Kapitola 1: Lineární prostor

Chcete-li ukončit prohlížení stiskněte klávesu **Esc**.
Chcete-li pokračovat stiskněte klávesu **Enter**.

Lineární prostor

- Lineární prostor a lineární podprostor
- Lineární nezávislost
- Báze a dimenze lineárního prostoru

Zpět

Lineární prostor a lineární podprostor

- **Příklad 1.1.1** Rozhodněte, zda podmnožina M vektorového prostoru $\mathbb{R}^4$ je jeho lineárním podprostorem,
  $$\mathrm{M} = \{\overrightarrow{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^4,\ x_1 = x_4\}.$$
  Pokud ano, najděte nějakou bázi a určete dimenzi M.

- **Příklad 1.1.2** Rozhodněte, zda podmnožina M vektorového prostoru $\mathcal{P}$ všech polynomů je jeho lineárním podprostorem, jestliže
  a) $\mathrm{M} = \{f \in \mathcal{P}, f(2) = 0\}$;
  b) $\mathrm{M} = \{f \in \mathcal{P}, f(0) = 2\}$.

- **Příklad 1.1.3** Nechť $\mathcal{P}_2$ je množina všech polynomů stupně nejvýše 2, $\widetilde{\mathcal{P}_2}$ je množina všech polynomů stupně právě 2, tj.
  $$\mathcal{P}_2 = \{p,\ p \text{ je polynom, st}\, p \leq 2\}, \quad \widetilde{\mathcal{P}_2} = \{p,\ p \text{ je polynom, st}\, p = 2\}.$$
  Rozhodněte, zda $\mathcal{P}_2$ a $\widetilde{\mathcal{P}_2}$ tvoří lineární podprostor vektorového prostoru všech polynomů $\mathcal{P}$. Pokud ano, najděte jejich bázi a určete jejich dimenzi.

Zpět

Příklad 1.1.1

Rozhodněte, zda podmnožina M vektorového prostoru $\mathbb{R}^4$ je jeho lineárním podprostorem,

$$\mathrm{M} = \{ \overrightarrow{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^4,\ x_1 = x_4 \}.$$

Pokud ano, najděte nějakou bázi a určete dimenzi M.

? Zpět

Příklad 1.1.1

Rozhodněte, zda podmnožina M vektorového prostoru $\mathbb{R}^4$ je jeho lineárním podprostorem,

$$\mathrm{M} = \{\overrightarrow{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^4,\ x_1 = x_4\}.$$

Pokud ano, najděte nějakou bázi a určete dimenzi M.

Výsledek:

M je lineárním podprostorem vektorového prostoru $\mathbb{R}^4$.
Bázi M tvoří například vektory
$\overrightarrow{v} = (1, 0, 0, 1)^{\mathrm{T}},\ \overrightarrow{e_2} = (0, 1, 0, 0)^{\mathrm{T}},\ \overrightarrow{e_3} = (0, 0, 1, 0)^{\mathrm{T}}$.
Dimenze $\mathrm{M} = 3$.

Zpět

Příklad 1.1.1

Rozhodněte, zda podmnožina M vektorového prostoru $\mathbb{R}^4$ je jeho lineárním podprostorem,

$$\mathrm{M} = \{\overrightarrow{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^4,\ x_1 = x_4\}.$$

Pokud ano, najděte nějakou bázi a určete dimenzi M.

Návod:

Musíme ověřit, že množina M obsahuje nulový prvek a je uzavřená vzhledem k operacím sčítání a násobení reálným číslem. Dále najdeme nějakou bázi, tj. maximální počet lineárně nezávislých prvků z M. Dimenze je pak rovna počtu prvků této (a každé) báze.

Zpět

Příklad 1.1.1

Rozhodněte, zda podmnožina M vektorového prostoru $\mathbb{R}^4$ je jeho lineárním podprostorem,
$\mathrm{M} = \{\overrightarrow{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^4,\ x_1 = x_4\}.$
Pokud ano, najděte nějakou bázi a určete dimenzi M.

Řešení:

a) Nulový prvek $\overrightarrow{o} = (0,0,0,0)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^4$ leží v M, neboť $o_1 = o_4 = 0$.
b) Nechť $\overrightarrow{x}$, $\overrightarrow{y} \in \mathrm{M}$. Musíme ověřit, že také $\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y} \in \mathrm{M}$. Ale
$\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^{\mathrm{T}} + (y_1, y_2, y_3, y_4)^{\mathrm{T}} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, x_4 + y_4)^{\mathrm{T}}$, a protože podle předpokladu je $x_1 = x_4$ a $y_1 = y_4$, je také $x_1 + y_1 = x_4 + y_4$ a vektor $\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y} \in \mathrm{M}$. Množina M je tedy uzavřená vzhledem k operaci sčítání.
c) Nechť $\overrightarrow{x} \in \mathrm{M}$. Zbývá ověřit, že také $\alpha\overrightarrow{x} \in \mathrm{M}$ pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$. Ale
$\alpha\overrightarrow{x} = \alpha(x_1, x_2, x_3, x_4)^{\mathrm{T}} = (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3, \alpha x_4)^{\mathrm{T}}$. Protože $x_1 = x_4$, je také $\alpha x_1 = \alpha x_4$ a $\alpha\overrightarrow{x} \in \mathrm{M}$. Tedy množina M je také uzavřená vzhledem k operaci násobení reálným číslem.
Z a), b), c) plyne, že M je lineárním podprostorem vektorového prostoru $\mathbb{R}^4$.
Hledejme nyní bázi M. Vyjdeme z kanonické báze prostoru $\mathbb{R}^4$. Vektory $\overrightarrow{e_2} = (0,1,0,0)^{\mathrm{T}}$, $\overrightarrow{e_3} = (0,0,1,0)^{\mathrm{T}}$ leží v M. Třetí vektor báze je např. vektor $\overrightarrow{v} = (1,0,0,1)^{\mathrm{T}}$. Ověříme, že vektory $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{e_3}$ jsou lineárně nezávislé a generují M, tedy že skutečně tvoří bázi M.
Lineární nezávislost:
Sestavíme z vektorů $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{e_3}$ matici:

$$\begin{pmatrix} \overrightarrow{v}^{\mathrm{T}} \\ \overrightarrow{e_2}^{\mathrm{T}} \\ \overrightarrow{e_3}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Další

Příklad 1.1.1

Rozhodněte, zda podmnožina M vektorového prostoru $\mathbb{R}^4$ je jeho lineárním podprostorem,

$$\mathrm{M} = \{\overrightarrow{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^4,\ x_1 = x_4\}.$$

Pokud ano, najděte nějakou bázi a určete dimenzi M.

Řešení:

Matice je v horním trojúhelníkovém tvaru a má hodnost 3. Vektory $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{e_3}$ jsou tedy lineárně nezávislé.

Vektory $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{e_3}$ generují celý lineární podprostor M:

Nechť $\overrightarrow{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^{\mathrm{T}} \in \mathrm{M}$. Ptáme se, zda $\overrightarrow{x}$ je nějakou lineární kombinací vektorů $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{e_3}$, tj. hledáme čísla α, β, γ (koeficienty lineární kombinace), tak aby

$$\alpha \cdot (1, 0, 0, 1)^{\mathrm{T}} + \beta \cdot (0, 1, 0, 0)^{\mathrm{T}} + \gamma \cdot (0, 0, 1, 0)^{\mathrm{T}} = (x_1, x_2, x_3, x_1)^{\mathrm{T}}.$$

$$(\alpha, \beta, \gamma, \alpha)^{\mathrm{T}} = (x_1, x_2, x_3, x_1)^{\mathrm{T}} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{ccc} \alpha & = & x_1 \\ \beta & = & x_2 \\ \gamma & = & x_3 \end{array}$$

$$\overrightarrow{x} = x_1 \cdot \overrightarrow{v} + x_2 \cdot \overrightarrow{e_2} + x_3 \overrightarrow{e_3}$$

a tři vektory $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{e_3}$ generují M. Tvoří tedy bázi M a dimenze M je rovna třem.

Zpět

Příklad 1.1.1

Rozhodněte, zda podmnožina M vektorového prostoru $\mathbb{R}^4$ je jeho lineárním podprostorem,

$$\mathrm{M} = \{\overrightarrow{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^4,\ x_1 = x_4\}.$$

Pokud ano, najděte nějakou bázi a určete dimenzi M.

Maple:

```
> with(linalg):
> x:=vector([x1,x2,x3,x1]);
```

$$x := [x1,\ x2,\ x3,\ x1]$$

```
> y:=vector([y1,y2,y3,y1]);
```

$$y := [y1,\ y2,\ y3,\ y1]$$

```
> evalm(x+y);
```

$$[x1 + y1,\ x2 + y2,\ x3 + y3,\ x1 + y1]$$

```
> evalm(alpha*x);
```

$$[\alpha\, x1,\ \alpha\, x2,\ \alpha\, x3,\ \alpha\, x1]$$

```
> e2:=vector([0,1,0,0]);
```

$$e2 := [0,\ 1,\ 0,\ 0]$$

```
> e3:=vector([0,0,1,0]);
```

$$e3 := [0,\ 0,\ 1,\ 0]$$

```
> v:=vector([1,0,0,1]);
```

$$v := [1,\ 0,\ 0,\ 1]$$

Další

Příklad 1.1.1

Rozhodněte, zda podmnožina M vektorového prostoru $\mathbb{R}^4$ je jeho lineárním podprostorem,
$\mathrm{M} = \{\overrightarrow{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^4,\ x_1 = x_4\}$.
Pokud ano, najděte nějakou bázi a určete dimenzi M.

Maple:

```
> comb:=a*v+b*e2+c*e3;
```

$$comb := a\,v + b\,e2 + c\,e3$$

```
> evalm(comb);
```

$$[a,\ b,\ c,\ a]$$

```
> A:=matrix(3,4,[1,0,0,1,0,1,0,0,0,0,1,0]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> rank(A);
```

$$3$$

Zpět

Příklad 1.1.1

Rozhodněte, zda podmnožina M vektorového prostoru $\mathbb{R}^4$ je jeho lineárním podprostorem,

$$\mathrm{M} = \{\overrightarrow{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^4,\ x_1 = x_4\}.$$

Pokud ano, najděte nějakou bázi a určete dimenzi M.

Mathematica:

$\boldsymbol{x = \{\mathrm{x1}, \mathrm{x2}, \mathrm{x3}, \mathrm{x1}\};}$
$\boldsymbol{y = \{\mathrm{y1}, \mathrm{y2}, \mathrm{y3}, \mathrm{y1}\};}$

$\boldsymbol{z = x + y}$

$\{\mathrm{x1} + \mathrm{y1}, \mathrm{x2} + \mathrm{y2}, \mathrm{x3} + \mathrm{y3}, \mathrm{x1} + \mathrm{y1}\}$

$\boldsymbol{z[[4]] == z[[1]]}$

True

$\boldsymbol{v = \alpha x}$

$\{\mathrm{x1}\alpha, \mathrm{x2}\alpha, \mathrm{x3}\alpha, \mathrm{x1}\alpha\}$

$\boldsymbol{v[[4]] == v[[1]]}$

True

M je podprostor prostoru $\mathbb{R}^4$

$\boldsymbol{\mathrm{e1} = \{1, 0, 0, 1\}; \mathrm{e2} = \{0, 1, 0, 0\}; \mathrm{e3} = \{0, 0, 1, 0\};}$

$\boldsymbol{u = a\mathrm{e1} + b\mathrm{e2} + c\mathrm{e3}}$

$\{a, b, c, a\}$

$\boldsymbol{u[[4]] == u[[1]]}$

True

$\{e1, e2, e3\}$ je báze podprostoru M.

Příklad 1.1.2

Rozhodněte, zda podmnožina M vektorového prostoru $\mathcal{P}$ všech polynomů je jeho lineárním podprostorem, jestliže
a) $\mathrm{M} = \{f \in \mathcal{P}, f(2) = 0\}$;
b) $\mathrm{M} = \{f \in \mathcal{P}, f(0) = 2\}$.

? Zpět

Příklad 1.1.2

Rozhodněte, zda podmnožina M vektorového prostoru $\mathcal{P}$ všech polynomů je jeho lineárním podprostorem, jestliže
a) $\mathrm{M} = \{f \in \mathcal{P}, f(2) = 0\}$;
b) $\mathrm{M} = \{f \in \mathcal{P}, f(0) = 2\}$.

Výsledek:

a) M je lineárním podprostorem $\mathcal{P}$.
b) M není lineárním podprostorem $\mathcal{P}$.

Zpět

Příklad 1.1.2

Rozhodněte, zda podmnožina M vektorového prostoru $\mathcal{P}$ všech polynomů je jeho lineárním podprostorem, jestliže
a) $\mathrm{M} = \{f \in \mathcal{P}, f(2) = 0\}$;
b) $\mathrm{M} = \{f \in \mathcal{P}, f(0) = 2\}$.

Návod:

V obou případech musíme ověřit, zda $0 \in \mathrm{M}$, kde 0 je nulový polynom, tj. $0(x) = 0 \ \forall x \in \mathcal{P}$. Dále musíme ukázat, že M je uzavřená na operace sčítání a násobení reálným číslem.

Zpět

Příklad 1.1.2

Rozhodněte, zda podmnožina M vektorového prostoru $\mathcal{P}$ všech polynomů je jeho lineárním podprostorem, jestliže
a) $\mathrm{M} = \{f \in \mathcal{P}, f(2) = 0\}$;
b) $\mathrm{M} = \{f \in \mathcal{P}, f(0) = 2\}$.

Řešení:

a) Protože $0 \in \mathcal{P}$ a $0(2) = 0$, je $0 \in \mathrm{M}$. Nechť $f,\ g \in M,\ \alpha \in \mathbb{R}$. Ptáme se, zda také $f + g$ a αf leží v M. Ale f i g jsou polynomy, tedy i jejich součet je polynom. Protože $f(2) = 0,\ g(2) = 0$, je $(f + g)(2) = f(2) + g(2) = 0$ a $(f + g) \in \mathrm{M}$. αf je také polynom a $(\alpha f)(2) = \alpha f(2) = 0$, tedy i $(\alpha f) \in M$. Množina M je lineární podprostor prostoru $\mathcal{P}$. Využili jsme zde definice součtu dvou funkcí a definice reálného násobku funkce.
b) Platí $0(x) = 0\ \forall x \in \mathbb{R}$, nemůže tedy být $0(0) = 2$. Nulový prvek $\mathcal{P} \notin \mathrm{M}$ a množina M v tomto případě není lineárním podprostorem $\mathcal{P}$.

Zpět

Příklad 1.1.2

Rozhodněte, zda podmnožina M vektorového prostoru $\mathcal{P}$ všech polynomů je jeho lineárním podprostorem, jestliže
a) $\mathrm{M} = \{f \in \mathcal{P}, f(2) = 0\}$;
b) $\mathrm{M} = \{f \in \mathcal{P}, f(0) = 2\}$.

Maple:

a)

```
> with(linalg):
> f:=x->y;
```

$$f := x \to y$$

```
> f(2):=0;
```

$$\mathrm{f}(2) := 0$$

```
> o:=x->0;
```

$$o := x \to 0$$

```
> o(2);
```

$$0$$

```
> g:x->z;
```

$$x \to z$$

```
> g(2):=0;
```

$$\mathrm{g}(2) := 0$$

```
> fg:=x->f(x)+g(x);
```

$$fg := x \to \mathrm{f}(x) + \mathrm{g}(x)$$

Další

Příklad 1.1.2

Rozhodněte, zda podmnožina M vektorového prostoru $\mathcal{P}$ všech polynomů je jeho lineárním podprostorem, jestliže
a) $\mathrm{M} = \{f \in \mathcal{P}, f(2) = 0\}$;
b) $\mathrm{M} = \{f \in \mathcal{P}, f(0) = 2\}$.

