{2})$. Hledejme toto řešení.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{x}{2y+1} \quad \Rightarrow \quad \int (2y+1)\ \mathrm{d}y = \int x\ \mathrm{d}x \quad \Rightarrow \quad y^2 + y = \frac{x^2}{2} + C$$

Spočteme hodnotu integrační konstanty:

$$(-1)^2 - 1 = \frac{0^2}{2} + C \quad \Rightarrow \quad C = 0\,.$$

Další

Příklad 8.1.3

Nalezněte řešení diferenciální rovnice $y' = \dfrac{x}{2y+1}$, které vyhovuje počáteční podmínce $y(0) = -1$.

Řešení:

Hledejme dál funkční předpis řešení. Musíme vyřešit kvadratickou rovnici pro neznámou y.

$$y^2 + y - \frac{x^2}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad D = 1 - 4\left(-\frac{x^2}{2}\right) = 1 + 2x^2 \quad \Rightarrow \quad y_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+2x^2}}{2}$$

Pro všechna reálná x je diskriminat kladný ($D = 1 + 2x^2 > 0$). Otázkou zůstává, které y je řešení. Funkční hodnoty hledané funkce leží v intervalu $(-\infty, -\frac{1}{2})$, tedy chceme, aby $y_{1,2} < -\frac{1}{2}$, tj.

$$\frac{-1 \pm \sqrt{1+2x^2}}{2} < -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \pm\sqrt{1+2x^2} < 0\,.$$

Poslední nerovnost je splněna pouze pro znaménko mínus. Řešením je tedy funkce

$$y(x) = \frac{-1 - \sqrt{1+2x^2}}{2}\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Zpět

Příklad 8.1.3

Nalezněte řešení diferenciální rovnice $y' = \dfrac{x}{2y+1}$, které vyhovuje počáteční podmínce $y(0) = -1$.

Maple:

```
> DR:=(diff(y(x),x)=(x)/(2*y(x)+1));
```

$$DR := \frac{d}{dx}\,\mathrm{y}(x) = \frac{x}{2\,\mathrm{y}(x)+1}$$

```
> PP:=y(0)=-1;
```

$$PP := \mathrm{y}(0) = -1$$

```
> dsolve({DR,PP},y(x));
```

$$\mathrm{y}(x) = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{1+2\,x^2}}{2}$$

Zpět

Příklad 8.1.3

Nalezněte řešení diferenciální rovnice $y' = \dfrac{x}{2y+1}$, které vyhovuje počáteční podmínce $y(0) = -1$.

Mathematica:

$\left\{\left\{y[x] \to \frac{1}{4}\left(2x^3 + C[1]\right)^2\right\}\right\}$

$\mathbf{DR = y'[x] == x/(2y[x] + 1)}$

$y'[x] == \frac{x}{1+2y[x]}$

$\mathbf{PP = y[0] == -1}$

$y[0] == -1$

$\mathbf{DSolve[\{DR, PP\}, y[x], x]}$

DSolve::bvnul :
For some branches of the general solution, the given
boundary conditions lead to an empty solution. More...

$\left\{\left\{y[x] \to \frac{1}{2}\left(-1 - \sqrt{1 + 2x^2}\right)\right\}\right\}$

Zpět

Lineární diferenciální rovnice 1. řádu

- Příklad 8.2.1 Nalezněte řešení diferenciální rovnice $\frac{1}{2}\,y' - xy = x$, které vyhovuje počáteční podmínce $y(0) = 7$.
- Příklad 8.2.2 Nalezněte všechna řešení diferenciální rovnice $y' = \dfrac{2y + x}{x}$.
- Příklad 8.2.3 Nalezněte řešení diferenciální rovnice $(1 + x)\,y' + xy = 0$, které vyhovuje počáteční podmínce $y(0) = 10$.

Zpět

Příklad 8.2.1

Nalezněte řešení diferenciální rovnice $\frac{1}{2}\,y' - xy = x$, které vyhovuje počáteční podmínce $y(0) = 7$.

? Zpět

Příklad 8.2.1

Nalezněte řešení diferenciální rovnice $\frac{1}{2}\,y' - xy = x$, které vyhovuje počáteční podmínce $y(0) = 7$.

