# Kapitola 11: Křivkový integrál skalárního a vektorového pole

Chcete-li ukončit prohlížení stiskněte klávesu **Esc**.
Chcete-li pokračovat stiskněte klávesu **Enter**.

# Křivkový integrál skalárního a vektorového pole

- Výpočet křivkového integrálu skalárního pole
- Výpočet křivkového integrálu vektorového pole
- Výpočet potenciálu

Zpět

# Výpočet křivkového integrálu skalárního pole

- **Příklad 11.1.1** Vypočtěte křivkový integrál

$$I = \int_C (5x - 9y)\, ds,$$

kde $C$ je úsečka s krajními body $A = [1; 2]$ a $B = [5; 7]$.

- **Příklad 11.1.2** Vypočtěte

$$I = \int_C (8x^2 - 5y^2)\ \mathrm{d}s,$$

kde $C$ je křivka $x = 2\cos t,\ y = 2\sin t,\ t \in \langle 0, \pi \rangle$.

- **Příklad 11.1.3** Vypočtěte

$$\int_C (2x + 3y)\ \mathrm{d}s,$$

kde $C$ je úsečka vyťatá na přímce $y = 4x + 8$ souřadnicovými osami.

- **Příklad 11.1.4** Vypočtěte

$$I = \int_K xy\ \mathrm{d}s,$$

kde křivka $K$ je obvod trojúhelníku $ABC$ s vrcholy
$A = [1; 2; 3],\ B = [2; 3; 5],\ C = [8; 0; 1]$.

Zpět

# Příklad 11.1.1

Vypočtěte křivkový integrál

$$I = \int_C (5x - 9y)\, ds,$$

kde $C$ je úsečka s krajními body $A = [1; 2]$ a $B = [5; 7]$.

? Zpět

## Příklad 11.1.1

Vypočtěte křivkový integrál

$$I = \int_C (5x - 9y)\, ds,$$

kde $C$ je úsečka s krajními body $A = [1; 2]$ a $B = [5; 7]$.

**Výsledek:**

$I = -\dfrac{51}{2}\sqrt{41}..$

Zpět

## Příklad 11.1.1

Vypočtěte křivkový integrál

$$I = \int_C (5x - 9y)\, ds,$$

kde $C$ je úsečka s krajními body $A = [1; 2]$ a $B = [5; 7]$.

**Návod:**

Použijte vztah

$$I = \int_C f(x, y)\ \mathrm{d}s = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t), y(t))\, \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\ \mathrm{d}t,$$

kde $\vec{r}(t) = [x(t), y(t)]\,,\ t \in \langle t_1, t_2 \rangle$ je parametrizace křivky $C$.

Zpět

## Příklad 11.1.1

Vypočtěte křivkový integrál

$$I = \int\limits_C (5x - 9y)\, ds,$$

kde $C$ je úsečka s krajními body $A = [1; 2]$ a $B = [5; 7]$.

**Řešení:**

Použijeme parametrizaci úsečky $AB$

$$x = 1 + 4t; \quad y = 2 + 5t; \quad t \in \langle 0; 1 \rangle.$$

Potom velikost okamžité rychlosti je

$$v = \sqrt{x'^2 + y'^2} = \sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{16 + 25} = \sqrt{41}$$

a integrál je

$$I = \int\limits_0^1 (5(1 + 4t) - 9(2 + 5t))\sqrt{41}\, dt = \sqrt{41}\Big[ -13t - \frac{25}{2}t^2 \Big]_0^1 =$$

$$= \sqrt{41}(-13 - \frac{25}{2}) = -\frac{51}{2}\sqrt{41}.$$

Zpět

# Příklad 11.1.1

Vypočtěte křivkový integrál

$$I = \int_C (5x - 9y)\, ds,$$

kde $C$ je úsečka s krajními body $A = [1; 2]$ a $B = [5; 7]$.

**Maple:**

```
> f:=5*x-9*y:
> x:=1+4*t:
> y:=2+5*t:
> v:=sqrt(diff(x,t)^2+diff(y,t)^2):
> i:=int(f*v,t=0..1);
```

$$i := -\frac{51}{2}\sqrt{41}$$

Zpět

## Příklad 11.1.1

Vypočtěte křivkový integrál

$$I = \int_C (5x - 9y)\, ds,$$

kde $C$ je úsečka s krajními body $A = [1; 2]$ a $B = [5; 7]$.

**Mathematica:**

$\boldsymbol{f = 5x - 9y;}$

$\boldsymbol{x = 1 + 4t;}$

$\boldsymbol{y = 2 + 5t;}$

$\boldsymbol{v = \mathrm{Sqrt}[D[x, t]\hat{}2 + D[y, t]\hat{}2];}$

$\boldsymbol{i = \mathrm{Integrate}[f * v, \{t, 0, 1\}]}$

$-\frac{51\sqrt{41}}{2}$

Zpět

## Příklad 11.1.2

Vypočtěte

$$I = \int_C (8x^2 - 5y^2)\ \mathrm{d}s,$$

kde $C$ je křivka $x = 2\cos t,\ y = 2\sin t,\ t \in \langle 0, \pi\rangle$.

? Zpět

## Příklad 11.1.2

Vypočtěte

$$I = \int_C (8x^2 - 5y^2)\ \mathrm{d}s,$$

kde $C$ je křivka $x = 2\cos t,\ \ y = 2\sin t,\ \ t \in \langle 0, \pi \rangle$.

**Výsledek:**

$I = 12\pi$ .

Zpět

## Příklad 11.1.2

Vypočtěte

$$I = \int_C (8x^2 - 5y^2)\ \mathrm{d}s,$$

kde $C$ je křivka $x = 2\cos t,\ \ y = 2\sin t,\ \ t \in \langle 0, \pi\rangle$.

**Návod:**

Použijte vztah

$$I = \int_C f(x,y)\ \mathrm{d}s = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t), y(t))\ \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\ \mathrm{d}t,$$

kde $\vec{r}(t) = [x(t), y(t)]\,,\ t \in \langle t_1, t_2\rangle$ je parametrizace křivky $C$.