Maple:

```
> fg(2);
```

$$0$$

```
> af:=x->a*f(x);
```

$$af := x \to a\,\mathrm{f}(x)$$

```
> af(2);
```

$$0$$

b)

```
> with(linalg):
> f:=x->y;
```

$$f := x \to y$$

```
> f(0):=2;
```

$$\mathrm{f}(0) := 2$$

```
> o:=x->0;
```

$$o := x \to 0$$

```
> o(0);
```

$$0$$

Další

Příklad 1.1.2

Rozhodněte, zda podmnožina M vektorového prostoru $\mathcal{P}$ všech polynomů je jeho lineárním podprostorem, jestliže
a) $\mathrm{M} = \{f \in \mathcal{P}, f(2) = 0\}$;
b) $\mathrm{M} = \{f \in \mathcal{P}, f(0) = 2\}$.

Maple:

```
> g:x->z;
```

$$x \to z$$

```
> g(0):=2;
```

$$\mathrm{g}(0) := 2$$

```
> fg:=x->f(x)+g(x);
```

$$fg := x \to \mathrm{f}(x) + \mathrm{g}(x)$$

```
> fg(0);
```

$$4$$

```
> af:=x->a*f(x);
```

$$af := x \to a\,\mathrm{f}(x)$$

```
> af(0);
```

$$2\,a$$

Zpět

Příklad 1.1.2

Rozhodněte, zda podmnožina M vektorového prostoru $\mathcal{P}$ všech polynomů je jeho lineárním podprostorem, jestliže
a) $\mathrm{M} = \{f \in \mathcal{P}, f(2) = 0\}$;
b) $\mathrm{M} = \{f \in \mathcal{P}, f(0) = 2\}$.

Mathematica:

f[2]:=0;
g[2]:=0;

h[x_] = f[x] + g[x];

h[2] == 0

True

k[x_] = α f[x];

k[2] == 0

True

Prostor M je lineární podprostor prostoru $\mathcal{P}$.

f[0]:=2;
g[0]:=2;

h[x_] = f[x] + g[x];

h[0] == 2

False

k[x_] = α f[x];

Další

Příklad 1.1.2

Rozhodněte, zda podmnožina M vektorového prostoru $\mathcal{P}$ všech polynomů je jeho lineárním podprostorem, jestliže
a) $\mathrm{M} = \{f \in \mathcal{P}, f(2) = 0\}$;
b) $\mathrm{M} = \{f \in \mathcal{P}, f(0) = 2\}$.

Mathematica:

$\boldsymbol{k[0] == 2}$

$2\alpha == 2$

Prostor M není lineární podprostor prostoru $\mathcal{P}$.

Zpět

Příklad 1.1.3

Nechť $\mathcal{P}_2$ je množina všech polynomů stupně nejvýše 2, $\widetilde{\mathcal{P}_2}$ je množina všech polynomů stupně právě 2, tj.

$$\mathcal{P}_2 = \{p,\ p \text{ je polynom, st}\, p \leq 2\}, \quad \widetilde{\mathcal{P}_2} = \{p,\ p \text{ je polynom, st}\, p = 2\}.$$

Rozhodněte, zda $\mathcal{P}_2$ a $\widetilde{\mathcal{P}_2}$ tvoří lineární podprostor vektorového prostoru všech polynomů $\mathcal{P}$. Pokud ano, najděte jejich bázi a určete jejich dimenzi.

? Zpět

Příklad 1.1.3

Nechť $\mathcal{P}_2$ je množina všech polynomů stupně nejvýše 2, $\widetilde{\mathcal{P}_2}$ je množina všech polynomů stupně právě 2, tj.

$$\mathcal{P}_2 = \{p,\ p \text{ je polynom, st}\, p \leq 2\}, \quad \widetilde{\mathcal{P}_2} = \{p,\ p \text{ je polynom, st}\, p = 2\}.$$

Rozhodněte, zda $\mathcal{P}_2$ a $\widetilde{\mathcal{P}_2}$ tvoří lineární podprostor vektorového prostoru všech polynomů $\mathcal{P}$. Pokud ano, najděte jejich bázi a určete jejich dimenzi.

Výsledek:

$\widetilde{\mathcal{P}_2}$ není lineárním podprostorem $\mathcal{P}$. $\mathcal{P}_2$ je lineárním podprostorem $\mathcal{P}$, bázi $\mathcal{P}_2$ tvoří např. funkce $x^2,\ x,\ 1$, $\dim \mathcal{P}_2 = 3$.

Zpět

Příklad 1.1.3

Nechť $\mathcal{P}_2$ je množina všech polynomů stupně nejvýše 2, $\widetilde{\mathcal{P}_2}$ je množina všech polynomů stupně právě 2, tj.

$$\mathcal{P}_2 = \{p,\ p \text{ je polynom, } \operatorname{st} p \leq 2\}, \quad \widetilde{\mathcal{P}_2} = \{p,\ p \text{ je polynom, } \operatorname{st} p = 2\}.$$

Rozhodněte, zda $\mathcal{P}_2$ a $\widetilde{\mathcal{P}_2}$ tvoří lineární podprostor vektorového prostoru všech polynomů $\mathcal{P}$. Pokud ano, najděte jejich bázi a určete jejich dimenzi.

Návod:

Musíme zjistit, zda $0 \in \mathcal{P}_2$ a $0 \in \widetilde{\mathcal{P}_2}$, kde 0 je nulový polynom, tj. $0(x) = 0\ \forall x \in \mathcal{P}$. Rovněž musíme ukázat, že množiny jsou uzavřené vzhledem k operacím sčítání a násobení reálným číslem. Dále najdeme nějakou bázi, tj. maximální počet lineárně nezávislých prvků $\mathcal{P}_2$ a $\widetilde{\mathcal{P}_2}$. Dimenze je pak rovna počtu prvků této (a každé) báze.

Zpět

Příklad 1.1.3

Nechť $\mathcal{P}_2$ je množina všech polynomů stupně nejvýše 2, $\widetilde{\mathcal{P}_2}$ je množina všech polynomů stupně právě 2, tj.

$$\mathcal{P}_2 = \{p,\ p \text{ je polynom, } \operatorname{st} p \leq 2\}, \quad \widetilde{\mathcal{P}_2} = \{p,\ p \text{ je polynom, } \operatorname{st} p = 2\}.$$

Rozhodněte, zda $\mathcal{P}_2$ a $\widetilde{\mathcal{P}_2}$ tvoří lineární podprostor vektorového prostoru všech polynomů $\mathcal{P}$. Pokud ano, najděte jejich bázi a určete jejich dimenzi.

Řešení:

Protože nulový polynom je polynom nulového stupně, je ihned zřejmé, že nemůže být prvkem množiny $\widetilde{\mathcal{P}_2}$, a tedy množina $\widetilde{\mathcal{P}_2}$ není lineárním podprostorem prostoru $\mathcal{P}$. Na druhé straně je $\operatorname{st} 0 = 0 \leq 2$, a tedy nulový polynom je prvkem $\mathcal{P}_2$. Dále sečteme-li dva polynomy stupně nejvýše 2, dostaneme opět polynom stupně nejvýše 2. Rovněž vynásobíme-li polynom stupně nejvýše 2 libovolným reálným číslem, dostaneme opět polynom nejvýše 2. stupně. Tedy množina $\mathcal{P}_2$ je lineárním podprostorem vektorového prostoru $\mathcal{P}$.

Zbývá najít bázi a určit dimenzi $\mathcal{P}_2$. Každý polynom stupně nejvýše 2 má obecně tvar $p(x) = ax^2 + bx + c,\ a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$, a je tedy lineární kombinací funkcí $x^2,\ x$ a 1 ($1(x) = 1\ \forall x \in \mathbb{R}$). Funkce $x^2,\ x$ a 1 generují $\mathcal{P}_2$. Pomocí Wronskiánu ukážeme, že jsou lineárně nezávislé (determinant počítáme rozvojem podle posledního řádku):

$$W(x) = \begin{vmatrix} x^2 & x & 1 \\ 2x & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} x & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Ukázali jsme, že funkce $x^2,\ x$ a 1 tvoří lineárně nezávislý systém funkcí a generují lineární prostor $\mathcal{P}_2$, tvoří tedy bázi $\mathcal{P}_2$. Tato báze má tři prvky, a tedy dimenze $\mathcal{P}_2 = 3$.

Zpět

Příklad 1.1.3

Nechť $\mathcal{P}_2$ je množina všech polynomů stupně nejvýše 2, $\widetilde{\mathcal{P}_2}$ je množina všech polynomů stupně právě 2, tj.

$$\mathcal{P}_2 = \{p,\ p \text{ je polynom, st}\, p \leq 2\}, \quad \widetilde{\mathcal{P}_2} = \{p,\ p \text{ je polynom, st}\, p = 2\}.$$

Rozhodněte, zda $\mathcal{P}_2$ a $\widetilde{\mathcal{P}_2}$ tvoří lineární podprostor vektorového prostoru všech polynomů $\mathcal{P}$. Pokud ano, najděte jejich bázi a určete jejich dimenzi.

Maple:

```
> with(linalg):
> p:=a*x^2+b*x+c;
```

$$p := a\,x^2 + b\,x + c$$

```
> degree(p,x);
```

$$2$$

```
> a:=0: b:=0: c:=0:
> p(x);
```

$$0$$

```
> degree(p,x);
```

$$-\infty$$

```
> c:=1:
> p(x);
```

$$1$$

```
> degree(p,x);
```

$$0$$

Další

Příklad 1.1.3

Nechť $\mathcal{P}_2$ je množina všech polynomů stupně nejvýše 2, $\widetilde{\mathcal{P}_2}$ je množina všech polynomů stupně právě 2, tj.

$$\mathcal{P}_2 = \{p,\ p \text{ je polynom, st}\, p \leq 2\}, \quad \widetilde{\mathcal{P}_2} = \{p,\ p \text{ je polynom, st}\, p = 2\}.$$

Rozhodněte, zda $\mathcal{P}_2$ a $\widetilde{\mathcal{P}_2}$ tvoří lineární podprostor vektorového prostoru všech polynomů $\mathcal{P}$. Pokud ano, najděte jejich bázi a určete jejich dimenzi.

Maple:

```
> p1:=a1*x^2+b1*x+c1;
```

$$p1 := a1\,x^2 + b1\,x + c1$$

```
> p2:=a2*x^2+b2*x+c2;
```

$$p2 := a2\,x^2 + b2\,x + c2$$

```
> p1+p2;
```

$$a1\,x^2 + b1\,x + c1 + a2\,x^2 + b2\,x + c2$$

```
> sort(%);
```

$$x^2\,a2 + x^2\,a1 + x\,b2 + x\,b1 + c1 + c2$$

```
> degree(%,x);
```

$$2$$

```
> alpha*p1;
```

$$\alpha\,(x^2\,a1 + x\,b1 + c1)$$

```
> degree(%,x);
```

$$2$$

Další

Příklad 1.1.3

Nechť $\mathcal{P}_2$ je množina všech polynomů stupně nejvýše 2, $\widetilde{\mathcal{P}_2}$ je množina všech polynomů stupně právě 2, tj.

$$\mathcal{P}_2 = \{p,\ p \text{ je polynom, st}\, p \leq 2\}, \quad \widetilde{\mathcal{P}_2} = \{p,\ p \text{ je polynom, st}\, p = 2\}.$$

Rozhodněte, zda $\mathcal{P}_2$ a $\widetilde{\mathcal{P}_2}$ tvoří lineární podprostor vektorového prostoru všech polynomů $\mathcal{P}$. Pokud ano, najděte jejich bázi a určete jejich dimenzi.