Výsledek:

$y(x) = 8\mathrm{e}^{\,x^2} - 1\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$

Zpět

Příklad 8.2.1

Nalezněte řešení diferenciální rovnice $\frac{1}{2}\, y' - xy = x$, které vyhovuje počáteční podmínce $y(0) = 7$.

Návod:

a) Řešení lineární diferenciální rovnice $y' + a(x)y = b(x)$ má tvar $y(x) = y_H(x) + y_P(x)$, kde $y_H(x)$ je obecné řešení přiřazené homogenní diferenciální rovnice a $y_P(x)$ je partikulární (jedno) řešení dané rovnice. Obecné řešení $y_H(x)$ hledáme metodou separace proměnných a víme, že $y_H(x) = C\varphi(x)$, kde $\varphi(x)$ je jedno řešení přiřazené homogenní rovnice. Partikulární řešení $y_P(x)$ hledáme ve tvaru $y_P(x) = C(x)\varphi(x)$ tzv. metodou variace konstanty.
b) V tomto případě lze také použít metodu separace proměnných.

Zpět

Příklad 8.2.1

Nalezněte řešení diferenciální rovnice $\frac{1}{2}\,y' - xy = x$, které vyhovuje počáteční podmínce $y(0) = 7$.

Řešení:

Postupujeme ve čtyřech krocích. Zadenou NLDR (Nehomogenní Lineární Diferenciální Rovnici) převedeme na tvar

$$y' - 2xy = 2x\,,$$

k ní přiřazená homogenní rovnice je

$$y' - 2xy = 0\,.$$

1. krok: Hledejme metodou separace proměnných $\varphi(x)$, jedno nenulové řešení přiřazené homogenní rovnice.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2xy \quad \Rightarrow \quad \int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = \int 2x\,\mathrm{d}x \quad \Rightarrow \quad \ln|y| = x^2 \quad \Rightarrow \quad |y| = \mathrm{e}^{x^2} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \text{např.} \quad y = \varphi(x) = \mathrm{e}^{x^2}\,.$$

Integrační konstantu jsme nepsali, protože hledáme jedno řešení $\varphi(x)$. Tedy

$$y_H(x) = C\mathrm{e}^{x^2}\,.$$

2. krok: Partikulární řešení dané nehomogenní lineární rovnice hledáme ve tvaru součinu

$$y_P(x) = C(x)\,\varphi(x) = C(x)\mathrm{e}^{x^2}\,,$$

kde $C(x)$ je neznámá funkce, tj. v $y_H(x)$ nahradíme konstantu C funkcí. Hledejme ji. Chceme, aby $y_P(x)$ bylo řešení NLDR. Spočteme $y'_P(x)$:

Další

Příklad 8.2.1

Nalezněte řešení diferenciální rovnice $\frac{1}{2}\,y' - xy = x$, které vyhovuje počáteční podmínce $y(0) = 7$.

Řešení:

$y'_P(x) = C'(x)\mathrm{e}^{x^2} + C(x)2x\mathrm{e}^{x^2}$ a dosadíme $y'_P(x)$ a $y_P(x)$ do rovnice.

$$y' - 2xy = 2x \quad\Rightarrow\quad C'(x)\mathrm{e}^{x^2} + C(x)2x\mathrm{e}^{x^2} - 2xC(x)\mathrm{e}^{x^2} = 2x \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad C'(x) = 2x\mathrm{e}^{-x^2} \quad\Rightarrow\quad C(x) = \int 2x\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \quad\Rightarrow\quad C(x) = -\mathrm{e}^{-x^2}$$

Integrační konstantu nepíšeme, neboť hledáme jedno řešení $y_P(x)$, tedy jednu funkci $C(x)$. Dosadíme za $C(x)$. Partikulární řešení je

$$y_P(x) = -\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{e}^{x^2} = -1\,.$$

3. krok: Výsledky kroku jedna a dva dávají obecné řešení zadané rovnice

$$y(x) = y_H(x) + y_P(x) = C\mathrm{e}^{x^2} - 1\,.$$

Pravá strana NLDR ($b(x) = 2x$) a koeficient u y ($a(x) = 2x$) jsou spojité funkce na $\mathbb{R}$. Tedy definiční obor řešení je $\mathbb{R}$.