Zpět

## Příklad 11.1.2

Vypočtěte

$$I = \int_C (8x^2 - 5y^2)\ \mathrm{d}s,$$

kde $C$ je křivka $x = 2\cos t,\ y = 2\sin t,\ t \in \langle 0, \pi \rangle$.

**Řešení:**

Použijeme zadanou parametrizaci

$$x = 2\cos t,\ y = 2\sin t,\ t \in \langle 0, \pi \rangle.$$

Potom velikost okamžité rychlosti je

$$v = \sqrt{x'^2 + y'^2} = \sqrt{(-2\sin t)^2 + (2\cos t)^2} = 2$$

a integrál je

$$I = \int_0^\pi (32\cos^2 t - 20\sin^2 t)\, 2\, dt = 12\pi.$$

Zpět

## Příklad 11.1.2

Vypočtěte

$$I = \int_C (8x^2 - 5y^2)\ \mathrm{d}s,$$

kde $C$ je křivka $x = 2\cos t,\ y = 2\sin t,\ t \in \langle 0, \pi \rangle$.

**Maple:**

```
> f:=8*x^2-5*y^2:
> x:=2*cos(t):
> y:=2*sin(t):
> v:=sqrt(diff(x,t)^2+diff(y,t)^2):
> i:=int(f*v,t=0..Pi);
```

$$i := 12\,\pi$$

Zpět

## Příklad 11.1.2

Vypočtěte

$$I = \int_C (8x^2 - 5y^2)\ \mathrm{d}s,$$

kde $C$ je křivka $x = 2\cos t,\ \ y = 2\sin t,\ \ t \in \langle 0, \pi \rangle$.

**Mathematica:**

$\boldsymbol{f = 8x\hat{\ }2 - 5y\hat{\ }2;}$

$\boldsymbol{x = 2\mathrm{Cos}[t];}$

$\boldsymbol{y = 2\mathrm{Sin}[t];}$

$\boldsymbol{v = \mathrm{Sqrt}[D[x,t]\hat{\ }2 + D[y,t]\hat{\ }2];}$

$\boldsymbol{i = \mathrm{Integrate}[f\ v, \{t, 0, \mathrm{Pi}\}]}$

$12\pi$

Zpět

## Příklad 11.1.3

Vypočtěte

$$\int_C (2x + 3y)\ \mathrm{d}s,$$

kde $C$ je úsečka vyťatá na přímce $y = 4x + 8$ souřadnicovými osami.

Zpět

## Příklad 11.1.3

Vypočtěte

$$\int_C (2x + 3y)\ \mathrm{d}s,$$

kde $C$ je úsečka vyťatá na přímce $y = 4x + 8$ souřadnicovými osami.

**Výsledek:**

$I = 20\sqrt{17}\,.$

Zpět

## Příklad 11.1.3

Vypočtěte

$$\int_C (2x + 3y)\ \mathrm{d}s,$$

kde $C$ je úsečka vyťatá na přímce $y = 4x + 8$ souřadnicovými osami.

**Návod:**

Použijte vztah

$$I = \int_C f(x, y)\ \mathrm{d}s = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t), y(t))\, \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\ \mathrm{d}t,$$

kde $\vec{r}(t) = [x(t), y(t)]\,,\ t \in \langle t_1, t_2 \rangle$ je parametrizace křivky $C$.

Zpět

## Příklad 11.1.3

Vypočtěte

$$\int\limits_C (2x + 3y)\ \mathrm{d}s,$$

kde $C$ je úsečka vyťatá na přímce $y = 4x + 8$ souřadnicovými osami.

**Řešení:**

Použijeme parametrizaci

$$x = t,\ \ y = 4t + 8,\ \ t \in \langle -2, 0 \rangle.$$

Potom velikost okamžité rychlosti je

$$v = \sqrt{x'^2 + y'^2} = \sqrt{(1)^2 + (4)^2} = \sqrt{17}$$

a integrál je

$$I = \int\limits_{-2}^{0} (2t + 3(4t + 8))\sqrt{17}\ \mathrm{d}t = \sqrt{17}\Big[7t^2 + 24t\Big]_{-2}^{0} = \sqrt{17}(-28 + 48) = 20\sqrt{17}.$$

Zpět

# Příklad 11.1.3

Vypočtěte

$$\int_C (2x + 3y)\ \mathrm{d}s,$$

kde $C$ je úsečka vyťatá na přímce $y = 4x + 8$ souřadnicovými osami.

**Maple:**

```
>  f:=2*x+3*y:
>  x:=t:
>  y:=4*t+8:
>  v:=sqrt(diff(x,t)^2+diff(y,t)^2):
>  i:=int(f*v,t=-2..0);
```

$$i := 20\sqrt{17}$$

Zpět

# Příklad 11.1.3

Vypočtěte

$$\int_C (2x + 3y)\ \mathrm{d}s,$$

kde $C$ je úsečka vyťatá na přímce $y = 4x + 8$ souřadnicovými osami.

**Mathematica:**

$\boldsymbol{f = 2x + 3y;}$

$\boldsymbol{x = t;}$

$\boldsymbol{y = 4t + 8;}$

$\boldsymbol{v = \mathrm{Sqrt}[D[x, t]^\wedge 2 + D[y, t]^\wedge 2];}$

$\boldsymbol{i = \mathrm{Integrate}[f * v, \{t, -2, 0\}]}$

$2\sqrt{17}(-3 + 3\mathrm{Cos}[2] + 2\mathrm{Sin}[2])$

Zpět

## Příklad 11.1.4

Vypočtěte

$$I = \int\limits_K xy \, \mathrm{d}s,$$

kde křivka $K$ je obvod trojúhelníku $ABC$ s vrcholy $A = [1; 2; 3]$, $B = [2; 3; 5]$, $C = [8; 0; 1]$.

