Kapitola 10: Dvojný a trojný integrál

Chcete-li ukončit prohlížení stiskněte klávesu **Esc**.
Chcete-li pokračovat stiskněte klávesu **Enter**.

Dvojný a trojný integrál

- Výpočet dvojného integrálu
- Substituční metoda pro dvojný integrál
- Nevlastní integrál
- Výpočet trojného integrálu
- Substituční metoda pro trojný integrál
- Aplikace dvojného integrálu

Zpět

Výpočet dvojného integrálu

- **Příklad 10.1.1** Zaměňte pořadí integrace dvojnásobného integrálu
$$\int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{x}} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$$
- **Příklad 10.1.2** Zaměňte pořadí integrace dvojnásobného integrálu
$$\int_0^1 \left(\int_0^{x} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x + \int_1^2 \left(\int_0^{2-x} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$$
- **Příklad 10.1.3** Vypočtěte dvojný integrál $\iint_M x\,y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde $M \in \mathbb{R}^2$ je množina ohraničená grafy funkcí $y = 2 - x^2$ a $y = -x$.
- **Příklad 10.1.4** Vypočtěte dvojný integrál $\iint_M (x + 2\,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde $M \in \mathbb{R}^2$ je množina ohraničená grafy funkcí $y = 2 - x^2$ a $y = |x|$.

Zpět

Příklad 10.1.1

Zaměňte pořadí integrace dvojnásobného integrálu $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{x}} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$

? Zpět

Příklad 10.1.1

Zaměňte pořadí integrace dvojnásobného integrálu $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{x}} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$.

Výsledek:

$$\int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{x}} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\int_{y^2}^{1} f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y\,.$$

Zpět

Příklad 10.1.1

Zaměňte pořadí integrace dvojnásobného integrálu $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{x}} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$

Návod:

Převeďte nejdříve na dvojný integral $\displaystyle\iint_G f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$. Nakreslete si obrázek množiny G a napište integrál pomocí dvojnásobného integrálu se záměnou integrace.

Zpět

Příklad 10.1.1

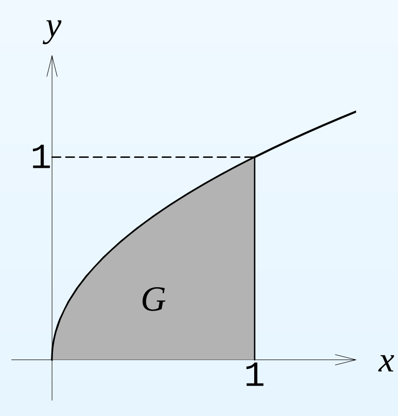
Zaměňte pořadí integrace dvojnásobného integrálu $\int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{x}} f(x, y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$.

Řešení:

Za předpokladu, že funkce f je na množině G určené nerovnicemi

$$0 \le x \le 1\,,\ 0 \le y \le \sqrt{x}$$

(viz obrázek) spojitá, daný integrál se rovná dvojnému integrálu $\iint_G f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.



Množinu G mužeme však popsat i nerovnicemi $0 \le y \le 1\,,\ y^2 \le x \le 1$, platí tedy

$$\int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{x}} f(x, y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\int_{y^2}^1 f(x, y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y\,.$$

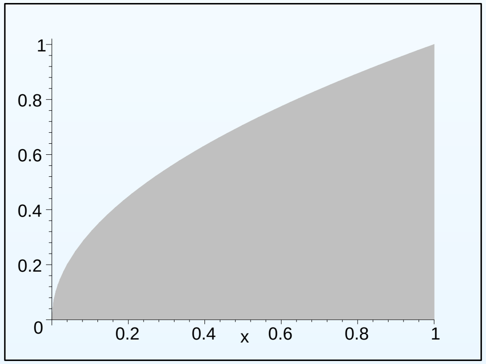
Příklad 10.1.1

Zaměňte pořadí integrace dvojnásobného integrálu $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{x}} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$

Maple:

V tomto příkladě si můžeme pouze zakreslit množinu přes kterou integrujeme, zaměnu integrace si musíme udělat sami. Nejdříve si nakreslíme množinu přes kterou integrujeme

```
> plot([0,sqrt(x)],x=0..1,filled=true,color=[white,grey]);
```



Vyjádříme si hranici množiny jako x v závislosti na y

```
> solve(y=sqrt(x),x);
```

$$y^2$$

Nyní zaměníme pořadí integrace

```
> Int(Int(f(x,y),y=0..sqrt(x)),x=0..1)=Int(Int(f(x,y),x=y^2..1),y=0..1)
;
```

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{x}} \mathrm{f}(x,\ y)\, dy\, dx = \int_0^1 \int_{y^2}^1 \mathrm{f}(x,\ y)\, dx\, dy$$

Příklad 10.1.1

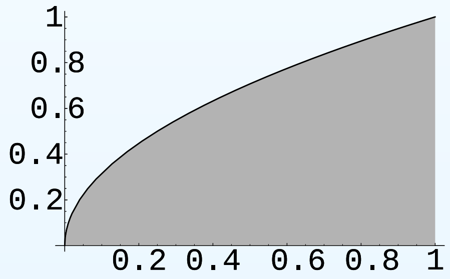
Zaměňte pořadí integrace dvojnásobného integrálu $\int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{x}} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$

Mathematica:

V tomto příkladě si můžeme pouze zakreslit množinu přes kterou integrujeme, záměnu integrace si musíme udělat sami. Nejdříve si nakreslíme množinu přes kterou integrujeme

<< Graphics`FilledPlot`

FilledPlot[Sqrt[*x*], {*x*, 0, 1},Fills → {{{Axis, 1}, GrayLevel[.7]}}];



Vyjádříme si hranici množiny jako x v závislosti na y

Solve[*y* == Sqrt[*x*], *x*]

$\{\{x \to y^2\}\}$

Nyní zaměníme pořadí integrace

Integrate[*f*[*x*, *y*], {*x*, 0, 1}, {*y*, 0, Sqrt[*x*]}]==Integrate[*f*[*x*, *y*], {*y*, 0, 1}, {*x*, *y*^2, 1}]

$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{x}} f[x,y]dydx == \int_0^1 \int_{y^2}^1 f[x,y]dxdy$

Zpět

Příklad 10.1.2

Zaměňte pořadí integrace dvojnásobného integrálu

$$\int_0^1 \left(\int_0^x f(x,y)\,\mathrm{d}y \right)\,\mathrm{d}x + \int_1^2 \left(\int_0^{2-x} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right)\,\mathrm{d}x.$$

Zpět

Příklad 10.1.2

Zaměňte pořadí integrace dvojnásobného integrálu

$$\int_0^1 \left(\int_0^x f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x + \int_1^2 \left(\int_0^{2-x} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$$

Výsledek:

$$\int_0^1 \left(\int_0^x f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x + \int_1^2 \left(\int_0^{2-x} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\int_y^{2-y} f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y\,.$$

Zpět

Příklad 10.1.2

Zaměňte pořadí integrace dvojnásobného integrálu

$$\int_0^1 \left(\int_0^x f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x + \int_1^2 \left(\int_0^{2-x} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$$

Návod:

Převeďte nejdříve na dvojný integral $\iint\limits_G f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$. Nakreslete si obrázek množiny G a napište integrál pomocí dvojnásobného integrálu se záměnou integrace.

Zpět

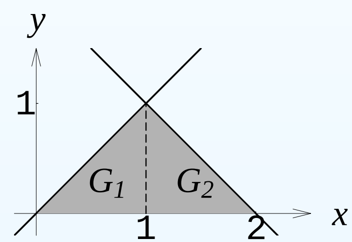
Příklad 10.1.2

Zaměňte pořadí integrace dvojnásobného integrálu

$$\int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^x f(x,y)\,\mathrm{d}y \right)\,\mathrm{d}x + \int\limits_1^2 \left(\int\limits_0^{2-x} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right)\,\mathrm{d}x.$$

Řešení:

Předpokladejme, že funkce f je na množině G spojitá. $G = G_1 \cup G_2$, kde $G1$ je určená nerovnicemi $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le x$ a G_2 je určená nerovnicemi $1 \le x \le 2$, $0 \le y \le 2-x$ (viz obrázek).



Součet daných dvojnásobných integrálůse rovná dvojnému integrálu $\iint\limits_G f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

Množinu G můžeme však popsat i nerovnicemi $0 \le y \le 1$, $y \le x \le 2-y$, platí tedy

$$\int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^x f(x,y)\,\mathrm{d}y \right)\,\mathrm{d}x + \int\limits_1^2 \left(\int\limits_0^{2-x} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_y^{2-y} f(x,y)\,\mathrm{d}x \right)\,\mathrm{d}y\,.$$

Zpět

Příklad 10.1.2

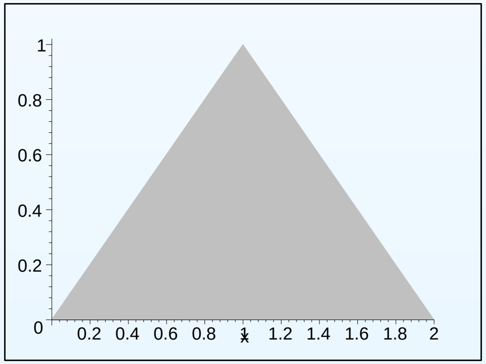
Zaměňte pořadí integrace dvojnásobného integrálu

$$\int_0^1 \left(\int_0^x f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x + \int_1^2 \left(\int_0^{2-x} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$$

Maple:

V tomto příkladě si můžeme pouze zakreslit množinu přes kterou integrujeme, záměnu integrace si musíme udělat sami. Nejdříve si nakreslíme množinu G_1 potom G_2, množina přes kterou integrujeme je $G = G_1 \cup G_2$.

```
> G2:=plot([0,2-x],x=1..2,filled=true,color=[white,grey]):
> plots[display](G1,G2);
```



Nyní zaměníme pořadí intagrace

```
> Int(Int(f(x,y),y=0..x),x=0..1)+Int(Int(f(x,y),y=0..2-x),x=1..2)=Int(I
nt(f(x,y),x=y..2-y),y=0..1);
```

$$\int_0^1 \int_0^x \mathrm{f}(x,\ y)\, dy\, dx + \int_1^2 \int_0^{2-x} \mathrm{f}(x,\ y)\, dy\, dx = \int_0^1 \int_y^{2-y} \mathrm{f}(x,\ y)\, dx\, dy$$

Zpět

Příklad 10.1.2

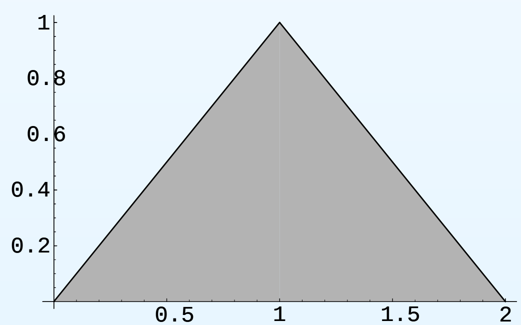
Zaměňte pořadí integrace dvojnásobného integrálu

$$\int_0^1 \left(\int_0^x f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x + \int_1^2 \left(\int_0^{2-x} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$$

Mathematica:

V tomto příkladě si můžeme pouze zakreslit množinu přes kterou integrujeme, záměnu integrace si musíme udělat sami. Nejdříve si nakreslíme množinu G_1 potom G_2, množina přes kterou integrujeme je $G = G_1 \cup G_2$.

```
<< Graphics`FilledPlot`
G1 = FilledPlot[x, {x, 0, 1}, Fills → {{{Axis, 1}, GrayLevel[.7]}},DisplayFunction → Identity];
G2 = FilledPlot[2 − x, {x, 1, 2}, Fills → {{{Axis, 1}, GrayLevel[.7]}},DisplayFunction → Identity];
Show[{G1, G2}, DisplayFunction → $DisplayFunction];
```



Nyní zaměníme pořadí intagrace

```
Integrate[f[x, y], {x, 0, 1}, {y, 0, x}]+Integrate[f[x, y], {x, 1, 2}, {y, 0, 2 − x}]==
Integrate[f[x, y], {y, 0, 1}, {x, y, 2 − y}]
```

$\int_0^1 \int_0^x f[x,y]dydx + \int_1^2 \int_0^{2-x} f[x,y]dydx == \int_0^1 \int_y^{2-y} f[x,y]dxdy$

Zpět

Příklad 10.1.3

Vypočtěte dvojný integrál $\iint\limits_M x\,y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde $M \in \mathbb{R}^2$ je množina ohraničená grafy funkcí $y = 2 - x^2$ a $y = -x$.

