Vektory a matice

- Lineární (ne-)závislost vektorů z $\mathbb{R}^n$
- Matice a operace s nimi
- Hodnost matice
- Determinanty

Lineární (ne-)závislost vektorů z $\mathbb{R}^n$

- Příklad 9.1.1 Rozhodněte, zda jsou uvedené vektory lineárně závislé nebo nezávislé: $\vec{b}_1 = (1, 2, 3)\,,\ \vec{b}_2 = (2, -1, 4)\,,\ \vec{b}_3 = (3, -4, 6)\ \in \mathbb{R}^3\,.$

- Příklad 9.1.2 Z dané skupiny vektorů vyberte maximální počet lineárně nezávislých vektorů a ostatní vyjádřete jako jejich lineární kombinaci: $\vec{v}_1 = (3, 4, 5)\,, \vec{v}_2 = (2, 3, 3)\,, \vec{v}_3 = (3, 1, 8)\,.$

Zpět

Příklad 9.1.1

Rozhodněte, zda jsou uvedené vektory lineárně závislé nebo nezávislé:
$\vec{b}_1 = (1, 2, 3)\,,\ \vec{b}_2 = (2, -1, 4)\,,\ \vec{b}_3 = (3, -4, 6)\ \in \mathbb{R}^3\,.$

? Zpět

Příklad 9.1.1

Rozhodněte, zda jsou uvedené vektory lineárně závislé nebo nezávislé:
$\vec{b}_1 = (1, 2, 3)$, $\vec{b}_2 = (2, -1, 4)$, $\vec{b}_3 = (3, -4, 6)$ $\in \mathbb{R}^3$.

Výsledek:

Vektory $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$, $\vec{b}_3$ jsou lineárně nezávislé.

Zpět

Příklad 9.1.1

Rozhodněte, zda jsou uvedené vektory lineárně závislé nebo nezávislé:
$\vec{b}_1 = (1, 2, 3)$, $\vec{b}_2 = (2, -1, 4)$, $\vec{b}_3 = (3, -4, 6)$ $\in \mathbb{R}^3$.

Návod:

Hledáme podmínky, za jakých je lineární kombinace daných vektorů rovna nulovému vektoru.

Zpět

Příklad 9.1.1

Rozhodněte, zda jsou uvedené vektory lineárně závislé nebo nezávislé:
$\vec{b}_1 = (1, 2, 3)$, $\vec{b}_2 = (2, -1, 4)$, $\vec{b}_3 = (3, -4, 6)$ $\in \mathbb{R}^3$.

Řešení:

Hledejme koeficienty x_1, x_2, $x_3 \in \mathbb{R}$ tak, aby platilo $x_1\vec{b}_1 + x_2\vec{b}_2 + x_3\vec{b}_3 = \vec{o}$, tj. (rozepsáno po složkách)

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & - & x_2 & - & 4x_3 & = & 0 \\ 3x_1 & + & 4x_2 & + & 6x_3 & = & 0\,. \end{array}$$

Vynásobením první rovnice (-2) a jejím přičtením k rovnici druhé dostaneme rovnici $x_2 = -2x_3$. Dosadíme-li tuto podmínku do první a třetí rovnice, obdržíme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých

$$\begin{array}{rcrcl} x_1 & - & x_3 & = & 0 \\ 3x_1 & - & 2x_3 & = & 0\,, \end{array}$$

jejímž jediným řešením je $x_1 = 0$, $x_3 = 0$ (a tudíž i $x_2 = 0$). Vektory $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$, $\vec{b}_3$ jsou lineárně nezávislé.

Zpět

Příklad 9.1.1

Rozhodněte, zda jsou uvedené vektory lineárně závislé nebo nezávislé:
$\vec{b}_1 = (1, 2, 3)$, $\vec{b}_2 = (2, -1, 4)$, $\vec{b}_3 = (3, -4, 6)$ $\in \mathbb{R}^3$.

Maple:

```
> with(linalg):
> b1:=vector([1,2,3]);b2:=vector([2,-1,4]);b3:=vector([3,-4,6]);
```

$$b1 := [1,\ 2,\ 3]$$

$$b2 := [2,\ -1,\ 4]$$

$$b3 := [3,\ -4,\ 6]$$

```
> lv:=[b1,b2,b3];
```

$$lv := [b1,\ b2,\ b3]$$

```
> A:=matrix(3,3,lv);
```

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & -4 & 6 \end{bmatrix}$$

```
> rank(A);
```

$$3$$

Zde vidíme, že hodnost matice, jejíž řádky odpovídají zadaným vektorům, je rovna 3. Z toho plyne, že vektory b1, b2,b3 jsou lineárně nezávislé.