Zpět

## Příklad 11.1.4

Vypočtěte

$$I = \int_K xy \; \mathrm{d}s,$$

kde křivka $K$ je obvod trojúhelníku $ABC$ s vrcholy
$A = [1; 2; 3],\ \ B = [2; 3; 5],\ \ C = [8; 0; 1]$.

**Výsledek:**

$I = \frac{23}{6}\sqrt{6} + \frac{10}{3}\sqrt{57} + 6\sqrt{61}\,.$ Zpět

# Příklad 11.1.4

Vypočtěte

$$I = \int\limits_K xy \; \mathrm{d}s,$$

kde křivka $K$ je obvod trojúhelníku $ABC$ s vrcholy
$A = [1; 2; 3],\; B = [2; 3; 5],\; C = [8; 0; 1]$.

## Návod:

Křivkový integrál přes tři úsečky nahradíme součtem třech integrálů přes jednotlivé úsečky. Na každý z těchto třech integrálu použijeme vztah

$$I = \int\limits_K f(x, y, z) \; \mathrm{d}s = \int\limits_{t_1}^{t_2} f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} \; \mathrm{d}t.$$

kde $\vec{r}(t) = [x(t), y(t), z(t)]\,,\; t \in \langle t_1, t_2 \rangle$ je parametrizace křivky $C$.

Zpět

## Příklad 11.1.4

Vypočtěte

$$I = \int_K xy \, \mathrm{d}s,$$

kde křivka $K$ je obvod trojúhelníku $ABC$ s vrcholy
$A = [1; 2; 3], \; B = [2; 3; 5], \; C = [8; 0; 1]$.

**Řešení:**

Pro parametrizaci úsečky $AB$ použijeme vztah $X = A + t(B - A)$, kde $t \in \langle 0; 1 \rangle$, tedy $x = 1 + t; \; y = 2 + t; \; z = 3 + 2t$. Velikost rychlosti probíhání úsečky $AB$ je

$$v = ||B - A|| = \sqrt{6}$$

a integrál přes úsečku $AB$ je

$$I_{AB} = \int_0^1 (1+t)(2+t)\sqrt{6} \; \mathrm{d}t = \sqrt{6}\left[2t + \frac{3}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3\right]_0^1 = \frac{23}{6}\sqrt{6}.$$

Obdobně spočteme integrály přes úsečku $BC$ a přes úsečku $CA$ a tyto tři integrály sečteme a dostaneme

$$I = I_{AB} + I_{BC} + I_{CA} = \frac{23}{6}\sqrt{6} + \frac{10}{3}\sqrt{57} + 6\sqrt{61}.$$

Zpět

# Příklad 11.1.4

Vypočtěte

$$I = \int_K xy \,\mathrm{d}s,$$

kde křivka $K$ je obvod trojúhelníku $ABC$ s vrcholy
$A = [1; 2; 3],\ B = [2; 3; 5],\ C = [8; 0; 1].$

**Maple:**

```
> a:=[1,2,3]: b:=[2,3,5]: c:=[8,0,1]:
> f:=x->x[1]*x[2]:
> j:=(p,q)->int(f(evalm(p+t*(q-p)))*linalg[norm](q-p,2),t=0..1):
> i:=j(a,b)+j(b,c)+j(c,a);
```

$$i := \frac{23}{6}\sqrt{6} + 6\sqrt{61} + 10/3\sqrt{57}$$

Zpět

# Příklad 11.1.4

Vypočtěte

$$I = \int_K xy \; \mathrm{d}s,$$

kde křivka $K$ je obvod trojúhelníku $ABC$ s vrcholy
$A = [1; 2; 3], \;\; B = [2; 3; 5], \;\; C = [8; 0; 1]$.

**Mathematica:**

$\boldsymbol{A = \{1, 2, 3\}; B = \{2, 3, 5\}; \mathrm{CC} = \{8, 0, 1\};}$

$\boldsymbol{f[\{\mathrm{x\_}, \mathrm{y\_}, \mathrm{z\_}\}] \mathrm{:=} x\ y;}$

$\boldsymbol{j[\mathrm{p\_}, \mathrm{q\_}] \mathrm{:=Integrate}[f[p + t * (q - p)] * \mathrm{Norm}[q - p], \{t, 0, 1\}];}$

$\boldsymbol{i = j[A, B] + j[B, \mathrm{CC}] + j[\mathrm{CC}, A]}$

$\frac{23}{\sqrt{6}} + 10\sqrt{\frac{19}{3}} + 6\sqrt{61}$

Zpět

## Výpočet křivkového integrálu vektorového pole

- **Příklad 11.2.1** Zjistěte, zda je vektorové pole $\vec{F}(x,y) = (y^2, x)$ potenciální, a vypočtěte křivkový integrál $I = \int\limits_C \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$, kde $C$ je část paraboly $y = x^2$ s počátečním bodem $(0,0)$ a koncovým bodem $(1,1)$.
- **Příklad 11.2.2** Zjistěte, zda je vektorové pole $\vec{F}(x,y) = (y^2, 2xy)$ potenciální, a vypočtěte křivkový integrál $I = \int\limits_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, kde $C$ je jednotková kružnice obíhaná v kladném směru.
- **Příklad 11.2.3** Zjistěte, zda je vektorové pole $\vec{F}(x,y,z) = (2,6,5)$ potenciální, a vypočtěte křivkový integrál $I = \int\limits_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, kde $C$ je jeden závit šroubovice $x = \sin t, \quad y = \cos t, \quad z = t, \quad t_1 = 0, \quad t_2 = 2\pi.$

Zpět

## Příklad 11.2.1

Zjistěte, zda je vektorové pole $\vec{F}(x,y) = (y^2, x)$ potenciální, a vypočtěte křivkový integrál $I = \int\limits_C \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$, kde $C$ je část paraboly $y = x^2$ s počátečním bodem $(0,0)$ a koncovým bodem $(1,1)$.