? Zpět

Příklad 10.1.3

Vypočtěte dvojný integrál $\iint\limits_M x\,y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde $M \in \mathbb{R}^2$ je množina ohraničená grafy funkcí $y = 2 - x^2$ a $y = -x$.

Výsledek:

$$-\frac{9}{8}\,.$$

Zpět

Příklad 10.1.3

Vypočtěte dvojný integrál $\iint\limits_M x\,y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde $M \in \mathbb{R}^2$ je množina ohraničená grafy funkcí $y = 2 - x^2$ a $y = -x$.

Návod:

Nakreslete si obrázek množiny M. Protože funkce $f(x, y) = x\,y$ je spojitá na množině M, můžeme napsat integrál pomocí dvojnásobného integrálu.

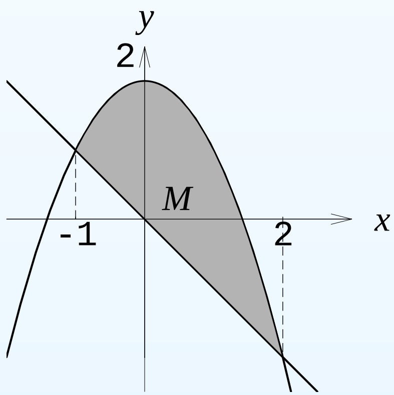
Zpět

Příklad 10.1.3

Vypočtěte dvojný integrál $\iint\limits_M x\,y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde $M \in \mathbb{R}^2$ je množina ohraničená grafy funkcí $y = 2 - x^2$ a $y = -x$.

Řešení:

Vypočteme si společné body funkcí $y = -x$ a $y = 2 - x^2$. Rovnice $-x = 2 - x^2$ má řešení $x_1 = -1$ a $x_2 = 2$. Nyní nakreslíme množinu M,
$M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; = -1 \le x \le 2\,,\ -x \le y \le 2 - x^2\}$ (viz obrázek).



Protože funkce $f(x, y) = x\,y$ je spojitá na množině M, můžeme napsat integrál pomocí dvojnásobného integrálu.

$$\iint\limits_M x\,y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-1}^{2}\left(\int_{-x}^{2-x^2} x\,y\ \mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{2}\left[\frac{x\,y^2}{2}\right]_{-x}^{2-x^2}\mathrm{d}x =$$

$$= \int_{-1}^{2}\left(2\,x - \frac{5\,x^3}{2} + \frac{x^5}{2}\right)\mathrm{d}x = \left[x^2 - \frac{5\,x^4}{8} + \frac{x^6}{12}\right]_{-1}^{2} = -\frac{2}{3} - \left(\frac{11}{24}\right) = -\frac{9}{8}\,.$$

Příklad 10.1.3

Vypočtěte dvojný integrál $\iint\limits_M x\,y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde $M \in \mathbb{R}^2$ je množina ohraničená grafy funkcí $y = 2 - x^2$ a $y = -x$.

Maple:

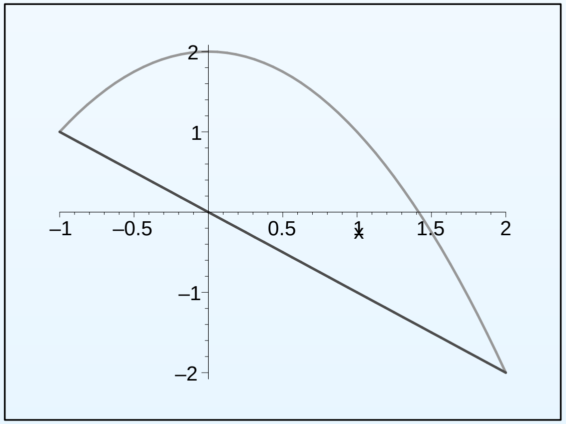
Vypočteme si společné body funkcí $y = -x$ a $y = 2 - x^2$.

```
> solve(-x=2-x^2,x);
```

$$2,\ -1$$

Nakreslíme grafy funkcí $y = -x$ a $y = 2 - x^2$ pro $x \in \langle -1, 2\rangle$.

```
> plot([-x,2-x^2],x=-1..2);
```



Protože funkce $f(x, y) = x\,y$ je spojitá na množině M, můžeme napsat integrál pomocí dvojnásobného integrálu.

```
> Int(Int(x*y,y=-x..2-x^2),x=-1..2)=int(int(x*y,y=-x..2-x^2),x=-1..2);
```

$$\int_{-1}^{2}\int_{-x}^{2-x^2} x\,y\,dy\,dx = \frac{-9}{8}$$

Zpět

Příklad 10.1.3

Vypočtěte dvojný integrál $\iint\limits_M x\,y\,dx\,dy$, kde $M \in \mathbb{R}^2$ je množina ohraničená grafy funkcí $y = 2 - x^2$ a $y = -x$.

Mathematica:

Vypočteme si společné body funkcí $y = -x$ a $y = 2 - x^2$.

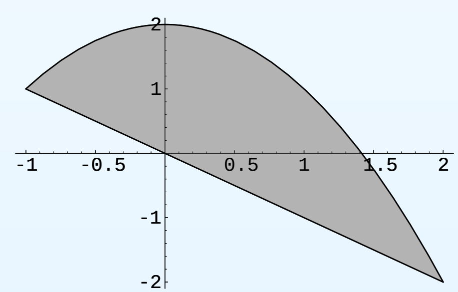
Solve[−x == 2 − x^2, x]

$\{\{x \to -1\}, \{x \to 2\}\}$

Nakreslíme si množinu M.

<< Graphics`FilledPlot`

FilledPlot[{−x, 2 − x^2}, {x, −1, 2}, Fills → {{{1, 2}, GrayLevel[.7]}}];



Protože funkce $f(x, y) = x\,y$ je spojitá na množině M, můžeme napsat integrál pomocí dvojnásobného integrálu.

Integrate[xy, {x, −1, 2}, {y, −x, 2 − x^2}]

$-\frac{9}{8}$

Zpět

Příklad 10.1.4

Vypočtěte dvojný integrál $\iint\limits_M (x + 2\,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde $M \in \mathbb{R}^2$ je množina ohraničená grafy funkcí $y = 2 - x^2$ a $y = |x|$.

? Zpět

Příklad 10.1.4

Vypočtěte dvojný integrál $\iint\limits_M (x + 2\,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde $M \in \mathbb{R}^2$ je množina ohraničená grafy funkcí $y = 2 - x^2$ a $y = |x|$.

Výsledek:

$\frac{76}{15}$.

Zpět

Příklad 10.1.4

Vypočtěte dvojný integrál $\displaystyle\iint_M (x + 2\,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde $M \in \mathbb{R}^2$ je množina ohraničená grafy funkcí $y = 2 - x^2$ a $y = |x|$.

Návod:

Nakreslete si obrázek množiny M. Protože funkce $f(x, y) = (x + 2\,y)$ je spojitá na množině M, můžeme napsat integrál pomocí dvojnásobného integrálu. Integrál musíme rozdělit na dva integrály, přes množinu M_1 a přes množinu M_2, kde $M = M_1 \cup M_2$.

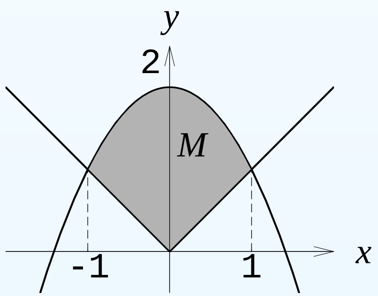
Zpět

Příklad 10.1.4

Vypočtěte dvojný integrál $\iint\limits_M (x + 2\,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde $M \in \mathbb{R}^2$ je množina ohraničená grafy funkcí $y = 2 - x^2$ a $y = |x|$.

Řešení:

Vypočteme si společné body funkcí $y = |x|$ a $y = 2 - x^2$. Rovnice $|x| = 2 - x^2$ má řešení $x_1 = -1$ a $x_2 = 1$. Nyní nakreslíme množinu M,
$M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; = -1 \le x \le 1\,,\ |x| \le y \le 2 - x^2\}$ (viz obrázek).



Protože funkce $f(x, y) = x\,y$ je spojitá na množině M, můžeme napsat integrál pomocí dvojnásobného integrálu. Integrál musíme nejdřív rozdělit na dva integrály, přes množinu M_1 a přes množinu M_2, kde $M = M_1 \cup M_2$.

$$M_1 = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; = -1 \le x \le 0\,,\ -x \le y \le 2 - x^2\}$$

a

$$M_2 = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; = 0 \le x \le 1\,,\ x \le y \le 2 - x^2\}$$

Další

Příklad 10.1.4

Vypočtěte dvojný integrál $\iint\limits_M (x + 2\,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde $M \in \mathbb{R}^2$ je množina ohraničená grafy funkcí $y = 2 - x^2$ a $y = |x|$.

Řešení:

$$
\begin{aligned}
\iint\limits_M (x+2y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \quad &= \quad \iint\limits_{M_1} (x+2y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint\limits_{M_2} (x+2y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \\
&= \quad \int\limits_{-1}^{0} \left(\int\limits_{-x}^{2-x^2} x + 2y \;\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{1} \left(\int\limits_{x}^{2-x^2} x + 2y \;\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \\
&= \quad \int\limits_{-1}^{0} \Big[x\,y + y^2 \Big]_{-x}^{2-x^2} \mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{1} \Big[x\,y + y^2 \Big]_{x}^{2-x^2} \mathrm{d}x = \\
&= \quad \int\limits_{-1}^{0} \left(4 + 2x - 4x^2 - x^3 + x^4 \right) \mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{1} \left(4 + 2x - 6x^2 - x^3 + x^4 \right) \mathrm{d}x = \\
&= \quad \left[4x + x^2 - \frac{4x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} \right]_{-1}^{0} + \left[4x + x^2 - 2x^3 - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} \right]_{0}^{1} = \\
&= \quad \frac{127}{60} + \frac{59}{20} = \frac{76}{15}\,.
\end{aligned}
$$

Příklad 10.1.4

Vypočtěte dvojný integrál $\iint\limits_M (x + 2\,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde $M \in \mathbb{R}^2$ je množina ohraničená grafy funkcí $y = 2 - x^2$ a $y = |x|$.

Maple:

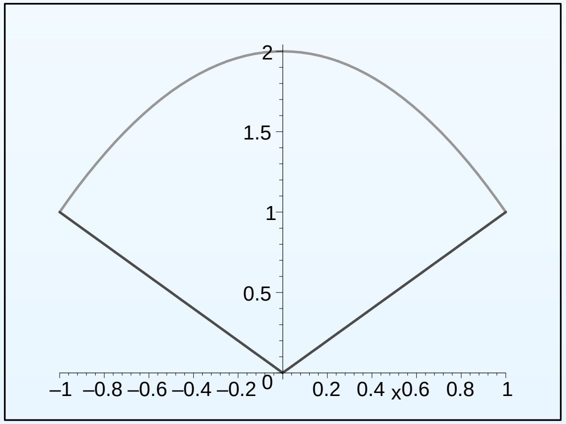
Vypočteme si společné body funkcí $y = |x|$ a $y = 2 - x^2$.

```
>   solve(abs(x)=2-x^2,x);
```

$$1,\ -1$$

Nakreslíme si množinu M.

```
>   plot([abs(x),2-x^2],x=-1..1);
```



Protože funkce $f(x, y) = x + 2y$ je spojitá na množině M, můžeme napsat integrál pomocí dvojnásobného integrálu.

```
>   Int(Int(x+2*y,y=abs(x)..2-x^2),x=-1..1)=int(int(x+2*y,y=abs(x)..2-x^2
),x=-1..1);
```

$$\int_{-1}^{1}\int_{|x|}^{2-x^2} x + 2\,y\,dy\,dx = \frac{76}{15}$$

Zpět

Příklad 10.1.4

Vypočtěte dvojný integrál $\iint\limits_M (x + 2\,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde $M \in \mathbb{R}^2$ je množina ohraničená grafy funkcí $y = 2 - x^2$ a $y = |x|$.

Mathematica:

Vypočteme si společné body funkcí $y = |x|$ a $y = 2 - x^2$.

