Kapitola 2: Lineární zobrazení

Chcete-li ukončit prohlížení stiskněte klávesu **Esc**.
Chcete-li pokračovat stiskněte klávesu **Enter**.

Lineární zobrazení

- Lineární zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$
- Inverzní matice

Zpět

- **Příklad 2.1.1** Napište matici $\mathbf{A}$ reprezentující lineární zobrazení L prostoru $\mathbb{R}^3$ do $\mathbb{R}^4$ definované vztahem
$$L((x,y,z)^{\mathrm{T}}) = (4x+2y+z,\ 3x+y,\ 2x+2y+2z,\ x-y-2z)^{\mathrm{T}}.$$
Najděte vektor $\overrightarrow{v} = L(\overrightarrow{u})$, který je obrazem vektoru $\overrightarrow{u} = (1,-3,2)^{\mathrm{T}}$ v tomto zobrazení. Zjistěte, zda vektor $\overrightarrow{u}$ je jediným vektorem, který se zobrazí na vektor $\overrightarrow{v}$. Pokud není jediným, nalezněte alespoň jeden další.

- **Příklad 2.1.2** Najděte vektor $\overrightarrow{v}$, který je obrazem vektoru $\overrightarrow{u} = (1,1,1)^{\mathrm{T}}$ v lineárním zobrazení L prostoru $\mathbb{R}^3$ do $\mathbb{R}^3$ reprezentovaném maticí
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Zjistěte, zda vektor $\overrightarrow{u}$ je jediným vektorem z prostoru $\mathbb{R}^3$, který se na vektor $\overrightarrow{v}$ zobrazí. Pokud není jediný, najděte všechny další.

- **Příklad 2.1.3** Dokažte, že zobrazení $\mathcal{L}_1 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ a zobrazení $\mathcal{L}_2 : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ jsou lineární, a najděte matici $\mathbf{A}$, která reprezentuje složené zobrazení $\mathcal{L}_1 \circ \mathcal{L}_2$.
$\mathcal{L}_1((x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}) = (x_1-2x_2+x_3, 4x_1+2x_2-x_3, -x_1-5x_2+3x_3, 2x_1-3x_2+8x_3)^{\mathrm{T}}$,
$\mathcal{L}_2((x_1,x_2,x_3,x_4)^{\mathrm{T}}) = (x_1-2x_2+x_3-x_4, x_1-7x_4, 2x_1-x_3+x_4)^{\mathrm{T}}$.

- **Příklad 2.1.4** Najděte jádro K lineárního zobrazení $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ reprezentovaného maticí
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \\ -6 & -4 & 2 \\ -1 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$
Určete dimenzi K.

Zpět

Příklad 2.1.1

Napište matici $\mathbf{A}$ reprezentující lineární zobrazení L prostoru $\mathbb{R}^3$ do $\mathbb{R}^4$ definované vztahem

$$L((x, y, z)^{\mathrm{T}}) = (4x + 2y + z,\ 3x + y,\ 2x + 2y + 2z,\ x - y - 2z)^{\mathrm{T}}.$$

Najděte vektor $\overrightarrow{v} = L(\overrightarrow{u})$, který je obrazem vektoru $\overrightarrow{u} = (1, -3, 2)^{\mathrm{T}}$ v tomto zobrazení. Zjistěte, zda vektor $\overrightarrow{u}$ je jediným vektorem, který se zobrazí na vektor $\overrightarrow{v}$. Pokud není jediným, nalezněte alespoň jeden další.

? Zpět

Příklad 2.1.1

Napište matici $\mathbf{A}$ reprezentující lineární zobrazení L prostoru $\mathbb{R}^3$ do $\mathbb{R}^4$ definované vztahem

$$L((x,y,z)^{\mathrm{T}}) = (4x+2y+z,\ 3x+y,\ 2x+2y+2z,\ x-y-2z)^{\mathrm{T}}.$$

Najděte vektor $\overrightarrow{v} = L(\overrightarrow{u})$, který je obrazem vektoru $\overrightarrow{u} = (1,-3,2)^{\mathrm{T}}$ v tomto zobrazení. Zjistěte, zda vektor $\overrightarrow{u}$ je jediným vektorem, který se zobrazí na vektor $\overrightarrow{v}$. Pokud není jediným, nalezněte alespoň jeden další.

Výsledek:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad L((0,0,0)^{\mathrm{T}}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Zpět

Příklad 2.1.1

Napište matici $\mathbf{A}$ reprezentující lineární zobrazení L prostoru $\mathbb{R}^3$ do $\mathbb{R}^4$ definované vztahem

$$L((x, y, z)^{\mathrm{T}}) = (4x + 2y + z,\ 3x + y,\ 2x + 2y + 2z,\ x - y - 2z)^{\mathrm{T}}.$$

Najděte vektor $\overrightarrow{v} = L(\overrightarrow{u})$, který je obrazem vektoru $\overrightarrow{u} = (1, -3, 2)^{\mathrm{T}}$ v tomto zobrazení. Zjistěte, zda vektor $\overrightarrow{u}$ je jediným vektorem, který se zobrazí na vektor $\overrightarrow{v}$. Pokud není jediným, nalezněte alespoň jeden další.

Návod:

Matice $\mathbf{A}$ bude typu 4×3 a musí splňovat $L((x, y, z)^{\mathrm{T}}) = \mathbf{A}(x, y, z)^{\mathrm{T}}$. Z této rovnosti zjistíme prvky matice $\mathbf{A}$. Protože $L(\overrightarrow{u}) = \mathbf{A}\overrightarrow{u}$, je $\overrightarrow{v} = \mathbf{A}\overrightarrow{u}$. Vektor bude jediný právě když je hodnost matice $\mathbf{A}$ rovna dimenzi vektorového prostoru vzorů, v našem případě 3. Pokud $\mathrm{h}(\mathbf{A}) < 3$, musíme další vektory určit jako řešení soustavy lineárních rovnic $\mathbf{A}(x, y, z)^{\mathrm{T}} = \overrightarrow{v}$.