Zpět

Příklad 9.1.1

Rozhodněte, zda jsou uvedené vektory lineárně závislé nebo nezávislé:
$\vec{b}_1 = (1, 2, 3)$, $\vec{b}_2 = (2, -1, 4)$, $\vec{b}_3 = (3, -4, 6)$ $\in \mathbb{R}^3$.

Mathematica:

b1 = {1, 2, 3}; b2 = {2, −1, 4}; b3 = {3, −4, 6};

***A* = {b1, b2, b3};**

MatrixForm[*A*]

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & -4 & 6 \end{pmatrix}$$

MatrixRank[*A*]

3

Zde vidíme, že hodnost matice, jejíž řádky odpovídají zadaným vektorům, je rovna 3. Z toho plyne, že vektory b1, b2,b3 jsou lineárně nezávislé.

Zpět

Příklad 9.1.2

Z dané skupiny vektorů vyberte maximální počet lineárně nezávislých vektorů a ostatní vyjádřete jako jejich lineární kombinaci: $\vec{v}_1 = (3, 4, 5)$, $\vec{v}_2 = (2, 3, 3)$, $\vec{v}_3 = (3, 1, 8)$.

? Zpět

Příklad 9.1.2

Z dané skupiny vektorů vyberte maximální počet lineárně nezávislých vektorů a ostatní vyjádřete jako jejich lineární kombinaci: $\vec{v}_1 = (3, 4, 5)$, $\vec{v}_2 = (2, 3, 3)$, $\vec{v}_3 = (3, 1, 8)$.

Výsledek:

Např. $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$; $\quad \vec{v}_3 = 7\vec{v}_1 - 9\vec{v}_2$.

Zpět

Příklad 9.1.2

Z dané skupiny vektorů vyberte maximální počet lineárně nezávislých vektorů a ostatní vyjádřete jako jejich lineární kombinaci: $\vec{v}_1 = (3, 4, 5)$, $\vec{v}_2 = (2, 3, 3)$, $\vec{v}_3 = (3, 1, 8)$.

Návod:

Lineární závislost zjistíme např. pomocí hodnosti matice, kterou získáme tak, že vektory zapíšeme coby její řádky pod sebe. Vyjádření vektoru jako lineární kombinace ostatních vektorů je problémem řešení nehomogenní soustavy lineárních rovnic.

Zpět

Příklad 9.1.2

Z dané skupiny vektorů vyberte maximální počet lineárně nezávislých vektorů a ostatní vyjádřete jako jejich lineární kombinaci: $\vec{v}_1 = (3,4,5)$, $\vec{v}_2 = (2,3,3)$, $\vec{v}_3 = (3,1,8)$.

Řešení:

Zapišme si všechny vektory do řádků matice $\mathbf{A}$, kterou následně převedeme na HT-tvar:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} .$$

Je zřejmé, že $h(\mathbf{A}) = 2$, a tudíž maximální počet lineárně nezávislých vektorů je 2. Označme tyto vektory $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ (vektory jsou LN)) a vektor $\vec{v}_3$ vyjádřeme jako jejich lineární kombinaci ve tvaru $\vec{v}_3 = \alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2$, tj. (rozepsáno po složkách) hledejme řešení soustavy

$$3 = 3\alpha + 2\beta\,, \quad 1 = 4\alpha + 3\beta\,, \quad 8 = 5\alpha + 3\beta\,.$$

Dosazením 3β z poslední rovnice do druhé dostaneme

$$1 = 4\alpha + (8 - 5\alpha) \quad \Rightarrow \quad \alpha = 7\,.$$

Snadno už dopočítáme z kterékoli z rovnic $\beta = -9$, a tedy $\vec{v}_3 = 7\vec{v}_1 - 9\vec{v}_2$.