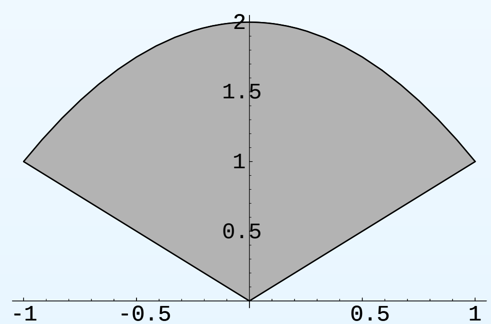
Solve[2 − *x*^2 == Abs[*x*], *x*]

$\{\{x \to -1\}, \{x \to 1\}\}$

Nakreslíme si množinu M.

<< Graphics`FilledPlot`

FilledPlot[{Abs[*x*], 2 − *x*^2}, {*x*, −1, 1},Fills → {{{1, 2}, GrayLevel[.7]}}];



Protože funkce $f(x, y) = x + 2y$ je spojitá na množině M, můžeme napsat integrál pomocí dvojnásobného integrálu.

Integrate[*x* + 2*y*, {*x*, −1, 1}, {*y*, Abs[*x*], 2 − *x*^2}]

$\frac{76}{15}$

Zpět

Substituční metoda pro dvojný integrál

- **Příklad 10.2.1** Vypočtěte dvojný integrál $\displaystyle\iint_M \mathrm{e}^{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde

  $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \le 4\}$.

- **Příklad 10.2.2** Vypočtěte dvojný integrál $\displaystyle\iint_M x\,y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde

  $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; 1 \le x^2 + y^2 \le 4,\ x \ge 0,\ y \ge 0\}$.

- **Příklad 10.2.3** Vypočtěte dvojný integrál $\displaystyle\iint_M \frac{\ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde

  $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; 1 \le x^2 + y^2 \le \mathrm{e}^2\}$.

- **Příklad 10.2.4** Vypočtěte dvojný integrál $\displaystyle\iint_M \sqrt{4 - x^2 - y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde M je polovina

  kruhu, $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ (x-1)^2 + y^2 \le 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0\}$.

Zpět

Příklad 10.2.1

Vypočtěte dvojný integrál $\iint\limits_M \mathrm{e}^{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde $M=\{[x,y]\in\mathbb{R}^2; x^2+y^2\le 4\}$.

Zpět

Příklad 10.2.1

Vypočtěte dvojný integrál $\iint\limits_M e^{x^2+y^2}\,dx\,dy$, kde $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; x^2+y^2 \le 4\}$.

Výsledek:

$\pi(e^4 - 1)$.

Zpět

Příklad 10.2.1

Vypočtěte dvojný integrál $\displaystyle\iint\limits_M \mathrm{e}^{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; x^2+y^2 \leq 4\}$.

Návod:

Použijte substituci do polárních souřadnic.

$$\begin{aligned} x &= r\,\cos t\,, & r \in \langle 0,\infty) \\ y &= r\,\sin t\,, & t \in \langle 0,2\pi\rangle\,. \end{aligned}$$

Zpět

Příklad 10.2.1

Vypočtěte dvojný integrál $\displaystyle\iint\limits_M \mathrm{e}^{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; x^2+y^2 \le 4\}$.

Řešení:

Použijte substituci do polárních souřadnic.

$$\begin{aligned} x &= r\cos t\,, \quad r \in \langle 0, \infty) \\ y &= r\sin t\,, \quad t \in \langle 0, 2\pi\rangle\,. \end{aligned}$$

$$\iint\limits_M \mathrm{e}^{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_{\bar{M}} r\,\mathrm{e}^{r^2}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}t\,,$$

kde $\bar{M} = \{[r,t] \in \mathbb{R}^2\,;\ r \in \langle 0, 2\rangle\,,\ t \in \langle 0, 2\pi\rangle\}$.
Nyní vypočteme integrál po substituci.

$$\begin{aligned} \iint\limits_{\bar{M}} r\,\mathrm{e}^{r^2}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}t &= \int_0^{2\pi}\Big(\int_0^2 r\,\mathrm{e}^{r^2}\,\mathrm{d}r\Big)\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{2}\mathrm{e}^{r^2}\right]_0^2\mathrm{d}t = \\ &= \int_0^{2\pi}\Big(\frac{1}{2}\mathrm{e}^4 - \frac{1}{2}\,\mathrm{d}t = 2\pi\frac{1}{2}(\mathrm{e}^4-1) = \pi(\mathrm{e}^4-1)\,. \end{aligned}$$

Zpět

Příklad 10.2.1

Vypočtěte dvojný integrál $\iint\limits_M \mathrm{e}^{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde $M=\{[x,y]\in\mathbb{R}^2; x^2+y^2\le 4\}$.

Maple:

Substituci musíme provést sami, Maple nám spočítá integrál až po substituci.

```
> int(int(r*exp(r^2),r=0..2),t=0..2*Pi);
```

$$e^4\,\pi-\pi$$

Zpět

Příklad 10.2.1

Vypočtěte dvojný integrál $\iint\limits_M \mathrm{e}^{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 4\}$.

Mathematica:

Substituci musíme provést sami, Mathematica nám spočítá integrál až po substituci.

Integrate[*r*Exp[*r*^2], {*t*, 0, 2Pi}, {*r*, 0, 2}]

$\left(-1 + e^4\right)\pi$

Zpět

Příklad 10.2.2

Vypočtěte dvojný integrál $\iint\limits_M x\,y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde

$M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}.$

? Zpět

Příklad 10.2.2

Vypočtěte dvojný integrál $\iint\limits_M x\,y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde

$M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; 1 \le x^2 + y^2 \le 4,\ x \ge 0,\ y \ge 0\}$.

Výsledek:

$\frac{15}{8}$.

Zpět

Příklad 10.2.2

Vypočtěte dvojný integrál $\iint\limits_M x\,y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde

$M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$.

Návod:

Použijte substituci do polárních souřadnic.

$$\begin{aligned} x &= r\,\cos t\,, \quad & r \in \langle 0, \infty) \\ y &= r\,\sin t\,, \quad & t \in \langle 0, 2\pi\rangle\,. \end{aligned}$$

Zpět

Příklad 10.2.2

Vypočtěte dvojný integrál $\iint\limits_M x\,y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde

$M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; 1 \le x^2 + y^2 \le 4,\ x \ge 0,\ y \ge 0\}$.

Řešení:

Použijte substituci do polárních souřadnic.

$$\begin{aligned} x &= r\,\cos t\,, & r \in \langle 0, \infty)\\ y &= r\,\sin t\,, & t \in \langle 0, 2\pi\rangle\,. \end{aligned}$$

$$\iint\limits_M x\,y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_{\bar M} r^3\,\cos t\,\sin t\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}t\,,$$

kde $\bar M = \{[r,t] \in \mathbb{R}^2\,;\ r \in \langle 1,2\rangle\,,\ t \in \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle\}$.
Nyní vypočteme integrál po substituci.

$$\begin{aligned} \iint\limits_{\bar M} r^3\,\cos t\,\sin t\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}t &= \iint\limits_{\bar M} r^3\,\frac{\sin 2t}{2}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}}(\int_1^2 r^3\,\frac{\sin 2t}{2}\,\mathrm{d}r)\,\mathrm{d}t = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{r^4}{4}\,\frac{\sin 2t}{2}\right]_1^2\mathrm{d}t = \int_1^{\frac{\pi}{2}}\frac{15}{4}\,\frac{\sin 2t}{2}\,\mathrm{d}t = \int_1^{\frac{\pi}{2}}\frac{15}{8}\sin 2t\,\mathrm{d}t = \\ &= \frac{15}{8}\left[-\frac{\cos 2t}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{15}{8}\left(-\frac{\cos\pi}{2} + \frac{\cos 0}{2}\right) = \frac{15}{8}\left(-\frac{-1}{2} + \frac{1}{2}\right) = \frac{15}{8}\,. \end{aligned}$$

Zpět

Příklad 10.2.2

Vypočtěte dvojný integrál $\iint\limits_M x\,y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde

$M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$.

Maple:

Substituci musíme provést sami, Maple nám spočítá integrál až po substituci.

```
> int(int(r^3*cos(t)*sin(t),r=1..2),t=0..Pi/2);
```

$$\frac{15}{8}$$

Zpět

Příklad 10.2.2

Vypočtěte dvojný integrál $\displaystyle\iint_M x\,y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde

$M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$.

Mathematica:

Substituci musíme provést sami, Mathematica nám spočítá integrál až po substituci.

Integrate[*r*^3Sin[*t*]Cos[*t*], {*t*, 0, Pi/2}, {*r*, 1, 2}]

$\frac{15}{8}$

Zpět

Příklad 10.2.3

Vypočtěte dvojný integrál $\iint\limits_M \frac{\ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; 1 \le x^2+y^2 \le \mathrm{e}^2\}$.

? Zpět

Příklad 10.2.3

Vypočtěte dvojný integrál $\displaystyle\iint\limits_M \frac{\ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; 1 \le x^2+y^2 \le \mathrm{e}^2\}$.

Výsledek:

2π .

Zpět

Příklad 10.2.3

Vypočtěte dvojný integrál $\iint\limits_M \frac{\ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; 1 \le x^2+y^2 \le \mathrm{e}^2\}$.

Návod:

Použijte substituci do polárních souřadnic.

$$\begin{aligned} x &= r\cos t\,, \quad r \in \langle 0, \infty) \\ y &= r\sin t\,, \quad t \in \langle 0, 2\pi\rangle\,. \end{aligned}$$

Zpět

Příklad 10.2.3

Vypočtěte dvojný integrál $\iint\limits_M \frac{\ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; 1 \le x^2+y^2 \le \mathrm{e}^2\}$.

Řešení:

Použijte substituci do polárních souřadnic.

$$\begin{aligned} x &= r\cos t\,, \quad & r \in \langle 0, \infty) \\ y &= r\sin t\,, \quad & t \in \langle 0, 2\pi\rangle\,. \end{aligned}$$

$$\iint\limits_M \frac{\ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_{\bar{M}} \frac{\ln(r^2)}{r}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}t\,,$$

kde $\bar{M} = \{[r,t] \in \mathbb{R}^2\,;\ r \in \langle 1, \mathrm{e}\rangle\,,\ t \in \langle 0, 2\pi\rangle\}$.
Nyní vypočteme integrál po substituci.

$$\begin{aligned} \iint\limits_{\bar{M}} \frac{\ln(r^2)}{r}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}t &= \int_0^{2\pi}\left(\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln(r^2)}{r}\,\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}t = \left|\begin{array}{ll} \text{substituce} & u = \ln r \\ \mathrm{d}u = \frac{1}{r}\,\mathrm{d}r & \\ \alpha = 0 & \beta = 1 \end{array}\right| = \\ &= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 2\,u\,\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi}\left[u^2\right]_0^1\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} 1\ \mathrm{d}t = 2\,\pi\,. \end{aligned}$$

Zpět

Příklad 10.2.3

Vypočtěte dvojný integrál $\iint\limits_M \frac{\ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde
$M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; 1 \le x^2+y^2 \le \mathrm{e}^2\}$.

Maple:

Substituci musíme provést sami, Maple nám spočítá integrál až po substituci.

```
> Int(Int(ln(r^2)/r,r=1..exp(1)),t=0..2*Pi)=int(int(ln(r^2)/r,r=1..exp(
1)),t=0..2*Pi);
```

$$\int_0^{2\,\pi} \int_1^e \frac{\ln(r^2)}{r}\,dr\,dt = 2\,\pi$$

Zpět

Příklad 10.2.3

Vypočtěte dvojný integrál $\iint\limits_M \frac{\ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde

$M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; 1 \le x^2+y^2 \le \mathrm{e}^2\}$.

Mathematica:

Substituci musíme provést sami, Mathematica nám spočítá integrál až po substituci.

Integrate[Log[r^2]/r, {t, 0, 2Pi}, {r, 1, E}]

2π

Zpět

Příklad 10.2.4

Vypočtěte dvojný integrál $\iint\limits_M \sqrt{4 - x^2 - y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde M je polovina kruhu,

$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ (x - 1)^2 + y^2 \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$.

? Zpět

Příklad 10.2.4

Vypočtěte dvojný integrál $\iint\limits_M \sqrt{4-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde M je polovina kruhu,

$M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ (x-1)^2 + y^2 \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$.

Výsledek:

$$\frac{8}{3}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\right).$$

Zpět

Příklad 10.2.4

Vypočtěte dvojný integrál $\iint\limits_M \sqrt{4-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde M je polovina kruhu,

$M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ (x-1)^2 + y^2 \le 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0\}$.