Maple:

```
> A := vector([x^2,x,1]);
```

$$A := [x^2,\ x,\ 1]$$

```
> Wr := wronskian(A,x);
```

$$Wr := \begin{bmatrix} x^2 & x & 1 \\ 2\,x & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> det(Wr);
```

$$-2$$

Zpět

Příklad 1.1.3

Nechť $\mathcal{P}_2$ je množina všech polynomů stupně nejvýše 2, $\widetilde{\mathcal{P}_2}$ je množina všech polynomů stupně právě 2, tj.

$$\mathcal{P}_2 = \{p,\ p \text{ je polynom, st}\, p \leq 2\}, \quad \widetilde{\mathcal{P}_2} = \{p,\ p \text{ je polynom, st}\, p = 2\}.$$

Rozhodněte, zda $\mathcal{P}_2$ a $\widetilde{\mathcal{P}_2}$ tvoří lineární podprostor vektorového prostoru všech polynomů $\mathcal{P}$. Pokud ano, najděte jejich bázi a určete jejich dimenzi.

Mathematica:

$\mathbf{p1[x\_] = a1}\boldsymbol{x}\mathbf{\hat{}2 + b1}\boldsymbol{x}\mathbf{ + c1;}$
$\mathbf{p2[x\_] = a2}\boldsymbol{x}\mathbf{\hat{}2 + b2}\boldsymbol{x}\mathbf{ + c2;}$

$\boldsymbol{p}\mathbf{[x\_] = Collect[p1[}\boldsymbol{x}\mathbf{] + p2[}\boldsymbol{x}\mathbf{], }\boldsymbol{x}\mathbf{]}$

$\mathrm{c1} + \mathrm{c2} + (\mathrm{b1} + \mathrm{b2})x + (\mathrm{a1} + \mathrm{a2})x^2$

$\boldsymbol{q}\mathbf{[x\_] = Collect[}\boldsymbol{\alpha}\mathbf{p1[}\boldsymbol{x}\mathbf{], }\boldsymbol{x}\mathbf{]}$

$\mathrm{c1}\alpha + \mathrm{b1}x\alpha + \mathrm{a1}x^2\alpha$

Je vidět, že prostor $\mathcal{P}_2$ je podprostor prostoru $\mathcal{P}$, ale prostor $\widetilde{\mathcal{P}_2}$ není.

$\boldsymbol{f}\mathbf{[x\_] = }\boldsymbol{x}\mathbf{\hat{}2;}$
$\boldsymbol{g}\mathbf{[x\_] = }\boldsymbol{x}\mathbf{;}$
$\boldsymbol{h[x]}\mathbf{ = 1;}$

$\boldsymbol{W = \{\{f[x], g[x], h[x]\}, \{D[f[x], x], D[g[x], x], D[h[x], x]\},}$
$\boldsymbol{\{D[f[x], \{x, 2\}], D[g[x], \{x, 2\}], D[h[x], \{x, 2\}]\}\};}$

Další

Příklad 1.1.3

Nechť $\mathcal{P}_2$ je množina všech polynomů stupně nejvýše 2, $\widetilde{\mathcal{P}_2}$ je množina všech polynomů stupně právě 2, tj.

$$\mathcal{P}_2 = \{p,\ p \text{ je polynom, st}\, p \leq 2\}, \quad \widetilde{\mathcal{P}_2} = \{p,\ p \text{ je polynom, st}\, p = 2\}.$$

Rozhodněte, zda $\mathcal{P}_2$ a $\widetilde{\mathcal{P}_2}$ tvoří lineární podprostor vektorového prostoru všech polynomů $\mathcal{P}$. Pokud ano, najděte jejich bázi a určete jejich dimenzi.

Mathematica:

MatrixForm[*W*]

$$\begin{pmatrix} x^2 & x & 1 \\ 2x & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Det[*W*]

-2

Funkce f, g a h tvoří bázi prostoru $\mathcal{P}_2$. Zpět

- **Příklad 1.2.1** Podle definice zjistěte, zda vektory tvoří lineárně závislý nebo lineárně nezávislý systém vektorů v R^4:

  a) $\vec{a} = (2, 1, -3, 4)^{\mathrm{T}}, \quad \vec{b} = (1, 3, -4, -2)^{\mathrm{T}}, \quad \vec{c} = (3, -1, -1, 0)^{\mathrm{T}}.$

  b) $\vec{a} = (1, 2, 3, 4)^{\mathrm{T}}, \quad \vec{b} = (2, 3, 4, 1)^{\mathrm{T}}, \quad \vec{c} = (3, 4, 1, 2)^{\mathrm{T}}, \quad \vec{d} = (0, 1, 2, 7)^{\mathrm{T}}.$

- **Příklad 1.2.2** Ověřte, že vektory

  $$\vec{a} = (-1,\ 4,\ 2, -5,\ 3)^{\mathrm{T}}, \quad \vec{b} = (\ 1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 4)^{\mathrm{T}}, \quad \vec{c} = (\ 3, -5, -2,\ 8,\ 7)^{\mathrm{T}}$$

  jsou lineárně nezávislé, a vyjádřete vektor $\vec{v} = (1, -4, -2, 5, -3)^{\mathrm{T}}$ jako jejich lineární kombinaci.

- **Příklad 1.2.3** Nechť vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ tvoří lineárně nezávislý systém vektorů ve vektorovém prostoru $\mathcal{V}$. Určete, zda následující systémy vektorů jsou lineárně závislé nebo nezávislé:
  a) $\vec{u},\ \vec{u} + \vec{v},\ \vec{u} + \vec{w},$
  b) $\vec{u} - 2\vec{v} + \vec{w},\ 3\vec{u} - \vec{w},\ \vec{u} + 4\vec{v} - 3\vec{w}.$

- **Příklad 1.2.4** Rozhodněte, zda systém funkcí f, g, h ve vektorovém prostoru funkcí spojitých na $\mathbb{R}$, je lineárně závislý nebo nezávislý.
  a) $f(x) = 2x - 1,\ g(x) = x + 1,\ h(x) = -x + 2;$
  b) $f(x) = \sin x,\ g(x) = \cos x,\ h(x) = \sin x\ \cos x.$

Zpět

Příklad 1.2.1

Podle definice zjistěte, zda vektory tvoří lineárně závislý nebo lineárně nezávislý systém vektorů v R^4:

a) $\overrightarrow{a} = (2, 1, -3, 4)^{\mathrm{T}}, \quad \overrightarrow{b} = (1, 3, -4, -2)^{\mathrm{T}}, \quad \overrightarrow{c} = (3, -1, -1, 0)^{\mathrm{T}}.$

b) $\overrightarrow{a} = (1, 2, 3, 4)^{\mathrm{T}}, \quad \overrightarrow{b} = (2, 3, 4, 1)^{\mathrm{T}}, \quad \overrightarrow{c} = (3, 4, 1, 2)^{\mathrm{T}}, \quad \overrightarrow{d} = (0, 1, 2, 7)^{\mathrm{T}}.$

? Zpět

Příklad 1.2.1

Podle definice zjistěte, zda vektory tvoří lineárně závislý nebo lineárně nezávislý systém vektorů v R^4:

a) $\overrightarrow{a} = (2, 1, -3, 4)^{\mathrm{T}}, \quad \overrightarrow{b} = (1, 3, -4, -2)^{\mathrm{T}}, \quad \overrightarrow{c} = (3, -1, -1, 0)^{\mathrm{T}}.$

b) $\overrightarrow{a} = (1, 2, 3, 4)^{\mathrm{T}}, \quad \overrightarrow{b} = (2, 3, 4, 1)^{\mathrm{T}}, \quad \overrightarrow{c} = (3, 4, 1, 2)^{\mathrm{T}}, \quad \overrightarrow{d} = (0, 1, 2, 7)^{\mathrm{T}}.$

Výsledek:

a) vektory $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ tvoří lineárně nezávislý systém vektorů

b) vektory $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$, $\overrightarrow{d}$ tvoří lineárně závislý systém vektorů.

Zpět

Příklad 1.2.1

Podle definice zjistěte, zda vektory tvoří lineárně závislý nebo lineárně nezávislý systém vektorů v R^4:

a) $\overrightarrow{a} = (2, 1, -3, 4)^{\mathrm{T}}$, $\overrightarrow{b} = (1, 3, -4, -2)^{\mathrm{T}}$, $\overrightarrow{c} = (3, -1, -1, 0)^{\mathrm{T}}$.

b) $\overrightarrow{a} = (1, 2, 3, 4)^{\mathrm{T}}$, $\overrightarrow{b} = (2, 3, 4, 1)^{\mathrm{T}}$, $\overrightarrow{c} = (3, 4, 1, 2)^{\mathrm{T}}$, $\overrightarrow{d} = (0, 1, 2, 7)^{\mathrm{T}}$.

Návod:

Hledáme koeficienty lineární kombinace daných vektorů, která dává nulový vektor. Jsou-li všechny tyto koeficienty nulové (tzv. triviální lineární kombinace), systém vektorů je lineárně nezávislý. Je-li alespoň jeden koeficient nenulový, pak systém vektorů je lineárně závislý.

Zpět

Příklad 1.2.1

Podle definice zjistěte, zda vektory tvoří lineárně závislý nebo lineárně nezávislý systém vektorů v R^4:

a) $\vec{a} = (2,1,-3,4)^T$, $\vec{b} = (1,3,-4,-2)^T$, $\vec{c} = (3,-1,-1,0)^T$.

b) $\vec{a} = (1,2,3,4)^T$, $\vec{b} = (2,3,4,1)^T$, $\vec{c} = (3,4,1,2)^T$, $\vec{d} = (0,1,2,7)^T$.

Řešení:

a)
Hledáme čísla α, β, γ (koeficienty lineární kombinace) tak, aby

$$\alpha \cdot (2,1,-3,4)^T + \beta \cdot (1,3,-4,-2)^T + \gamma \cdot (3,-1,-1,0)^T = (0,0,0,0)^T.$$

Po souřadnicích:

$$\begin{aligned} 2\alpha + \beta + 3\gamma &= 0 \\ \alpha + 3\beta - \gamma &= 0 \\ -3\alpha - 4\beta - \gamma &= 0 \\ 4\alpha - 2\beta &= 0 \end{aligned}$$

Tuto homogenní soustavu vyřešíme Gaussovou eliminační metodou:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \\ -3 & -4 & -1 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & 5 \\ 0 & -5 & 7 \\ 0 & -4 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -50 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

K (-2)násobku druhého řádku jsme přičetli první řádek, k dvojnásobku třetího řádku přičteme trojnásobek prvního a ke čtvrtému řádku přičteme (-2)násobek prvního. Tím vynulujeme poddiagonální prvky prvního sloupce.

Další

Příklad 1.2.1

Podle definice zjistěte, zda vektory tvoří lineárně závislý nebo lineárně nezávislý systém vektorů v R^4:

a) $\overrightarrow{a} = (2, 1, -3, 4)^{\mathrm{T}}, \quad \overrightarrow{b} = (1, 3, -4, -2)^{\mathrm{T}}, \quad \overrightarrow{c} = (3, -1, -1, 0)^{\mathrm{T}}.$

b) $\overrightarrow{a} = (1, 2, 3, 4)^{\mathrm{T}}, \quad \overrightarrow{b} = (2, 3, 4, 1)^{\mathrm{T}}, \quad \overrightarrow{c} = (3, 4, 1, 2)^{\mathrm{T}}, \quad \overrightarrow{d} = (0, 1, 2, 7)^{\mathrm{T}}.$

Řešení:

Nyní od třetího řádku odečteme druhý a k pětinásobku čtvrtého řádku přičteme (-4)násobek druhého. Tím jsme vynulovali poddiagonální prvky druhého sloupce. Kdybychom nyní ke čtvrtému řádku přičetli $25-$ti násobek třetího, dostali bychom nulový vektor. Čtvrtý řádek tedy vynecháme. Můžeme (ale nemusíme) ještě vydělit druhý řádek pěti. Dostaneme matici soustavy v horním trojúhelníkovém tvaru. Hodnost matice je rovna počtu neznámých $= 3$, podle Frobeniovy věty má tato soustava právě jedno řešení. Toto řešení, tedy koeficienty α, β, γ lineární kombinace, vypočteme zpětným chodem Gaussovy eliminace: $\gamma = 0, \qquad \beta = 0, \qquad \alpha = 0.$

Tedy jediná lineární kombinace vektorů $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$, která dává nulový vektor, je triviální lineární kombinace, vektory tedy tvoří lineárně nezávislý systém.

b)

Hledáme čísla α, β, γ, δ (koeficienty lineární kombinace) tak, aby

$$\alpha \cdot (1, 2, 3, 4)^{\mathrm{T}} + \beta \cdot (2, 3, 4, 1)^{\mathrm{T}} + \gamma \cdot (3, 4, 1, 2)^{\mathrm{T}} + \delta \cdot (0, 1, 2, 7)^{\mathrm{T}} = (0, 0, 0, 0)^{\mathrm{T}}.$$

Po souřadnicích:

$$\begin{aligned} \alpha + 2\beta + 3\gamma \phantom{{}+ 2\delta} &= 0 \\ 2\alpha + 3\beta + 4\gamma + \delta &= 0 \\ 3\alpha + 4\beta + \gamma + 2\delta &= 0 \\ 4\alpha + \beta + 2\gamma + 7\delta &= 0 \end{aligned}$$

Další

Příklad 1.2.1

Podle definice zjistěte, zda vektory tvoří lineárně závislý nebo lineárně nezávislý systém vektorů v R^4:

a) $\vec{a} = (2, 1, -3, 4)^{\mathrm{T}}, \quad \vec{b} = (1, 3, -4, -2)^{\mathrm{T}}, \quad \vec{c} = (3, -1, -1, 0)^{\mathrm{T}}.$

b) $\vec{a} = (1, 2, 3, 4)^{\mathrm{T}}, \quad \vec{b} = (2, 3, 4, 1)^{\mathrm{T}}, \quad \vec{c} = (3, 4, 1, 2)^{\mathrm{T}}, \quad \vec{d} = (0, 1, 2, 7)^{\mathrm{T}}.$

Řešení:

Tuto homogenní soustavu vyřešíme Gaussovou eliminační metodou:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -8 & 2 \\ 0 & -7 & -10 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

K druhému řádku jsme přičetli (-2)násobek prvního, k třetímu řádku jsme přičetli (-3)násobek prvního a ke čtvrtému řádku jsme přičetli (-4)násobek prvního. Tím jsme vynulovali poddiagonální prvky prvního sloupce. Nyní k třetímu řádku přičteme (-2)násobek druhého a ke čtvrtému řádku přičteme (-7)násobek druhého. Nyní jsou nulové i poddiagonální prvky druhého sloupce. Vidíme, že kdybychom přičetli ke čtvrtému řádku třetí, dostali bychom nulový vektor. Čtvrtý řádek tedy vynecháme. Třetí řádek můžeme ještě vydělit (-4)mi. Hodnost matice soustavy $= 3$, počet neznámých $= 4$, podle Frobeniovy věty má tedy soustava nekonečně mnoho řešení. Řešení najdeme zpětným chodem Gaussovy eliminace. Protože $4 - 3 = 1$, volíme jednu neznámou jako parametr: $\delta := \mathrm{t}, \ \mathrm{t} \in \mathbb{R}$, a dopočítáme:

Další

Příklad 1.2.1

Podle definice zjistěte, zda vektory tvoří lineárně závislý nebo lineárně nezávislý systém vektorů v R^4:

a) $\overrightarrow{a} = (2,1,-3,4)^{\mathrm{T}}, \quad \overrightarrow{b} = (1,3,-4,-2)^{\mathrm{T}}, \quad \overrightarrow{c} = (3,-1,-1,0)^{\mathrm{T}}.$

b) $\overrightarrow{a} = (1,2,3,4)^{\mathrm{T}}, \quad \overrightarrow{b} = (2,3,4,1)^{\mathrm{T}}, \quad \overrightarrow{c} = (3,4,1,2)^{\mathrm{T}}, \quad \overrightarrow{d} = (0,1,2,7)^{\mathrm{T}}.$

Řešení:

$$\begin{array}{rcl} \gamma = 0 & & \\ -\beta - 2\gamma + \delta = 0 & \Rightarrow & \beta = t \\ \alpha + 2\beta + 3\gamma = 0 & \Rightarrow & \alpha = -2t \end{array} \quad , \quad \text{např. pro } t = 1 \quad je \quad \begin{array}{rcr} \alpha & = & -2 \\ \beta & = & 1 \\ \gamma & = & 0 \\ \delta & = & 1 \end{array}$$

Našli jsme netriviální lineární kombinaci daných vektorů, která je rovna nulovému vektoru:

$$(-2)\cdot\overrightarrow{a} + 1\cdot\overrightarrow{b} + 0\cdot\overrightarrow{c} + 1\cdot\overrightarrow{d} = (0,0,0,0)^{\mathrm{T}},$$

a tedy vektory tvoří lineárně závislý systém.

Zpět

Příklad 1.2.1

Podle definice zjistěte, zda vektory tvoří lineárně závislý nebo lineárně nezávislý systém vektorů v R^4:

a) $\vec{a} = (2,1,-3,4)^{\mathrm{T}}, \quad \vec{b} = (1,3,-4,-2)^{\mathrm{T}}, \quad \vec{c} = (3,-1,-1,0)^{\mathrm{T}}.$

b) $\vec{a} = (1,2,3,4)^{\mathrm{T}}, \quad \vec{b} = (2,3,4,1)^{\mathrm{T}}, \quad \vec{c} = (3,4,1,2)^{\mathrm{T}}, \quad \vec{d} = (0,1,2,7)^{\mathrm{T}}.$

Maple:

```
> with(linalg):
> a := vector( [2,1,-3,4] ): b := vector( [1,3,-4,-2] ): c := vector(
[3,-1,-1,0] ): basis( {a, b, c} );
```

$$\{a,\ b,\ c\}$$

```
> eqns:= {2*alpha+beta+3*gamma=0,alpha+3*beta-gamma=0,
-3*alpha-4*beta-gamma=0,4*alpha-2*beta=0}:
> A:=genmatrix(eqns,[alpha,beta,gamma]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -3 & -4 & -1 \\ 4 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> koef:=vector([alpha,beta,gamma]);
```

$$koef := [\alpha,\ \beta,\ \gamma]$$

```
> assign(koef=linsolve(A,[0,0,0,0]));
> eval(koef);
```

$$[0,\ 0,\ 0]$$

Další

Příklad 1.2.1

Podle definice zjistěte, zda vektory tvoří lineárně závislý nebo lineárně nezávislý systém vektorů v R^4:

a) $\vec{a} = (2, 1, -3, 4)^T, \quad \vec{b} = (1, 3, -4, -2)^T, \quad \vec{c} = (3, -1, -1, 0)^T.$

b) $\vec{a} = (1, 2, 3, 4)^T, \quad \vec{b} = (2, 3, 4, 1)^T, \quad \vec{c} = (3, 4, 1, 2)^T, \quad \vec{d} = (0, 1, 2, 7)^T.$

Maple:

b)

```
> a := vector( [1,2,3,4] ): b := vector( [2,3,4,1] ): c := vector(
[3,4,1,2] ): d:=vector([0,1,2,7]): basis( {a, b, c,d} );
```

$$\{a,\ b,\ c\}$$