Zpět

Příklad 9.1.2

Z dané skupiny vektorů vyberte maximální počet lineárně nezávislých vektorů a ostatní vyjádřete jako jejich lineární kombinaci: $\vec{v}_1 = (3,4,5)\,, \vec{v}_2 = (2,3,3)\,, \vec{v}_3 = (3,1,8)\,.$

Maple:

```
> with(linalg):
> v1:=vector([3,4,5]);v2:=vector([2,3,3]);v3:=vector([3,1,8]);
```

$$v1 := [3,\ 4,\ 5]$$

$$v2 := [2,\ 3,\ 3]$$

$$v3 := [3,\ 1,\ 8]$$

```
> lv:=[v1,v2,v3]:A:=matrix(3,3,lv);
```

$$A := \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

```
> rank(A);
```

$$2$$

Zde vidíme, že hodnost matice, jejíž řádky odpovídají zadaným vektorům, je rovna 2. Z toho plyne, že vektory v_1, v_2, v_3 jsou lineárně závislé. Dále je patrné, že např. dvojice v_1, v_2 je dvojicí lin. nezávislých vektorů (jeden z nich není násobkem druhého); chceme-li vektor v_3 zapsat jako lin. kombinaci $\alpha\, v_1 + \beta\, v_2$, při hledání koeficientů α a β vlastně řešíme nehomogenní soustavu lin. rovnic, jejíž rozšířenou maticí je A^{T}:

Další

Příklad 9.1.2

Z dané skupiny vektorů vyberte maximální počet lineárně nezávislých vektorů a ostatní vyjádřete jako jejich lineární kombinaci: $\vec{v}_1 = (3,4,5)\,, \vec{v}_2 = (2,3,3)\,, \vec{v}_3 = (3,1,8)\,.$

Maple:

```
> Ai:=transpose(A);
```

$$\mathrm{Ai} := \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 8 \end{bmatrix}$$

```
> redAi:=gausselim(Ai);
```

$$redAi := \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 0 & \frac{1}{3} & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> koef:=backsub(redAi):alpha:=koef[1];beta:=koef[2];
```

$$\alpha := 7$$

$$\beta := -9$$

Našli jsme hledané koeficienty: vektor v_3 je lineární kombinací vektorů v_1, v_2:
$v_3 = 7\,v_1 - 9\,v_2$.

Zpět

Příklad 9.1.2

Z dané skupiny vektorů vyberte maximální počet lineárně nezávislých vektorů a ostatní vyjádřete jako jejich lineární kombinaci: $\vec{v}_1 = (3,4,5)$, $\vec{v}_2 = (2,3,3)$, $\vec{v}_3 = (3,1,8)$.

Mathematica:

$\mathbf{v1 = \{3,4,5\}; v2 = \{2,3,3\}; v3 = \{3,1,8\};}$

$\boldsymbol{A} = \mathbf{\{v1, v2, v3\};}$

$\mathbf{MatrixForm}[\boldsymbol{A}]$

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

$\mathbf{MatrixRank}[\boldsymbol{A}]$

2

$\boldsymbol{B} = \mathbf{RowReduce[Transpose[}\boldsymbol{A}\mathbf{]];}$

$\mathbf{MatrixForm}[\boldsymbol{B}]$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & -9 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{B}\mathbf{[[1,3]]}$

7

$\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{B}\mathbf{[[2,3]]}$

-9

Zpět

Matice a operace s nimi

- Příklad 9.2.1 Vypočtěte součin matic **AB** (případně i **BA**), jsou-li dány matice **A**, **B**:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Zpět

Příklad 9.2.1

Vypočtěte součin matic $\mathbf{AB}$ (případně i $\mathbf{BA}$), jsou-li dány matice $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

?

Zpět

Příklad 9.2.1

Vypočtěte součin matic **AB** (případně i **BA**), jsou-li dány matice **A**, **B**:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Výsledek:

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 5 & 10 & 8 \\ 0 & 0 & -2 \\ 10 & 20 & -10 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{BA} = \begin{bmatrix} -6 & 9 & 12 \\ 6 & 0 & 10 \\ 5 & -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Zpět

Příklad 9.2.1

Vypočtěte součin matic $\mathbf{AB}$ (případně i $\mathbf{BA}$), jsou-li dány matice $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Návod:

Podle pravidla pro násobení matic má výsledný součin $\mathbf{AB}$ na místě prvku ij hodnotu skalárního součinu $i-$tého řádku matice $\mathbf{A}$ s $j-$tým sloupcem matice $\mathbf{B}$. Pečlivě musíme dbát na pořadí, v němž matice násobíme.

Zpět

Příklad 9.2.1

Vypočtěte součin matic **AB** (případně i **BA**), jsou-li dány matice **A**, **B**:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Řešení:

Matice **A** i **B** jsou typu 3×3, proto mají oba součiny smysl. Výsledkem násobení bude v obou případech matice typu 3×3:

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0+4+1 & 0+8+2 & 9+0+(-1) \\ 0-2+2 & 0-4+4 & 0+0-2 \\ 0+6+4 & 0+12+8 & -6+0-4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{BA} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0+0-6 & 0+0+9 & 0+0+12 \\ 6+0+0 & 4-4+0 & 2+8+0 \\ 3+0+2 & 2-2-3 & 1+4-4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 5 & 10 & 8 \\ 0 & 0 & -2 \\ 10 & 20 & -10 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{BA} = \begin{bmatrix} -6 & 9 & 12 \\ 6 & 0 & 10 \\ 5 & -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Zpět

Příklad 9.2.1

Vypočtěte součin matic **AB** (případně i **BA**), jsou-li dány matice **A**, **B**:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Maple:

```
> with(linalg):
> A:=matrix(3,3,[3,2,1,0,-1,2,-2,3,4]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

```
> B:=matrix(3,3,[0,0,3,2,4,0,1,2,-1]);
```

$$B := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

```
> AB:=evalm(A&*B);
```

$$AB := \begin{bmatrix} 5 & 10 & 8 \\ 0 & 0 & -2 \\ 10 & 20 & -10 \end{bmatrix}$$

Další

Příklad 9.2.1

Vypočtěte součin matic **AB** (případně i **BA**), jsou-li dány matice **A**, **B**:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Maple:

```
> BA:=evalm(B&*A);
```

$$BA := \begin{bmatrix} -6 & 9 & 12 \\ 6 & 0 & 10 \\ 5 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Zpět

Příklad 9.2.1

Vypočtěte součin matic **AB** (případně i **BA**), jsou-li dány matice **A**, **B**:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Mathematica:

$\boldsymbol{A = \{\{3,2,1\},\{0,-1,2\},\{-2,3,4\}\};B = \{\{0,0,3\},\{2,4,0\},\{1,2,-1\}\};}$

MatrixForm[*A*]

$$\left(\begin{array}{ccc} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 4 \end{array}\right)$$

MatrixForm[*B*]

$$\left(\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

Další

Příklad 9.2.1

Vypočtěte součin matic **AB** (případně i **BA**), jsou-li dány matice **A**, **B**:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Mathematica:

MatrixForm[*A*.*B*]

$$\begin{pmatrix} 5 & 10 & 8 \\ 0 & 0 & -2 \\ 10 & 20 & -10 \end{pmatrix}$$

MatrixForm[*B*.*A*]

$$\begin{pmatrix} -6 & 9 & 12 \\ 6 & 0 & 10 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Zpět

Hodnost matice

- Příklad 9.3.1 Určete hodnost matice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix}.$$

- Příklad 9.3.2 Určete hodnost matice v závislosti na parametru $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 2 & 5-\lambda \end{bmatrix}.$$

Zpět

Příklad 9.3.1

Určete hodnost matice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix}.$$

? Zpět

Příklad 9.3.1

Určete hodnost matice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix} .$$

Výsledek:

$h(\mathbf{A}) = 3\,.$

Zpět

Příklad 9.3.1

Určete hodnost matice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix}.$$

Návod:

Gaussovou eliminací převedeme matici $\mathbf{A}$ na HT-matici, jejíž hodnost je určena počtem jejích řádků.

Zpět

Příklad 9.3.1

Určete hodnost matice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix}.$$

Řešení:

Gaussovou eliminací převedeme matici **A** na HT-matici:

$$\mathbf{A} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix}.$$

Při výpočtu jsme provedli tyto ekvivalentní úpravy: první a druhý řádek jsme zaměnili, od druhého řádku jsme odečetli dvojnásobek prvního, od třetího řádku jsme odečetli trojnásobek prvního, čtvrtý řádek jsme nechali beze změn. V dalším kroku jsme druhý řádek vydělili třemi a jeho dvojnásobek odečetli od řádku třetího. Čtvrtý řádek jsme vynechali, neboť byl shodný s řádkem třetím. Poslední matice je HT-matice se 3 řádky, její hodnost je tedy rovna třem. Odtud plyne $h(\mathbf{A}) = 3$.

Zpět

Příklad 9.3.1

Určete hodnost matice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix}.$$

Maple:

```
> with(linalg):
> A:=matrix(4,3,[2,3,4,1,0,2,3,2,-1,0,0,-7]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix}$$

```
> gausselim(A);
```

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & \dfrac{-3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> rank(A);
```

$$3$$

Zpět

Příklad 9.3.1

Určete hodnost matice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix}.$$

Mathematica:

$\boldsymbol{A = \{\{2,3,4\},\{1,0,2\},\{3,2,-1\},\{0,0,-7\}\};}$

MatrixForm[*A*]

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}$$

MatrixRank[*A*]

3

Zpět

Příklad 9.3.2

Určete hodnost matice v závislosti na parametru $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 2 & 5-\lambda \end{bmatrix}.$$

? Zpět

Příklad 9.3.2

Určete hodnost matice v závislosti na parametru $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 2 & 5-\lambda \end{bmatrix}.$$

Výsledek:

$h(\mathbf{A}) = 2$ pro $\lambda \neq 3$, $\lambda \neq 4$; $\quad h(\mathbf{A}) = 1$ pro $\lambda = 3$ nebo $\lambda = 4$.