4. krok: Ze všech nalezených řešení (obecného řešení NLDR) vybereme jedno, které splňuje počáteční podmínku $y(0) = 7$.

$$7 = C\mathrm{e}^0 - 1 \quad\Rightarrow\quad C = 8\,.$$

Řešením dané počáteční úlohy je funkce $y(x) = 8\mathrm{e}^{x^2} - 1$, $x \in \mathbb{R}$.

Zpět

Příklad 8.2.1

Nalezněte řešení diferenciální rovnice $\frac{1}{2}\,y' - xy = x$, které vyhovuje počáteční podmínce $y(0) = 7$.

Maple:

```
> DR:=(0.5*diff(y(x),x)-x*y(x)=x);
```

$$DR := 0.5\,(\tfrac{d}{dx}\,\mathrm{y}(x)) - x\,\mathrm{y}(x) = x$$

```
> PP:=y(0)=7;
```

$$PP := \mathrm{y}(0) = 7$$

```
> dsolve({DR,PP},y(x));
```

$$\mathrm{y}(x) = -1 + 8\,e^{(x^2)}$$

Zpět

Příklad 8.2.1

Nalezněte řešení diferenciální rovnice $\frac{1}{2}\,y' - xy = x$, které vyhovuje počáteční podmínce $y(0) = 7$.

Mathematica:

$\mathbf{DR = y'[x]/2 - xy[x] == x}$

$-xy[x] + \frac{y'[x]}{2} == x$

$\mathbf{PP = y[0] == 7}$

$y[0] == 7$

$\mathbf{DSolve[\{DR, PP\}, y[x], x]}$

$\left\{\left\{y[x] \to -1 + 8e^{x^2}\right\}\right\}$

Zpět

Příklad 8.2.2

Nalezněte všechna řešení diferenciální rovnice $y' = \dfrac{2y + x}{x}$.

? Zpět

Příklad 8.2.2

Nalezněte všechna řešení diferenciální rovnice $y' = \dfrac{2y+x}{x}$.

Výsledek:

$y(x) = -x + Cx^2$, $x < 0$ nebo $y(x) = -x + Cx^2$, $x > 0$, kde C je libovolná reálná konstanta.

Zpět

Příklad 8.2.2

Nalezněte všechna řešení diferenciální rovnice $y' = \dfrac{2y+x}{x}$.

Návod:

Rovnice je lineární diferenciální rovnice tvaru $y' + a(x)y = b(x)$ a její řešení hledáme podle návodu v předchozím příkladě.

Zpět

Příklad 8.2.2

Nalezněte všechna řešení diferenciální rovnice $y' = \dfrac{2y + x}{x}$.

Řešení:

Postupujeme ve třech krocích. Danou NLDR převedeme na tvar

$$y' - \frac{2}{x}y = 1\,,$$

k ní přiřazená homogenní rovnice je

$$y' - \frac{2}{x}y = 0\,.$$

1. krok: Hledejme metodou separace proměnných $\varphi(x)$, jedno nenulové řešení přiřazené homogenní rovnice.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{2}{x}\,y \quad \Rightarrow \quad \int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = \int \frac{2}{x}\,\mathrm{d}x \quad \Rightarrow \quad \ln|y| = 2\ln|x| \quad \Rightarrow \quad |y| = |x|^2$$

$$\text{např.}\quad y = \varphi(x) = x^2.$$

Integrační konstantu jsme nepsali, protože hledáme jedno řešení $\varphi(x)$. Tedy

$$y_H(x) = C\,x^2.$$

Další

Příklad 8.2.2

Nalezněte všechna řešení diferenciální rovnice $y' = \dfrac{2y + x}{x}$.

Řešení:

2. krok: Partikulární řešení dané nehomogenní lineární rovnice hledáme ve tvaru součinu

$$y_P(x) = C(x)\,\varphi(x) = C(x)x^2,$$

kde $C(x)$ je neznámá funkce, tj. v $y_H(x)$ nahradíme konstantu C funkcí. Hledejme ji. Chceme, aby $y_P(x)$ bylo řešení zadané NLDR. Spočteme $y'_P(x)$: $y'_P(x) = C'(x)x^2 + C(x)2x$ a dosadíme $y'_P(x)$ a $y_P(x)$ do rovnice.

$$y' - \frac{2}{x}y = 1 \quad \Rightarrow \quad C'(x)x^2 + C(x)2x - \frac{2}{x}\,C(x)x^2 = 1 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad C'(x) = \frac{1}{x^2} \quad \Rightarrow \quad C(x) = \int \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x \quad \Rightarrow \quad C(x) = -\frac{1}{x}$$

Integrační konstantu nepíšeme, neboť hledáme jedno řešení $y_P(x)$, tedy jednu funkci $C(x)$. Dosadíme za $C(x)$. Partikulární řešení je

$$y_P(x) = -\frac{1}{x}\,x^2 = -x\,.$$

Další

Příklad 8.2.2

Nalezněte všechna řešení diferenciální rovnice $y' = \dfrac{2y + x}{x}$.