?

Zpět

## Příklad 11.2.1

Zjistěte, zda je vektorové pole $\vec{F}(x,y) = (y^2, x)$ potenciální, a vypočtěte křivkový integrál $I = \int\limits_C \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$, kde $C$ je část paraboly $y = x^2$ s počátečním bodem $(0,0)$ a koncovým bodem $(1,1)$.

**Výsledek:**

Toto vektorové pole není potenciální a $I = \frac{13}{15}$ .

Zpět

## Příklad 11.2.1

Zjistěte, zda je vektorové pole $\vec{F}(x,y) = (y^2, x)$ potenciální, a vypočtěte křivkový integrál $I = \int\limits_C \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$, kde $C$ je část paraboly $y = x^2$ s počátečním bodem $(0,0)$ a koncovým bodem $(1,1)$.

### Návod:

Porovnejte $\frac{\partial F_1}{\partial y}$ a $\frac{\partial F_2}{\partial x}$. Pro výpočet integrálu použijte vztah
$I = \int\limits_C \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int\limits_C (F_1\ \mathrm{d}x + F_2\ \mathrm{d}y)$.

Zpět

## Příklad 11.2.1

Zjistěte, zda je vektorové pole $\vec{F}(x,y) = (y^2, x)$ potenciální, a vypočtěte křivkový integrál $I = \int\limits_C \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$, kde $C$ je část paraboly $y = x^2$ s počátečním bodem $(0,0)$ a koncovým bodem $(1,1)$.

**Řešení:**

Označíme si složky pole $F_1(x,y) = y^2$ a $F_2(x,y) = x$ a spočteme parciální derivace

$$\frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) = 2y \qquad \frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) = 1.$$

Ty se nerovnají, proto pole $\vec{F}$ není potenciální a integrál závisí na integrační cestě (proto ji nemůžeme změnit). Pro výpočet integrálu zvolíme parametrizaci

$$x = t, \quad y = t^2, \quad t \in \langle 0, 1 \rangle.$$

Odtud

$$v_1 = x' = 1, \quad v_2 = y' = 2t,$$

takže

$$dx = v_1\, dt = dt, \quad dy = v_2\, dt = 2\, t\, dt$$

Další

## Příklad 11.2.1

Zjistěte, zda je vektorové pole $\vec{F}(x,y) = (y^2, x)$ potenciální, a vypočtěte křivkový integrál $I = \int\limits_C \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$, kde $C$ je část paraboly $y = x^2$ s počátečním bodem $(0,0)$ a koncovým bodem $(1,1)$.

**Řešení:**

a integrál je

$$I = \int\limits_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int\limits_C (F_1\, dx + F_2\, dy) = \int\limits_0^1 ((t^2)^2 + t\,2\,t)\, dt = \int\limits_0^1 (t^4 + 2t^2)\, dt =$$

$$= \left[\frac{t^5}{5} + \frac{2}{3}t^3\right]_0^1 = \frac{1}{5} + \frac{2}{3} = \frac{13}{15}.$$

Zpět

## Příklad 11.2.1

Zjistěte, zda je vektorové pole $\vec{F}(x,y) = (y^2, x)$ potenciální, a vypočtěte křivkový integrál $I = \int\limits_C \vec{F} \cdot \,\mathrm{d}\vec{r}$, kde $C$ je část paraboly $y = x^2$ s počátečním bodem $(0,0)$ a koncovým bodem $(1,1)$.

**Maple:**

```
> f1:=y^2: f2:=x: x:=t: y:=t^2:
> v1:=diff(x,t): v2:=diff(y,t):
> i:=int(f1*v1+f2*v2,t=0..1);
```

$$i := \frac{13}{15}$$

Zpět

## Příklad 11.2.1

Zjistěte, zda je vektorové pole $\vec{F}(x,y) = (y^2, x)$ potenciální, a vypočtěte křivkový integrál $I = \int\limits_C \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$, kde $C$ je část paraboly $y = x^2$ s počátečním bodem $(0,0)$ a koncovým bodem $(1,1)$.

**Mathematica:**

$\mathbf{f1} = \boldsymbol{y}\hat{}\mathbf{2}; \mathbf{f2} = \boldsymbol{x}; \boldsymbol{x} = \boldsymbol{t}; \boldsymbol{y} = \boldsymbol{t}\hat{}\mathbf{2};$

$\mathbf{v1} = \boldsymbol{D}[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t}]; \mathbf{v2} = \boldsymbol{D}[\boldsymbol{y}, \boldsymbol{t}];$

$\boldsymbol{i} = \mathbf{Integrate}[\mathbf{f1} * \mathbf{v1} + \mathbf{f2} * \mathbf{v2}, \{\boldsymbol{t}, \mathbf{0}, \mathbf{1}\}]$

$\frac{13}{15}$

Zpět

## Příklad 11.2.2

Zjistěte, zda je vektorové pole $\vec{F}(x,y) = (y^2, 2xy)$ potenciální, a vypočtěte křivkový integrál $I = \int\limits_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, kde $C$ je jednotková kružnice obíhaná v kladném směru.

? Zpět

## Příklad 11.2.2

Zjistěte, zda je vektorové pole $\vec{F}(x,y) = (y^2, 2xy)$ potenciální, a vypočtěte křivkový integrál $I = \int\limits_C \vec{F} \cdot \vec{dr}$, kde $C$ je jednotková kružnice obíhaná v kladném směru.

**Výsledek:**

Toto vektorové pole je potenciální a $I = 0$ .

Zpět

## Příklad 11.2.2

Zjistěte, zda je vektorové pole $\vec{F}(x, y) = (y^2, 2xy)$ potenciální, a vypočtěte křivkový integrál $I = \int\limits_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, kde $C$ je jednotková kružnice obíhaná v kladném směru.

**Návod:**

Porovnejte $\frac{\partial F_1}{\partial y}$ a $\frac{\partial F_2}{\partial x}$. Křivkový integrál vektorového pole, které má potenciál (nutno ověřit), po uzavřené křivce (nutno ověřit) je nulový.