Zpět

Příklad 9.3.2

Určete hodnost matice v závislosti na parametru $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 2 & 5-\lambda \end{bmatrix}.$$

Návod:

Využijeme definice regulární/singulární čtvercové matice.

Zpět

Příklad 9.3.2

Určete hodnost matice v závislosti na parametru $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 2 & 5-\lambda \end{bmatrix}.$$

Řešení:

Ze zadání je zjevné, že uvedená matice bude mít vždy hodnost minimálně jedna, neboť oba řádky zároveň nelze ekvivalentními řádkovými úpravami převést na řádky nulové. Vypočítáme dále determinant:

$$\det \mathbf{A} = \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 2 & 5-\lambda \end{bmatrix} = (2-\lambda)(5-\lambda) + 2 = \lambda^2 - 7\lambda + 12\,.$$

Matice $\mathbf{A}$ bude regulární, pokud $\det \mathbf{A} \neq 0$, tj. $\lambda^2 - 7\lambda + 12 = (\lambda-3)(\lambda-4) \neq 0$. V případě $\lambda \neq 3$, $\lambda \neq 4$ tak bude $h(\mathbf{A}) = 2$. V případech, kdy $\lambda = 3$ nebo $\lambda = 4$, bude matice singulární, a její hodnost bude $h(\mathbf{A}) = 1$.

Zpět

Příklad 9.3.2

Určete hodnost matice v závislosti na parametru $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 2 & 5-\lambda \end{bmatrix}.$$

Maple:

```
> with(linalg):A:=matrix(2,2,[2-lambda,-1,2,5-lambda]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 2 & 5-\lambda \end{bmatrix}$$

Ukážeme si dva různé způsoby výpočtu.
1. V prvním případě matici nejprve převedeme na odstupňovaný tvar:

```
> A:=gausselim(A);
```

$$A := \begin{bmatrix} 2 & 5-\lambda \\ 0 & -6+\frac{7}{2}\lambda-\frac{1}{2}\lambda^2 \end{bmatrix}$$

Tato matice bude mít druhý řádek nulový, a tedy hodnost jedna, pokud bude výraz $-6+7/2\,\lambda-1/2\,\lambda\,\lambda$ roven nule:

```
> solve(-6+7/2*lambda-1/2*lambda*lambda=0,lambda);
```

$$3,\ 4$$

V případě, že $\lambda = 3$ nebo $\lambda = 4$, tedy platí $h(A) = 1$, což můžeme snadno ověřit:

```
> lambda:=3:A:=matrix(2,2,[2-lambda,-1,2,5-lambda]):rank(A);
```

$$1$$

Další

Příklad 9.3.2

Určete hodnost matice v závislosti na parametru $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 2 & 5-\lambda \end{bmatrix}.$$

Maple:

```
> unassign('lambda'):lambda:=4:A:=matrix(2,2,[2-lambda,-1,2,5-lambda]):
rank(A);
```

$$1$$

```
> unassign('lambda');
```

V ostatních případech bude platit $h(A) = 2$.
2. Druhý způsob výpočtu využívá determinantu matice A:

```
> det(A);
```

$$12 - 7\lambda + \lambda^2$$

Je-li $det A = 0$, pak je matice A singulární, a v tomto případě má hodnost jedna.