Řešení:

3. krok: Výsledky kroku jedna a dva dávají obecné řešení zadané rovnice

$$y(x) = y_H(x) + y_P(x) = Cx^2 - x\,.$$

Pravá strana NLDR ($b(x) = 1$) a koeficient u y ($a(x) = -\frac{2}{x}$) jsou spojité funkce na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Tedy definiční obor řešení je buď interval $(-\infty, 0)$ nebo interval $(0, \infty)$.

Zpět

Příklad 8.2.2

Nalezněte všechna řešení diferenciální rovnice $y' = \dfrac{2y + x}{x}$.

Maple:

```
> DR:=(diff(y(x),x)=(2*y(x)+x)/(x));
```

$$DR := \frac{d}{dx}\,\mathrm{y}(x) = \frac{2\,\mathrm{y}(x) + x}{x}$$

```
> dsolve(DR,y(x));
```

$$\mathrm{y}(x) = -x + x^2\,\_C1$$

Zpět

Příklad 8.2.2

Nalezněte všechna řešení diferenciální rovnice $y' = \dfrac{2y + x}{x}$.

Mathematica:

DR = $\boldsymbol{y'[x] == (2y[x] + x)/x}$

$y'[x] == \frac{x+2y[x]}{x}$

DSolve[DR, $\boldsymbol{y[x], x}$]

$\{\{y[x] \to -x + x^2 C[1]\}\}$

Zpět

Příklad 8.2.3

Nalezněte řešení diferenciální rovnice $(1+x)\,y' + xy = 0$, které vyhovuje počáteční podmínce $y(0) = 10$.

? Zpět

Příklad 8.2.3

Nalezněte řešení diferenciální rovnice $(1+x)\,y' + xy = 0$, které vyhovuje počáteční podmínce $y(0) = 10$.

Výsledek:

$y(x) = 10(x+1)\mathrm{e}^{-x}\,, \quad x > -1\,.$

Zpět

Příklad 8.2.3

Nalezněte řešení diferenciální rovnice $(1+x)\,y' + xy = 0$, které vyhovuje počáteční podmínce $y(0) = 10$.

Návod:

Řešení homogenní lineární diferenciální rovnice $a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$, kde $a_1(x) \neq 0$, má tvar $y(x) = C\varphi(x)$, kde $\varphi(x)$ je jedno řešení dané homogenní rovnice. Funkci $\varphi(x)$ hledáme metodou separace proměnných.

Zpět

Příklad 8.2.3

Nalezněte řešení diferenciální rovnice $(1+x)\,y' + xy = 0$, které vyhovuje počáteční podmínce $y(0) = 10$.

Řešení:

Postupujeme ve dvou krocích.

1. krok: Hledejme metodou separace proměnných $\varphi(x)$, jedno nenulové řešení dané homogenní rovnice.

$$y' = -\frac{xy}{1+x} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{xy}{x+1} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = -\int \frac{x}{x+1}\,\mathrm{d}x \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = -\int \left(1 - \frac{1}{x+1}\right)\,\mathrm{d}x \quad \Rightarrow \quad \ln|y| = -x + \ln|x+1| \quad \Rightarrow$$

$$|y| = \mathrm{e}^{-x}|x+1| \quad \Rightarrow \quad \text{např.} \quad y = \varphi(x) = \mathrm{e}^{-x}(x+1).$$

Integrační konstantu jsme nepsali, protože hledáme jedno řešení $\varphi(x)$. Tedy

$$y(x) = C(x+1)\mathrm{e}^{-x}.$$

Koeficient u y' ($a_1(x) = x+1$) a koeficient u y ($a_0(x) = x$) jsou spojité funkce na $\mathbb{R}$, ale $a_1(x) \neq 0$ pro $x \neq -1$. Tedy definiční obor řešení je interval $(-\infty, -1)$ nebo interval $(-1, \infty)$.