Zpět

Příklad 2.1.1

Napište matici $\mathbf{A}$ reprezentující lineární zobrazení L prostoru $\mathbb{R}^3$ do $\mathbb{R}^4$ definované vztahem

$$L((x, y, z)^{\mathrm{T}}) = (4x + 2y + z,\; 3x + y,\; 2x + 2y + 2z,\; x - y - 2z)^{\mathrm{T}}.$$

Najděte vektor $\overrightarrow{v} = L(\overrightarrow{u})$, který je obrazem vektoru $\overrightarrow{u} = (1, -3, 2)^{\mathrm{T}}$ v tomto zobrazení. Zjistěte, zda vektor $\overrightarrow{u}$ je jediným vektorem, který se zobrazí na vektor $\overrightarrow{v}$. Pokud není jediným, nalezněte alespoň jeden další.

Řešení:

$$L((x, y, z)^{\mathrm{T}}) = \mathbf{A}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z \\ a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x + 2y + z \\ 3x + y \\ 2x + 2y + 2z \\ x - y - 2z \end{pmatrix}.$$

Porovnáme poslední dva vektory a dostaneme

$$\begin{array}{lllllllllll} a_{11} & = & 4 & a_{21} & = & 3 & a_{31} & = & 2 & a_{41} & = & 1 \\ a_{12} & = & 2 & a_{22} & = & 1 & a_{32} & = & 2 & a_{42} & = & -1 \\ a_{13} & = & 1 & a_{23} & = & 0 & a_{33} & = & 2 & a_{43} & = & -2 \end{array}$$

Další

Příklad 2.1.1

Napište matici $\mathbf{A}$ reprezentující lineární zobrazení L prostoru $\mathbb{R}^3$ do $\mathbb{R}^4$ definované vztahem

$$L((x,y,z)^{\mathrm{T}}) = (4x+2y+z,\ 3x+y,\ 2x+2y+2z,\ x-y-2z)^{\mathrm{T}}.$$

Najděte vektor $\overrightarrow{v} = L(\overrightarrow{u})$, který je obrazem vektoru $\overrightarrow{u} = (1,-3,2)^{\mathrm{T}}$ v tomto zobrazení. Zjistěte, zda vektor $\overrightarrow{u}$ je jediným vektorem, který se zobrazí na vektor $\overrightarrow{v}$. Pokud není jediným, nalezněte alespoň jeden další.

Řešení:

Tedy

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Matice $\mathbf{A}$ reprezentuje lineární zobrazení L, neboli $L(\overrightarrow{u}) = \mathbf{A}\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v}$,

$$\mathbf{A}\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \overrightarrow{v}.$$

Protože L je lineární zobrazení prostoru $\mathbb{R}^3$ do $\mathbb{R}^4$, víme, že se nulový vektor $(0,0,0)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^3$ zobrazí na nulový vektor $(0,0,0,0)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^4$. Určitě tedy není vektor $\overrightarrow{u}$ jediný vektor, který se zobrazí na $\overrightarrow{v}$. Máme-li tedy najít alespoň jeden další vektor, který se zobrazí na vektor $\overrightarrow{v} = (0,0,0,0)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^4$ nemusíme už nic počítat a správná odpověď je, že na vektor $\overrightarrow{v}$ se zobrazí také vektor $(0,0,0)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^3$.

Zpět

Příklad 2.1.1

Napište matici **A** reprezentující lineární zobrazení L prostoru $\mathbb{R}^3$ do $\mathbb{R}^4$ definované vztahem

$$L((x,y,z)^{\mathrm{T}}) = (4x+2y+z,\ 3x+y,\ 2x+2y+2z,\ x-y-2z)^{\mathrm{T}}.$$

Najděte vektor $\overrightarrow{v} = L(\overrightarrow{u})$, který je obrazem vektoru $\overrightarrow{u} = (1,-3,2)^{\mathrm{T}}$ v tomto zobrazení. Zjistěte, zda vektor $\overrightarrow{u}$ je jediným vektorem, který se zobrazí na vektor $\overrightarrow{v}$. Pokud není jediným, nalezněte alespoň jeden další.

Maple:

```
> with(linalg):
> eqns:= {4*x+2*y+z=a1,3*x+y=a2,2*x+2*y+2*z=a3,x-y-2*z=a4};
```

$$eqns := \{4\,x+2\,y+z=a1,\ 3\,x+y=a2,\ 2\,x+2\,y+2\,z=a3,\ x-y-2\,z=a4\}$$

```
> A := genmatrix(eqns, [x,y,z]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

```
> u:=vector([1,-3,2]);
```

$$u := [1,\ -3,\ 2]$$

```
> v:=evalm(A&*u);
```

$$v := [0,\ 0,\ 0,\ 0]$$

Další

Příklad 2.1.1

Napište matici $\mathbf{A}$ reprezentující lineární zobrazení L prostoru $\mathbb{R}^3$ do $\mathbb{R}^4$ definované vztahem

$$L((x,y,z)^{\mathrm{T}}) = (4x+2y+z,\ 3x+y,\ 2x+2y+2z,\ x-y-2z)^{\mathrm{T}}.$$

Najděte vektor $\overrightarrow{v} = L(\overrightarrow{u})$, který je obrazem vektoru $\overrightarrow{u} = (1,-3,2)^{\mathrm{T}}$ v tomto zobrazení. Zjistěte, zda vektor $\overrightarrow{u}$ je jediným vektorem, který se zobrazí na vektor $\overrightarrow{v}$. Pokud není jediným, nalezněte alespoň jeden další.

Maple:

```
> linsolve (A,v);
```

$$[\_t_1,\ -3\,\_t_1,\ 2\,\_t_1]$$

```
> uall:=t1->vector([t1,-3*t1,2*t1]);
```

$$uall := t1 \to [t1,\ -3\,t1,\ 2\,t1]$$

```
> uall(1);
```

$$[1,\ -3,\ 2]$$

```
> uall(0);
```

$$[0,\ 0,\ 0]$$

```
> uall(5);
```

$$[5,\ -15,\ 10]$$

Zpět

Příklad 2.1.1

Napište matici **A** reprezentující lineární zobrazení L prostoru $\mathbb{R}^3$ do $\mathbb{R}^4$ definované vztahem

$$L((x,y,z)^{\mathrm{T}}) = (4x+2y+z,\ 3x+y,\ 2x+2y+2z,\ x-y-2z)^{\mathrm{T}}.$$

Najděte vektor $\overrightarrow{v} = L(\overrightarrow{u})$, který je obrazem vektoru $\overrightarrow{u} = (1,-3,2)^{\mathrm{T}}$ v tomto zobrazení. Zjistěte, zda vektor $\overrightarrow{u}$ je jediným vektorem, který se zobrazí na vektor $\overrightarrow{v}$. Pokud není jediným, nalezněte alespoň jeden další.

Mathematica:

$\boldsymbol{A = \{\mathrm{Coefficient}[4x+2y+z, \{x,y,z\}],}$
$\boldsymbol{\mathrm{Coefficient}[3x+y, \{x,y,z\}],}$
$\boldsymbol{\mathrm{Coefficient}[x-y-2z, \{x,y,z\}]\};}$

$\boldsymbol{\mathrm{MatrixForm}[A]}$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{u = \{1,-3,2\};}$

$\boldsymbol{v = A.u}$

$\{0,0,0\}$

$\boldsymbol{\mathrm{LinearSolve}[A,v]}$

$\{0,0,0\}$

Zpět

Příklad 2.1.2

Najděte vektor $\overrightarrow{v}$, který je obrazem vektoru $\overrightarrow{u} = (1,1,1)^{\mathrm{T}}$ v lineárním zobrazení L prostoru $\mathbb{R}^3$ do $\mathbb{R}^3$ reprezentovaném maticí

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zjistěte, zda vektor $\overrightarrow{u}$ je jediným vektorem z prostoru $\mathbb{R}^3$, který se na vektor $\overrightarrow{v}$ zobrazí. Pokud není jediný, najděte všechny další.

Zpět

Příklad 2.1.2

Najděte vektor $\overrightarrow{v}$, který je obrazem vektoru $\overrightarrow{u} = (1,1,1)^{\mathrm{T}}$ v lineárním zobrazení L prostoru $\mathbb{R}^3$ do $\mathbb{R}^3$ reprezentovaném maticí

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zjistěte, zda vektor $\overrightarrow{u}$ je jediným vektorem z prostoru $\mathbb{R}^3$, který se na vektor $\overrightarrow{v}$ zobrazí. Pokud není jediný, najděte všechny další.

Výsledek:

$\overrightarrow{v} = (1,1,1)^{\mathrm{T}}$, $\overrightarrow{u}$ je jediným vektorem z $\mathbb{R}^3$, který se na $\overrightarrow{v}$ zobrazí.

Zpět

Příklad 2.1.2

Najděte vektor $\overrightarrow{v}$, který je obrazem vektoru $\overrightarrow{u} = (1, 1, 1)^{\mathrm{T}}$ v lineárním zobrazení L prostoru $\mathbb{R}^3$ do $\mathbb{R}^3$ reprezentovaném maticí

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zjistěte, zda vektor $\overrightarrow{u}$ je jediným vektorem z prostoru $\mathbb{R}^3$, který se na vektor $\overrightarrow{v}$ zobrazí. Pokud není jediný, najděte všechny další.

Návod:

Protože L je reprezentováno maticí $\mathbf{A}$, je $L(\overrightarrow{u}) = \mathbf{A}\overrightarrow{u}$. Je-li zobrazení L prosté, je vektor $\overrightarrow{u}$ jediný. Protože zobrazení je prosté právě když hodnost matice $\mathbf{A}$ je rovna dimenzi vektorového prostoru vzorů, tj. počtu sloupců matice $\mathbf{A}$, stačí zjistit $\mathrm{h}(\mathbf{A})$. Zjistíme-li, že zobrazení není prosté, najdeme všechny vektory $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^3$, které se zobrazí na vektor $\overrightarrow{v}$ jako řešení $\overrightarrow{x}$ soustavy lineárních rovnic $\mathbf{A}\overrightarrow{x} = \overrightarrow{v}$.

Zpět

Příklad 2.1.2

Najděte vektor $\overrightarrow{v}$, který je obrazem vektoru $\overrightarrow{u} = (1,1,1)^{\mathrm{T}}$ v lineárním zobrazení L prostoru $\mathbb{R}^3$ do $\mathbb{R}^3$ reprezentovaném maticí

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zjistěte, zda vektor $\overrightarrow{u}$ je jediným vektorem z prostoru $\mathbb{R}^3$, který se na vektor $\overrightarrow{v}$ zobrazí. Pokud není jediný, najděte všechny další.

Řešení:

Lineární zobrazení L je reprezentováno maticí $\mathbf{A}$, tj. $L(\overrightarrow{u}) = \mathbf{A}\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v}$.

$$\mathbf{A}\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \overrightarrow{v}$$

Matice $\mathbf{A}$ je v horním trojúhelníkovém tvaru, její hodnost je tedy rovna počtu řádků, tj. $\mathrm{h}(\mathbf{A}) = 3 =$ počtu sloupců matice $\mathbf{A}$ a zobrazení L je prosté. Vektor $\overrightarrow{u}$ je tedy jediným vektorem z $\mathbb{R}^3$, který se na vektor $\overrightarrow{v}$ zobrazí.

Zpět

Příklad 2.1.2

Najděte vektor $\overrightarrow{v}$, který je obrazem vektoru $\overrightarrow{u} = (1,1,1)^{\mathrm{T}}$ v lineárním zobrazení L prostoru $\mathbb{R}^3$ do $\mathbb{R}^3$ reprezentovaném maticí

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zjistěte, zda vektor $\overrightarrow{u}$ je jediným vektorem z prostoru $\mathbb{R}^3$, který se na vektor $\overrightarrow{v}$ zobrazí. Pokud není jediný, najděte všechny další.

Maple:

```
> with(linalg):
> A:=matrix(3,3,[2,-1,0,0,4,-3,0,0,1]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> u:=vector(3,[1,1,1]);
```

$$u := [1,\ 1,\ 1]$$

```
> v:=evalm(A&*u);
```

$$v := [1,\ 1,\ 1]$$

```
> allu:=linsolve(A,v);
```

$$allu := [1,\ 1,\ 1]$$

Zpět

Příklad 2.1.2

Najděte vektor $\overrightarrow{v}$, který je obrazem vektoru $\overrightarrow{u} = (1, 1, 1)^{\mathrm{T}}$ v lineárním zobrazení L prostoru $\mathbb{R}^3$ do $\mathbb{R}^3$ reprezentovaném maticí

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zjistěte, zda vektor $\overrightarrow{u}$ je jediným vektorem z prostoru $\mathbb{R}^3$, který se na vektor $\overrightarrow{v}$ zobrazí. Pokud není jediný, najděte všechny další.

Mathematica:

$\boldsymbol{A = \{\{2, -1, 0\}, \{0, 4, -3\}, \{0, 0, 1\}\};}$

MatrixForm[$\boldsymbol{A}$]

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{u = \{1, 1, 1\};}$

$\boldsymbol{v = A.u}$

$\{1, 1, 1\}$

u1 = LinearSolve[$\boldsymbol{A, v}$]

$\{1, 1, 1\}$

Zpět

Příklad 2.1.3

Dokažte, že zobrazení $\mathcal{L}_1 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ a zobrazení $\mathcal{L}_2 : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ jsou lineární, a najděte matici $\mathbf{A}$, která reprezentuje složené zobrazení $\mathcal{L}_1 \circ \mathcal{L}_2$.
$\mathcal{L}_1((x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}) = (x_1 - 2x_2 + x_3, 4x_1 + 2x_2 - x_3, -x_1 - 5x_2 + 3x_3, 2x_1 - 3x_2 + 8x_3)^{\mathrm{T}}$,
$\mathcal{L}_2((x_1, x_2, x_3, x_4)^{\mathrm{T}}) = (x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4, x_1 - 7x_4, 2x_1 - x_3 + x_4)^{\mathrm{T}}$.

? Zpět

Příklad 2.1.3

Dokažte, že zobrazení $\mathcal{L}_1 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ a zobrazení $\mathcal{L}_2 : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ jsou lineární, a najděte matici $\mathbf{A}$, která reprezentuje složené zobrazení $\mathcal{L}_1 \circ \mathcal{L}_2$.
$\mathcal{L}_1((x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}) = (x_1 - 2x_2 + x_3, 4x_1 + 2x_2 - x_3, -x_1 - 5x_2 + 3x_3, 2x_1 - 3x_2 + 8x_3)^{\mathrm{T}}$,
$\mathcal{L}_2((x_1, x_2, x_3, x_4)^{\mathrm{T}}) = (x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4, x_1 - 7x_4, 2x_1 - x_3 + x_4)^{\mathrm{T}}$.

Výsledek:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 14 \\ 4 & -8 & 5 & -19 \\ 0 & 2 & -4 & 39 \\ 15 & -4 & -6 & 27 \end{pmatrix}$$

Zpět

Příklad 2.1.3

Dokažte, že zobrazení $\mathcal{L}_1 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ a zobrazení $\mathcal{L}_2 : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ jsou lineární, a najděte matici $\mathbf{A}$, která reprezentuje složené zobrazení $\mathcal{L}_1 \circ \mathcal{L}_2$.
$\mathcal{L}_1((x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}})=(x_1 - 2x_2 + x_3, 4x_1 + 2x_2 - x_3, -x_1 - 5x_2 + 3x_3, 2x_1 - 3x_2 + 8x_3)^{\mathrm{T}}$,
$\mathcal{L}_2((x_1, x_2, x_3, x_4)^{\mathrm{T}}) = (x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4, x_1 - 7x_4, 2x_1 - x_3 + x_4)^{\mathrm{T}}$.

Návod:

Úlohu řešte tak, že
a) najdete tvar složeného zobrazení a pak sestavíte jeho matici
b) sestavíte nejprve matice jednotlivých zobrazení.
$\mathcal{L}_1((x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}})=(x_1 - 2x_2 + x_3, 4x_1 + 2x_2 - x_3, -x_1 - 5x_2 + 3x_3, 2x_1 - 3x_2 + 8x_3)^{\mathrm{T}}$,
$\mathcal{L}_2((x_1, x_2, x_3, x_4)^{\mathrm{T}}) = (x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4, x_1 - 7x_4, 2x_1 - x_3 + x_4)^{\mathrm{T}}$.
Zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$ je lineární právě když je reprezentováno maticí. Stačí tedy ukázat, že existují matice $\mathbf{A}_1$ a $\mathbf{A}_2$, které reprezentují zobrazení L_1 a L_2.
a) Na vektor $\overrightarrow{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^4$ aplikujeme zobrazení L_2 a na výsledný vektor z $\mathbb{R}^3$ aplikujeme zobrazení L_1. Výsledek složení je vektor z $\mathbb{R}^4$. Protože zobrazení L_1 a L_2 jsou lineární, je lineární i složené zobrazení $L_1(L_2(\overrightarrow{x}))$. Je reprezentováno maticí $\mathbf{A}$, kterou získáme z rovnice $\mathbf{A}\overrightarrow{x} = L_1(L_2(\overrightarrow{x}))$.