Návod:

Použijte substituci do polárních souřadnic.

$$\begin{aligned} x &= r\,\cos t\,, \quad r \in \langle 0, \infty) \\ y &= r\,\sin t\,, \quad t \in \langle 0, 2\pi\rangle\,. \end{aligned}$$

Hranice množiny M je částečně popsána kružnicí $(x-1)^2 + y^2 = 1$, tato kružnice má v polárních souřadnicích tvar $r = 2\,\cos t$.

Zpět

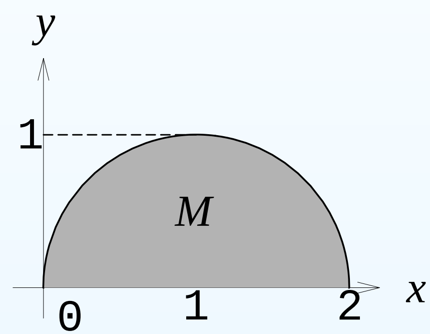
Příklad 10.2.4

Vypočtěte dvojný integrál $\iint\limits_M \sqrt{4-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde M je polovina kruhu,

$M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ (x-1)^2+y^2 \le 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0\}$.

Řešení:

Nakreslíme si množinu M:



Použijeme substituci do polárních souřadnic.

$$\begin{aligned} x &= r\,\cos t\,, \quad & r &\in \langle 0,\infty) \\ y &= r\,\sin t\,, \quad & t &\in \langle 0, 2\pi\rangle\,. \end{aligned}$$

$$\iint\limits_M \sqrt{4-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_{\bar{M}} r\,\sqrt{4-r^2}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}t\,.$$

Hranice množiny M je částečně popsána kružnicí $(x-1)^2+y^2=1$. Než určíme množinu $\bar{M}$, vyjádříme si kružnici $(x-1)^2+y^2=1$ v polárních souřadnicích.

Další

Příklad 10.2.4

Vypočtěte dvojný integrál $\iint\limits_M \sqrt{4-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde M je polovina kruhu,

$M = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ (x-1)^2+y^2\le 1,\ x\ge 0,\ y\ge 0\}$.

Řešení:

$$\begin{aligned}
(x-1)^2+y^2 &= 1\\
(r\cos t-1)^2+y^2 &= 1\\
r^2\cos^2 t - 2r\cos t + 1 + r^2\sin^2 t &= 1\\
r^2 - 2r\cos t &= 0 \qquad \text{vydělíme } r\\
r &= 2\cos t\,.
\end{aligned}$$

Množina $\bar{M} = \{[r,t]\in\mathbb{R}^2;\ r\in\langle 0, 2\cos t\rangle \text{ pro } t\in\langle 0,\frac{\pi}{2}\rangle\}$.
Nyní vypočteme integrál po substituci.

$$\iint\limits_{\bar{M}} r\sqrt{4-r^2}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{2\cos t} r\sqrt{4-r^2}\,\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}t = \left|\begin{array}{ll} \text{substituce} & u=4-r^2\\ \mathrm{d}u=-2r\,\mathrm{d}r & \\ \alpha=4 & \beta=4\sin^2 t\end{array}\right| =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\Big(\int_4^{4\sin^2 t}\left(-\frac{1}{2}\right)\sqrt{u}\,\mathrm{d}u\Big)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[-\frac{u^{\frac{3}{2}}}{3}\right]_4^{4\sin^2 t}\mathrm{d}t$$

$$= \int_4^{\frac{\pi}{2}}\frac{8}{3}(1-\sin^3 t)\,\mathrm{d}t = \left[t+\frac{3\cos(t)}{4}-\frac{1}{12}\cos(3t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{8}{3}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right)\,.$$

Zpět

Příklad 10.2.4

Vypočtěte dvojný integrál $\displaystyle\iint\limits_M \sqrt{4 - x^2 - y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde M je polovina kruhu,

$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ (x-1)^2 + y^2 \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$.

Maple:

Substituci musíme provést sami, Maple nám spočítá integrál až po substituci.

```
>  Int(Int(r*sqrt(4-r^2),r=0..2*cos(t)),t=0..Pi/2)=int(int(r*sqrt(4-r^2)
,r=0..2*cos(t)),t=0..Pi/2);
```

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\cos(t)} r\,\sqrt{4 - r^2}\,dr\,dt = \frac{4\,\pi}{3} - \frac{16}{9}$$

Zpět

Příklad 10.2.4

Vypočtěte dvojný integrál $\iint\limits_M \sqrt{4 - x^2 - y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde M je polovina kruhu,

$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ (x-1)^2 + y^2 \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$.

Mathematica:

Substituci musíme provést sami, Mathematica nám spočítá integrál až po substituci.

$\mathbf{Integrate}[\boldsymbol{r}\mathbf{Sqrt}[\mathbf{4} - \boldsymbol{r}\mathbf{\hat{}2}], \{\boldsymbol{t}, \mathbf{0}, \mathbf{Pi/2}\}, \{\boldsymbol{r}, \mathbf{0}, \mathbf{2Cos}[\boldsymbol{t}]\}]$

$\frac{4}{9}(-4 + 3\pi)$

Zpět

Nevlastní integrál

- Příklad 10.3.1 Vypočtěte dvojný integrál $\displaystyle\iint\limits_D \frac{1}{(x^2+y^2+4)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde $D = \langle 0,\infty) \times \langle 0,\infty)$.
- Příklad 10.3.2 Vypočtěte dvojný integrál $\displaystyle\iint\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{1+x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

Zpět

Příklad 10.3.1

Vypočtěte dvojný integrál $\iint\limits_D \frac{1}{(x^2+y^2+4)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde $D = \langle 0,\infty) \times \langle 0,\infty)$.

? Zpět

Příklad 10.3.1

Vypočtěte dvojný integrál $\iint\limits_D \frac{1}{(x^2+y^2+4)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde $D = \langle 0,\infty) \times \langle 0,\infty)$.

Výsledek:

$\frac{\pi}{16}$.

Zpět

Příklad 10.3.1

Vypočtěte dvojný integrál $\iint\limits_D \frac{1}{(x^2+y^2+4)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde $D = \langle 0,\infty) \times \langle 0,\infty)$.

Návod:

$$\iint\limits_D \frac{1}{(x^2+y^2+4)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \lim_{n\to\infty} \iint\limits_{D_n} \frac{1}{(x^2+y^2+4)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,,$$

kde $D_n = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; x^2+y^2 \le n^2,\ x \ge 0,\ y \ge 0\}$. Pro výpočet integrálu pod limitou použijte substituci do polárních souřadnic.

Zpět

Příklad 10.3.1

Vypočtěte dvojný integrál $\displaystyle\iint_D \frac{1}{(x^2+y^2+4)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde $D = \langle 0,\infty) \times \langle 0,\infty)$.

Řešení:

Pro nevlastní integrál platí $\displaystyle\iint_D \frac{1}{(x^2+y^2+4)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \lim_{n\to\infty} \iint_{D_n} \frac{1}{(x^2+y^2+4)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,,$

kde $D_n = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; x^2+y^2 \le n^2,\ x \ge 0,\ y \ge 0\}$. Vypočteme nejdříve integrál pod limitou. Použijeme substituci do polárních souřadnic.

$$\iint_{D_n} \frac{1}{(x^2+y^2+4)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{\bar{D}_n} r\,\frac{1}{(r^2+4)^2}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}t\,,$$

kde $\bar{D}_n = \{[r,t] \in \mathbb{R}^2\,;\ r \in \langle 0,n\rangle\,,\ t \in \langle 0,\frac{\pi}{2}\rangle\}$. Platí

$$\begin{aligned}\iint_{\bar{D}_n} r\,\frac{1}{(r^2+4)^2}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}t &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^n r\,\frac{1}{(r^2+4)^2}\,\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[-\frac{1}{2}\,\frac{1}{r^2+4}\right]_0^n \mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2+4}-\frac{1}{4}\right)\mathrm{d}t = -\frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{n^2+4}-\frac{1}{4}\right).\end{aligned}$$

Platí tedy

$$\iint_D \frac{1}{(x^2+y^2+4)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \lim_{n\to\infty} -\frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{n^2+4}-\frac{1}{4}\right) = \frac{\pi}{16}.$$

Zpět

Příklad 10.3.1

Vypočtěte dvojný integrál $\iint\limits_D \frac{1}{(x^2+y^2+4)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde $D = \langle 0,\infty) \times \langle 0,\infty)$.

Maple:

Maple nám tento nevlastní integrál spočte přímo:

```
> Int(Int(1/(x^2+y^2+4)^2,y=0..infinity),x=0..infinity)=int(int(1/(x^2+
y^2+4)^2,y=0..infinity),x=0..infinity);
```

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{1}{(x^2+y^2+4)^2}\,dy\,dx = \frac{\pi}{16}$$

Zpět

Příklad 10.3.1

Vypočtěte dvojný integrál $\displaystyle\iint\limits_D \frac{1}{(x^2+y^2+4)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde $D = \langle 0, \infty) \times \langle 0, \infty)$.

Mathematica:

Mathematica nám tento nevlastní integrál spočte přímo:

Integrate[1/(x^2 + y^2 + 4)^2, {x, 0, Infinity}, {y, 0, Infinity}]

$\frac{\pi}{16}$

Zpět

Příklad 10.3.2

Vypočtěte dvojný integrál $\displaystyle\iint\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{1+x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$

Zpět

Příklad 10.3.2

Vypočtěte dvojný integrál $\displaystyle\iint\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{1+x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

Výsledek:

∞ , dvojný integrál nekonverguje.

Zpět

Příklad 10.3.2

Vypočtěte dvojný integrál $\iint\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{1+x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

Návod:

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{(x^2+y^2+1)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \lim_{n\to\infty} \iint\limits_{D_n} \frac{1}{(x^2+y^2+1)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,,$$

kde $D_n = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; x^2+y^2 \leq n^2\}$. Pro výpočet integrálu pod limitou použijte substituci do polárních souřadnic.

Zpět

Příklad 10.3.2

Vypočtěte dvojný integrál $\displaystyle\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{1+x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$

Řešení:

Pro nevlastní integrál platí $\displaystyle\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{(x^2+y^2+1)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \lim_{n\to\infty}\iint_{D_n} \frac{1}{(x^2+y^2+1)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,,$
kde $D_n = \{[x,y]\in\mathbb{R}^2; x^2+y^2\le n^2\}$. Vypočteme nejdříve integrál pod limitou. Použijeme substituci do polárních souřadnic.

$$\iint_{D_n} \frac{1}{(x^2+y^2+1)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{\bar{D}_n} r\,\frac{1}{(r^2+1)}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}t\,,$$

kde $\bar{D}_n = \{[r,t]\in\mathbb{R}^2\,;\ r\in\langle 0,n\rangle\,,\ t\in\langle 0,2\pi\rangle\}$. Platí

$$\begin{aligned}\iint_{\bar{D}_n} r\,\frac{1}{(r^2+1)}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}t &= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^n r\,\frac{1}{(r^2+1)}\,\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}t = \int_0^{\pi}\left[\frac{1}{2}\ln(r^2+1)\right]_0^n\mathrm{d}t\\ &= \int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\left(\ln(n^2+1)\right)\mathrm{d}t = \pi\left(\ln(n^2+1)\right).\end{aligned}$$

Platí tedy

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{(x^2+y^2+1)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \lim_{n\to\infty} 2\pi\,\ln(n^2+1) = \infty.$$

Integrál nekonveruje.

Příklad 10.3.2

Vypočtěte dvojný integrál $\displaystyle\iint\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{1+x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

Maple:

```
>  Int(Int(1/(x^2+y^2+1),y=-infinity..infinity),x=-infinity..infinity)=i
nt(int(1/(^2+y^2+1),y=-infinity..infinity),x=-infinity..infinity);
```

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+y^2+1}\,dy\,dx = \infty$$

Výsledek je ∞, integrál tedy nekonverguje.

Zpět

Příklad 10.3.2

Vypočtěte dvojný integrál $\displaystyle\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{1+x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$

Mathematica:

Integrate[1/(x^2 + y^2 + 1), {x, −Infinity, Infinity},{y, −Infinity, Infinity}]

Integrate::idiv : Integral of $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ does not converge on $\{-\infty, \infty\}$. More...

$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\pi}{\sqrt{1+x^2}}\, dx$

Mathematica nám sdělí, že integrál nekonverguje.