2. krok: Ze všech nalezených řešení vybereme jedno, které splňuje počáteční podmínku $y(0) = 10$.

$$10 = C(0+1)\mathrm{e}^{0} \quad \Rightarrow \quad C = 10.$$

Řešením dané počáteční úlohy je funkce $y(x) = 10(x+1)\mathrm{e}^{-x}$, $x \in (-1, \infty)$, protože $0 \in (-1, \infty)$.

Příklad 8.2.3

Nalezněte řešení diferenciální rovnice $(1+x)\,y' + xy = 0$, které vyhovuje počáteční podmínce $y(0) = 10$.

Maple:

```
> DR:=((x+1)*diff(y(x),x)+x*y(x)=0);
```

$$DR := (x+1)\left(\frac{d}{dx}\,\mathrm{y}(x)\right) + x\,\mathrm{y}(x) = 0$$

```
> PP:=y(0)=10;
```

$$PP := \mathrm{y}(0) = 10$$

```
> dsolve({DR,PP},y(x));
```

$$\mathrm{y}(x) = 10\,e^{(-x)}\,(x+1)$$

Zpět

Příklad 8.2.3

Nalezněte řešení diferenciální rovnice $(1+x)\,y' + xy = 0$, které vyhovuje počáteční podmínce $y(0) = 10$.

Mathematica:

$\mathbf{DR = (1+\boldsymbol{x})\boldsymbol{y}'[\boldsymbol{x}] + \boldsymbol{xy}[\boldsymbol{x}] == 0}$

$xy[x] + (1+x)y'[x] == 0$

$\mathbf{PP = \boldsymbol{y}[0] == 10}$

$y[0] == 10$

$\mathbf{DSolve[\{DR, PP\}, \boldsymbol{y}[\boldsymbol{x}], \boldsymbol{x}]}$

$\{\{y[x] \to 10e^{-x}(1+x)\}\}$

Zpět

Řešení diferenciálních rovnic 1. řádu

- Příklad 8.3.1 Je funkce $y(x) = 2x + 3$, $x \in \mathbb{R}$ řešením diferenciální rovnice $(y')^2 + xy' = y$.

- Příklad 8.3.2 Je funkce $y(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$, $x > 0$ řešením diferenciální rovnice $y \ln y + xy' = 0$.

- Příklad 8.3.3 Je funkce $y(x) = \frac{\sqrt{3x^3+3}}{3}$, $x \in \mathbb{R}$ řešením diferenciální rovnice $y' = \dfrac{x^2}{y}$, které vyhovuje počáteční podmínce $y(0) = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Zpět

Příklad 8.3.1

Je funkce $y(x) = 2x + 3,\ x \in \mathbb{R}$ řešením diferenciální rovnice $(y')^2 + xy' = y$.

? Zpět

Příklad 8.3.1

Je funkce $y(x) = 2x + 3,\ x \in \mathbb{R}$ řešením diferenciální rovnice $(y')^2 + xy' = y$.

Výsledek:

Není řešením.

Zpět

Příklad 8.3.1

Je funkce $y(x) = 2x + 3,\ x \in \mathbb{R}$ řešením diferenciální rovnice $(y')^2 + xy' = y$.

Návod:

Vypočteme $y'(x)$ a do diferenciální rovnice dosadíme za $y'(x)$ a $y(x)$. Levá strana rovnice se musí rovnat pravé pro všechna reálná x.

Zpět

Příklad 8.3.1

Je funkce $y(x) = 2x + 3$, $x \in \mathbb{R}$ řešením diferenciální rovnice $(y')^2 + xy' = y$.

Řešení:

Spočteme: $y'(x) = 2$. Levá strava rovnice je

$$L := (2)^2 + x \cdot 2 = 4 + 2x$$

a pravá strana je

$$P := 2x + 3.$$

Tedy $L \neq P$ pro všechna reálná x, funkce $y(x) = 2x + 3$ není řešením dané rovnice.

Zpět

Příklad 8.3.1

Je funkce $y(x) = 2x + 3,\ x \in \mathbb{R}$ řešením diferenciální rovnice $(y')^2 + xy' = y$.