```
> solve(det(A)=0,lambda);
```

$$4,\ 3$$

Obdrželi jsme stejný výsledek jako v předchozím případě. Pro λ různé od 3,4 je matice A regulární a má hodnost 2.

Zpět

Příklad 9.3.2

Určete hodnost matice v závislosti na parametru $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 2 & 5-\lambda \end{bmatrix}.$$

Mathematica:

$\boldsymbol{A = \{\{2-\lambda, -1\}, \{2, 5-\lambda\}\}}$

$\{\{2-\lambda, -1\}, \{2, 5-\lambda\}\}$

Solve[Det[*A*] == 0, λ]

$\{\{\lambda \to 3\}, \{\lambda \to 4\}\}$

A1 = A /.{λ → 3}; A2 = A /.{λ → 4};

Pro λ různé od 3,4 je matice A regulární a má hodnost 2. Pro hodnoty $\lambda = 3$ a $\lambda = 4$ si hodnost vypočteme.

MatrixRank[A1]

1

MatrixRank[A2]

1

Zpět

Determinanty

- Příklad 9.4.1 Vypočtěte determinanty následujících matic:

$$\mathbf{A_1} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A_2} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A_3} = \begin{bmatrix} 3 & 8 & -2 \\ 6 & 16 & -4 \\ -9 & -24 & 6 \end{bmatrix}.$$

- Příklad 9.4.2 Vypočtěte determinant matice

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) & h(x) \\ f'(x) & g'(x) & h'(x) \\ f''(x) & g''(x) & h''(x) \end{vmatrix},$$

jestliže jsou dány funkce $f(x) = \mathrm{e}^{2x}$, $g(x) = 1 - \cos x$, $h(x) = x^2$.

Zpět

Příklad 9.4.1

Vypočtěte determinanty následujících matic:

$$\mathbf{A_1} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A_2} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A_3} = \begin{bmatrix} 3 & 8 & -2 \\ 6 & 16 & -4 \\ -9 & -24 & 6 \end{bmatrix}.$$

? Zpět

Příklad 9.4.1

Vypočtěte determinanty následujících matic:

$$\mathbf{A_1} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A_2} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A_3} = \begin{bmatrix} 3 & 8 & -2 \\ 6 & 16 & -4 \\ -9 & -24 & 6 \end{bmatrix}.$$

Výsledek:

$\det \mathbf{A_1} = -50\,, \quad \det \mathbf{A_2} = -4\,, \quad \det \mathbf{A_3} = 0\,.$

Zpět

Příklad 9.4.1

Vypočtěte determinanty následujících matic:

$$\mathbf{A_1} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A_2} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A_3} = \begin{bmatrix} 3 & 8 & -2 \\ 6 & 16 & -4 \\ -9 & -24 & 6 \end{bmatrix}.$$

Návod:

Determinant první matice počítáme podle Sarrusova pravidla, při výpočtu determinantu druhé matice využijeme skutečnosti, že jde o HT-matici, třetí determinant určíme na základě vlastností determinantů.

Zpět

Příklad 9.4.1

Vypočtěte determinanty následujících matic:

$$\mathbf{A_1} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A_2} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A_3} = \begin{bmatrix} 3 & 8 & -2 \\ 6 & 16 & -4 \\ -9 & -24 & 6 \end{bmatrix}.$$

Řešení:

Determinant $\det \mathbf{A_1}$ určíme pomocí Sarrusova pravidla:

$$\det \mathbf{A_1} = \det \begin{bmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 0 \end{bmatrix} = 0 + 0 + (-6) - 8 - 36 - 0 = -50\,.$$

U druhého determinantu je výpočet snazší, neboť matice $\mathbf{A_2}$ je horní trojúhelníková čtvercová matice, a tudíž její determinant je roven součinu prvků na hlavní diagonále, tedy

$$\det \mathbf{A_2} = 2 \cdot 2 \cdot (-1) = -4\,.$$

V případě matice $\mathbf{A_3}$ si povšimneme faktu, že druhý a třetí řádek jsou násobky prvního řádku, což podle vlastností determinantů znamená, že

$$\det \mathbf{A_3} = 0\,.$$

Zpět

Příklad 9.4.1

Vypočtěte determinanty následujících matic:

$$\mathbf{A_1} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A_2} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A_3} = \begin{bmatrix} 3 & 8 & -2 \\ 6 & 16 & -4 \\ -9 & -24 & 6 \end{bmatrix}.$$

Maple:

```
> with(linalg):A1:=matrix(3,3,[3,2,-4,0,2,3,-1,4,0]);
```

$$A1 := \begin{bmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> det(A1);
```

$$-50$$

```
> A2:=matrix(3,3,[2,3,4,0,2,1,0,0,-1]);
```

$$A2 := \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

```
> det(A2);
```

$$-4$$

Další

Příklad 9.4.1

Vypočtěte determinanty následujících matic:

$$\mathbf{A_1} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A_2} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A_3} = \begin{bmatrix} 3 & 8 & -2 \\ 6 & 16 & -4 \\ -9 & -24 & 6 \end{bmatrix}.$$