b) Zobrazení L_1 je reprezentováno maticí $\mathbf{A}_1$, jejíž prvky získáme porovnáním vektorů $\mathbf{A}_1\overrightarrow{y}$ a $L_1(\overrightarrow{y})$, $y \in \mathbb{R}^3$. Obdobně získáme matici $\mathbf{A}_2$. Výsledná matice $\mathbf{A} = \mathbf{A}_1\mathbf{A}_2$.

Zpět

Příklad 2.1.3

Dokažte, že zobrazení $\mathcal{L}_1 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ a zobrazení $\mathcal{L}_2 : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ jsou lineární, a najděte matici $\mathbf{A}$, která reprezentuje složené zobrazení $\mathcal{L}_1 \circ \mathcal{L}_2$.
$\mathcal{L}_1((x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}})=(x_1 - 2x_2 + x_3, 4x_1 + 2x_2 - x_3, -x_1 - 5x_2 + 3x_3, 2x_1 - 3x_2 + 8x_3)^{\mathrm{T}}$,
$\mathcal{L}_2((x_1, x_2, x_3, x_4)^{\mathrm{T}}) = (x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4, x_1 - 7x_4, 2x_1 - x_3 + x_4)^{\mathrm{T}}$.

Řešení:

Zobrazení z konečnědimenzionálního prostoru do konečnědimenzionálního prostoru je lineární právě když je reprezentováno maticí. Najdeme-li tedy matice, které reprezentují zobrazení $\mathcal{L}_1$ a $\mathcal{L}_2$, dokážeme tím současně, že zobrazení jsou lineární. Nechť $\overrightarrow{y} = (y_1, y_2, y_3)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^3$. Pak

$$\mathcal{L}_1(\overrightarrow{y}) = \mathbf{A}_1 \overrightarrow{y} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3 \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3 \\ a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{33}y_3 \\ a_{41}y_1 + a_{42}y_2 + a_{43}y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 - 2y_2 + y_3 \\ 4y_1 + 2y_2 - y_3 \\ -y_1 - 5y_2 + 3y_3 \\ 2y_1 - 3y_2 + 8y_3 \end{pmatrix}.$$

Porovnáme poslední dva vektory a dostaneme

$$\begin{array}{llllllllllll} a_{11} & = & 1 & a_{21} & = & 4 & a_{31} & = & -1 & a_{41} & = & 2 \\ a_{12} & = & -2 & a_{22} & = & 2 & a_{32} & = & -5 & a_{42} & = & -3 \\ a_{13} & = & 1 & a_{23} & = & -1 & a_{33} & = & 3 & a_{43} & = & 8 \end{array}$$

Tedy zobrazení $\mathcal{L}_1$ je reprezentováno maticí $\mathbf{A}_1$, a je tedy lineární,

Další

Příklad 2.1.3

Dokažte, že zobrazení $\mathcal{L}_1 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ a zobrazení $\mathcal{L}_2 : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ jsou lineární, a najděte matici $\mathbf{A}$, která reprezentuje složené zobrazení $\mathcal{L}_1 \circ \mathcal{L}_2$.
$\mathcal{L}_1((x_1, x_2, x_3)^T) = (x_1 - 2x_2 + x_3, 4x_1 + 2x_2 - x_3, -x_1 - 5x_2 + 3x_3, 2x_1 - 3x_2 + 8x_3)^T$,
$\mathcal{L}_2((x_1, x_2, x_3, x_4)^T) = (x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4, x_1 - 7x_4, 2x_1 - x_3 + x_4)^T$.

Řešení:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \\ -1 & -5 & 3 \\ 2 & -3 & 8 \end{pmatrix}.$$

Obdobně pro $\mathcal{L}_2$. Nechť $\overrightarrow{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4)^T \in \mathbb{R}^4$.

$$\mathcal{L}_2(\overrightarrow{y}) = \mathbf{A}_2 \overrightarrow{y} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3 + a_{14}y_4 \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3 + a_{24}y_4 \\ a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{33}y_3 + a_{34}y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 - 2y_2 + y_3 - y_4 \\ y_1 - 7y_4 \\ 2y_1 - y_3 + y_4 \end{pmatrix}.$$

Porovnáme poslední dva vektory a dostaneme

$$\begin{array}{lll} a_{11} = 1 & a_{21} = 1 & a_{31} = 2 \\ a_{12} = -2 & a_{22} = 0 & a_{32} = 0 \\ a_{13} = 1 & a_{23} = 0 & a_{33} = -1 \\ a_{14} = -1 & a_{24} = -7 & a_{34} = 1 \end{array}$$

Další

Příklad 2.1.3

Dokažte, že zobrazení $\mathcal{L}_1 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ a zobrazení $\mathcal{L}_2 : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ jsou lineární, a najděte matici $\mathbf{A}$, která reprezentuje složené zobrazení $\mathcal{L}_1 \circ \mathcal{L}_2$.