Maple:

```
> res:=y(x)=2*x+3;
```

$$res := \mathrm{y}(x) = 2\,x + 3$$

```
> DR:=((diff(y(x),x))^2+x*diff(y(x),x)=y(x));
```

$$DR := \left(\tfrac{d}{dx}\,\mathrm{y}(x)\right)^2 + x\left(\tfrac{d}{dx}\,\mathrm{y}(x)\right) = \mathrm{y}(x)$$

```
> odetest(res,DR);
```

$$1$$

Nenulový výsledek znamená, že testovaná funkce není řešením dané diferenciální rovnice.

Zpět

Příklad 8.3.1

Je funkce $y(x) = 2x + 3$, $x \in \mathbb{R}$ řešením diferenciální rovnice $(y')^2 + xy' = y$.

Mathematica:

$\mathbf{DR = (\boldsymbol{D}[\boldsymbol{y}[\boldsymbol{x}], \boldsymbol{x}])\hat{}2 + \boldsymbol{x}\ \boldsymbol{D}[\boldsymbol{y}[\boldsymbol{x}], \boldsymbol{x}] == \boldsymbol{y}[\boldsymbol{x}]}$

$xy'[x] + y'[x]^2 == y[x]$

$\mathbf{res[x\_] = 2\boldsymbol{x} + 3}$

$3 + 2x$

$\mathbf{DR/.\boldsymbol{y} \rightarrow res}$

$4 + 2x == 3 + 2x$

$L \neq P$, funkce není řešením diferenciální rovnice.

Zpět

Příklad 8.3.2

Je funkce $y(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$, $x > 0$ řešením diferenciální rovnice $y \ln y + xy' = 0$.

? Zpět

Příklad 8.3.2

Je funkce $y(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$, $x > 0$ řešením diferenciální rovnice $y \ln y + xy' = 0$.

Výsledek:

Je řešením.

Zpět

Příklad 8.3.2

Je funkce $y(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$, $x > 0$ řešením diferenciální rovnice $y \ln y + xy' = 0$.

Návod:

Vypočteme $y'(x)$ a do diferenciální rovnice dosaíme za $y'(x)$ a $y(x)$. Levá strana rovnice se musí rovnat nule pro $x > 0$.

Zpět

Příklad 8.3.2

Je funkce $y(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$, $x > 0$ řešením diferenciální rovnice $y \ln y + xy' = 0$.

Řešení:

Spočteme: $y'(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \left(-\frac{1}{x^2}\right)$. Pravá strana rovnice je nula a levá strava rovnice je

$$L := \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \ln \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} + x\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \frac{1}{x} - \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \frac{1}{x} = 0$$

pro všechna reálná $x > 0$, funkce $y(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ je řešením dané diferenciální rovnice.

Zpět

Příklad 8.3.2

Je funkce $y(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$, $x > 0$ řešením diferenciální rovnice $y \ln y + xy' = 0$.

Maple:

```
> res:=y(x)=exp(1/x);
```

$$res := \mathrm{y}(x) = e^{\left(\frac{1}{x}\right)}$$

```
> DR:=(y(x)*ln(y(x))+x*diff(y(x),x)=0);
```

$$DR := \mathrm{y}(x) \ln(\mathrm{y}(x)) + x\left(\frac{d}{dx}\,\mathrm{y}(x)\right) = 0$$

```
> odetest(res,DR);
```

$$e^{\left(\frac{1}{x}\right)} \ln\left(e^{\left(\frac{1}{x}\right)}\right) - \frac{e^{\left(\frac{1}{x}\right)}}{x}$$

```
> simplify(%) assuming x::real;
```

$$0$$

Výsledek 0 znamená, že testovaná funkce je řešením dané diferenciální rovnice.

Zpět

Příklad 8.3.2

Je funkce $y(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$, $x > 0$ řešením diferenciální rovnice $y \ln y + xy' = 0$.

Mathematica:

DR = y[x]Log[y[x]] + x D[y[x], x] == 0

$\mathrm{Log}[y[x]]y[x] + xy'[x] == 0$

res[x_] = Exp[1/x]

$e^{\frac{1}{x}}$

Assuming[x > 0, Simplify[DR/.y → res]]

True

Funkce je řešením diferenciální rovnice.