Maple:

```
> A3:=matrix(3,3,[3,8,-2,6,16,-4,-9,-24,6]);
```

$$A3 := \begin{bmatrix} 3 & 8 & -2 \\ 6 & 16 & -4 \\ -9 & -24 & 6 \end{bmatrix}$$

```
> det(A3);
```

$$0$$

Zpět

Příklad 9.4.1

Vypočtěte determinanty následujících matic:

$$\mathbf{A_1} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A_2} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A_3} = \begin{bmatrix} 3 & 8 & -2 \\ 6 & 16 & -4 \\ -9 & -24 & 6 \end{bmatrix}.$$

Mathematica:

A1 = {{3, 2, −4}, {0, 2, 3}, {−1, 4, 0}};

Det[A1]

−50

A2 = {{2, 3, 4}, {0, 2, 1}, {0, 0, −1}};

Det[A2]

−4

A3 = {{3, 8, −2}, {6, 16, −4}, {−9, −24, 6}};

Det[A3]

0

Zpět

Příklad 9.4.2

Vypočtěte determinant matice

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) & h(x) \\ f'(x) & g'(x) & h'(x) \\ f''(x) & g''(x) & h''(x) \end{vmatrix},$$

jestliže jsou dány funkce $f(x) = \mathrm{e}^{2x}$, $g(x) = 1 - \cos x$, $h(x) = x^2$.

? Zpět

Příklad 9.4.2

Vypočtěte determinant matice

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) & h(x) \\ f'(x) & g'(x) & h'(x) \\ f''(x) & g''(x) & h''(x) \end{vmatrix},$$

jestliže jsou dány funkce $f(x) = \mathrm{e}^{2x}$, $g(x) = 1 - \cos x$, $h(x) = x^2$.

Výsledek:

$(-4x^2 + 2)\mathrm{e}^{2x} \sin x + (2x^2 - 10x + 4)\mathrm{e}^{2x} \cos x + (8x - 4)\mathrm{e}^{2x}$.

Zpět

Příklad 9.4.2

Vypočtěte determinant matice

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) & h(x) \\ f'(x) & g'(x) & h'(x) \\ f''(x) & g''(x) & h''(x) \end{vmatrix},$$

jestliže jsou dány funkce $f(x) = \mathrm{e}^{2x}$, $g(x) = 1 - \cos x$, $h(x) = x^2$.

Návod:

Derivace funkcí $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ vypočítáme podle pravidel pro derivování, po dosazení příslušných derivací pak $\det \mathbf{A}$ (matice typu 3×3) určíme např. pomocí Sarrusova pravidla.

Zpět

Příklad 9.4.2

Vypočtěte determinant matice

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) & h(x) \\ f'(x) & g'(x) & h'(x) \\ f''(x) & g''(x) & h''(x) \end{vmatrix},$$

jestliže jsou dány funkce $f(x) = \mathrm{e}^{2x}$, $g(x) = 1 - \cos x$, $h(x) = x^2$.

Řešení:

Nejprve určíme všechny potřebné derivace:

$$\begin{array}{llll} f(x) = \mathrm{e}^{2x} & \Rightarrow & f'(x) = 2\mathrm{e}^{2x}, & f''(x) = 4\mathrm{e}^{2x} \\ g(x) = 1 - \cos x & \Rightarrow & g'(x) = \sin x, & g''(x) = \cos x \\ h(x) = x^2 & \Rightarrow & h'(x) = 2x, & h''(x) = 2. \end{array}$$

Povšimněme si, že funkce $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ obsahují všechny člen e^{2x}. S využitím vlastností determinantů pak po vytknutí tohoto členu z prvního sloupce hledaného determinantu dostaneme

$$\begin{aligned} \det\mathbf{A} &= \begin{vmatrix} \mathrm{e}^{2x} & 1-\cos x & x^2 \\ 2\mathrm{e}^{2x} & \sin x & 2x \\ 4\mathrm{e}^{2x} & \cos x & 2 \end{vmatrix} = \mathrm{e}^{2x} \begin{vmatrix} 1 & 1-\cos x & x^2 \\ 2 & \sin x & 2x \\ 4 & \cos x & 2 \end{vmatrix} = \\ &= \mathrm{e}^{2x}\{2\sin x + 2x^2\cos x + 8x(1-\cos x) - 4x^2\sin x - 2x\cos x - \\ &-4(1-\cos x)\} = (-4x^2+2)\mathrm{e}^{2x}\sin x + (2x^2-10x+4)\mathrm{e}^{2x}\cos x + \\ &+(8x-4)\mathrm{e}^{2x}. \end{aligned}$$

Zpět

Příklad 9.4.2

Vypočtěte determinant matice

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) & h(x) \\ f'(x) & g'(x) & h'(x) \\ f''(x) & g''(x) & h''(x) \end{vmatrix},$$

jestliže jsou dány funkce $f(x) = \mathrm{e}^{2x}$, $g(x) = 1 - \cos x$, $h(x) = x^2$.