$\mathcal{L}_1((x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}) = (x_1 - 2x_2 + x_3, 4x_1 + 2x_2 - x_3, -x_1 - 5x_2 + 3x_3, 2x_1 - 3x_2 + 8x_3)^{\mathrm{T}}$,
$\mathcal{L}_2((x_1, x_2, x_3, x_4)^{\mathrm{T}}) = (x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4, x_1 - 7x_4, 2x_1 - x_3 + x_4)^{\mathrm{T}}$.

Řešení:

Tedy zobrazení $\mathcal{L}_2$ je reprezentováno maticí $\mathbf{A}_2$, a je také lineární,

$$\mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -7 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Složíme zobrazení $\mathcal{L}_1 \circ \mathcal{L}_2$.
Nechť $\overrightarrow{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^4$.

$$\mathcal{L}_1(\mathcal{L}_2(\overrightarrow{x})) = \mathcal{L}_1((x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4, x_1 - 7x_4, 2x_1 - x_3 + x_4)^{\mathrm{T}}) =$$

$$\begin{aligned} = (&x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 - 2x_1 + 14x_4 + 2x_1 - x_3 + x_4, \\ &4x_1 - 8x_2 + 4x_3 - 4x_4 + 2x_1 - 14x_4 - 2x_1 + x_3 - x_4, \\ &-x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - 5x_1 + 35x_4 + 6x_1 - 3x_3 + 3x_4, \\ &2x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 2x_4 - 3x_1 + 21x_4 + 16x_1 - 8x_3 + 8x_4)^{\mathrm{T}} = \end{aligned}$$

$$(x_1 - 2x_2 + 14x_4, 4x_1 - 8x_2 + 5x_3 - 19x_4, 2x_2 - 4x_3 + 39x_4, 15x_1 - 4x_2 - 6x_3 + 27x_4)^{\mathrm{T}}.$$

Toto složené zobrazení je reprezentováno maticí $\mathbf{A}$ typu 4×4 tak, že $\mathbf{A}\overrightarrow{x} = \mathcal{L}_1(\mathcal{L}_2(\overrightarrow{x}))$, tj.
Další

Příklad 2.1.3

Dokažte, že zobrazení $\mathcal{L}_1 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ a zobrazení $\mathcal{L}_2 : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ jsou lineární, a najděte matici $\mathbf{A}$, která reprezentuje složené zobrazení $\mathcal{L}_1 \circ \mathcal{L}_2$.
$\mathcal{L}_1((x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}})=(x_1-2x_2+x_3, 4x_1+2x_2-x_3, -x_1-5x_2+3x_3, 2x_1-3x_2+8x_3)^{\mathrm{T}}$,
$\mathcal{L}_2((x_1,x_2,x_3,x_4)^{\mathrm{T}}) = (x_1-2x_2+x_3-x_4, x_1-7x_4, 2x_1-x_3+x_4)^{\mathrm{T}}$.

Řešení:

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - 2x_2 \qquad\qquad + 14x_4 \\ 4x_1 - 8x_2 + 5x_3 - 19x_4 \\ 2x_2 - 4x_3 + 39x_4 \\ 15x_1 - 4x_2 - 6x_3 + 27x_4 \end{pmatrix}.$$

Porovnáme poslední dva vektory a dostaneme

$$\begin{array}{rcrrcrrcrrcr} a_{11} & = & 1 & a_{21} & = & 4 & a_{31} & = & 0 & a_{41} & = & 15 \\ a_{12} & = & -2 & a_{22} & = & -8 & a_{32} & = & 2 & a_{42} & = & -4 \\ a_{13} & = & 0 & a_{23} & = & 5 & a_{33} & = & -4 & a_{43} & = & -5 \\ a_{14} & = & 14 & a_{24} & = & -19 & a_{34} & = & 39 & a_{44} & = & 27 \end{array}$$

Tedy lineární zobrazení $\mathcal{L}_1 \circ \mathcal{L}_2$ je reprezentováno maticí $\mathbf{A}$,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 14 \\ 4 & -8 & 5 & -19 \\ 0 & 2 & -4 & 39 \\ 15 & -4 & -5 & 27 \end{pmatrix}.$$

b) Matice jednotlivých zobrazení jsme už sestavili. Pro matici $\mathbf{A}$, která reprezentuje složené zobrazení $\mathcal{L}_1 \circ \mathcal{L}_2$, platí $\mathbf{A} = \mathbf{A}_1\mathbf{A}_2$. Ověřte sami, že skutečně dostanete stejnou matici $\mathbf{A}$ jako v a).

Zpět

Příklad 2.1.3

Dokažte, že zobrazení $\mathcal{L}_1 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ a zobrazení $\mathcal{L}_2 : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ jsou lineární, a najděte matici $\mathbf{A}$, která reprezentuje složené zobrazení $\mathcal{L}_1 \circ \mathcal{L}_2$.
$\mathcal{L}_1((x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}) = (x_1 - 2x_2 + x_3, 4x_1 + 2x_2 - x_3, -x_1 - 5x_2 + 3x_3, 2x_1 - 3x_2 + 8x_3)^{\mathrm{T}}$,
$\mathcal{L}_2((x_1, x_2, x_3, x_4)^{\mathrm{T}}) = (x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4, x_1 - 7x_4, 2x_1 - x_3 + x_4)^{\mathrm{T}}$.

Maple:

```
> with(linalg):
> L1:=(x1,x2,x3)->(x1-2*x2+x3,4*x1+2*x2-x3,-x1-5*x2+3*x3,
2*x1-3*x2+8*x3 );
```

$$L1 := (x1, x2, x3) \to (x1 - 2\,x2 + x3,\ 4\,x1 + 2\,x2 - x3,\ -x1 - 5\,x2 + 3\,x3,\ 2\,x1 - 3\,x2 + 8\,x3)$$

```
> L2:=(x1,x2,x3,x4)->(x1-2*x2+x3-x4,x1-7*x4,2*x1-x3+x4);
```

$$L2 := (x1, x2, x3, x4) \to (x1 - 2\,x2 + x3 - x4,\ x1 - 7\,x4,\ 2\,x1 - x3 + x4)$$

```
> L1(L2(x1,x2,x3,x4));
```

$$x1 - 2\,x2 + 14\,x4,\ 4\,x1 - 8\,x2 + 5\,x3 - 19\,x4,\ 2\,x2 - 4\,x3 + 39\,x4,\ 15\,x1 - 4\,x2 - 6\,x3 + 27\,x4$$

```
> A1:=matrix(4,3,[1,-2,1,4,2,-1,-1,-5,3,2,-3,8]);
```

$$A1 := \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \\ -1 & -5 & 3 \\ 2 & -3 & 8 \end{bmatrix}$$

Další

Příklad 2.1.3

Dokažte, že zobrazení $\mathcal{L}_1 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ a zobrazení $\mathcal{L}_2 : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ jsou lineární, a najděte matici $\mathbf{A}$, která reprezentuje složené zobrazení $\mathcal{L}_1 \circ \mathcal{L}_2$.
$\mathcal{L}_1((x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}) = (x_1 - 2x_2 + x_3, 4x_1 + 2x_2 - x_3, -x_1 - 5x_2 + 3x_3, 2x_1 - 3x_2 + 8x_3)^{\mathrm{T}}$,
$\mathcal{L}_2((x_1, x_2, x_3, x_4)^{\mathrm{T}}) = (x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4, x_1 - 7x_4, 2x_1 - x_3 + x_4)^{\mathrm{T}}$.

Maple:

```
> A2:=matrix(3,4,[1,-2,1,-1,1,0,0,-7,2,0,-1,1]);
```

$$A2 := \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -7 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> A:=evalm(A1&*A2);
```

$$A := \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 14 \\ 4 & -8 & 5 & -19 \\ 0 & 2 & -4 & 39 \\ 15 & -4 & -6 & 27 \end{bmatrix}$$

Zpět

Příklad 2.1.3

Dokažte, že zobrazení $\mathcal{L}_1 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ a zobrazení $\mathcal{L}_2 : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ jsou lineární, a najděte matici $\mathbf{A}$, která reprezentuje složené zobrazení $\mathcal{L}_1 \circ \mathcal{L}_2$.
$\mathcal{L}_1((x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}) = (x_1 - 2x_2 + x_3, 4x_1 + 2x_2 - x_3, -x_1 - 5x_2 + 3x_3, 2x_1 - 3x_2 + 8x_3)^{\mathrm{T}}$,
$\mathcal{L}_2((x_1, x_2, x_3, x_4)^{\mathrm{T}}) = (x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4, x_1 - 7x_4, 2x_1 - x_3 + x_4)^{\mathrm{T}}$.

Mathematica:

L1[x1_, x2_, x3_] = {x1 − 2x2 + x3, 4x1 + 2x2 − x3, −x1 − 5x2 + 3x3,2x1 − 3x2 + 8x3};

A1 = {{1, −2, 1}, {4, 2, −1}, {−1, −5, 3}, {2, −3, 8}};

L2[x1_, x2_, x3_, x4_] = {x1 − 2x2 + x3 − x4, x1 − 7x4, 2x1 − x3 + x4};

A2 = {{1, −2, 1, −1}, {1, 0, 0, −7}, {2, 0, −1, 1}};

sloz = Apply[L1, L2[x1, x2, x3, x4]]

{3x1 − 2x2 − 2(x1 − 7x4), −2x1 + x3 + 2(x1 − 7x4) + 4(x1 − 2x2 + x3 − x4) − x4,
− x1 + 2x2 − x3 − 5(x1 − 7x4) + x4 + 3(2x1 − x3 + x4), −3(x1 − 7x4) + 2(x1 − 2x2 + x3 −
x4) + 8(2x1 − x3 + x4)}

***L*[x1_, x2_, x3_] = Expand[sloz]**

{x1 − 2x2 + 14x4, 4x1 − 8x2 + 5x3 − 19x4, 2x2 − 4x3 + 39x4, 15x1 − 4x2 − 6x3 + 27x4}

***A* = {{1, −2, 0, 14}, {4, −8, 5, −19}, {0, 2, −4, 39},{15, −4, −6, 27}};**

MatrixForm[*A*]

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 14 \\ 4 & -8 & 5 & -19 \\ 0 & 2 & -4 & 39 \\ 15 & -4 & -6 & 27 \end{pmatrix}$$

Další

Příklad 2.1.3

Dokažte, že zobrazení $\mathcal{L}_1 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ a zobrazení $\mathcal{L}_2 : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ jsou lineární, a najděte matici $\mathbf{A}$, která reprezentuje složené zobrazení $\mathcal{L}_1 \circ \mathcal{L}_2$.
$\mathcal{L}_1((x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}) = (x_1 - 2x_2 + x_3, 4x_1 + 2x_2 - x_3, -x_1 - 5x_2 + 3x_3, 2x_1 - 3x_2 + 8x_3)^{\mathrm{T}}$,
$\mathcal{L}_2((x_1, x_2, x_3, x_4)^{\mathrm{T}}) = (x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4, x_1 - 7x_4, 2x_1 - x_3 + x_4)^{\mathrm{T}}$.

Mathematica:

MatrixForm[A1.A2]

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 14 \\ 4 & -8 & 5 & -19 \\ 0 & 2 & -4 & 39 \\ 15 & -4 & -6 & 27 \end{pmatrix}$$

Zpět

Příklad 2.1.4

Najděte jádro K lineárního zobrazení $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ reprezentovaného maticí

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \\ -6 & -4 & 2 \\ -1 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Určete dimenzi K.

Zpět

Příklad 2.1.4

Najděte jádro K lineárního zobrazení $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ reprezentovaného maticí

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \\ -6 & -4 & 2 \\ -1 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Určete dimenzi K.

Výsledek:

$\dim K = 1, \quad K = \{\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^3, \ \overrightarrow{x} = \alpha(1,1,5)^{\mathrm{T}}, \alpha \in \mathbb{R}\}.$

Zpět

Příklad 2.1.4

Najděte jádro K lineárního zobrazení $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ reprezentovaného maticí

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \\ -6 & -4 & 2 \\ -1 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Určete dimenzi K.