Zpět

Příklad 8.3.3

Je funkce $y(x) = \frac{\sqrt{3x^3+3}}{3}$, $x \in \mathbb{R}$ řešením diferenciální rovnice $y' = \dfrac{x^2}{y}$, které vyhovuje počáteční podmínce $y(0) = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

? Zpět

Příklad 8.3.3

Je funkce $y(x) = \frac{\sqrt{3x^3+3}}{3}$, $x \in \mathbb{R}$ řešením diferenciální rovnice $y' = \dfrac{x^2}{y}$, které vyhovuje počáteční podmínce $y(0) = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Výsledek:

Není řešením.

Zpět

Příklad 8.3.3

Je funkce $y(x) = \frac{\sqrt{3x^3+3}}{3}$, $x \in \mathbb{R}$ řešením diferenciální rovnice $y' = \dfrac{x^2}{y}$, které vyhovuje počáteční podmínce $y(0) = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Návod:

Vypočťeme $y'(x)$ a do diferenciální rovnice dosadíme za $y'(x)$ a $y(x)$. Levá strana rovnice se musí rovnat pravé pro všechna reálná x a musí být splněna počáteční podmínka.

Zpět

Příklad 8.3.3

Je funkce $y(x) = \frac{\sqrt{3x^3+3}}{3}$, $x \in \mathbb{R}$ řešením diferenciální rovnice $y' = \dfrac{x^2}{y}$, které vyhovuje počáteční podmínce $y(0) = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Řešení:

Ověříme, zda je splněna počáteční podmínka.

$$y(0) = \frac{\sqrt{3 \cdot 0^3 + 3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Dále zkoumáme, zda je daná funkce řešením příslušné rovnice. Spočteme:

$$y'(x) = \frac{1}{3} \frac{9x^2}{2\sqrt{3x^3+3}} = \frac{3x^2}{2\sqrt{3x^3+3}}.$$

Levá strava rovnice je

$$L := \frac{3x^2}{2\sqrt{3x^3+3}}$$

a pravá strana je

$$P := \frac{x^2}{\frac{\sqrt{3x^3+3}}{3}} = \frac{3x^2}{\sqrt{3x^3+3}}.$$

Tedy $L \neq P$ pro všechna reálná x, funkce $y(x) = \frac{\sqrt{3x^3+3}}{3}$ není řešením dané rovnice.

Zpět

Příklad 8.3.3

Je funkce $y(x) = \frac{\sqrt{3x^3+3}}{3}$, $x \in \mathbb{R}$ řešením diferenciální rovnice $y' = \dfrac{x^2}{y}$, které vyhovuje počáteční podmínce $y(0) = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Maple:

```
> f:=x->sqrt(3)/3*(sqrt(x^3+1));
```

$$f := x \to \frac{1}{3}\sqrt{3}\sqrt{x^3+1}$$

```
> f(0);
```

$$\frac{\sqrt{3}}{3}$$

```
> res:=y(x)=sqrt(3)/3*(sqrt(x^3+1));
```

$$res := \mathrm{y}(x) = \frac{\sqrt{3}\sqrt{x^3+1}}{3}$$

```
> DR:=(diff(y(x),x)=(x^2)/y(x));
```

$$DR := \tfrac{d}{dx}\,\mathrm{y}(x) = \frac{x^2}{\mathrm{y}(x)}$$

```
> odetest(res,DR);
```

$$-\frac{3\,x^2}{2\sqrt{3\,x^3+3}}$$

Zpět

Příklad 8.3.3

Je funkce $y(x) = \frac{\sqrt{3x^3+3}}{3}$, $x \in \mathbb{R}$ řešením diferenciální rovnice $y' = \dfrac{x^2}{y}$, které vyhovuje počáteční podmínce $y(0) = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Mathematica:

$\mathbf{DR = \mathit{D}[\mathit{y}[\mathit{x}], \mathit{x}]==\mathit{x}\hat{}2/\mathit{y}[\mathit{x}]}$

$y'[x] == \frac{x^2}{y[x]}$

res[x_] = Sqrt[3*x*^3 + 3]/3

$\frac{1}{3}\sqrt{3+3x^3}$

res[Sqrt[3]/3]

$\frac{1}{3}\sqrt{3+\frac{1}{\sqrt{3}}}$

$\mathbf{DR/.\mathit{y} \rightarrow res}$

$\frac{3x^2}{2\sqrt{3+3x^3}} == \frac{3x^2}{\sqrt{3+3x^3}}$

$L \neq P$, funkce není řešením diferenciálním rovnice.

Zpět