```
> eqns:= {alpha+2*beta+3*gamma=0,2*alpha+3*beta+4*gamma+delta=0,
3*alpha+4*beta+gamma+2*delta=0,4*alpha+beta+2*gamma+7*delta=0}:
> A:=genmatrix(eqns,[alpha,beta,gamma,delta]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

```
> ffgausselim(A);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Další

Příklad 1.2.1

Podle definice zjistěte, zda vektory tvoří lineárně závislý nebo lineárně nezávislý systém vektorů v R^4:

a) $\vec{a} = (2, 1, -3, 4)^{\mathrm{T}}, \quad \vec{b} = (1, 3, -4, -2)^{\mathrm{T}}, \quad \vec{c} = (3, -1, -1, 0)^{\mathrm{T}}.$

b) $\vec{a} = (1, 2, 3, 4)^{\mathrm{T}}, \quad \vec{b} = (2, 3, 4, 1)^{\mathrm{T}}, \quad \vec{c} = (3, 4, 1, 2)^{\mathrm{T}}, \quad \vec{d} = (0, 1, 2, 7)^{\mathrm{T}}.$

Maple:

```
> rank(A);
```

$$3$$

```
> koef:=vector([alpha,beta,gamma,delta]);
```

$$koef := [\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta]$$

```
> assign(koef=linsolve(A,[0,0,0,0]));
> eval(koef);
```

$$[-2\,\_t_1,\ \_t_1,\ 0,\ \_t_1]$$

```
> koefval:=t->(-2*t,t,0,t);
```

$$koefval := t \to (-2\,t,\ t,\ 0,\ t)$$

```
> koefval(1);
```

$$-2,\ 1,\ 0,\ 1$$

Zpět

Příklad 1.2.1

Podle definice zjistěte, zda vektory tvoří lineárně závislý nebo lineárně nezávislý systém vektorů v R^4:

a) $\vec{a} = (2, 1, -3, 4)^{\mathrm{T}}, \quad \vec{b} = (1, 3, -4, -2)^{\mathrm{T}}, \quad \vec{c} = (3, -1, -1, 0)^{\mathrm{T}}.$

b) $\vec{a} = (1, 2, 3, 4)^{\mathrm{T}}, \quad \vec{b} = (2, 3, 4, 1)^{\mathrm{T}}, \quad \vec{c} = (3, 4, 1, 2)^{\mathrm{T}}, \quad \vec{d} = (0, 1, 2, 7)^{\mathrm{T}}.$

Mathematica:

a)

$\boldsymbol{a = \{2, 1, -3, 4\}; b = \{1, 3, -4, -2\}; c = \{3, -1, -1, 0\};}$

$\mathbf{MatrixForm}[\boldsymbol{\alpha a + \beta b + \gamma c}] == \mathbf{MatrixForm}[\{\mathbf{0, 0, 0, 0}\}]$

$$\begin{pmatrix} 2\alpha + \beta + 3\gamma \\ \alpha + 3\beta - \gamma \\ -3\alpha - 4\beta - \gamma \\ 4\alpha - 2\beta \end{pmatrix} == \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{A} = \mathbf{Transpose}[\{\boldsymbol{a, b, c}\}];$

$\mathbf{MatrixForm}[\boldsymbol{A}]$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \\ -3 & -4 & -1 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Další

Příklad 1.2.1

Podle definice zjistěte, zda vektory tvoří lineárně závislý nebo lineárně nezávislý systém vektorů v R^4:

a) $\vec{a} = (2, 1, -3, 4)^{\mathrm{T}}, \quad \vec{b} = (1, 3, -4, -2)^{\mathrm{T}}, \quad \vec{c} = (3, -1, -1, 0)^{\mathrm{T}}.$

b) $\vec{a} = (1, 2, 3, 4)^{\mathrm{T}}, \quad \vec{b} = (2, 3, 4, 1)^{\mathrm{T}}, \quad \vec{c} = (3, 4, 1, 2)^{\mathrm{T}}, \quad \vec{d} = (0, 1, 2, 7)^{\mathrm{T}}.$

Mathematica:

$\{\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}\} = \textbf{LinearSolve}[\boldsymbol{A}, \{\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}\}]$

$\{0, 0, 0\}$

Vektory jsou lineárně nezávislé.

b)

$\boldsymbol{\alpha}$=.; $\boldsymbol{\beta}$=.; $\boldsymbol{\gamma}$=.; $\boldsymbol{\delta}$=.;

$\boldsymbol{a} = \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}\}; \boldsymbol{b} = \{\mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}, \mathbf{1}\}; \boldsymbol{c} = \{\mathbf{3}, \mathbf{4}, \mathbf{1}, \mathbf{2}\}; \boldsymbol{d} = \{\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{7}\};$

$\textbf{MatrixForm}[\boldsymbol{\alpha a} + \boldsymbol{\beta b} + \boldsymbol{\gamma c} + \boldsymbol{\delta d}] == \textbf{MatrixForm}[\{\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}\}]$

$$\begin{pmatrix} \alpha + 2\beta + 3\gamma \\ 2\alpha + 3\beta + 4\gamma + \delta \\ 3\alpha + 4\beta + \gamma + 2\delta \\ 4\alpha + \beta + 2\gamma + 7\delta \end{pmatrix} == \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{A} = \textbf{Transpose}[\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}\}];$

Další

Příklad 1.2.1

Podle definice zjistěte, zda vektory tvoří lineárně závislý nebo lineárně nezávislý systém vektorů v R^4:

a) $\vec{a} = (2, 1, -3, 4)^{\mathrm{T}}, \quad \vec{b} = (1, 3, -4, -2)^{\mathrm{T}}, \quad \vec{c} = (3, -1, -1, 0)^{\mathrm{T}}.$

b) $\vec{a} = (1, 2, 3, 4)^{\mathrm{T}}, \quad \vec{b} = (2, 3, 4, 1)^{\mathrm{T}}, \quad \vec{c} = (3, 4, 1, 2)^{\mathrm{T}}, \quad \vec{d} = (0, 1, 2, 7)^{\mathrm{T}}.$

Mathematica:

MatrixForm[A]

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

NullSpace[A]

$\{\{-2, 1, 0, 1\}\}$

$\boldsymbol{\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}} = $ **NullSpace[A][[1]]**

$\{-2, 1, 0, 1\}$

Vektory jsou lineárně závislé.

Zpět

Příklad 1.2.2

Ověřte, že vektory

$$\vec{a} = (-1,\ 4,\ 2, -5,\ 3)^{\mathrm{T}}, \quad \vec{b} = (\ 1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 4)^{\mathrm{T}}, \quad \vec{c} = (\ 3, -5, -2,\ 8,\ 7)^{\mathrm{T}}$$

jsou lineárně nezávislé, a vyjádřete vektor $\vec{v} = (1, -4, -2, 5, -3)^{\mathrm{T}}$ jako jejich lineární kombinaci.

Zpět

Příklad 1.2.2

Ověřte, že vektory

$$\overrightarrow{a} = (-1,\ 4,\ 2,-5,\ 3)^{\mathrm{T}}, \quad \overrightarrow{b} = (\ 1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 4)^{\mathrm{T}}, \quad \overrightarrow{c} = (\ 3,-5,-2,\ 8,\ 7)^{\mathrm{T}}$$

jsou lineárně nezávislé, a vyjádřete vektor $\overrightarrow{v} = (1, -4, -2, 5, -3)^{\mathrm{T}}$ jako jejich lineární kombinaci.

Výsledek:

$\overrightarrow{v} = (-1) \cdot \overrightarrow{a} + 0 \cdot \overrightarrow{b} + 0 \cdot \overrightarrow{c}\ .$

Zpět

Příklad 1.2.2

Ověřte, že vektory

$$\vec{a} = (-1,\ 4,\ 2, -5,\ 3)^{\mathrm{T}}, \quad \vec{b} = (\ 1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 4)^{\mathrm{T}}, \quad \vec{c} = (\ 3, -5, -2,\ 8,\ 7)^{\mathrm{T}}$$

jsou lineárně nezávislé, a vyjádřete vektor $\vec{v} = (1, -4, -2, 5, -3)^{\mathrm{T}}$ jako jejich lineární kombinaci.

Návod:

Z vektorů $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ sestavíme matici $\mathbf{A}$, kterou převedeme na horní trojúhelníkový tvar. Tři vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ jsou lineárně nezávislé právě když hodnost matice $\mathbf{A}$ je rovna 3. Koeficienty lineární kombinace určíme jako řešení nehomogenní soustavy lineárních rovnic.

Zpět

Příklad 1.2.2

Ověřte, že vektory

$$\vec{a} = (-1,\ 4,\ 2, -5,\ 3)^{\mathrm{T}}, \quad \vec{b} = (\ 1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 4)^{\mathrm{T}}, \quad \vec{c} = (\ 3, -5, -2,\ 8,\ 7)^{\mathrm{T}}$$

jsou lineárně nezávislé, a vyjádřete vektor $\vec{v} = (1, -4, -2, 5, -3)^{\mathrm{T}}$ jako jejich lineární kombinaci.

Řešení:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \vec{a}^{\mathrm{T}} \\ \vec{b}^{\mathrm{T}} \\ \vec{c}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 & -5 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 3 & -5 & -2 & 8 & 7 \end{pmatrix} \sim$$
$$\sim \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 & -5 & 3 \\ 0 & 5 & 2 & -5 & 7 \\ 0 & 7 & 4 & -7 & 16 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 & -5 & 3 \\ 0 & 5 & 2 & -5 & 7 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 31 \end{pmatrix}$$

Nejprve jsme k druhému řádku přičetli první a k třetímu řádku jsme přičetli trojnásobek prvního. Tím jsme vynulovali poddiagonální prvky prvního sloupce. Následně jsme k pětinásobku posledního řádku přičetli $(-7)-$mi násobek druhého řádku. Získali jsme matici $\mathbf{A}$ v horním trojúhelníkovém tvaru. Hodnost matice $\mathbf{A}$, $\mathrm{h}(\mathbf{A}) = 3$, a tedy tři vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ jsou lineárně nezávislé.
Na první pohled je v tomto případě vidět, že vektor $\vec{v}$ je opačný k vektoru $\vec{a}$. Z cvičných důvodů ale sestavíme a vyřešíme příslušnou nehomogenní soustavu lineárních rovnic pro určení koeficientů lineární kombinace.
Hledáme čísla α, β a γ tak, aby

$$\alpha \cdot (-1,\ 4,\ 2, -5,\ 3)^{\mathrm{T}} + \beta \cdot (\ 1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 4)^{\mathrm{T}} + \gamma \cdot (\ 3, -5, -2,\ 8,\ 7)^{\mathrm{T}} = (1, -4, -2, 5, -3)^{\mathrm{T}}.$$

Další

Příklad 1.2.2

Ověřte, že vektory

$$\vec{a} = (-1,\ 4,\ 2, -5,\ 3)^{\mathrm{T}}, \quad \vec{b} = (\ 1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 4)^{\mathrm{T}}, \quad \vec{c} = (\ 3, -5, -2,\ 8,\ 7)^{\mathrm{T}}$$

jsou lineárně nezávislé, a vyjádřete vektor $\vec{v} = (1, -4, -2, 5, -3)^{\mathrm{T}}$ jako jejich lineární kombinaci.

Řešení:

Po souřadnicích:

$$\begin{array}{rcrcrcr} -\alpha & + & \beta & + & \gamma & = & 1 \\ 4\alpha & + & \beta & - & 5\gamma & = & -4 \\ 2\alpha & & & - & 2\gamma & = & -2 \\ -5\alpha & & & + & 8\gamma & = & 5 \\ 3\alpha & + & 4\beta & + & 7\gamma & = & -3 \end{array}$$

Tuto soustavu vyřešíme Gaussovou eliminační metodou:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & -5 & -4 \\ 2 & 0 & -2 & -2 \\ -5 & 0 & 8 & 5 \\ 3 & 4 & 7 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 7 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & -5 & -7 & 0 \\ 0 & 7 & 16 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 31 & 0 \end{array}\right) \sim$$

Vynulování poddiagonálních prvků prvního sloupce: k druhému řádku jsme přičetli 4−násobek prvního, ke třetímu řádku jsme přičetli dvojnásobek prvního, ke čtvrtému řádku jsme přičetli (−5)−tinásobek prvního a k pátému řádku jsme přičetli trojnásobek prvního. Kdybychom nyní ke čtvrtému řádku přičetli druhý, dostaneme nulový vektor, čtvrtý řádek tedy vynecháme a vynulujeme poddiagonální prvky druhého sloupce.

Další

Příklad 1.2.2

Ověřte, že vektory

$$\vec{a} = (-1,\ 4,\ 2, -5,\ 3)^{\mathrm{T}}, \quad \vec{b} = (\ 1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 4)^{\mathrm{T}}, \quad \vec{c} = (\ 3, -5, -2,\ 8,\ 7)^{\mathrm{T}}$$

jsou lineárně nezávislé, a vyjádřete vektor $\vec{v} = (1, -4, -2, 5, -3)^{\mathrm{T}}$ jako jejich lineární kombinaci.

Řešení:

K pětinásobku třetího řádku přičteme (-2)násobek druhého, k pětinásobku čtvrtého řádku přičteme $(-7)-$mi násobek druhého. Kdybychom nyní k $(-6)-$ti násobku čtvrtého řádku přičetli 31násobek třetího, dostali bychom opět nulový vektor. Čtvrtý řádek tedy vynecháme. Dostaneme rozšířenou matici soustavy v horním trojúhelníkovém tvaru. Zpětným chodem Gaussovy eliminace dopočteme hledané koeficienty α, β, γ lineární kombinace.

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \end{array}\right) \implies \begin{array}{rcl} 6\gamma & = & 0 \\ 5\beta & = & 0 \\ -\alpha & = & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{rcr} \gamma & = & 0 \\ \beta & = & 0 \\ \alpha & = & -1 \end{array}$$

Tedy

$$\vec{v} = (-1) \cdot \vec{a} + 0 \cdot \vec{b} + 0 \cdot \vec{c}$$

Zpět

Příklad 1.2.2

Ověřte, že vektory

$$\vec{a} = (-1,\ 4,\ 2, -5,\ 3)^{\mathrm{T}}, \quad \vec{b} = (\ 1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 4)^{\mathrm{T}}, \quad \vec{c} = (\ 3, -5, -2,\ 8,\ 7)^{\mathrm{T}}$$

jsou lineárně nezávislé, a vyjádřete vektor $\vec{v} = (1, -4, -2, 5, -3)^{\mathrm{T}}$ jako jejich lineární kombinaci.

Maple:

```
> with(linalg):
> a := vector( [-1,4,2,-5,3] ): b := vector( [1,1,0,0,4] ): c :=
vector( [3,-5,-2,8,7] ): basis( {a, b, c} );
```

$$\{a,\ b,\ c\}$$

```
> A:=matrix(3,5,[-1,4,2,-5,3,1,1,0,0,4,3,-5,-2,8,7]);
```

$$A := \begin{bmatrix} -1 & 4 & 2 & -5 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 3 & -5 & -2 & 8 & 7 \end{bmatrix}$$

```
> ffgausselim(A);
```

$$\begin{bmatrix} -1 & 4 & 2 & -5 & 3 \\ 0 & -5 & -2 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & -6 & 0 & -31 \end{bmatrix}$$