Maple:

Nejprve určíme všechny příslušné derivace. Pozn. pro zjednodušení zápisu označíme f1, g1, h1 první derivace,
analogicky f2, g2, h2 druhé derivace.

```
> f:=x->exp(2*x);f1(x):=diff(f(x),x);f2(x):=diff(f1(x),x);
```

$$f := x \rightarrow e^{(2\,x)}$$

$$\mathrm{f1}(x) := 2\,e^{(2\,x)}$$

$$\mathrm{f2}(x) := 4\,e^{(2\,x)}$$

```
> g:=x->1-cos(x);g1(x):=diff(g(x),x);g2(x):=diff(g1(x),x);
```

$$g := x \rightarrow 1 - \cos(x)$$

$$\mathrm{g1}(x) := \sin(x)$$

$$\mathrm{g2}(x) := \cos(x)$$

Další

Příklad 9.4.2

Vypočtěte determinant matice

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) & h(x) \\ f'(x) & g'(x) & h'(x) \\ f''(x) & g''(x) & h''(x) \end{vmatrix},$$

jestliže jsou dány funkce $f(x) = \mathrm{e}^{2x}$, $g(x) = 1 - \cos x$, $h(x) = x^2$.

Maple:

```
> h:=x->x^2;h1(x):=diff(h(x),x);h2(x):=diff(h1(x),x);
```

$$h := x \to x^2$$

$$\mathrm{h1}(x) := 2\,x$$

$$\mathrm{h2}(x) := 2$$

Dále už stačí jen dosadit a vypočítat příslušný determinant.

```
> A:=matrix(3,3,[f(x),g(x),h(x),f1(x),g1(x),h1(x),f2(x),g2(x),h2(x)]);
```

$$A := \begin{bmatrix} e^{(2\,x)} & 1 - \cos(x) & x^2 \\ 2\,e^{(2\,x)} & \sin(x) & 2\,x \\ 4\,e^{(2\,x)} & \cos(x) & 2 \end{bmatrix}$$

```
> det(A);
```

$$2\,e^{(2\,x)}\sin(x) - 10\,e^{(2\,x)}\,x\cos(x) - 4\,e^{(2\,x)} + 4\,e^{(2\,x)}\cos(x) + 2\,e^{(2\,x)}\,x^2\cos(x) + 8\,e^{(2\,x)}\,x - 4\,e^{(2\,x)}\,x^2\sin(x)$$

Zpět

Příklad 9.4.2

Vypočtěte determinant matice

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) & h(x) \\ f'(x) & g'(x) & h'(x) \\ f''(x) & g''(x) & h''(x) \end{vmatrix},$$

jestliže jsou dány funkce $f(x) = \mathrm{e}^{2x}$, $g(x) = 1 - \cos x$, $h(x) = x^2$.

Mathematica:

Nejprve určíme všechny příslušné derivace. Pozn. pro zjednodušení zápisu označíme f1, g1, h1 první derivace,analogicky f2, g2, h2 druhé derivace. Potom vypočteme příslušný determinant.

```
f[x_] = Exp[2x]; f1[x_] = D[f[x], x]; f2[x_] = D[f1[x], x];
g[x_] = 1 - Cos[x]; g1[x_] = D[g[x], x]; g2[x_] = D[g1[x], x];
h[x_] = x^2; h1[x_] = D[h[x], x]; h2[x_] = D[h1[x], x];
A = {{f[x], g[x], h[x]}, {f1[x], g1[x], h1[x]},{f2[x], g2[x], h2[x]}}
```

$\{\{e^{2x}, 1 - \mathrm{Cos}[x], x^2\}, \{2e^{2x}, \mathrm{Sin}[x], 2x\}, \{4e^{2x}, \mathrm{Cos}[x], 2\}\}$

```
det = Det[A]
```

$-4e^{2x} + 8e^{2x}x + 4e^{2x}\mathrm{Cos}[x] - 10e^{2x}x\mathrm{Cos}[x] + 2e^{2x}x^2\mathrm{Cos}[x] + 2e^{2x}\mathrm{Sin}[x] - 4e^{2x}x^2\mathrm{Sin}[x]$

```
Simplify[det]
```

$2e^{2x}(-2 + 4x + (2 - 5x + x^2)\mathrm{Cos}[x] + \mathrm{Sin}[x] - 2x^2\mathrm{Sin}[x])$

Zpět