Zpět

Výpočet trojného integrálu

- **Příklad 10.4.1** Vypočtěte trojný integrál $\iiint\limits_I x^2\, y\, z^3 \; \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z$, kde

  $I = \langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle \times \langle 0,2\rangle$

- **Příklad 10.4.2** Vypočtěte trojný integrál $\iiint\limits_M y \; \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z$, kde

  $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3\,;\; x \geq 0\,;\; y \geq 0\,;\; \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 2\}.$

Zpět

Příklad 10.4.1

Vypočtěte trojný integrál $\iiint\limits_I x^2\, y\, z^3 \, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z$, kde $I = \langle 0, 1\rangle \times \langle 0, 1\rangle \times \langle 0, 2\rangle$

?

Zpět

Příklad 10.4.1

Vypočtěte trojný integrál $\iiint\limits_I x^2\, y\, z^3 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, kde $I = \langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle \times \langle 0,2\rangle$

Výsledek:

$$\frac{2}{3}\,.$$

Zpět

Příklad 10.4.1

Vypočtěte trojný integrál $\iiint\limits_I x^2\, y\, z^3 \;\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, kde $I = \langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle \times \langle 0,2\rangle$

Návod:

Použijte Fubiniovu větu a vypočtěte trojnásoný integral $\int\limits_0^1 (\int\limits_0^1 (\int\limits_0^2 x^2\, y\, z^3 \;\mathrm{d}z)\,\mathrm{d}y)\,\mathrm{d}x$.

Zpět

Příklad 10.4.1

Vypočtěte trojný integrál $\iiint\limits_I x^2\, y\, z^3\ \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z$, kde $I = \langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle \times \langle 0,2\rangle$

Řešení:

Použijeme Fubiniovu větu a vypočteme trojnásoný integral $\int\limits_0^1 (\int\limits_0^1 (\int\limits_0^2 x^2\, y\, z^3\ \mathrm{d}z)\, \mathrm{d}y)\, \mathrm{d}x$.

$$
\begin{aligned}
\int\limits_0^1 (\int\limits_0^1 (\int\limits_0^2 x^2\, y\, z^3\ \mathrm{d}z)\, \mathrm{d}y)\, \mathrm{d}x &= (\int\limits_0^2 z^3\ \mathrm{d}z) \int\limits_0^1 (\int\limits_0^1 x^2\, y\ \mathrm{d}y)\, \mathrm{d}x \\
&= (\int\limits_0^2 z^3\ \mathrm{d}z)(\int\limits_0^1 y\ \mathrm{d}y)(\int\limits_0^1 x^2\ \mathrm{d}x) \\
&= \left[\frac{z^4}{4}\right]_0^2 \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^1 \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{16}{4}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{3} = \frac{2}{3}\,.
\end{aligned}
$$

Zpět

Příklad 10.4.1

Vypočtěte trojný integrál $\iiint\limits_I x^2\, y\, z^3 \;\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, kde $I = \langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle \times \langle 0,2\rangle$

Maple:

```
> Int(Int(Int(x^2*y*z^3,z=0..2),y=0..1),x=0..1)=int(int(int(x^2*y*z^3,z
=0..2),y=0..1),x=0..1);
```

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^2 x^2\, y\, z^3\, dz\, dy\, dx = \frac{2}{3}$$

Zpět

Příklad 10.4.1

Vypočtěte trojný integrál $\iiint\limits_I x^2\, y\, z^3 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, kde $I = \langle 0, 1\rangle \times \langle 0, 1\rangle \times \langle 0, 2\rangle$

Mathematica:

Integrate[$\boldsymbol{x}$^2 $\boldsymbol{y}$ $\boldsymbol{z}$^3, {$\boldsymbol{x}$, 0, 1}, {$\boldsymbol{y}$, 0, 1}, {$\boldsymbol{z}$, 0, 2}]

$\frac{2}{3}$

Zpět

Příklad 10.4.2

Vypočtěte trojný integrál $\iiint\limits_M y \, dx \, dy \, dz$, kde

$M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 ;\ x \geq 0 ;\ y \geq 0 ;\ \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 2\}$.

?

Zpět

Příklad 10.4.2

Vypočtěte trojný integrál $\iiint\limits_M y \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z$, kde

$M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 \,;\; x \geq 0 \,;\; y \geq 0 \,;\; \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 2\}.$

Výsledek:

$$\frac{4}{3}\,.$$

Zpět

Příklad 10.4.2

Vypočtěte trojný integrál $\iiint\limits_M y \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z$, kde

$M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 \, ; \; x \geq 0 \, ; \; y \geq 0 \, ; \; \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 2\}.$

Návod:

Použijte Fubiniovu větu a vypočtěte trojnásoný integral $\int\limits_0^2 (\int\limits_0^{\sqrt{4-x^2}} (\int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}}^2 y \, \mathrm{d}z) \, \mathrm{d}y) \, \mathrm{d}x.$

Zpět

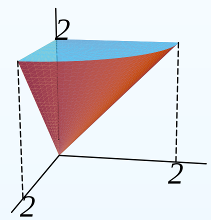
Příklad 10.4.2

Vypočtěte trojný integrál $\iiint\limits_M y \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z$, kde

$M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 \, ; \; x \geq 0 \, ; \; y \geq 0 \, ; \; \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 2\}.$

Řešení:

Nejdříve popíšeme množinu M nerovnicemi tak, abychom mohli použít Fubiniovu větu. Nakreslíme si množinu M. Množina M se dá vyjádřit nerovnicemi



$$\begin{array}{ccccc} 0 & \leq & x & \leq & 2 \\ 0 & \leq & y & \leq & \sqrt{4 - x^2} \\ \sqrt{x^2 + y^2} & \leq & z & \leq & 2 \end{array} .$$

Nyní platí

$$\begin{aligned} \iiint\limits_M y \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z &= \int_0^2 \left(\int_0^{\sqrt{4-x^2}} \left(\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^2 y \, \mathrm{d}z \right) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \\ &= \int_0^2 \left(\int_0^{\sqrt{4-x^2}} y \left[z \right]_{\sqrt{x^2+y^2}}^2 \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_0^2 \left(\int_0^{\sqrt{4-x^2}} y \, (2 - \sqrt{x^2 + y^2}) \, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \\ &= \int_0^2 \left[y^2 - \frac{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}}{3} \right]_0^{\sqrt{4-x^2}} \mathrm{d}x = \int_0^2 \frac{4}{3} - x^2 + \frac{x^3}{3} \, \mathrm{d}x = \left[\frac{4}{3} x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{12} \right]_0^2 \\ &= \frac{8}{3} - \frac{8}{3} + \frac{16}{12} = \frac{4}{3} \, . \end{aligned}$$

Zpět

Příklad 10.4.2

Vypočtěte trojný integrál $\iiint\limits_M y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, kde

$M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3\,;\ x \geq 0\,;\ y \geq 0\,;\ \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 2\}.$

Maple:

```
> Int(Int(Int(y,z=sqrt(x^2+y^2)..2),y=0..sqrt(4-x^2)),x=0..2)=int(int(i
nt(y,z=sqrt(x^2+y^2)..2),y=0..sqrt(4-x^2)),x=0..2);
```

$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^2 y\,dz\,dy\,dx = \frac{4}{3}$$

Zpět

Příklad 10.4.2

Vypočtěte trojný integrál $\iiint\limits_M y \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z$, kde

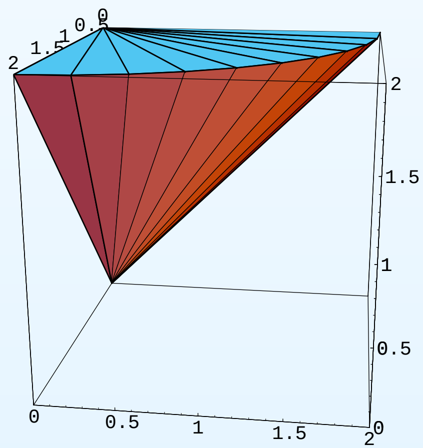
$$M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 \; ; \; x \geq 0 \; ; \; y \geq 0 \; ; \; \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 2\}.$$

Mathematica:

Těleso přes které počítáme integrál je čtvrt kužele. Těleso si nakreslíme.

<< Graphics`Shapes`

**Show[{TranslateShape[Graphics3D[Helix[2, 0.000001, 2, 40]], {0, 0, 2}],
TranslateShape[Graphics3D[Cone[4, −2, 40]], {0, 0, 2}]},
PlotRange → {{0, 2}, {0, 2}, {0, 2}}, ViewPoint->{3.136, 0.422, 0.977},
Axes → True];**



Integrate[y, {x, 0, 2}, {y, 0, Sqrt[4 − x^2]}, {z, Sqrt[x^2 + y^2], 2}]

$\frac{4}{3}$

Zpět

Substituční metoda pro trojný integrál

- Příklad 10.5.1 Vypočtěte trojný integrál $\iiint\limits_M z \, dx \, dy \, dz$, kde
  $M = \left\{ [x, y, z] \in \mathbb{R}^3 ; \ x \geq 0 \, , \ y \geq 0 \, , \ 0 \leq z \leq \sqrt{9 - x^2 - y^2} \right\}.$
- Příklad 10.5.2 Vypočtěte trojný integrál $\iiint\limits_M (x^2 + y^2 + z^2) \, dx \, dy \, dz$, kde
  $M = \{ [x, y, z] \in \mathbb{R}^3 ; \ x > 0 \, , \ y > 0 \, , \ z > 0 \, , \ x^2 + y^2 + z^2 < 1 \} .$

Zpět

Příklad 10.5.1

Vypočtěte trojný integrál $\iiint\limits_M z \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, kde

$$M = \left\{ [x, y, z] \in \mathbb{R}^3 \,;\; x \geq 0\,,\; y \geq 0\,,\; 0 \leq z \leq \sqrt{9 - x^2 - y^2} \right\}.$$

? Zpět

Příklad 10.5.1

Vypočtěte trojný integrál $\iiint\limits_M z \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z$, kde

$$M = \left\{ [x, y, z] \in \mathbb{R}^3 \, ; \; x \geq 0 \, , \; y \geq 0 \, , \; 0 \leq z \leq \sqrt{9 - x^2 - y^2} \right\} .$$

Výsledek:

$$\frac{81}{16} \pi \, .$$

Zpět

Příklad 10.5.1

Vypočtěte trojný integrál $\iiint\limits_M z \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z$, kde

$$M = \left\{ [x, y, z] \in \mathbb{R}^3 \, ; \; x \geq 0 \, , \; y \geq 0 \, , \; 0 \leq z \leq \sqrt{9 - x^2 - y^2} \right\} .$$

Návod:

Použijte substituci do cylindrických souřadnic.

$$\begin{aligned} x &= r \cos t \, , \quad r \in \langle 0, \infty) \\ y &= r \sin t \, , \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle \\ z &= z \, . \end{aligned}$$

Zpět

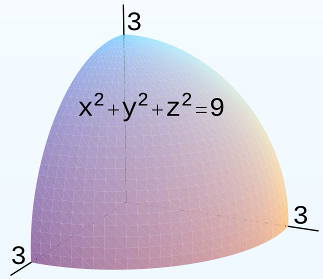
Příklad 10.5.1

Vypočtěte trojný integrál $\iiint\limits_M z \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z$, kde

$$M = \left\{ [x, y, z] \in \mathbb{R}^3 \,;\; x \geq 0 \,,\; y \geq 0 \,,\; 0 \leq z \leq \sqrt{9 - x^2 - y^2} \right\}.$$

Řešení:

Nakreslíme si těleso přes které integrujeme.