```
> rank(A);
```

$$3$$

Další

Příklad 1.2.2

Ověřte, že vektory

$$\vec{a} = (-1,\ 4,\ 2, -5,\ 3)^{\mathrm{T}}, \quad \vec{b} = (\ 1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 4)^{\mathrm{T}}, \quad \vec{c} = (\ 3, -5, -2,\ 8,\ 7)^{\mathrm{T}}$$

jsou lineárně nezávislé, a vyjádřete vektor $\vec{v} = (1, -4, -2, 5, -3)^{\mathrm{T}}$ jako jejich lineární kombinaci.

Maple:

```
> eqns:=
{-alpha+beta+3*gamma=1,4*alpha+beta-5*gamma=-4,2*alpha-2*gamma=-2,
-5*alpha+8*gamma=5,3*alpha+4*beta+7*gamma=-3}:
```

```
> B:=genmatrix(eqns,[alpha,beta,gamma]);
```

$$B := \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & -5 \\ 2 & 0 & -2 \\ -5 & 0 & 8 \\ 3 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

```
> v:=vector([1,-4,-2,5,-3]);
```

$$v := [1,\ -4,\ -2,\ 5,\ -3]$$

```
> C:=concat(B,v);
```

$$C := \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & -5 & -4 \\ 2 & 0 & -2 & -2 \\ -5 & 0 & 8 & 5 \\ 3 & 4 & 7 & -3 \end{bmatrix}$$

Další

Příklad 1.2.2

Ověřte, že vektory

$$\vec{a} = (-1,\ 4,\ 2, -5,\ 3)^{\mathrm{T}}, \quad \vec{b} = (\ 1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 4)^{\mathrm{T}}, \quad \vec{c} = (\ 3, -5, -2,\ 8,\ 7)^{\mathrm{T}}$$

jsou lineárně nezávislé, a vyjádřete vektor $\vec{v} = (1, -4, -2, 5, -3)^{\mathrm{T}}$ jako jejich lineární kombinaci.

Maple:

```
> ffgausselim(C);
```

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -5 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> backsub(%);
```

$$[-1,\ 0,\ 0]$$

```
> koef:=vector([alpha,beta,gamma]);
```

$$koef := [\alpha,\ \beta,\ \gamma]$$

```
> assign(koef=linsolve(B,v));
> alpha:=koef[1];
```

$$\alpha := -1$$

```
> beta:=koef[2];
```

$$\beta := 0$$

Další

Příklad 1.2.2

Ověřte, že vektory

$$\vec{a} = (-1,\ 4,\ 2, -5,\ 3)^{\mathrm{T}}, \quad \vec{b} = (\ 1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 4)^{\mathrm{T}}, \quad \vec{c} = (\ 3, -5, -2,\ 8,\ 7)^{\mathrm{T}}$$

jsou lineárně nezávislé, a vyjádřete vektor $\vec{v} = (1, -4, -2, 5, -3)^{\mathrm{T}}$ jako jejich lineární kombinaci.

Maple:

```
> gama:=koef[3];
```

$$gama := 0$$

```
> alpha*a+beta*b+gama*c;
```

$$-a$$

```
> evalm(v-alpha*a+beta*b+gama*c);
```

$$[0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0]$$

Zpět

Příklad 1.2.2

Ověřte, že vektory

$$\overrightarrow{a} = (-1,\ 4,\ 2, -5,\ 3)^{\mathrm{T}}, \quad \overrightarrow{b} = (\ 1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 4)^{\mathrm{T}}, \quad \overrightarrow{c} = (\ 3, -5, -2,\ 8,\ 7)^{\mathrm{T}}$$

jsou lineárně nezávislé, a vyjádřete vektor $\overrightarrow{v} = (1, -4, -2, 5, -3)^{\mathrm{T}}$ jako jejich lineární kombinaci.

Mathematica:

$\boldsymbol{a = \{-1, 4, 2, -5, 3\}; b = \{0, -5, -2, 5, -7\}; c = \{0, 0, -6, 0, -31\};}$

$\boldsymbol{A = \{a, b, c\};}$

MatrixForm[A]

$$\begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 & -5 & 3 \\ 0 & -5 & -2 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & -6 & 0 & -31 \end{pmatrix}$$

MatrixForm[RowReduce[A]]

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & \frac{14}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{31}{6} \end{pmatrix}$$

MatrixRank[A]

3

Vektory jsou tedy lineárně nezávislé.

Příklad 1.2.2

Ověřte, že vektory

$$\vec{a} = (-1,\ 4,\ 2, -5,\ 3)^{\mathrm{T}}, \quad \vec{b} = (\ 1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 4)^{\mathrm{T}}, \quad \vec{c} = (\ 3, -5, -2,\ 8,\ 7)^{\mathrm{T}}$$

jsou lineárně nezávislé, a vyjádřete vektor $\vec{v} = (1, -4, -2, 5, -3)^{\mathrm{T}}$ jako jejich lineární kombinaci.

Mathematica:

$\boldsymbol{v = \{1, -4, -2, 5, -3\};}$

$\boldsymbol{\{\alpha, \beta, \gamma\} = \mathbf{LinearSolve[Transpose[}A\mathbf{]}, v\mathbf{]}}$

$\{-1, 0, 0\}$

Tedy

$$\vec{v} = (-1) \cdot \vec{a} + 0 \cdot \vec{b} + 0 \cdot \vec{c}$$

Zpět

Příklad 1.2.3

Nechť vektory $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ tvoří lineárně nezávislý systém vektorů ve vektorovém prostoru $\mathcal{V}$. Určete, zda následující systémy vektorů jsou lineárně závislé nebo nezávislé:

a) $\overrightarrow{u}, \ \overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}, \ \overrightarrow{u}+\overrightarrow{w},$

b) $\overrightarrow{u}-2\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}, \ 3\overrightarrow{u}-\overrightarrow{w}, \ \overrightarrow{u}+4\overrightarrow{v}-3\overrightarrow{w}.$

?

Zpět

Příklad 1.2.3

Nechť vektory $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ tvoří lineárně nezávislý systém vektorů ve vektorovém prostoru $\mathcal{V}$. Určete, zda následující systémy vektorů jsou lineárně závislé nebo nezávislé:

a) $\overrightarrow{u}, \ \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}, \ \overrightarrow{u} + \overrightarrow{w},$

b) $\overrightarrow{u} - 2\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}, \ 3\overrightarrow{u} - \overrightarrow{w}, \ \overrightarrow{u} + 4\overrightarrow{v} - 3\overrightarrow{w}.$

Výsledek:

a) vektory tvoří lineárně nezávislý systém vektorů

b) vektory tvoří lineárně závislý systém vektorů.

Zpět

Příklad 1.2.3

Nechť vektory $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ tvoří lineárně nezávislý systém vektorů ve vektorovém prostoru $\mathcal{V}$. Určete, zda následující systémy vektorů jsou lineárně závislé nebo nezávislé:
a) $\overrightarrow{u}, \ \overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}, \ \overrightarrow{u}+\overrightarrow{w},$
b) $\overrightarrow{u}-2\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}, \ 3\overrightarrow{u}-\overrightarrow{w}, \ \overrightarrow{u}+4\overrightarrow{v}-3\overrightarrow{w}.$

Návod:

Hledáme koeficienty lineární kombinace daných vektorů, která dává nulový vektor. Jsou-li všechny tyto koeficienty nulové (tzv. triviální lineární kombinace), systém vektorů je lineárně nezávislý. Je-li alespoň jeden koeficient nenulový, pak systém vektorů je lineárně závislý.

Zpět

Příklad 1.2.3

Nechť vektory $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ tvoří lineárně nezávislý systém vektorů ve vektorovém prostoru $\mathcal{V}$. Určete, zda následující systémy vektorů jsou lineárně závislé nebo nezávislé:
a) $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{w}$,
b) $\overrightarrow{u}-2\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}$, $3\overrightarrow{u}-\overrightarrow{w}$, $\overrightarrow{u}+4\overrightarrow{v}-3\overrightarrow{w}$.

Řešení:

Nejprve si uvědomme, že je-li nějaká lineární kombinace lineárně nezávislého systému vektorů rovna nulovému vektoru, pak vždy všechny koeficienty této lineární kombinace jsou nulové.
a)
Hledáme čísla α, β, γ tak, aby

$$\alpha\cdot\overrightarrow{u}+\beta\cdot(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})+\gamma\cdot(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{w})=\overrightarrow{0},$$

kde $\overrightarrow{0}$ je nulový prvek vektorového prostoru $\mathcal{V}$. Upravíme rovnici na tvar

$$(\alpha+\beta+\gamma)\cdot\overrightarrow{u}+\beta\cdot\overrightarrow{v}+\gamma\cdot\overrightarrow{w}=\overrightarrow{0}.$$

Toto je lineární kombinace vektorů $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$, která dává nulový vektor. Protože vektory $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ tvoří lineárně nezávislý systém, musí být všechny koeficienty této lineární kombinace nulové:

$$(\alpha+\beta+\gamma)=0,\qquad \beta=0,\qquad \gamma=0.$$

Dostáváme $\alpha=\beta=\gamma=0$, a tedy i vektory $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{w}$ tvoří lineárně nezávislý systém vektorů.

Další

Příklad 1.2.3

Nechť vektory $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ tvoří lineárně nezávislý systém vektorů ve vektorovém prostoru $\mathcal{V}$. Určete, zda následující systémy vektorů jsou lineárně závislé nebo nezávislé:
a) $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{w}$,
b) $\overrightarrow{u}-2\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}$, $3\overrightarrow{u}-\overrightarrow{w}$, $\overrightarrow{u}+4\overrightarrow{v}-3\overrightarrow{w}$.

Řešení:

b)
Hledáme čísla α, β, γ tak, aby

$$\alpha\cdot(\overrightarrow{u}-2\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w})+\beta\cdot(3\overrightarrow{u}-\overrightarrow{w})+\gamma\cdot(\overrightarrow{u}+4\overrightarrow{v}-3\overrightarrow{w})=\overrightarrow{0}.$$

Neboli

$$(\alpha+3\beta+\gamma)\cdot\overrightarrow{u}+(-2\alpha+4\gamma)\cdot\overrightarrow{v}+(\alpha-\beta-3\gamma)\cdot\overrightarrow{w}=\overrightarrow{0}.$$

Protože vektory $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ tvoří lineárně nezávislý systém, je jediná lineární kombinace, která dává nulový vektor, triviální, tj. všechny koeficienty této lineární kombinace jsou nulové. Pro α, β, γ tak dostáváme homogenní soustavu lineárních algebraických rovnic:

$$\alpha+3\beta+\gamma=0,\quad -2\alpha+4\gamma=0,\quad \alpha-\beta-3\gamma.$$

Soustavu vyřešíme:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1\\ -2 & 0 & 4\\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1\\ 0 & 6 & 6\\ 0 & -4 & -4 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1\\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Další

Příklad 1.2.3

Nechť vektory $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ tvoří lineárně nezávislý systém vektorů ve vektorovém prostoru $\mathcal{V}$. Určete, zda následující systémy vektorů jsou lineárně závislé nebo nezávislé:
a) $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{w}$,
b) $\overrightarrow{u}-2\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}$, $3\overrightarrow{u}-\overrightarrow{w}$, $\overrightarrow{u}+4\overrightarrow{v}-3\overrightarrow{w}$.

Řešení:

K druhému řádku jsme přičetli dvojnásobek prvního, od třetího řádku jsme odečetli první, pak jsme vynechali třetí řádek a druhý jsme vydělili šesti. Matice soustavy má hodnost 2, počet neznámých je 3, podle Frobeniovy věty má soustava nekonečně mnoho řešení. Řešení, které závisí na jednom parametru $(3-2=1)$, získáme zpětným chodem Gaussovy eliminace. Položíme $\gamma := \mathrm{t}$ a dopočteme

$$\begin{aligned} \beta+\gamma=0 \quad &\Rightarrow \quad \beta=-\mathrm{t} \\ \alpha+3\beta+\gamma=0 \quad &\Rightarrow \quad \alpha=\ 2\mathrm{t} \end{aligned}$$

Např. pro $\mathrm{t}=1$ dostaneme $\alpha=2,\ \beta=-1,\ \gamma=1$. Našli jsme tedy netriviální lineární kombinaci vektorů $\overrightarrow{u}-2\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}$, $3\overrightarrow{u}-\overrightarrow{w}$, $\overrightarrow{u}+4\overrightarrow{v}-3\overrightarrow{w}$, která dává nulový vektor, a tedy vektory $\overrightarrow{u}-2\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}$, $3\overrightarrow{u}-\overrightarrow{w}$, $\overrightarrow{u}+4\overrightarrow{v}-3\overrightarrow{w}$ tvoří lineárně závislý systém.

Zpět

Příklad 1.2.3

Nechť vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ tvoří lineárně nezávislý systém vektorů ve vektorovém prostoru $\mathcal{V}$. Určete, zda následující systémy vektorů jsou lineárně závislé nebo nezávislé:
a) $\vec{u}$, $\vec{u}+\vec{v}$, $\vec{u}+\vec{w}$,
b) $\vec{u}-2\vec{v}+\vec{w}$, $3\vec{u}-\vec{w}$, $\vec{u}+4\vec{v}-3\vec{w}$.

Maple:

```
> with(linalg):
> collect(a*u+b*(u+v)+c*(u+w),u);
```

$$(a+b+c)\,u+b\,v+c\,w$$

```
> eqns:={a+b+c=0,b=0,c=0};
```

$$eqns := \{a+b+c=0,\ b=0,\ c=0\}$$

```
> A := genmatrix(eqns, [a,b,c]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> linsolve(A,[0,0,0]);
```

$$[0,\ 0,\ 0]$$

b)

```
> collect(a*(u-2*v+w)+b*(3*u-w)+c*(u+4*v-3*w),u);
```

$$(a+3\,b+c)\,u+a\,(-2\,v+w)-b\,w+c\,(4\,v-3\,w)$$

```
> collect(a*(-2*v+w)-b*w+c*(4*v-3*w),v);
```

$$(-2\,a+4\,c)\,v+a\,w-b\,w-3\,c\,w$$

Další

Příklad 1.2.3

Nechť vektory $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ tvoří lineárně nezávislý systém vektorů ve vektorovém prostoru $\mathcal{V}$. Určete, zda následující systémy vektorů jsou lineárně závislé nebo nezávislé:
a) $\overrightarrow{u}, \ \overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}, \ \overrightarrow{u}+\overrightarrow{w},$
b) $\overrightarrow{u}-2\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}, \ 3\overrightarrow{u}-\overrightarrow{w}, \ \overrightarrow{u}+4\overrightarrow{v}-3\overrightarrow{w}.$

Maple:

```
> collect(a*w-b*w-3*c*w,w);
```

$$(a-b-3\,c)\,w$$

```
> res:=(a+3*b+c)*u+(-2*a+4*c)*v+(a-b-3*c)*w;
```

$$res := (a+3\,b+c)\,u+(-2\,a+4\,c)\,v+(a-b-3\,c)\,w$$

```
> eqns:={a+3*b+c=0,-2*a+4*c=0,a-b-3*c=0};
```

$$eqns := \{a+3\,b+c=0,\ -2\,a+4\,c=0,\ a-b-3\,c=0\}$$

```
> A := genmatrix(eqns, [a,b,c]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

```
> ffgausselim(A);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Další

Příklad 1.2.3

Nechť vektory $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ tvoří lineárně nezávislý systém vektorů ve vektorovém prostoru $\mathcal{V}$. Určete, zda následující systémy vektorů jsou lineárně závislé nebo nezávislé:

a) $\overrightarrow{u}, \ \overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}, \ \overrightarrow{u}+\overrightarrow{w},$

b) $\overrightarrow{u}-2\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}, \ 3\overrightarrow{u}-\overrightarrow{w}, \ \overrightarrow{u}+4\overrightarrow{v}-3\overrightarrow{w}.$

Maple:

```
> linsolve(A,[0,0,0]);
```

$$[2\,\_t_1,\ -\_t_1,\ \_t_1]$$

```
> koef:=t->(2*t,-t,t);
```

$$koef := t \to (2\,t,\ -t,\ t)$$

```
> koef(1);
```

$$2,\ -1,\ 1$$

Zpět

Příklad 1.2.3

Nechť vektory $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ tvoří lineárně nezávislý systém vektorů ve vektorovém prostoru $\mathcal{V}$. Určete, zda následující systémy vektorů jsou lineárně závislé nebo nezávislé:
a) $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{w}$,
b) $\overrightarrow{u}-2\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}$, $3\overrightarrow{u}-\overrightarrow{w}$, $\overrightarrow{u}+4\overrightarrow{v}-3\overrightarrow{w}$.