Zpět

## Příklad 11.2.2

Zjistěte, zda je vektorové pole $\vec{F}(x, y) = (y^2, 2xy)$ potenciální, a vypočtěte křivkový integrál $I = \int\limits_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, kde $C$ je jednotková kružnice obíhaná v kladném směru.

**Řešení:**

Označíme si složky pole $F_1 = y^2$ a $F_2 = 2xy$ a spočteme parciální derivace

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = 2y$$

a

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = 2y.$$

Ty se rovnají na $\mathbb{R}^2$, což je jednoduše souvislá množina, proto pole $\vec{F}$ má na $\mathbb{R}^2$ potenciál a integrál po uzavřené křivce (což zadaná křivka je) je rovný nule.

Zpět

## Příklad 11.2.2

Zjistěte, zda je vektorové pole $\vec{F}(x,y) = (y^2, 2xy)$ potenciální, a vypočtěte křivkový integrál $I = \int\limits_C \vec{F} \cdot \vec{dr}$, kde $C$ je jednotková kružnice obíhaná v kladném směru.

**Maple:**

Ověříme si zda je pole potenciální

```
>   f1:=y^2: f2:=2*x*y:
>   diff(f1,y)-diff(f2,x);
```

$$0$$

Zpět

## Příklad 11.2.2

Zjistěte, zda je vektorové pole $\vec{F}(x, y) = (y^2, 2xy)$ potenciální, a vypočtěte křivkový integrál $I = \int\limits_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, kde $C$ je jednotková kružnice obíhaná v kladném směru.

**Mathematica:**

Ověříme si zda je pole potenciální

```
f1 = y^2; f2 = 2x * y;
D[f1, y]==D[f2, x]
```

True

Zpět

# Příklad 11.2.3

Zjistěte, zda je vektorové pole $\vec{F}(x, y, z) = (2, 6, 5)$ potenciální, a vypočtěte křivkový integrál $I = \int\limits_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, kde $C$ je jeden závit šroubovice

$x = \sin t, \quad y = \cos t, \quad z = t, \quad t_1 = 0, \quad t_2 = 2\pi.$

Zpět

# Příklad 11.2.3

Zjistěte, zda je vektorové pole $\vec{F}(x, y, z) = (2, 6, 5)$ potenciální, a vypočtěte křivkový integrál $I = \int\limits_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, kde $C$ je jeden závit šroubovice

$x = \sin t, \quad y = \cos t, \quad z = t, \quad t_1 = 0, \quad t_2 = 2\pi.$

**Výsledek:**

Toto vektorové pole je potenciální a $I = 10\pi$ .

Zpět

## Příklad 11.2.3

Zjistěte, zda je vektorové pole $\vec{F}(x, y, z) = (2, 6, 5)$ potenciální, a vypočtěte křivkový integrál $I = \int\limits_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, kde $C$ je jeden závit šroubovice

$$x = \sin t, \quad y = \cos t, \quad z = t, \quad t_1 = 0, \quad t_2 = 2\pi.$$

**Návod:**

Porovnejte $\frac{\partial F_1}{\partial y}$ a $\frac{\partial F_2}{\partial x}$. Křivkový integrál vektorového pole, které má potenciál (nutno ověřit), nezávisí na integrační cestě.

Zpět

## Příklad 11.2.3

Zjistěte, zda je vektorové pole $\vec{F}(x,y,z) = (2,6,5)$ potenciální, a vypočtěte křivkový integrál $I = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, kde $C$ je jeden závit šroubovice

$x = \sin t, \quad y = \cos t, \quad z = t, \quad t_1 = 0, \quad t_2 = 2\pi.$

**Řešení:**

Označíme si složky pole $F_1 = 2$, $F_2 = 6$ a $F_3 = 5$. Všechny jejich první parciální derivace jsou nulové, tedy platí

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial y}$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial x}$$

na $\mathbb{R}^3$, což je jednoduše souvislá množina, proto pole $\vec{F}$ má na $\mathbb{R}^3$ potenciál a integrál nezávisí na integrační cestě. Proto můžeme místo po šroubovici integrovat po úsečce spojující její počáteční bod $(1,0,0)$ a její koncový bod $(1,0,2\pi)$. Zvolíme její parametrizaci

$$x = 1, \quad y = 0, \quad z = t, \quad t_1 = 0, \quad t_2 = 2\pi.$$

Další

# Příklad 11.2.3

Zjistěte, zda je vektorové pole $\vec{F}(x,y,z) = (2,6,5)$ potenciální, a vypočtěte křivkový integrál $I = \int\limits_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, kde $C$ je jeden závit šroubovice

$x = \sin t, \quad y = \cos t, \quad z = t, \quad t_1 = 0, \quad t_2 = 2\pi.$

## Řešení:

Potom

$$dx = 0, \quad dy = 0, \quad dz = dt$$

a integrál je

$$I = \int\limits_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int\limits_0^{2\pi} 5\ dt = 10\pi.$$

**Poznámka:**
V tomto výjimečně jednoduchém případě je snadné integrovat i po původní křivce, tedy po šroubovici a dostaneme

$$I = \int\limits_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int\limits_C (F_1\ dx + F_2\ dy + F_3\ dz) = \int\limits_0^{2\pi} (2(-\sin t) + 6(\cos t) + 5)\ dt = 10\pi,$$

tedy stejný výsledek.