Pro výpočet integralu použijeme substituci do cylindrických souřadnic.

$$\begin{aligned} x &= r\cos t\,, & r &\in \langle 0, \infty) \\ y &= r\sin t\,, & t &\in \langle 0, 2\pi\rangle \\ z &= z\,. \end{aligned}$$

Zobrazení z kartézských do cylindrických souřadnic je regulární a jeho jakobián je

$$J(r, t, z) = \begin{vmatrix} \cos t & \sin t & 0 \\ -r\sin t & r\cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r\cos^2 t + r\sin^2 t = r\,.$$

Další

Příklad 10.5.1

Vypočtěte trojný integrál $\iiint\limits_M z \; \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z$, kde

$M = \left\{ [x,y,z] \in \mathbb{R}^3 \, ; \; x \geq 0 \, , \; y \geq 0 \, , \; 0 \leq z \leq \sqrt{9 - x^2 - y^2} \, \right\}.$

Řešení:

Platí tedy:

$$\iiint\limits_M z \; \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z = \iiint\limits_{\bar{M}} z \, r \; \mathrm{d}r \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}z \, ,$$

kde $\bar{M} = \left\{ [r,t,z] \in \mathbb{R}^3 \, , 0 < r < 3 \, , \; 0 < t < \frac{\pi}{2} \, , \; 0 < z < \sqrt{9 - r^2} \right\}.$
Nyní vypočteme integrál po substituci

$$\begin{aligned}
\iiint\limits_{\bar{M}} z \, r \; \mathrm{d}r \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}z \quad &= \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^3 \left(\int_0^{\sqrt{9-r^2}} z \, r \; \mathrm{d}z \right) \mathrm{d}r \right) \mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^3 r \left[\frac{z^2}{2} \right]_0^{\sqrt{9-r^2}} \mathrm{d}r \right) \mathrm{d}t \\
&= \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^3 r \, \frac{9 - r^2}{2} \; \mathrm{d}r \right) \mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[-\frac{1}{8} (9 - r^2)^2 \right]_0^3 \mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{8} (9)^2 \, \mathrm{d}t \\
&= \quad \frac{81}{16} \pi
\end{aligned}$$

Zpět

Příklad 10.5.1

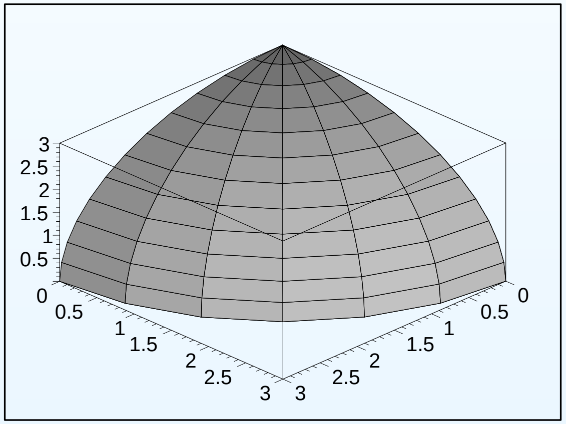
Vypočtěte trojný integrál $\iiint\limits_M z \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z$, kde

$$M = \left\{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 \,;\; x \geq 0\,,\; y \geq 0\,,\; 0 \leq z \leq \sqrt{9 - x^2 - y^2}\right\}.$$

Maple:

Množina přes kterou počítáme trojný integrál je osmina koule. Nakreslíme si ji.

```
> c := plottools[sphere]([0,0,0], 3):
plots[display](c,view=[0..3,0..3,0..3], axes=boxed);
```



Nyní vypočteme trojný integrál bez substituce nebo se substitucí do sférických souřadnic.

```
> Int(Int(Int(z,z=0..sqrt(9-x^2-y^2)),y=0..sqrt(9-x^2)),x=0..3)=int(int
(int(z,z=0..sqrt(9-x^2-y^2)),y=0..sqrt(9-x^2)),x=0..3);
```

$$\int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} \int_0^{\sqrt{9-x^2-y^2}} z \, dz \, dy \, dx = \frac{81\,\pi}{16}$$

Další

Příklad 10.5.1

Vypočtěte trojný integrál $\iiint\limits_M z \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z$, kde

$$M = \left\{ [x, y, z] \in \mathbb{R}^3 \,;\; x \geq 0 \,,\; y \geq 0 \,,\; 0 \leq z \leq \sqrt{9 - x^2 - y^2} \right\}.$$

Maple:

```
> Int(Int(Int(r*z,z=0..sqrt(9-r^2)),r=0..3),t=0..Pi/2)=int(int(int(r*z,
z=0..sqrt(9-r^2)),r=0..3),t=0..Pi/2);
```

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-r^2}} r \, z \, dz \, dr \, dt = \frac{81\,\pi}{16}$$

Zpět

Příklad 10.5.1

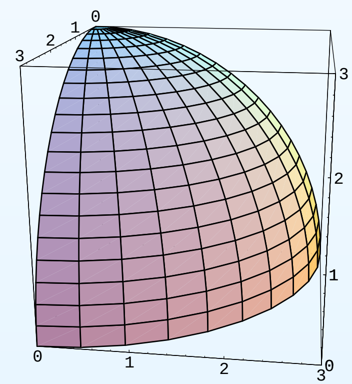
Vypočtěte trojný integrál $\iiint\limits_M z \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z$, kde

$$M = \left\{ [x, y, z] \in \mathbb{R}^3 \, ; \; x \geq 0 \, , \; y \geq 0 \, , \; 0 \leq z \leq \sqrt{9 - x^2 - y^2} \right\} .$$

Mathematica:

Množina přes kterou počítáme trojný integrál je osmina koule. Nakreslíme si ji.

```
<< Graphics`Shapes`
Show[Graphics3D[Sphere[3, 40, 40]], PlotRange → {{0, 3}, {0, 3}, {0, 3}},
ViewPoint->{3.136, 0.422, 0.977}, Axes → True];
```



Nyní vypočteme trojný integrál bez substituce nebo se substitucí do sférických souřadnic.

```
Integrate[z, {x, 0, 3}, {y, 0, Sqrt[9 − x^2]}, {z, 0, Sqrt[9 − x^2 − y^2]}]
```

$\frac{81\pi}{16}$

Další

Příklad 10.5.1

Vypočtěte trojný integrál $\iiint\limits_M z \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z$, kde

$$M = \left\{ [x, y, z] \in \mathbb{R}^3 \,;\; x \geq 0 \,,\; y \geq 0 \,,\; 0 \leq z \leq \sqrt{9 - x^2 - y^2} \right\}.$$

Mathematica:

Integrate[*rz*, {*t*, 0, Pi/2}, {*r*, 0, 3}, {*z*, 0, Sqrt[9 − *r*^2]}]

$\frac{81\pi}{16}$

Zpět

Příklad 10.5.2

Vypočtěte trojný integrál $\iiint\limits_M (x^2 + y^2 + z^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, kde

$M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 \,;\; x > 0\,,\; y > 0\,,\; z > 0\,,\; x^2 + y^2 + z^2 < 1\}\,.$

? Zpět

Příklad 10.5.2

Vypočtěte trojný integrál $\iiint\limits_M (x^2 + y^2 + z^2)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z$, kde

$M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 ;\ x > 0\,,\ y > 0\,,\ z > 0\,,\ x^2 + y^2 + z^2 < 1\}\,.$

Výsledek:

$\dfrac{\pi}{10}\,.$

Zpět

Příklad 10.5.2

Vypočtěte trojný integrál $\iiint\limits_M (x^2 + y^2 + z^2)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z$, kde

$M = \left\{ [x, y, z] \in \mathbb{R}^3 \,;\; x > 0\,,\; y > 0\,,\; z > 0\,,\; x^2 + y^2 + z^2 < 1 \right\}.$

Návod:

Protože těleso přes které integrujeme je osmina koule, použijte substituci do sférických souřadnic.

$$\begin{aligned} x &= r \sin u \cos t\,, & r &\in \langle 0, \infty) \\ y &= r \sin u \sin t\,, & t &\in \langle 0, 2\pi\rangle \\ z &= r \cos u\,, & u &\in \langle 0, \pi\rangle\,. \end{aligned}$$

Zpět

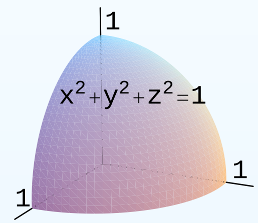
Příklad 10.5.2

Vypočtěte trojný integrál $\iiint\limits_M (x^2 + y^2 + z^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, kde

$M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 \,;\; x > 0\,,\; y > 0\,,\; z > 0\,,\; x^2 + y^2 + z^2 < 1\}\,.$

Řešení:

Nakreslíme si těleso přes které integrujeme.



Protože těleso přes které integrujeme je osmina koule, použijeme substituci do sférických souřadnic.

$$\begin{aligned} x &= r\,\sin u\,\cos t\,, & r &\in \langle 0, \infty) \\ y &= r\,\sin u\,\sin t\,, & t &\in \langle 0, 2\pi \rangle \\ z &= r\,\cos u\,, & u &\in \langle 0, \pi \rangle\,. \end{aligned}$$

Zobrazení do sférických souřadnic je regulární, jeho jakobián je $J(r, t, u) = r^2\,\sin u\,.$

Další

Příklad 10.5.2

Vypočtěte trojný integrál $\iiint\limits_M (x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, kde

$M = \left\{[x,y,z]\in\mathbb{R}^3\,;\ x>0\,,\ y>0\,,\ z>0\,,\ x^2+y^2+z^2<1\right\}.$

Řešení:

Platí tedy:

$$\iiint\limits_M (x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint\limits_{\bar M} r^2\,r^2\,\sin u\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}u\,,$$

kde $\bar M = \left\{[r,t,u]\in\mathbb{R}^3\,, 0<r<1\,,\ 0<t<\frac{\pi}{2}\,,\ 0<u<\frac{\pi}{2}\right\}$.
Nyní vypočteme integrál po substituci

$$\begin{aligned}
\iiint\limits_{\bar M} r^4\,\sin u\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}u &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^1 r^4\,\sin u\,\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}u \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin u\,\left[\frac{r^5}{5}\right]_0^1\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}u = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{5}\,\sin u\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}u \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin u\,\left[t\,\frac{1}{5}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}u = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\pi}{10}\sin u\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{\pi}{10}\,\left[-\cos u\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{10}\,.
\end{aligned}$$

Zpět

Příklad 10.5.2

Vypočtěte trojný integrál $\iiint\limits_M (x^2 + y^2 + z^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, kde

$M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 \,;\; x > 0\,,\; y > 0\,,\; z > 0\,,\; x^2 + y^2 + z^2 < 1\,\}\,.$

Maple:

Množina přes kterou počítáme trojný integrál je osmina koule. Obrázek viz předchozí příklad, jen poloměr koule je 1.
Vypočteme integrál bez substituce i se substitucí do sférických souřadnic.

```
> Int(Int(Int((x^2+y^2+z^2),z=0..sqrt(1-x^2-y^2)),y=0..sqrt(1-x^2)),x=0
..1)=int(int(int((x^2+y^2+z^2),z=0..sqrt(1-x^2-y^2)),y=0..sqrt(1-x^2))
,x=0..1);
```

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} x^2 + y^2 + z^2 \, dz\, dy\, dx = \frac{\pi}{10}$$

```
> Int(Int(Int(r^4*cos(u),r=0..1),t=0..Pi/2),u=0..Pi/2)=int(int(int(r^4*
cos(u),r=0..1),t=0..Pi/2),u=0..Pi/2);
```

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 r^4 \cos(u)\, dr\, dt\, du = \frac{\pi}{10}$$

Zpět

Příklad 10.5.2

Vypočtěte trojný integrál $\iiint\limits_M (x^2 + y^2 + z^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, kde

$M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3\,;\; x > 0\,,\; y > 0\,,\; z > 0\,,\; x^2 + y^2 + z^2 < 1\}\,.$

Mathematica:

Množina přes kterou počítáme trojný integrál je osmina koule. Obrázek viz předchozí příklad, jen poloměr koule je 1.

Vypočteme integrál bez substituce i se substitucí do sférických souřadnic.

Integrate[x^2 + y^2 + z^2, {x, 0, 1}, {y, 0, Sqrt[1 − x^2]},{z, 0, Sqrt[1 − x^2 − y^2]}]

$\frac{\pi}{10}$

Integrate[r^4Sin[u], {u, 0, Pi/2}, {t, 0, Pi/2}, {r, 0, 1}]

$\frac{\pi}{10}$

Zpět

- Příklad 10.6.1 Vypočtěte objem tělesa ohraničeného rovinami $x = 0\,,\ y = 0\,,\ z = 0\,,\ x = 2\,,\ y = 3\,,\ x + y + z = 4\,.$
- Příklad 10.6.2 Vypočtěte objem tělesa ohraničeného plochou $y = x^2$, a rovinami $y = 0\,,\ y + z = 2\,.$
- Příklad 10.6.3 Vypočtěte objem tělesa ohraničeného rovinou $z = 0$ a částí plochy $z = \mathrm{e}^{-x^2 - y^2}\,.$

Zpět

Příklad 10.6.1

Vypočtěte objem tělesa ohraničeného rovinami
$x = 0\,,\ y = 0\,,\ z = 0\,,\ x = 2\,,\ y = 3\,,\ x + y + z = 4\,.$

?