Mathematica:

a)
$\mathbf{Collect}[\boldsymbol{au + b(u+v) + c(u+w), u}]$

$(a+b+c)u+bv+cw$

$\mathbf{Solve}[\{\boldsymbol{a+b+c == 0, b{==}0, c == 0}\}, \{\boldsymbol{a, b, c}\}]$

$\{\{a\to 0, b\to 0, c\to 0\}\}$

Vektory jsou lineárně nezávislé.

b)
$\mathbf{Collect}[\boldsymbol{a(u-2*v+w)+b(3*u-w)+c(u+4*v-3*w)},\{\boldsymbol{u,v,w}\}]$

$(a+3b+c)u+(-2a+4c)v+(a-b-3c)w$

$\mathbf{Solve}[\{\boldsymbol{a+3b+c == 0, -2a+4c{==}0, a-b-3c == 0}\},\{\boldsymbol{a,b,c}\}]$

Solve::svars :
Equations may not give solutions for all solve variables. More. . .

$\{\{a\to 2c, b\to -c\}\}$

Vektory jsou lineárně závislé (můžeme volit $c=1$ potom $b=-1$ a $a=2$).

Zpět

Příklad 1.2.4

Rozhodněte, zda systém funkcí f, g, h ve vektorovém prostoru funkcí spojitých na $\mathbb{R}$, je lineárně závislý nebo nezávislý.

a) $f(x) = 2x - 1,\ g(x) = x + 1,\ h(x) = -x + 2;$

b) $f(x) = \sin x,\ g(x) = \cos x,\ h(x) = \sin x\ \cos x.$

?

Zpět

Příklad 1.2.4

Rozhodněte, zda systém funkcí f, g, h ve vektorovém prostoru funkcí spojitých na $\mathbb{R}$, je lineárně závislý nebo nezávislý.

a) $f(x) = 2x - 1,\ g(x) = x + 1,\ h(x) = -x + 2;$

b) $f(x) = \sin x,\ g(x) = \cos x,\ h(x) = \sin x\, \cos x.$

Výsledek:

a) Systém je lineárně závislý.
b) Systém je lineárně nezávislý.

Zpět

Příklad 1.2.4

Rozhodněte, zda systém funkcí f, g, h ve vektorovém prostoru funkcí spojitých na $\mathbb{R}$, je lineárně závislý nebo nezávislý.

a) $f(x) = 2x - 1,\ g(x) = x + 1,\ h(x) = -x + 2;$

b) $f(x) = \sin x,\ g(x) = \cos x,\ h(x) = \sin x\ \cos x.$

Návod:

Lineární závislost systému funkcí lze zjistit podle definice (hledáme koeficienty lineární kombinace, která dává nulový prvek daného vektorového prostoru, tj. v tomto případě konstantní nulová funkce na celém $\mathbb{R}$) nebo pomocí Wronskiánu.

Zpět

Příklad 1.2.4

Rozhodněte, zda systém funkcí f, g, h ve vektorovém prostoru funkcí spojitých na $\mathbb{R}$, je lineárně závislý nebo nezávislý.

a) $f(x) = 2x - 1,\ g(x) = x + 1,\ h(x) = -x + 2;$

b) $f(x) = \sin x,\ g(x) = \cos x,\ h(x) = \sin x\, \cos x.$

Řešení:

a) Podle definice:
Hledáme čísla α, β, γ tak, aby

$$\alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x) + \gamma \cdot h(x) = \mathrm{o}(x) \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

kde $o(x)$ je konstantní nulová funkce na $\mathbb{R}$ - nulový prvek prostoru spojitých funkcí na $\mathbb{R}$:

$$\alpha \cdot (2x - 1) + \beta \cdot (x + 1) + \gamma \cdot (-x + 2) = 0.$$

Po úpravě:

$$(2\alpha + \beta - \gamma) \cdot x + (-\alpha + \beta + 2\gamma) = 0.$$

Funkce vlevo je polynom prvního stupně. Ten je roven nulové funkci právě když všechny jeho koeficienty jsou nulové. Dostáváme homogenní soustavu lineárních rovnic, kterou vyřešíme:

$$\begin{aligned} 2\alpha + \beta - \gamma &= 0 \\ -\alpha + \beta + 2\gamma &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Soustava má nekonečně mnoho řešení (hodnost matice soustavy je 2, počet neznámých 3, jednu neznámou volíme jako parametr):

$$\begin{aligned} \alpha &= \mathrm{t} \\ \beta &= -\mathrm{t} \\ \gamma &= \mathrm{t} \end{aligned}\ , \quad \text{např. pro } \mathrm{t} = 1 \text{ je} \quad \begin{aligned} \alpha &= 1 \\ \beta &= -1 \\ \gamma &= 1 \end{aligned}\ .$$

Další

Příklad 1.2.4

Rozhodněte, zda systém funkcí f, g, h ve vektorovém prostoru funkcí spojitých na $\mathbb{R}$, je lineárně závislý nebo nezávislý.
a) $f(x) = 2x - 1,\; g(x) = x + 1,\; h(x) = -x + 2;$
b) $f(x) = \sin x,\; g(x) = \cos x,\; h(x) = \sin x\,\cos x.$

Řešení:

Našli jsme netriviální lineární kombinaci, která dává nulovou funkci, a tedy systém funkcí $2x - 1,\; x + 1, -x + 2$ je lineárně závislý.
Pomocí Wronskiánu:

$$W_{f,g,h}(x) = \begin{pmatrix} f(x) & g(x) & h(x) \\ f'(x) & g'(x) & h'(x) \\ f''(x) & g''(x) & h''(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x-1 & x+1 & -x+2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Determinant této matice je roven nule pro všechna $x \in \mathbb{R}$, nelze tedy pomocí Wronskiánu o lineární závislosti nebo nezávislosti daného systému rozhodnout.
b) Podle definice:
Hledáme čísla α, β, γ tak, aby

$$\alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x) + \gamma \cdot h(x) = \mathrm{o}(x) \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

kde $o(x)$ je konstantní nulová funkce na $\mathbb{R}$ - nulový prvek prostoru spojitých funkcí na $\mathbb{R}$:

$$\alpha \cdot \sin x + \beta \cdot \cos x + \gamma \cdot \sin x \cos x = 0.$$

Nyní musíme vyřešit tuto složitou goniometrickou rovnici. Zkusíme, zda pomocí Wronskiánu nezískáme v tomto případě odpověď rychleji.

Další

Příklad 1.2.4

Rozhodněte, zda systém funkcí f, g, h ve vektorovém prostoru funkcí spojitých na $\mathbb{R}$, je lineárně závislý nebo nezávislý.

a) $f(x) = 2x - 1,\ g(x) = x + 1,\ h(x) = -x + 2;$

b) $f(x) = \sin x,\ g(x) = \cos x,\ h(x) = \sin x\ \cos x.$

Řešení:

Pomocí Wronskiánu:

$$W_{f,g,h}(x) = \begin{pmatrix} f(x) & g(x) & h(x) \\ f'(x) & g'(x) & h'(x) \\ f''(x) & g''(x) & h''(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin x & \cos x & \sin x \cos x \\ \cos x & -\sin x & \cos(2x) \\ -\sin x & -\cos x & -2\sin(2x) \end{pmatrix}.$$

Vypočteme determinant rozvojem podle posledního sloupce:

$$\det W_{f,g,h}(x) = \sin x \cos x \begin{vmatrix} \cos x & -\sin x \\ -\sin x & -\cos x \end{vmatrix} - \cos(2x) \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ -\sin x & -\cos x \end{vmatrix} -$$

$$-2\sin(2x) \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix} = \sin x \cos x(-\cos^2 x - \sin^2 x) -$$

$$\cos(2x)(-\sin x \cos x + \sin x \cos x) - 2\sin(2x)(-\sin^2 x - \cos^2 x) = 3 \sin x \cos x.$$

Např. pro $x = \frac{\pi}{4}$ je $W_{f,g,h}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3}{2} \neq 0$. Našli jsme tedy bod, ve kterém je Wronskián nenulový, a tedy funkce $\sin x$, $\cos x$, $\sin x\ \cos x$ tvoří lineárně nezávislý systém v prostoru funkcí spojitých na $\mathbb{R}$.

Zpět

Příklad 1.2.4

Rozhodněte, zda systém funkcí f, g, h ve vektorovém prostoru funkcí spojitých na $\mathbb{R}$, je lineárně závislý nebo nezávislý.

a) $f(x) = 2x - 1,\ g(x) = x + 1,\ h(x) = -x + 2;$

b) $f(x) = \sin x,\ g(x) = \cos x,\ h(x) = \sin x\ \cos x.$

Maple:

```
> with(linalg):
> f:=x-> 2*x-1;
```

$$f := x \to 2\,x - 1$$

```
> g:=x->x+1;
```

$$g := x \to x + 1$$

```
> h:=x->-x+2;
```

$$h := x \to -x + 2$$

```
> comb:=x-> a*f(x)+b*g(x)+c*h(x);
```

$$comb := x \to a\,\mathrm{f}(x) + b\,\mathrm{g}(x) + c\,\mathrm{h}(x)$$

```
> collect(comb(x),x);
```

$$(2\,a + b - c)\,x - a + b + 2\,c$$

```
> A:=matrix(2,3,[2,1,-1,-1,1,2]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

```
> ffgausselim(A);
```

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

Další

Příklad 1.2.4

Rozhodněte, zda systém funkcí f, g, h ve vektorovém prostoru funkcí spojitých na $\mathbb{R}$, je lineárně závislý nebo nezávislý.

a) $f(x) = 2x - 1,\ g(x) = x + 1,\ h(x) = -x + 2;$

b) $f(x) = \sin x,\ g(x) = \cos x,\ h(x) = \sin x\ \cos x.$

Maple:

```
> v:=vector([0,0]);
```

$$v := [0,\ 0]$$

```
> linsolve(A,v);
```

$$[\_t_1,\ -\_t_1,\ \_t_1]$$

```
> koef:=t->(t,-t,t);
```

$$koef := t \to (t,\ -t,\ t)$$

```
> koef(1);
```

$$1,\ -1,\ 1$$

```
> B:=vector([f(x),g(x),h(x)]);
```

$$B := [2\,x - 1,\ x + 1,\ -x + 2]$$

```
> Wr := wronskian(B,x);
```

$$Wr := \begin{bmatrix} 2\,x - 1 & x + 1 & -x + 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> det(Wr);
```

$$0$$

Další

Příklad 1.2.4

Rozhodněte, zda systém funkcí f, g, h ve vektorovém prostoru funkcí spojitých na $\mathbb{R}$, je lineárně závislý nebo nezávislý.

a) $f(x) = 2x - 1,\ g(x) = x + 1,\ h(x) = -x + 2;$

b) $f(x) = \sin x,\ g(x) = \cos x,\ h(x) = \sin x\ \cos x.$

Maple:

b)

```
> f:=x-> sin(x);
```

$$f := x \to \sin(x)$$

```
> g:=x-> cos(x);
```

$$g := x \to \cos(x)$$

```
> h:=x->sin(x)*cos(x);
```

$$h := x \to \sin(x)\cos(x)$$

```
> comb:=x-> a*f(x)+b*g(x)+c*h(x);
```

$$comb := x \to a\,\mathrm{f}(x) + b\,\mathrm{g}(x) + c\,\mathrm{h}(x)$$

```
> comb(x);
```

$$a\sin(x) + b\cos(x) + c\sin(x)\cos(x)$$

```
> B:=vector([f(x),g(x),h(x)]);
```

$$B := [\sin(x),\ \cos(x),\ \sin(x)\cos(x)]$$

```
> Wr := wronskian(B,x);
```

$$Wr := \begin{bmatrix} \sin(x) & \cos(x) & \sin(x)\cos(x) \\ \cos(x) & -\sin(x) & \cos(x)^2 - \sin(x)^2 \\ -\sin(x) & -\cos(x) & -4\sin(x)\cos(x) \end{bmatrix}$$

Další

Příklad 1.2.4

Rozhodněte, zda systém funkcí f, g, h ve vektorovém prostoru funkcí spojitých na $\mathbb{R}$, je lineárně závislý nebo nezávislý.

a) $f(x) = 2x - 1,\ g(x) = x + 1,\ h(x) = -x + 2;$

b) $f(x) = \sin x,\ g(x) = \cos x,\ h(x) = \sin x\ \cos x.$

Maple:

```
> det(Wr);
```

$$3\sin(x)^3\cos(x) + 3\cos(x)^3\sin(x)$$

```
> simplify(%);
```

$$3\sin(x)\cos(x)$$

```
> detWr:=x->3*sin(x)*cos(x);
```

$$detWr := x \to 3\sin(x)\cos(x)$$

```
> detWr(Pi/4);
```

$$\frac{3}{2}$$

Zpět

Příklad 1.2.4

Rozhodněte, zda systém funkcí f, g, h ve vektorovém prostoru funkcí spojitých na $\mathbb{R}$, je lineárně závislý nebo nezávislý.

a) $f(x) = 2x - 1,\ g(x) = x + 1,\ h(x) = -x + 2;$

b) $f(x) = \sin x,\ g(x) = \cos x,\ h(x) = \sin x\, \cos x.$

Mathematica:

a)

f[x_] = 2x − 1; g[x_] = x + 1; h[x_] = −x + 2;

W = {{f[x], g[x], h[x]}, {D[f[x], x], D[g[x], x], D[h[x], x]},
{D[f[x], {x, 2}], D[g[x], {x, 2}], D[h[x], {x, 2}]}};

MatrixForm[W]

$$\begin{pmatrix} -1+2x & 1+x & 2-x \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Det[W]

0

Determinant je rovný nule, systém je lineárně závislý.

b)

f[x_] = Sin[x]; g[x_] = Cos[x]; h[x_] = Sin[x]Cos[x];

W = {{f[x], g[x], h[x]}, {D[f[x], x], D[g[x], x], D[h[x], x]},
{D[f[x], {x, 2}], D[g[x], {x, 2}], D[h[x], {x, 2}]}};

Další

Příklad 1.2.4

Rozhodněte, zda systém funkcí f, g, h ve vektorovém prostoru funkcí spojitých na $\mathbb{R}$, je lineárně závislý nebo nezávislý.

a) $f(x) = 2x - 1,\ g(x) = x + 1,\ h(x) = -x + 2;$

b) $f(x) = \sin x,\ g(x) = \cos x,\ h(x) = \sin x\ \cos x.$

Mathematica:

MatrixForm[W]

$$\begin{pmatrix} \mathrm{Sin}[x] & \mathrm{Cos}[x] & \mathrm{Cos}[x]\mathrm{Sin}[x] \\ \mathrm{Cos}[x] & -\mathrm{Sin}[x] & \mathrm{Cos}[x]^2 - \mathrm{Sin}[x]^2 \\ -\mathrm{Sin}[x] & -\mathrm{Cos}[x] & -4\mathrm{Cos}[x]\mathrm{Sin}[x] \end{pmatrix}$$

Simplify[Det[W]]

$3\mathrm{Cos}[x]\mathrm{Sin}[x]$

Determinant je různý od nuly, systém je lineárně nezávislý.