Zpět

# Příklad 11.2.3

Zjistěte, zda je vektorové pole $\vec{F}(x, y, z) = (2, 6, 5)$ potenciální, a vypočtěte křivkový integrál $I = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, kde $C$ je jeden závit šroubovice

$x = \sin t, \quad y = \cos t, \quad z = t, \quad t_1 = 0, \quad t_2 = 2\pi.$

**Maple:**

Nejdříve výpočet integrálu po úsečce (vektorové pole je potenciální):

```
> f1:=2: f2:=6: f3:=5:
> x:=1: y:=0: z:=t:
> v1:=diff(x,t): v2:=diff(y,t): v3:=diff(z,t):
> i:=int(f1*v1+f2*v2+f3*v3,t=0..2*Pi);
```

$$i := 10\,\pi$$

Nyní výpočet integrálu po šroubovici:

```
> f1:=2: f2:=6: f3:=5:
> x:=cos(t): y:=sin(t): z:=t:
> v1:=diff(x,t): v2:=diff(y,t): v3:=diff(z,t):
> i:=int(f1*v1+f2*v2+f3*v3,t=0..2*Pi);
```

$$i := 10\,\pi$$

Zpět

## Příklad 11.2.3

Zjistěte, zda je vektorové pole $\vec{F}(x,y,z) = (2,6,5)$ potenciální, a vypočtěte křivkový integrál $I = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, kde $C$ je jeden závit šroubovice

$x = \sin t, \quad y = \cos t, \quad z = t, \quad t_1 = 0, \quad t_2 = 2\pi.$

### Mathematica:

Nejdříve výpočet integrálu po úsečce (vektorové pole je potenciální):

```
f1 = 2; f2 = 6; f3 = 5;
x = 1; y = 0; z = t;
v1 = D[x, t]; v2 = D[y, t]; v3 = D[z, t];
f1 = 2; f2 = 6; f3 = 5;
i = Integrate[f1 * v1 + f2 * v2 + f3 * v3, {t, 0, 2 * Pi}]
```

$10\pi$

Nyní výpočet integrálu po šroubovici:

```
f1 = 2; f2 = 6; f3 = 5;
x = Cos[t]; y = Sin[t]; z = t;
v1 = D[x, t]; v2 = D[y, t]; v3 = D[z, t];
i = Integrate[f1 * v1 + f2 * v2 + f3 * v3, {t, 0, 2 * Pi}]
```

$10\pi$

Zpět

# Výpočet potenciálu

- Příklad 11.3.1 Ověřte, že vektorové pole $\vec{F}(x,y) = (2x + y, 3y^2 + x)$ má potenciál na nějaké jednoduše souvislé množině $G$ a najděte potenciál i množinu $G$.
- Příklad 11.3.2 Ověřte, že vektorové pole $\vec{F}(x,y,z) = (y^2z^3, 2xyz^3, 3xy^2z^2)$ má potenciál na nějaké jednoduše souvislé množině $G$ a najděte potenciál i množinu $G$.

Zpět

## Příklad 11.3.1

Ověřte, že vektorové pole $\vec{F}(x,y) = (2x + y, 3y^2 + x)$ má potenciál na nějaké jednoduše souvislé množině $G$ a najděte potenciál i množinu $G$.

? Zpět

## Příklad 11.3.1

Ověřte, že vektorové pole $\vec{F}(x,y) = (2x + y, 3y^2 + x)$ má potenciál na nějaké jednoduše souvislé množině $G$ a najděte potenciál i množinu $G$.

**Výsledek:**

Pole $\vec{F}$ má potenciál $U(x,y) = x^2 + y^3 + xy$ na množině $G = \mathbb{R}^2$ .

Zpět

## Příklad 11.3.1

Ověřte, že vektorové pole $\vec{F}(x,y) = (2x+y, 3y^2+x)$ má potenciál na nějaké jednoduše souvislé množině $G$ a najděte potenciál i množinu $G$.

### Návod:

Porovnejte $\frac{\partial F_1}{\partial y}$ a $\frac{\partial F_2}{\partial x}$. Potenciál $U$ vektorového pole $\vec{F}$ je takové skalární pole $U$, pro které platí grad $U = \vec{F}$.

Zpět

# Příklad 11.3.1

Ověřte, že vektorové pole $\vec{F}(x,y) = (2x+y, 3y^2+x)$ má potenciál na nějaké jednoduše souvislé množině $G$ a najděte potenciál i množinu $G$.

## Řešení:

Označíme si složky pole $F_1 = 2x + y$ a $F_2 = 3y^2 + x$ a spočteme parciální derivace

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = 1 \qquad \frac{\partial F_2}{\partial x} = 1.$$

Ty se rovnají na $\mathbb{R}^2$, což je jednoduše souvislá množina, proto pole $\vec{F}$ má na $\mathbb{R}^2$ potenciál. Potenciál můžeme nalézt dvojím způsobem:

**(a)** pomocí křivkového integrálu,

**(b)** řešením soustavy parciálních diferenciálních rovnic.

Ukážeme si oba způsoby, nejprve pomocí křivkového integrálu.

**(a)** Je výhodné zvolit si integrační cestu sestávající ze dvou úseček rovnoběžných se souřadnicovými osami. Zvolme si počáteční bod v počátku a obecný koncový bod označme $(\tilde{x}, \tilde{y})$. Potom parametrizace úseček $C_1$, $C_2$ mohou být

$$\begin{array}{llllllll} C_1: & x = t, & y = 0, & t_1 = 0, & t_2 = \tilde{x}, & \text{pak} & dx = dt, & dy = 0, \\ C_2: & x = \tilde{x}, & y = t, & t_1 = 0, & t_2 = \tilde{y}, & \text{pak} & dx = 0, & dy = dt. \end{array}$$

Pro potenciál $U$ platí

$$U(\tilde{x},\tilde{y}) - U(0,0) = \int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_C (F_1 dx + F_2 dy) = \int_{C_1} (F_1 dx + F_2 dy) + \int_{C_2} (F_1 dx + F_2 dy) =$$

$$= \int_0^{\tilde{x}} 2t\,dt + \int_0^{\tilde{y}} (3t^2 + \tilde{x})\,dt = \Big[t^2\Big]_0^{\tilde{x}} + \Big[t^3 + \tilde{x}t\Big]_0^{\tilde{y}} = \tilde{x}^2 + \tilde{y}^3 + \tilde{x}\tilde{y}.$$

Další

## Příklad 11.3.1

Ověřte, že vektorové pole $\vec{F}(x,y) = (2x+y, 3y^2+x)$ má potenciál na nějaké jednoduše souvislé množině $G$ a najděte potenciál i množinu $G$.