Zpět

Příklad 10.6.1

Vypočtěte objem tělesa ohraničeného rovinami
$x = 0\,,\; y = 0\,,\; z = 0\,,\; x = 2\,,\; y = 3\,,\; x + y + z = 4\,.$

Výsledek:

$$V = \frac{55}{6}\,.$$

Zpět

Příklad 10.6.1

Vypočtěte objem tělesa ohraničeného rovinami
$x = 0\,,\ y = 0\,,\ z = 0\,,\ x = 2\,,\ y = 3\,,\ x + y + z = 4\,.$

Návod:

$V = \iint\limits_G (4 - x - y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde $G = G_1 \cup G_2$, $G_1 = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2\,;\ 0 \le x \le 1\,,\ 0 \le y \le 3\}$ a $G_2 = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2\,;\ 1 \le x \le 2\,,\ 0 \le y \le 4 - x\}$

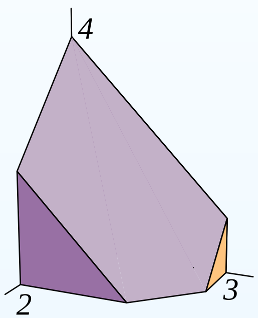
Zpět

Příklad 10.6.1

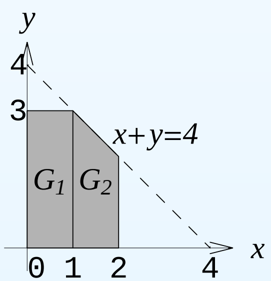
Vypočtěte objem tělesa ohraničeného rovinami
$x = 0\,,\ y = 0\,,\ z = 0\,,\ x = 2\,,\ y = 3\,,\ x + y + z = 4\,.$

Řešení:

Nakreslíme si obrázek uvažovaného tělesa a množinu $G = G_1 \cup G_2$ přes kterou budeme integrovat.



$$V = \iint\limits_G (4 - x - y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_{G_1} (4 - x - y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint\limits_{G_2} (4 - x - y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$



$$G_1 = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2\,;\ 0 \le x \le 1\,,\ 0 \le y \le 3\}$$
$$G_2 = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2\,;\ 1 \le x \le 2\,,\ 0 \le y \le 4 - x\}$$

$$\iint\limits_{G_1} (4 - x - y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \left(\int_0^3 (4 - x - y)\,\mathrm{d}y\right) \mathrm{d}x = 6$$

$$\iint\limits_{G_2} (4 - x - y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_1^2 \left(\int_0^{4-x} (4 - x - y)\,\mathrm{d}y\right) \mathrm{d}x = \frac{19}{6}\,, \qquad V = 6 + \frac{19}{6} = \frac{55}{6}\,.$$

Zpět

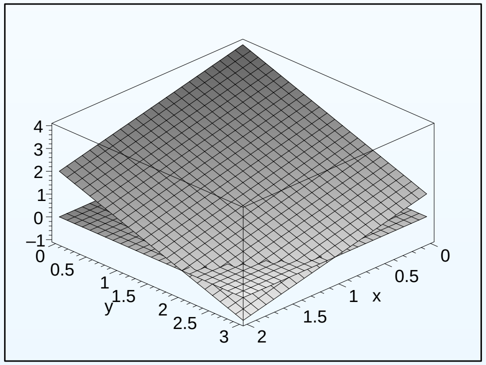
Příklad 10.6.1

Vypočtěte objem tělesa ohraničeného rovinami
$x = 0\,,\ y = 0\,,\ z = 0\,,\ x = 2\,,\ y = 3\,,\ x + y + z = 4\,.$

Maple:

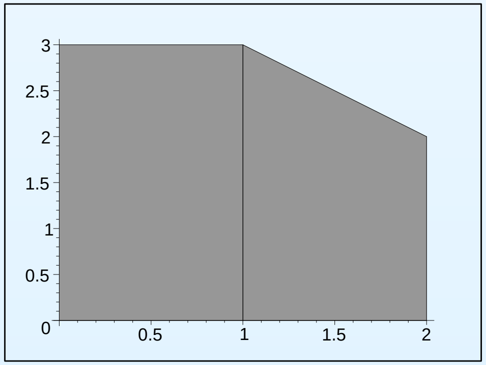
Abychom měli představu o tělese jehož objem počítáme, nakreslíme si roviny $x + y + z = 4$ a $z = 0$ na obdelníku $x \in \langle 0, 2\rangle \times \langle 0, 3\rangle$.

```
> plot3d([4-x-y,0],x=0..2,y=0..3,axes=boxed);
```



Nyní si nakreslíme množinu $G = G_1 \cup G_2$ přes kterou integrujeme.

```
> G1 := plottools[polygon]([[1,0], [1,3],[2,2],[2,0],[1,0]],
color=green): G2 :=plottools[polygon]([[0,0], [0,3],
[1,3],[1,0],[0,0]],color=green): plots[display](G1,G2);
```



Další

Příklad 10.6.1

Vypočtěte objem tělesa ohraničeného rovinami
$x = 0\,,\ y = 0\,,\ z = 0\,,\ x = 2\,,\ y = 3\,,\ x + y + z = 4\,.$

Maple:

Nakonec vypočteme objem daného tělesa.

```
> V:=Int(Int(4-x-y,y=0..3),x=0..1)+Int(Int(4-x-y,y=0..4-x),x=1..2)=int(
int(4-x-y,y=0..3),x=0..1)+int(int(4-x-y,y=0..4-x),x=1..2);
```

$$V := \int_0^1 \int_0^3 4 - x - y\, dy\, dx + \int_1^2 \int_0^{4-x} 4 - x - y\, dy\, dx = \frac{55}{6}$$

Zpět

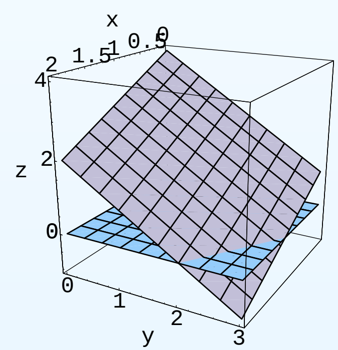
Příklad 10.6.1

Vypočtěte objem tělesa ohraničeného rovinami
$x = 0\,,\ y = 0\,,\ z = 0\,,\ x = 2\,,\ y = 3\,,\ x + y + z = 4\,.$

Mathematica:

Abychom měli představu o tělese jehož objem počítáme, nakreslíme si roviny
$x + y + z = 4$ a $z = 0$ na obdelníku $x \in \langle 0, 2\rangle \times \langle 0, 3\rangle$.

r1 = Plot3D[4 − x − y, {x, 0, 2}, {y, 0, 3}, PlotPoints → 10,DisplayFunction → Identity];
r2 = Plot3D[0, {x, 0, 2}, {y, 0, 3}, PlotPoints → 10, DisplayFunction → Identity];
Show[{r1, r2}, DisplayFunction → $DisplayFunction, AxesLabel → {x, y, z},
BoxRatios → {1, 1, 1}, ViewPoint->{2.728, 1.516, 1.103}];



Nyní si nakreslíme množinu $G = G_1 \cup G_2$ přes kterou integrujeme.

G = Graphics[{GrayLevel[.7], Polygon[{{0, 0}, {0, 3}, {1, 3}, {1, 0}, {0, 0}}],
Polygon[{{1, 0}, {1, 3}, {2, 2}, {2, 0}, {1, 0}}]}];

L = Graphics[{Line[{{0, 0}, {0, 3}, {1, 3}, {1, 0}, {0, 0}}],
Line[{{1, 0}, {1, 3}, {2, 2}, {2, 0}, {1, 0}}]}];

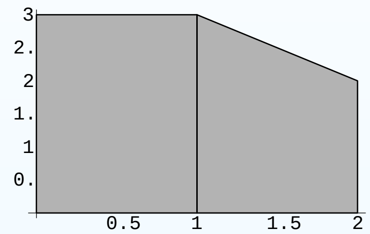
Další

Příklad 10.6.1

Vypočtěte objem tělesa ohraničeného rovinami
$x = 0\,,\; y = 0\,,\; z = 0\,,\; x = 2\,,\; y = 3\,,\; x + y + z = 4\,.$

Mathematica:

Show[{G, L}, Axes → True];



$$V = \textbf{Integrate}[4 - x - y, \{x, 0, 1\}, \{y, 0, 3\}] + \textbf{Integrate}[4 - x - y, \{x, 1, 2\}, \{y, 0, 4 - x\}]$$

$\frac{55}{6}$

Zpět

Příklad 10.6.2

Vypočtěte objem tělesa ohraničeného plochou $y = x^2$, a rovinami $y = 0$, $y + z = 2$.

Zpět

Příklad 10.6.2

Vypočtěte objem tělesa ohraničeného plochou $y = x^2$, a rovinami $y = 0$, $y + z = 2$.

Výsledek:

$\frac{32}{15}\sqrt{2}$.

Zpět

Příklad 10.6.2

Vypočtěte objem tělesa ohraničeného plochou $y = x^2$, a rovinami $y = 0$, $y + z = 2$.

Návod:

$V = \iint\limits_G (2 - y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde $G =$, $G = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2\,;\ -\sqrt{2} \le x \le \sqrt{2}\,,\ x^2 \le y \le 2\}$.

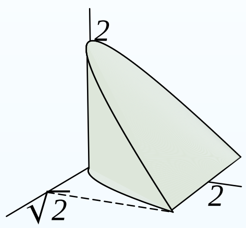
Zpět

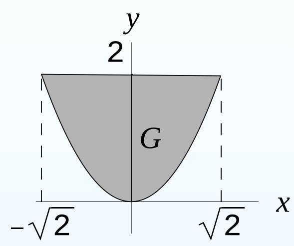
Příklad 10.6.2

Vypočtěte objem tělesa ohraničeného plochou $y = x^2$, a rovinami $y = 0$, $y + z = 2$.

Řešení:

Nakreslíme si obrázek uvažovaného tělesa a množinu G přes kterou budeme integrovat.





$$V = \iint_G (2 - y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \qquad G = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 ;\ -\sqrt{2} \le x \le \sqrt{2},\ x^2 \le y \le 2\}$$

$$\begin{aligned} V = \iint_G (2 - y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left(\int_{x^2}^{2} (2 - y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left[2\,y - \frac{y^2}{2} \right]_{x^2}^{2} \mathrm{d}x \\ &= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left(2 - 2\,x^2 + \frac{x^4}{2}) \right) \mathrm{d}x = \left[2\,x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^5}{10} \right]_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \\ &= 2 \left(2\sqrt{2} - \frac{4}{3}\sqrt{2} + \frac{2}{5}\sqrt{2} \right) = \frac{32}{15}\sqrt{2} . \end{aligned}$$

Zpět

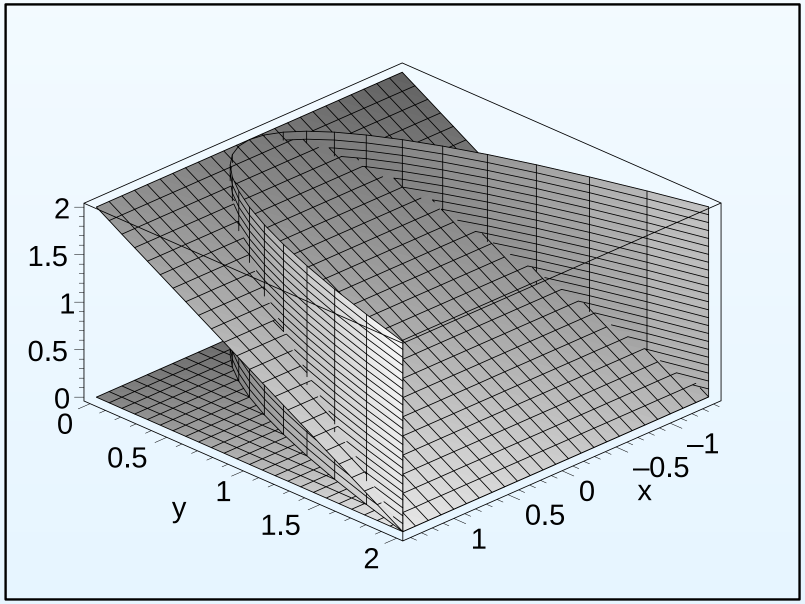
Příklad 10.6.2

Vypočtěte objem tělesa ohraničeného plochou $y = x^2$, a rovinami $y = 0$, $y + z = 2$.