Zpět

Báze a dimenze lineárního prostoru

- **Příklad 1.3.1** Napište libovolnou bázi prostoru $\mathbb{R}^4$, která obsahuje vektor $\overrightarrow{v} = (1,1,1,1)^{\mathrm{T}}$ a vyjádřete vektor $\overrightarrow{a} = (2,-2,1,3)^{\mathrm{T}}$ pomocí této báze.
- **Příklad 1.3.2** Ověřte, že vektory $\overrightarrow{a} = (1,2,1,1)^{\mathrm{T}}$, $\overrightarrow{b} = (2,-1,1,0)^{\mathrm{T}}$, $\overrightarrow{c} = (1,1,2,2)^{\mathrm{T}}$ jsou lineárně nezávislé, a napište jeden další vektor prostoru $\mathbb{R}^4$, který leží v podprostoru, jehož bází jsou vektory $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$, a jeden vektor prostoru $\mathbb{R}^4$, který neleží v podprostoru, jehož bází jsou vektory $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$.
- **Příklad 1.3.3** Určete dimenzi nejmenšího podprostoru prostoru $\mathbb{R}^5$, ve kterém leží vektory
$$\overrightarrow{a} = (4,2,0,-1,1)^{\mathrm{T}},\ \overrightarrow{b} = (-3,1,-1,2,-2)^{\mathrm{T}},\ \overrightarrow{c} = (-2,4,-2,3,-3)^{\mathrm{T}}.$$
Které z vektorů $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ tvoří bázi tohoto podprostoru?

Zpět

Příklad 1.3.1

Napište libovolnou bázi prostoru $\mathbb{R}^4$, která obsahuje vektor $\overrightarrow{v} = (1,1,1,1)^{\mathrm{T}}$ a vyjádřete vektor $\overrightarrow{a} = (2,-2,1,3)^{\mathrm{T}}$ pomocí této báze.

Zpět

Příklad 1.3.1

Napište libovolnou bázi prostoru $\mathbb{R}^4$, která obsahuje vektor $\overrightarrow{v} = (1,1,1,1)^{\mathrm{T}}$ a vyjádřete vektor $\overrightarrow{a} = (2,-2,1,3)^{\mathrm{T}}$ pomocí této báze.

Výsledek:

Hledaná báze je například tvořena vektory

$$\overrightarrow{v} = (1,1,1,1)^{\mathrm{T}},\ \overrightarrow{e_2} = (0,1,0,0)^{\mathrm{T}},\ \overrightarrow{e_3} = (0,0,1,0)^{\mathrm{T}},\ \overrightarrow{e_4} = (0,0,0,1)^{\mathrm{T}},$$

$$\overrightarrow{a} = 2\cdot\overrightarrow{v} + (-4)\cdot\overrightarrow{e_2} + (-1)\cdot\overrightarrow{e_3} + 1\cdot\overrightarrow{e_4}.$$

Zpět

Příklad 1.3.1

Napište libovolnou bázi prostoru $\mathbb{R}^4$, která obsahuje vektor $\overrightarrow{v} = (1,1,1,1)^{\mathrm{T}}$ a vyjádřete vektor $\overrightarrow{a} = (2,-2,1,3)^{\mathrm{T}}$ pomocí této báze.

Návod:

Protože hledáme bázi prostoru $\mathbb{R}^4$, musíme najít systém čtyř lineárně nezávislých vektorů z $\mathbb{R}^4$, které prostor $\mathbb{R}^4$ generují, přičemž jedním z hledaných vektorů je vektor $\overrightarrow{v}$. Ten doplníme na bázi $\mathbb{R}^4$ např. třemi vektory kanonické (přirozené) báze.
Vektor $\overrightarrow{a}$ najdeme jako lineární kombinaci prvků nalezené báze, neboli hledáme koeficienty příslušné lineární kombinace vektorů báze (tzv. souřadnice vektoru $\overrightarrow{a}$ vzhledem k této bázi).

Zpět

Příklad 1.3.1

Napište libovolnou bázi prostoru $\mathbb{R}^4$, která obsahuje vektor $\overrightarrow{v} = (1,1,1,1)^{\mathrm{T}}$ a vyjádřete vektor $\overrightarrow{a} = (2,-2,1,3)^{\mathrm{T}}$ pomocí této báze.

Řešení:

Kdybychom vektory libovolné báze $\mathbb{R}^4$ zapsali do matice a tuto matici převedli pomocí ekvivalentních úprav na horní trojúhelníkový tvar, měla by tato matice hodnost 4, protože $\dim \mathbb{R}^4 = 4$ a báze je tedy tvořena libovolnými čtyřmi lineárně nezávislými vektory. Zapíšeme-li tedy libovolnou matici řádu 4 (tj. typu 4×4) v horním trojúhelníkovém tvaru, tvoří její 4 řádky 4 vektory báze $\mathbb{R}^4$. Vzhledem k tomu, že nejjednodušší jsou výpočty s vektory kanonické báze, použijeme tyto vektory. Zadaný vektor $\overrightarrow{v} = (1,1,1,1)^{\mathrm{T}}$ má všechny složky nenulové, bude tedy tvořit první řádek matice v horním trojúhelníkovém tvaru:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Hledaná báze je tedy například tvořena vektory

$$\overrightarrow{v} = (1,1,1,1)^{\mathrm{T}},\ \overrightarrow{e_2} = (0,1,0,0)^{\mathrm{T}},\ \overrightarrow{e_3} = (0,0,1,0)^{\mathrm{T}},\ \overrightarrow{e_4} = (0,0,0,1)^{\mathrm{T}}.$$

Ještě jednou poznamenejme, že toto je jen jedna z nekonečně mnoha možných voleb. Nyní najdeme souřadnice vektoru $\overrightarrow{a}$ vzhledem k této bázi, tj. najdeme čísla α, β, γ, δ (koeficienty lineární kombinace) tak, aby

$$\alpha \cdot (1,1,1,1)^{\mathrm{T}} + \beta \cdot (0,1,0,0)^{\mathrm{T}} + \gamma \cdot (0,0,1,0)^{\mathrm{T}} + \delta \cdot (0,0,0,1)^{\mathrm{T}} = (2,-2,1,3)^{\mathrm{T}}.$$

Další

Příklad 1.3.1

Napište libovolnou bázi prostoru $\mathbb{R}^4$, která obsahuje vektor $\overrightarrow{v} = (1,1,1,1)^{\mathrm{T}}$ a vyjádřete vektor $\overrightarrow{a} = (2,-2,1,3)^{\mathrm{T}}$ pomocí této báze.

Řešení:

Dostaneme nehomogenní soustavu lineárních rovnic:

$$\begin{aligned}
\alpha &= 2 & & & \\
\alpha + \beta &= -2 &\quad \Rightarrow \quad & \beta &= -4 \\
\alpha + \gamma &= 1 &\quad \Rightarrow \quad & \gamma &= -1 \\
\alpha + \delta &= 3 &\quad \Rightarrow \quad & \delta &= 1
\end{aligned}$$

Tedy

$$\overrightarrow{a} = 2 \cdot \overrightarrow{v} + (-4) \cdot \overrightarrow{e_2} + (-1) \cdot \overrightarrow{e_3} + 1 \cdot \overrightarrow{e_4}.$$

Zpět

Příklad 1.3.1

Napište libovolnou bázi prostoru $\mathbb{R}^4$, která obsahuje vektor $\overrightarrow{v} = (1,1,1,1)^{\mathrm{T}}$ a vyjádřete vektor $\overrightarrow{a} = (2,-2,1,3)^{\mathrm{T}}$ pomocí této báze.

Maple:

```
> with(linalg):
> v:=vector([1,1,1,1]);
```

$$v := [1,\ 1,\ 1,\ 1]$$

```
> e2:=vector([0,1,0,0]);
```

$$e2 := [0,\ 1,\ 0,\ 0]$$

```
> e3:=vector([0,0,1,0]);
```

$$e3 := [0,\ 0,\ 1,\ 0]$$

```
> e4:=vector([0,0,0,1]);
```

$$e4 := [0,\ 0,\ 0,\ 1]$$

```
> A:=matrix([v,e2,e3,e4]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> rank(A);
```

$$4$$

```
> comb:=a*v+b*e2+c*e3+d*e4;
```

$$comb := a\,v + b\,e2 + c\,e3 + d\,e4$$

Další

Příklad 1.3.1

Napište libovolnou bázi prostoru $\mathbb{R}^4$, která obsahuje vektor $\overrightarrow{v} = (1,1,1,1)^{\mathrm{T}}$ a vyjádřete vektor $\overrightarrow{a} = (2,-2,1,3)^{\mathrm{T}}$ pomocí této báze.

Maple:

```
> evalm(comb);
```

$$[a,\ a+b,\ a+c,\ a+d]$$

```
> eqns:={a=2,a+b=-2,a+c=1,a+d=3};
```

$$eqns := \{a=2,\ a+b=-2,\ a+c=1,\ a+d=3\}$$

```
> B:=genmatrix(eqns,[a,b,c,d]);
```

$$B := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> linsolve(B,[2,-2,1,3]);
```

$$[2,\ -4,\ -1,\ 1]$$

Zpět

Příklad 1.3.1

Napište libovolnou bázi prostoru $\mathbb{R}^4$, která obsahuje vektor $\overrightarrow{v} = (1,1,1,1)^{\mathrm{T}}$ a vyjádřete vektor $\overrightarrow{a} = (2,-2,1,3)^{\mathrm{T}}$ pomocí této báze.

Mathematica:

$\mathbf{e1 = \{1,1,1,1\};}$
$\mathbf{e2 = \{0,1,0,0\};}$
$\mathbf{e3 = \{0,0,1,0\};}$
$\mathbf{e4 = \{0,0,0,1\};}$

$\boldsymbol{A} \mathbf{= \{e1, e2, e3, e4\};}$

$\mathbf{MatrixRank[}\boldsymbol{A}\mathbf{]}$

4

Vektory tvoří bázi $\mathbb{R}^4$.

$\boldsymbol{a} \mathbf{= \{2,-2,1,3\};}$

$\mathbf{\{}\boldsymbol{\alpha,\beta,\gamma,\delta}\mathbf{\} = LinearSolve[Transpose[}\boldsymbol{A}\mathbf{],}\ \boldsymbol{a}\mathbf{]}$

$\{2,-4,-1,1\}$

Vektor $\overrightarrow{a} = 2e_1 - 4e_2 - e_3 + e_4$.

Zpět

Příklad 1.3.2

Ověřte, že vektory $\overrightarrow{a} = (1, 2, 1, 1)^{\mathrm{T}}$, $\overrightarrow{b} = (2, -1, 1, 0)^{\mathrm{T}}$, $\overrightarrow{c} = (1, 1, 2, 2)^{\mathrm{T}}$ jsou lineárně nezávislé, a napište jeden další vektor prostoru $\mathbb{R}^4$, který leží v podprostoru, jehož bází jsou vektory $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$, a jeden vektor prostoru $\mathbb{R}^4$, který neleží v podprostoru, jehož bází jsou vektory $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$.

Zpět

Příklad 1.3.2

Ověřte, že vektory $\overrightarrow{a} = (1, 2, 1, 1)^{\mathrm{T}}$, $\overrightarrow{b} = (2, -1, 1, 0)^{\mathrm{T}}$, $\overrightarrow{c} = (1, 1, 2, 2)^{\mathrm{T}}$ jsou lineárně nezávislé, a napište jeden další vektor prostoru $\mathbb{R}^4$, který leží v podprostoru, jehož bází jsou vektory $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$, a jeden vektor prostoru $\mathbb{R}^4$, který neleží v podprostoru, jehož bází jsou vektory $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$.

Výsledek:

V podprostoru prostoru $\mathbb{R}^4$, jehož bází jsou vektory $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$, leží např. vektor $(4, 2, 4, 3)^{\mathrm{T}}$, neleží v něm např. vektor $(0, 0, 0, 1)^{\mathrm{T}}$.

Zpět

Příklad 1.3.2

Ověřte, že vektory $\overrightarrow{a} = (1, 2, 1, 1)^{\mathrm{T}}$, $\overrightarrow{b} = (2, -1, 1, 0)^{\mathrm{T}}$, $\overrightarrow{c} = (1, 1, 2, 2)^{\mathrm{T}}$ jsou lineárně nezávislé, a napište jeden další vektor prostoru $\mathbb{R}^4$, který leží v podprostoru, jehož bází jsou vektory $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$, a jeden vektor prostoru $\mathbb{R}^4$, který neleží v podprostoru, jehož bází jsou vektory $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$.

Návod:

Z vektorů $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ setavíme matici, kterou převedeme na horní trojúhelníkový tvar. Vektory $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ tvoří lineárně nezávislý systém právě když hodnost této matice je 3. Libovolný vektor z $\mathbb{R}^4$, který je lineární kombinací vektorů $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$, leží v prostoru, jehož bází jsou tyto vektory. Vektor, který doplníme k vektorům $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ tak, aby matice v horním trojúhelníkovém tvaru byla čtvercová, neleží v prostoru, jehož bází jsou vektory $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$.

Zpět

Příklad 1.3.2

Ověřte, že vektory $\overrightarrow{a} = (1, 2, 1, 1)^{\mathrm{T}}$, $\overrightarrow{b} = (2, -1, 1, 0)^{\mathrm{T}}$, $\overrightarrow{c} = (1, 1, 2, 2)^{\mathrm{T}}$ jsou lineárně nezávislé, a napište jeden další vektor prostoru $\mathbb{R}^4$, který leží v podprostoru, jehož bází jsou vektory $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$, a jeden vektor prostoru $\mathbb{R}^4$, který neleží v podprostoru, jehož bází jsou vektory $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$.

Řešení:

Z vektorů $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ sestavíme matici, kterou převedeme Gaussovou eliminací na horní trojúhelníkový tvar:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \overrightarrow{a}^{\mathrm{T}} \\ \overrightarrow{b}^{\mathrm{T}} \\ \overrightarrow{c}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & -7 \end{pmatrix}.$$

Hodnost matice $\mathbf{A} = 3$, tedy tři vektory $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ jsou lineárně nezávislé. Samozřejmě generují podprostor $\mathbb{R}^4$, jehož jsou bází, tj. jejich libovolná lineární kombinace leží v tomto podprostoru. Např. vektor

$$1 \cdot \overrightarrow{a} + 1 \cdot \overrightarrow{b} + 1 \cdot \overrightarrow{c} = 1 \cdot (1, 2, 1, 1)^{\mathrm{T}} + 1 \cdot (2, -1, 1, 0)^{\mathrm{T}} + 1 \cdot (1, 1, 2, 2)^{\mathrm{T}} = (4, 2, 4, 3)^{\mathrm{T}}.$$

leží v podprostoru $\mathbb{R}^4$, jehož bázi tvoří vektory $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$.
Chceme-li najít vektor, který neleží v podprostoru $\mathbb{R}^4$, jehož bázi tvoří vektory $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$, vyjdeme z horního trojúhelníkového tvaru matice $\mathbf{A}$.

Další

Příklad 1.3.2

Ověřte, že vektory $\overrightarrow{a} = (1,2,1,1)^{\mathrm{T}}$, $\overrightarrow{b} = (2,-1,1,0)^{\mathrm{T}}$, $\overrightarrow{c} = (1,1,2,2)^{\mathrm{T}}$ jsou lineárně nezávislé, a napište jeden další vektor prostoru $\mathbb{R}^4$, který leží v podprostoru, jehož bází jsou vektory $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$, a jeden vektor prostoru $\mathbb{R}^4$, který neleží v podprostoru, jehož bází jsou vektory $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$.

Řešení:

Kdybychom doplnili jako čtvrtý řádek vektor $\overrightarrow{e}_4 = (0,0,0,1)^{\mathrm{T}}$, tvoří vektory $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ a $\overrightarrow{e}_4$ bázi celého prostoru $\mathbb{R}^4$ ($\dim \mathbb{R}^4 = 4$, našli jsme 4 lineárně nezávislé vektory).
Ukážeme, že vektor $\overrightarrow{e}_4$ není lineární kombinací vektorů $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ a neleží tedy v prostoru generovaném těmito vektory. Předpokládejme, že existují čísla α, β, γ tak, že $\alpha \cdot \overrightarrow{a} + \beta \cdot \overrightarrow{b} + \gamma \cdot \overrightarrow{c} = \overrightarrow{e_4}$, tj.

$$\alpha \cdot (1,2,1,1)^{\mathrm{T}} + \beta \cdot (2,-1,1,0)^{\mathrm{T}} + \gamma \cdot (1,1,2,2)^{\mathrm{T}} = (0,0,0,1)^{\mathrm{T}}.$$

Dostáváme nehomogenní soustavu lineárních rovnic:

$$\begin{array}{rcl}
\alpha + 2\beta + \gamma & = & 0 \\
2\alpha - \beta + \gamma & = & 0 \\
\alpha + \beta + 2\gamma & = & 0 \\
\alpha + + 2\gamma & = & 1
\end{array}$$

Tuto soustavu vyřešíme Gaussovou eliminační metodou:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim$$

Další

Příklad 1.3.2

Ověřte, že vektory $\overrightarrow{a} = (1, 2, 1, 1)^{\mathrm{T}}$, $\overrightarrow{b} = (2, -1, 1, 0)^{\mathrm{T}}$, $\overrightarrow{c} = (1, 1, 2, 2)^{\mathrm{T}}$ jsou lineárně nezávislé, a napište jeden další vektor prostoru $\mathbb{R}^4$, který leží v podprostoru, jehož bází jsou vektory $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$, a jeden vektor prostoru $\mathbb{R}^4$, který neleží v podprostoru, jehož bází jsou vektory $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$.

Řešení:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & -5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 30 \end{array}\right).$$

Nejprve jsme k druhému řádku přičetli (-2)násobek prvního, od třetího a čtvrtého řádku jsme odečetli první. Tím jsme vynulovali poddiagonální prvky prvního sloupce. K (-5)tinásobku třetího řádku jsme přičetli druhý a k (-5)tinásobku čtvrtého řádku jsme přičetli dvojnásobek druhého. Tím máme vynulovány poddiagonální prvky druhého sloupce. Nakonec přičteme k (-6)tinásobku čtvrtého řádku sedminásobek třetího. Vidíme, že matice soustavy má hodnost 3, zatímco rozšířená matice soustavy má hodnost 4. Podle Frobeniovy věty soustava nemá řešení, a tedy čísla α, β, γ (koeficienty lineární kombinace) nelze najít. Vektor $\overrightarrow{e_4} = (0, 0, 0, 1)^{\mathrm{T}}$ neleží v podprostoru prostoru $\mathbb{R}^4$, jehož bázi tvoří vektory $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$.

Zpět

Příklad 1.3.2

Ověřte, že vektory $\overrightarrow{a} = (1,2,1,1)^{\mathrm{T}}$, $\overrightarrow{b} = (2,-1,1,0)^{\mathrm{T}}$, $\overrightarrow{c} = (1,1,2,2)^{\mathrm{T}}$ jsou lineárně nezávislé, a napište jeden další vektor prostoru $\mathbb{R}^4$, který leží v podprostoru, jehož bází jsou vektory $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$, a jeden vektor prostoru $\mathbb{R}^4$, který neleží v podprostoru, jehož bází jsou vektory $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$.

Maple:

```
> with(linalg):
> a:=vector([1,2,1,1]);
```

$$a := [1,\ 2,\ 1,\ 1]$$

```
> b:=vector([2,-1,1,0]);
```

$$b := [2,\ -1,\ 1,\ 0]$$

```
> c:=vector([1,1,2,2]);
```

$$c := [1,\ 1,\ 2,\ 2]$$

```
> A:=matrix([a,b,c]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

```
> rank(A);
```

$$3$$

```
> ffgausselim(A);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -6 & -7 \end{bmatrix}$$

Další

Příklad 1.3.2

Ověřte, že vektory $\overrightarrow{a} = (1,2,1,1)^{\mathrm{T}}$, $\overrightarrow{b} = (2,-1,1,0)^{\mathrm{T}}$, $\overrightarrow{c} = (1,1,2,2)^{\mathrm{T}}$ jsou lineárně nezávislé, a napište jeden další vektor prostoru $\mathbb{R}^4$, který leží v podprostoru, jehož bází jsou vektory $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$, a jeden vektor prostoru $\mathbb{R}^4$, který neleží v podprostoru, jehož bází jsou vektory $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$.

Maple:

```
> evalm(a+b+c);
```

$$[4,\ 2,\ 4,\ 3]$$

```
> evalm(alpha*a+beta*b+gamma*c);
```

$$[\alpha + 2\,\beta + \gamma,\ 2\,\alpha - \beta + \gamma,\ \alpha + \beta + 2\,\gamma,\ \alpha + 2\,\gamma]$$

```
> eqns:={alpha+2*beta+gamma=4, 2*alpha-beta+gamma=2,
alpha+beta+2*gamma=4, alpha+2*gamma=3};
```

$$\mathit{eqns} := \{\alpha + 2\,\beta + \gamma = 4,\ 2\,\alpha - \beta + \gamma = 2,\ \alpha + \beta + 2\,\gamma = 4,\ \alpha + 2\,\gamma = 3\}$$

```
> B:=genmatrix(eqns,[alpha,beta,gamma]);
```

$$B := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

```
> linsolve(B,[4,2,4,3]);
```

$$[1,\ 1,\ 1]$$

Další

Příklad 1.3.2

Ověřte, že vektory $\overrightarrow{a} = (1,2,1,1)^{\mathrm{T}}$, $\overrightarrow{b} = (2,-1,1,0)^{\mathrm{T}}$, $\overrightarrow{c} = (1,1,2,2)^{\mathrm{T}}$ jsou lineárně nezávislé, a napište jeden další vektor prostoru $\mathbb{R}^4$, který leží v podprostoru, jehož bází jsou vektory $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$, a jeden vektor prostoru $\mathbb{R}^4$, který neleží v podprostoru, jehož bází jsou vektory $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$.

Maple:

```
> alpha:=1; beta:=1; gama:=1;
```

$$\alpha := 1$$

$$\beta := 1$$

$$gama := 1$$

```
> linsolve(B,[0,0,0,1]);
> C:=stackmatrix(A,[0,0,0,1]);
```

$$C := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> rank(C);
```

$$4$$

Zpět

Příklad 1.3.2

Ověřte, že vektory $\overrightarrow{a} = (1, 2, 1, 1)^{\mathrm{T}}$, $\overrightarrow{b} = (2, -1, 1, 0)^{\mathrm{T}}$, $\overrightarrow{c} = (1, 1, 2, 2)^{\mathrm{T}}$ jsou lineárně nezávislé, a napište jeden další vektor prostoru $\mathbb{R}^4$, který leží v podprostoru, jehož bází jsou vektory $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$, a jeden vektor prostoru $\mathbb{R}^4$, který neleží v podprostoru, jehož bází jsou vektory $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$.

Mathematica:

a = {1, 2, 1, 1};
b = {2, −1, 1, 0};
c = {1, 1, 2, 2};

A = {a, b, c};

MatrixRank[A]

3

Vektory jsou lineárně nezávislé.

v = a + b + c

{4, 2, 4, 3}

MatrixRank[Join[A, {v}]]

3

Vektor $\overrightarrow{v} = [4, 2, 4, 3]$ leží v prostoru generovaném vektory $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ a $\overrightarrow{c}$.

u = {0, 0, 0, 1}

{0, 0, 0, 1}

Další

Příklad 1.3.2

Ověřte, že vektory $\overrightarrow{a} = (1, 2, 1, 1)^{\mathrm{T}}$, $\overrightarrow{b} = (2, -1, 1, 0)^{\mathrm{T}}$, $\overrightarrow{c} = (1, 1, 2, 2)^{\mathrm{T}}$ jsou lineárně nezávislé, a napište jeden další vektor prostoru $\mathbb{R}^4$, který leží v podprostoru, jehož bází jsou vektory $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$, a jeden vektor prostoru $\mathbb{R}^4$, který neleží v podprostoru, jehož bází jsou vektory $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$.

Mathematica:

MatrixRank[Join[*A*, {*u*}]]

4

Vektor $\overrightarrow{u} = [0, 0, 0, 1]$ neleží v prostoru generovaném vektory $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ a $\overrightarrow{c}$, ale leží v prostoru $\mathbb{R}^4$.

Zpět

Příklad 1.3.3

Určete dimenzi nejmenšího podprostoru prostoru $\mathbb{R}^5$, ve kterém leží vektory

$$\overrightarrow{a} = (4, 2, 0, -1, 1)^{\mathrm{T}}, \ \overrightarrow{b} = (-3, 1, -1, 2, -2)^{\mathrm{T}}, \ \overrightarrow{c} = (-2, 4, -2, 3, -3)^{\mathrm{T}}.$$

Které z vektorů $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ tvoří bázi tohoto podprostoru?

Zpět

Příklad 1.3.3

Určete dimenzi nejmenšího podprostoru prostoru $\mathbb{R}^5$, ve kterém leží vektory

$$\overrightarrow{a} = (4, 2, 0, -1, 1)^{\mathrm{T}},\ \overrightarrow{b} = (-3, 1, -1, 2, -2)^{\mathrm{T}},\ \overrightarrow{c} = (-2, 4, -2, 3, -3)^{\mathrm{T}}.$$

Které z vektorů $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ tvoří bázi tohoto podprostoru?

Výsledek:

Dimenze nejmenšího podprostoru prostoru $\mathbb{R}^5$, ve kterém leží vektory $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ je 2.
Bázi tvoří např. vektory $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ nebo vektory $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{c}$.

Zpět

Příklad 1.3.3

Určete dimenzi nejmenšího podprostoru prostoru $\mathbb{R}^5$, ve kterém leží vektory

$$\overrightarrow{a} = (4, 2, 0, -1, 1)^{\mathrm{T}},\ \overrightarrow{b} = (-3, 1, -1, 2, -2)^{\mathrm{T}},\ \overrightarrow{c} = (-2, 4, -2, 3, -3)^{\mathrm{T}}.$$

Které z vektorů $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ tvoří bázi tohoto podprostoru?

Návod:

Z vektorů $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ sestavíme matici, kterou převedeme na horní trojúhelníkový tvar, a tak zjistíme, kolik a které z vektorů tvoří lineárně nezávislý systém. Ty jsou pak bází hledaného nejmenšího podprostoru prostoru $\mathbb{R}^5$. Jejich počet je roven dimenzi tohoto podprostoru.

Zpět

Příklad 1.3.3

Určete dimenzi nejmenšího podprostoru prostoru $\mathbb{R}^5$, ve kterém leží vektory

$$\vec{a} = (4, 2, 0, -1, 1)^{\mathrm{T}}, \quad \vec{b} = (-3, 1, -1, 2, -2)^{\mathrm{T}}, \quad \vec{c} = (-2, 4, -2, 3, -3)^{\mathrm{T}}.$$

Které z vektorů $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ tvoří bázi tohoto podprostoru?

Řešení:

Z vektorů $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ sestavíme matici, kterou pomocí ekvivalentních úprav převedeme na horní trojúhelníkový tvar:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \vec{a}^{\mathrm{T}} \\ \vec{b}^{\mathrm{T}} \\ \vec{c}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & -1 & 2 & -2 \\ -2 & 4 & -2 & 3 & -3 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 10 & -4 & 5 & -5 \\ 0 & 10 & -4 & 5 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 10 & -4 & 5 & -5 \end{pmatrix}.$$

Hodnost matice $\mathbf{A} = 2$, tedy dva ze tří vektorů tvoří lineárně nezávislý systém, a to vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$ nebo vektory $\vec{a}$, $\vec{c}$, neboť při ekvivalentních úpravách nám "vypadl" buď vektor $\vec{b}$ nebo vektor $\vec{c}$, což nám říká, že buď vektor $\vec{b}$ je lineární kombinací vektorů $\vec{a}$, $\vec{c}$ nebo vektor $\vec{c}$ je lineární kombinací vektorů $\vec{a}$, $\vec{b}$. Tedy báze nejmenšího podprostoru prostoru $\mathbb{R}^5$, ve kterém leží vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, sestává buď z dvojice vektorů $\vec{a}$, $\vec{b}$ nebo z dvojice vektorů $\vec{a}$, $\vec{c}$. Protože báze má dva prvky, je dimenze tohoto podprostoru rovna 2.

Zpět

Příklad 1.3.3

Určete dimenzi nejmenšího podprostoru prostoru $\mathbb{R}^5$, ve kterém leží vektory

$$\vec{a} = (4, 2, 0, -1, 1)^{\mathrm{T}},\ \vec{b} = (-3, 1, -1, 2, -2)^{\mathrm{T}},\ \vec{c} = (-2, 4, -2, 3, -3)^{\mathrm{T}}.$$

Které z vektorů $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ tvoří bázi tohoto podprostoru?

Maple:

```
> with(linalg):
> eqns:={x+y+2*z-u=0,2*x+2*y+z-2*u=0};
```

$$eqns := \{x + y + 2\,z - u = 0,\ 2\,x + 2\,y + z - 2\,u = 0\}$$

```
> A:=genmatrix(eqns,[x,y,z,u]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

```
> nullspace(A, 'nulldim');
```

$$\{[-1,\ 1,\ 0,\ 0],\ [1,\ 0,\ 0,\ 1]\}$$

```
> nulldim;
```

$$2$$

Zpět

Příklad 1.3.3

Určete dimenzi nejmenšího podprostoru prostoru $\mathbb{R}^5$, ve kterém leží vektory

$$\vec{a} = (4, 2, 0, -1, 1)^{\mathrm{T}},\ \vec{b} = (-3, 1, -1, 2, -2)^{\mathrm{T}},\ \vec{c} = (-2, 4, -2, 3, -3)^{\mathrm{T}}.$$

Které z vektorů $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ tvoří bázi tohoto podprostoru?

Mathematica:

$\boldsymbol{a = \{4, 2, 0, -1, 1\};}$
$\boldsymbol{b = \{-3, 1, -1, 2, -2\};}$
$\boldsymbol{c = \{-2, 4, -2, 3, -3\};}$

$\boldsymbol{A = \{a, b, c\};}$

MatrixRank[$\boldsymbol{A}$]

2

Dimenze prostoru je 2 .

$\boldsymbol{B = \{a, b\};}$

MatrixRank[$\boldsymbol{A}$]

2

Za bázi můžeme volit například $\{\vec{a},\ \vec{b}\}$.

Zpět