### Řešení:

Takže potenciál je

$$U(x,y) = x^2 + y^3 + xy + c.$$

**(b)** Potenciál lze také najít z podmínky grad $U = \vec{F}$,
tedy řešením soustavy dvou parciálních diferenciálních rovnic

$$\frac{\partial U}{\partial x} = F_1 \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = F_2,$$

tedy

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 2x + y \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = 3y^2 + x.$$

Integrací první rovnice dostaneme

$$U = \int (2x+y)\; dx = x^2 + xy + k(y).$$

Zde $k(y)$ nezávisí na $x$, ale může záviset na $y$. Najdeme ji použitím druhé rovnice:

$$\frac{\partial U}{\partial y} = 3y^2 + x. \text{ tedy } x + k'(y) = 3y^2 + x \Rightarrow k'(y) = 3y^2 \Rightarrow k(y) = \int 3y^2\, dy = y^3 + c.$$

Takže potenciál je

$$U(x,y) = x^2 + xy + y^3 + c.$$

Zpět

## Příklad 11.3.1

Ověřte, že vektorové pole $\vec{F}(x,y) = (2x+y, 3y^2+x)$ má potenciál na nějaké jednoduše souvislé množině $G$ a najděte potenciál i množinu $G$.

**Maple:**

```
> f1:=2*x+y: f2:=3*y*y+x:
> linalg[potential]([f1,f2],[x,y],u);
```

$$true$$

```
> u;
```

$$x^2 + yx + y^3$$

Zpět

## Příklad 11.3.1

Ověřte, že vektorové pole $\vec{F}(x,y) = (2x+y, 3y^2+x)$ má potenciál na nějaké jednoduše souvislé množině $G$ a najděte potenciál i množinu $G$.

### Mathematica:

$\mathbf{v1} = D[x,t]; \mathbf{v2} = D[y,t]; \mathbf{v3} = D[z,t];$

$i = \mathbf{Integrate}[\mathbf{f1} * \mathbf{v1} + \mathbf{f2} * \mathbf{v2} + \mathbf{f3} * \mathbf{v3}, \{t, 0, 2 * \mathbf{Pi}\}]$

$10\pi$

$\mathbf{f1} = 2x + y; \mathbf{f2} = 3y\hat{\ }2 + x;$

$D[\mathbf{f1}, y] == D[\mathbf{f2}, x]$

True

Vektorové pole je tedy potenciální. Potenciál vypočteme pomocí křivkového integrálu.

$x = t; y = 0;$

$\mathbf{v1} = D[x,t]; \mathbf{v2} = D[y,t];$

$\mathbf{i1} = \mathbf{Integrate}[\mathbf{f1} * \mathbf{v1} + \mathbf{f2} * \mathbf{v2}, \{t, 0, \mathbf{x1}\}];$

$x = \mathbf{x1}; y = t;$

$\mathbf{v1} = D[x,t]; \mathbf{v2} = D[y,t];$

$\mathbf{i2} = \mathbf{Integrate}[\mathbf{f1} * \mathbf{v1} + \mathbf{f2} * \mathbf{v2}, \{t, 0, \mathbf{y1}\}];$

$u = \mathbf{i1} + \mathbf{i2}$

$\mathrm{x1}^2 + \mathrm{x1y1} + \mathrm{y1}^3$

Zpět

# Příklad 11.3.2

Ověřte, že vektorové pole $\vec{F}(x, y, z) = (y^2z^3, 2xyz^3, 3xy^2z^2)$ má potenciál na nějaké jednoduše souvislé množině $G$ a najděte potenciál i množinu $G$.

Zpět

## Příklad 11.3.2

Ověřte, že vektorové pole $\vec{F}(x, y, z) = (y^2 z^3, 2xyz^3, 3xy^2 z^2)$ má potenciál na nějaké jednoduše souvislé množině $G$ a najděte potenciál i množinu $G$.

### Výsledek:

Pole $\vec{F}$ má potenciál $U(x, y, z) = xy^2 z^3$ na množině $G = \mathbb{R}^3$ .

Zpět

## Příklad 11.3.2

Ověřte, že vektorové pole $\vec{F}(x, y, z) = (y^2 z^3, 2xyz^3, 3xy^2 z^2)$ má potenciál na nějaké jednoduše souvislé množině $G$ a najděte potenciál i množinu $G$.

**Návod:**

Porovnejte $\frac{\partial F_1}{\partial y}$ a $\frac{\partial F_2}{\partial x}$, $\frac{\partial F_1}{\partial z}$ a $\frac{\partial F_3}{\partial x}$, $\frac{\partial F_2}{\partial z}$ a $\frac{\partial F_3}{\partial y}$. Potenciál $U$ vektorového pole $\vec{F}$ je takové skalární pole $U$, pro které platí grad $U = \vec{F}$.

Zpět

## Příklad 11.3.2

Ověřte, že vektorové pole $\vec{F}(x,y,z) = (y^2z^3, 2xyz^3, 3xy^2z^2)$ má potenciál na nějaké jednoduše souvislé množině $G$ a najděte potenciál i množinu $G$.