Maple:

Abychom měli představu o tělese jehož objem počítáme, nakreslíme si roviny $y + z = 2$ a $z = 0$ a plochu $y = x^2$ na obdelníku $x \in \langle -\sqrt{2}, \sqrt{2} \rangle \times \langle 0, 2 \rangle$.

```
> g1:=plot3d(2-y,x=-sqrt(2)..sqrt(2),y=0..2,axes=boxed):
> g2:=plot3d([x,x^2,z],x=-sqrt(2)..sqrt(2),z=0..2):
> g3:=plot3d(0,x=-sqrt(2)..sqrt(2),y=0..2,axes=boxed):
> plots[display](g1,g2,g3);
```



Další

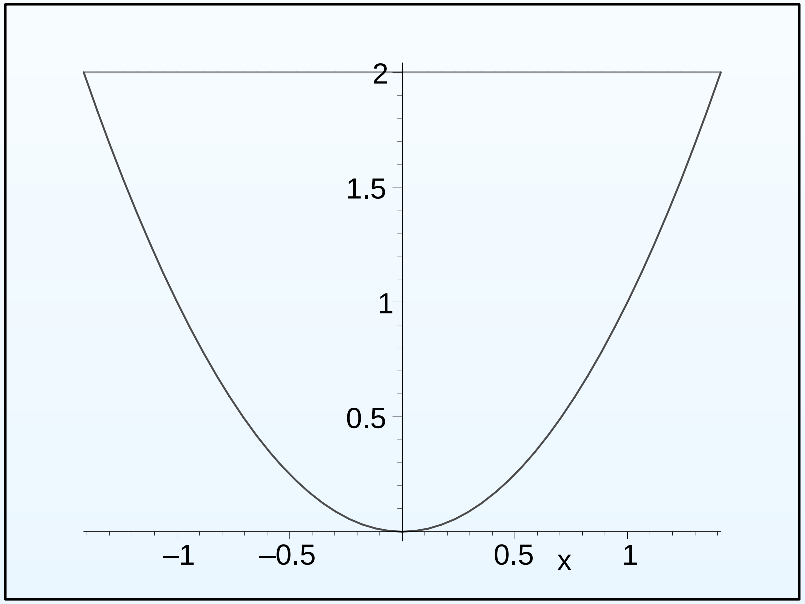
Příklad 10.6.2

Vypočtěte objem tělesa ohraničeného plochou $y = x^2$, a rovinami $y = 0$, $y + z = 2$.

Maple:

Nyní si nakreslíme množinu G přes kterou integrujeme.

```
> plot([x^2,2],x=-sqrt(2)..sqrt(2),thickness=3);
```



Nakonec vypočteme objem daného tělesa.

```
> V:=Int(Int(2-y,y=x^2..2),x=-sqrt(2)..sqrt(2))=int(int(2-y,y=x^2..2),x
=-sqrt(2)..sqrt(2));
```

$$V := \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \int_{x^2}^{2} 2 - y \, dy \, dx = \frac{32\sqrt{2}}{15}$$

Zpět

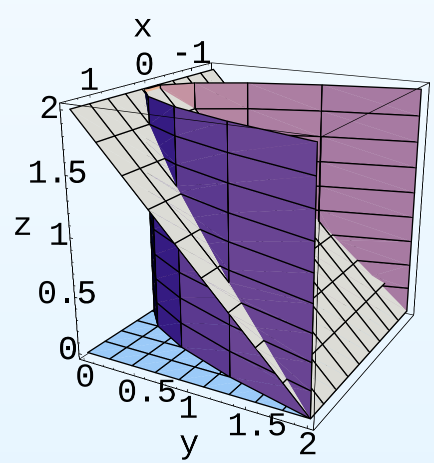
Příklad 10.6.2

Vypočtěte objem tělesa ohraničeného plochou $y = x^2$, a rovinami $y = 0$, $y + z = 2$.

Mathematica:

Abychom měli představu o tělese jehož objem počítáme, nakreslíme si roviny $y + z = 2$ a $z = 0$ a plochu $y = x^2$ na obdelníku $x \in \langle -\sqrt{2}, \sqrt{2} \rangle \times \langle 0, 2 \rangle$.

r1 = Plot3D[2 − y, {x, −Sqrt[2], Sqrt[2]}, {y, 0, 2}, PlotPoints → 10,DisplayFunction → Identity];
r2 = Plot3D[0, {x, −Sqrt[2], Sqrt[2]}, {y, 0, 2}, PlotPoints → 10,DisplayFunction → Identity];
r3 = ParametricPlot3D[{x, x^2, z}, {x, −Sqrt[2], Sqrt[2]}, {z, 0, 2},PlotPoints → 10, DisplayFunction →
Show[{r1, r2, r3}, DisplayFunction → $DisplayFunction, AxesLabel → {x, y, z},
BoxRatios → {1, 1, 1}, ViewPoint->{2.728, 1.516, 1.103}];



Další

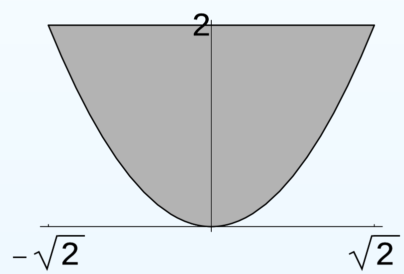
Příklad 10.6.2

Vypočtěte objem tělesa ohraničeného plochou $y = x^2$, a rovinami $y = 0$, $y + z = 2$.

Mathematica:

Nyní si nakreslíme množinu G přes kterou integrujeme.

$\mathbf{FilledPlot[\{2, x\^{}2\}, \{x, -Sqrt[2], Sqrt[2]\}, Fills \to \{\{\{1, 2\}, GrayLevel[.7]\}\},}$
$\mathbf{Ticks \to \left\{\left\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right\}, \{2\}\right\}];}$



Nakonec vypočteme objem daného tělesa.

$\mathbf{V = Integrate[2 - y, \{x, -Sqrt[2], Sqrt[2]\}, \{y, x\^{}2, 2\}]}$

$\frac{32\sqrt{2}}{15}$

Zpět

Příklad 10.6.3

Vypočtěte objem tělesa ohraničeného rovinou $z = 0$ a částí plochy $z = e^{-x^2-y^2}$.

Zpět

Příklad 10.6.3

Vypočtěte objem tělesa ohraničeného rovinou $z = 0$ a částí plochy $z = \mathrm{e}^{-x^2-y^2}$.

Výsledek:

$V = \pi$.

Zpět

Příklad 10.6.3

Vypočtěte objem tělesa ohraničeného rovinou $z = 0$ a částí plochy $z = \mathrm{e}^{-x^2-y^2}$.

Návod:

$V = \iint\limits_G \mathrm{e}^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde $G = \mathbb{R}^2$. Jedná se o nevlastní integrál.

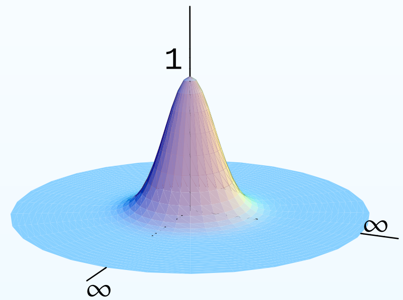
Zpět

Příklad 10.6.3

Vypočtěte objem tělesa ohraničeného rovinou $z = 0$ a částí plochy $z = \mathrm{e}^{-x^2-y^2}$.

Řešení:

Nakreslíme si obrázek uvažovaného tělesa



Množina přes kterou integrujeme je $G = \mathbb{R}^2$.
Nyní vypočteme objem tělesa:

$$V = \iint_G \mathrm{e}^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

Integrál je nevlastní.

$$V = \lim_{n\to\infty} \iint_{G_n} \mathrm{e}^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,,.$$

kde $D_n = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq n^2\}$.

Další

Příklad 10.6.3

Vypočtěte objem tělesa ohraničeného rovinou $z = 0$ a částí plochy $z = \mathrm{e}^{-x^2-y^2}$.

Řešení:

Při výpočtu integrálu pod limitou použijeme substituci do polárních souřadnic.

$$V_n = \iint_{G_n} \mathrm{e}^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{\bar{G}_n} r\mathrm{e}^{-r^2}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}t\,.$$

$$\begin{aligned} V_n &= \iint_{\bar{G}_n} r\mathrm{e}^{-r^2}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^n r\mathrm{e}^{-r^2}\,\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi}\left[-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-r^2}\right]_0^n \mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-n^2}\right)\mathrm{d}t = \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-n^2}\right)[t]_0^{2\pi} = \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-n^2}\right)2\,\pi\,. \end{aligned}$$

Objem uvažovaného tělesa je

$$V = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-n^2}\right)2\,\pi = \pi\,.$$

Zpět

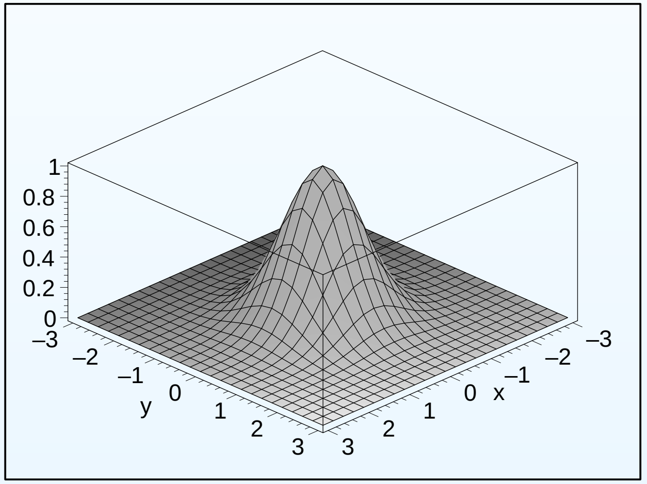
Příklad 10.6.3

Vypočtěte objem tělesa ohraničeného rovinou $z = 0$ a částí plochy $z = e^{-x^2-y^2}$.

Maple:

Abychom měli představu o tělese jehož objem počítáme, nakreslíme si plochu $z = e^{-x^2-y^2}$

```
> plot3d(exp(-x^2-y^2),x=-3..3,y=-3..3,axes=boxed);
```



Maple nám nevlastní integrál spočte přímo:

```
> V:=Int(Int(exp(-x^2-y^2),y=-infinity..infinity),x=-infinity..infinity
)=int(int(exp(-x^2-y^2),y=-infinity..infinity),x=-infinity..infinity);
```

$$V := \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{(-x^2-y^2)}\,dy\,dx = \pi$$

Zpět

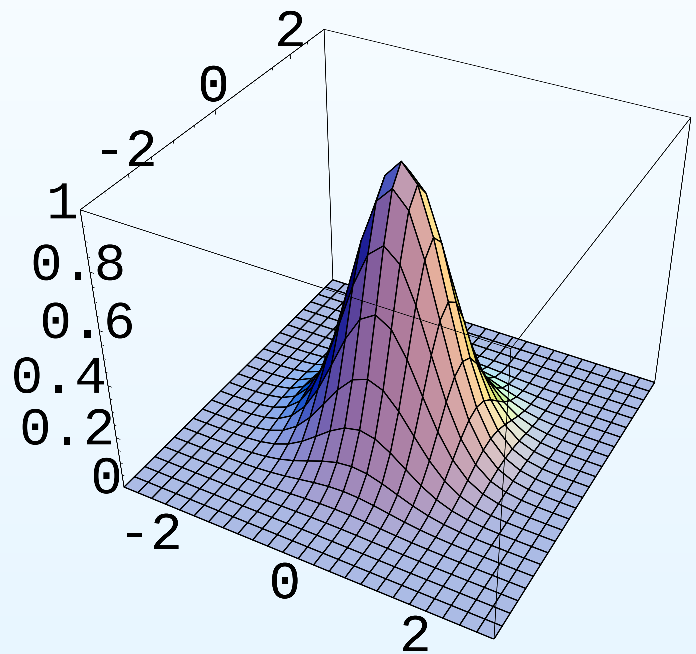
Příklad 10.6.3

Vypočtěte objem tělesa ohraničeného rovinou $z = 0$ a částí plochy $z = e^{-x^2-y^2}$.

Mathematica:

Abychom měli představu o tělese jehož objem počítáme, nakreslíme si plochu
$z = e^{-x^2-y^2}$

Plot3D[Exp[$-x$^2 $-$ y^2], {x, -3, 3}, {y, -3, 3}, PlotRange $\to$ {0, 1.0},BoxRatios $\to$ {1, 1, 0.8}];



Mathematica nám nevlastní integrál spočte přímo:

V = Integrate[Exp[$-x$^2 $-$ y^2], {x, $-$Infinity, Infinity},{y, $-$Infinity, Infinity}]

π

Zpět