**Řešení:**

Označíme si složky pole $F_1 = y^2z^3$, $F_2 = 2xyz^3$, $F_3 = 3xy^2z^2$ a spočteme parciální derivace

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = 2yz^3,\ \frac{\partial F_2}{\partial x} = 2yz^3; \quad \frac{\partial F_1}{\partial z} = 3y^2z^2,\ \frac{\partial F_3}{\partial x} = 3y^2z^2; \quad \frac{\partial F_2}{\partial z} = 6xyz^2,\ \frac{\partial F_3}{\partial y} = 6xyz^2.$$

Vidíme, že

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}, \qquad \frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial x}, \qquad \frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial y}$$

na $\mathbb{R}^3$, což je jednoduše souvislá množina, proto pole $\vec{F}$ má na $\mathbb{R}^3$ potenciál. Potenciál najdeme pomocí křivkového integrálu. Je výhodné zvolit si integrační cestu sestávající ze tří úseček rovnoběžných se souřadnicovými osami. Zvolme si počáteční bod v počátku a obecný koncový bod označme $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$. Potom parametrizace úseček $C_1$, $C_2$, $C_3$ mohou být

$$C_1: \quad x = t, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad t_1 = 0, \quad t_2 = \tilde{x} \Rightarrow dx = dt, \quad dy = 0, \quad dz = 0,$$

$$C_2: \quad x = \tilde{x}, \quad y = t, \quad z = 0, \quad t_1 = 0, \quad t_2 = \tilde{y} \Rightarrow dx = 0, \quad dy = dt, \quad dz = 0,$$

$$C_3: \quad x = \tilde{x}, \quad y = \tilde{y}, \quad z = t, \quad t_1 = 0, \quad t_2 = \tilde{z} \Rightarrow dx = 0, \quad dy = 0, \quad dz = dt.$$

Další

## Příklad 11.3.2

Ověřte, že vektorové pole $\vec{F}(x,y,z) = (y^2z^3, 2xyz^3, 3xy^2z^2)$ má potenciál na nějaké jednoduše souvislé množině $G$ a najděte potenciál i množinu $G$.

### Řešení:

Takže pro potenciál $U$ platí

$$U(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}) - U(0,0,0) = \int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_C (F_1\,dx + F_2\,dy + F_3\,dz) =$$

$$= \int_{C_1} (F_1\,dx + F_2\,dy + F_3\,dz) + \int_{C_2} (F_1\,dx + F_2\,dy + F_3\,dz) + \int_{C_3} (F_1\,dx + F_2\,dy + F_3\,dz) =$$

$$= 0 + 0 + \int_0^{\tilde{z}} 3\tilde{x}\tilde{y}^2t^2\ dt = \left[\tilde{x}\tilde{y}^2t^3\right]_0^{\tilde{z}} = \tilde{x}\tilde{y}^2\tilde{z}^3.$$

Takže potenciál je

$$U(x,y,z) = xy^2z^3 + c.$$

Zpět

## Příklad 11.3.2

Ověřte, že vektorové pole $\vec{F}(x,y,z) = (y^2z^3, 2xyz^3, 3xy^2z^2)$ má potenciál na nějaké jednoduše souvislé množině $G$ a najděte potenciál i množinu $G$.

**Maple:**

```
> f1:=y^2*z^3: f2:=2*x*y*z^3: f3:=3*x*y^2*z^2:
> linalg[potential]([f1,f2,f3],[x,y,z],'u');
```

$$true$$

```
> u;
```

$$y^2z^3x$$

Zpět

# Příklad 11.3.2

Ověřte, že vektorové pole $\vec{F}(x,y,z) = (y^2z^3, 2xyz^3, 3xy^2z^2)$ má potenciál na nějaké jednoduše souvislé množině $G$ a najděte potenciál i množinu $G$.

## Mathematica:

$\mathbf{f1 = y\hat{}2 * z\hat{}3;\ \ f2 = 2 * x * y * z\hat{}3;\ f3 = 3 * x * y\hat{}2 * z\hat{}2;}$

$\boldsymbol{D}$**[f1,** $\boldsymbol{y}$**]==**$\boldsymbol{D}$**[f2,** $\boldsymbol{x}$**]**

True

$\boldsymbol{D}$**[f1,** $\boldsymbol{z}$**]==**$\boldsymbol{D}$**[f3,** $\boldsymbol{x}$**]**

True

$\boldsymbol{D}$**[f2,** $\boldsymbol{z}$**]==**$\boldsymbol{D}$**[f3,** $\boldsymbol{y}$**]**

True

Vektorové pole je tedy potenciální. Potenciál vypočteme pomocí křivkového integrálu.

$\boldsymbol{x = t; y = 0; z = 0;}$

$\mathbf{v1} = \boldsymbol{D[x,t]};\mathbf{v2} = \boldsymbol{D[y,t]};\mathbf{v3} = \boldsymbol{D[z,t]};$

$\mathbf{i1 = Integrate[f1 * v1 + f2 * v2 + f3 * v3, \{}\boldsymbol{t}\mathbf{, 0, x1\}];}$

$\boldsymbol{x} = \mathbf{x1}; \boldsymbol{y = t; z = 0;}$

$\mathbf{v1} = \boldsymbol{D[x,t]};\mathbf{v2} = \boldsymbol{D[y,t]};\mathbf{v3} = \boldsymbol{D[z,t]};$

$\mathbf{i2 = Integrate[f1 * v1 + f2 * v2 + f3 * v3, \{}\boldsymbol{t}\mathbf{, 0, y1\}];}$

$\boldsymbol{x} = \mathbf{x1}; \boldsymbol{y} = \mathbf{y1}; \boldsymbol{z = t;}$

$\mathbf{v1} = \boldsymbol{D[x,t]};\mathbf{v2} = \boldsymbol{D[y,t]};\mathbf{v3} = \boldsymbol{D[z,t]};$

Další

## Příklad 11.3.2

Ověřte, že vektorové pole $\vec{F}(x,y,z) = (y^2z^3, 2xyz^3, 3xy^2z^2)$ má potenciál na nějaké jednoduše souvislé množině $G$ a najděte potenciál i množinu $G$.

**Mathematica:**

$\mathbf{i3 = Integrate[f1 * v1 + f2 * v2 + f3 * v3, \{\mathit{t}, 0, z1\}];}$

$\boldsymbol{u} = \mathbf{i1 + i2 + i3}$

$\mathrm{x1y1^2z1^3}$

Zpět