Návod:

Protože jádro lineárního zobrazení $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ je množina

$$K = \{\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^3,\ L(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{0}\} = \{\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^3,\ \mathbf{A}\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}\},$$

vyřešíme homogenní soustavu lineárních rovnic $\mathbf{A}\overrightarrow{x} = 0$. Jádro je rovno vektorovému prostoru všech řešení této homogenní soustavy.

Zpět

Příklad 2.1.4

Najděte jádro K lineárního zobrazení $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ reprezentovaného maticí

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \\ -6 & -4 & 2 \\ -1 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Určete dimenzi K.

Řešení:

Jádro lineárního zobrazení L z prostoru $\mathbb{R}^3$ do $\mathbb{R}^4$ je množina $K = \{\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^3, L(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{0}\}$. Je-li toto zobrazení reprezentováno maticí $\mathbf{A}$, můžeme rovnost $L(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{0}$ nahradit rovností $\mathbf{A}\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$. Abychom tedy našli jádro, musíme vyřešit homogenní soustavu lineárních rovnic $\mathbf{A}\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$. Jádro je množina všech řešení této homogenní soustavy. Matici soustavy $\mathbf{A}$ převedeme pomocí ekvivalentních úprav na horní trojúhelníkový tvar:

$$\begin{pmatrix} 7 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \\ -6 & -4 & 2 \\ -1 & -4 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 7 & 3 & -2 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & -10 & 2 \\ 0 & -25 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 7 & 3 & -2 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

K sedminásobku 2. řádku jsme přičetli (-3)násobek prvního, k sedminásobku 3. řádku jsme přičetli šestinásobek prvního a k sedminásobku 4. řádku jsme přičetli první řádek. Vznikla matice, ve které třetí a čtvrtý řádek jsou násobky druhého, proto je vynecháme. Hodnost matice je $\mathrm{h}(\mathbf{A}) = 2$, počet neznámých je $n = 3$. Vektorový prostor všech řešení této homogenní soustavy (= hledané jádro K) má dimenzi

$$\dim K = n - \mathrm{h}(A) = 3 - 2 = 1.$$

Další

Příklad 2.1.4

Najděte jádro K lineárního zobrazení $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ reprezentovaného maticí

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \\ -6 & -4 & 2 \\ -1 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Určete dimenzi K.

Řešení:

Pomocí zpětného chodu Gaussovy eliminace najdeme K. Hledáme všechny vektory $\overrightarrow{x} = (x, y, z)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^3$, které řeší homogenní soustavu. Jednu neznámou volíme jako parametr. Dostaneme

$$z = t, \quad 5y - z = 0 \;\Rightarrow\; y = \frac{1}{5}\,t, \quad 7x + 3y - 2z = 0 \;\Rightarrow\; x = \frac{1}{5}\,t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Tedy

$$K = \{\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^3, \overrightarrow{x} = t\left(\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, 1\right)^{\mathrm{T}},\; t \in \mathbb{R}\} = \{\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^3, \overrightarrow{x} = \alpha\,(1, 1, 5)^{\mathrm{T}},\; \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Poznamenejme, že oba zápisy jsou správně. Použitím α jsme se jen zbavili zlomků. To lze, neboť je-li $\overrightarrow{x} = t\,\left(\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, 1\right)^{\mathrm{T}}$ řešení naší homogenní soustavy, je jistě i $\overrightarrow{x} = \alpha\,(1, 1, 5)^{\mathrm{T}}$ řešení této soustavy. Přesvědčte se o tom.

Zpět

Příklad 2.1.4

Najděte jádro K lineárního zobrazení $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ reprezentovaného maticí

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \\ -6 & -4 & 2 \\ -1 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Určete dimenzi K.

Maple:

```
> with(linalg):
> A:=matrix(4,3,[7,3,-2,3,2,-1,-6,-4,2,-1,-4,1]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 7 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \\ -6 & -4 & 2 \\ -1 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> kernel(A, 'nulldim');
```

$$\{[1,\ 1,\ 5]\}$$

```
> nulldim;
```

$$1$$

Zpět

Příklad 2.1.4

Najděte jádro K lineárního zobrazení $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ reprezentovaného maticí

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \\ -6 & -4 & 2 \\ -1 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Určete dimenzi K.

Mathematica:

$\boldsymbol{A = \{\{7, 3, -2\}, \{3, 2, -1\},\{-6, -4, 2\}, \{-1, -4, 1\}\};}$

MatrixForm[*A*]

$$\begin{pmatrix} 7 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \\ -6 & -4 & 2 \\ -1 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

***K* = NullSpace[*A*]**

$\{\{1, 1, 5\}\}$

dim = MatrixRank[*K*]

1

Zpět

- Příklad 2.2.1 Zjistěte, zda k matici $\mathbf{A}$ existuje matice inverzní. Pokud ano, vypočtěte ji.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- Příklad 2.2.2 Určete matici reprezentující lineární zobrazení L prostoru $\mathbb{R}^3$ do $\mathbb{R}^3$ definované vztahem

$$L((x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}) = (2x_1 + x_3, x_1 - x_2 - x_3, -x_1 + 3x_2 + 2x_3)^{\mathrm{T}}$$

a nalezněte k ní matici inverzní.

- Příklad 2.2.3 Řešte maticovou rovnici $\mathbf{AX} + \mathbf{X} = \mathbf{A}^2$, kde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zpět

Příklad 2.2.1

Zjistěte, zda k matici $\mathbf{A}$ existuje matice inverzní. Pokud ano, vypočtěte ji.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

? Zpět

Příklad 2.2.1

Zjistěte, zda k matici $\mathbf{A}$ existuje matice inverzní. Pokud ano, vypočtěte ji.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Výsledek:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Zpět

Příklad 2.2.1

Zjistěte, zda k matici $\mathbf{A}$ existuje matice inverzní. Pokud ano, vypočtěte ji.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Návod:

Vypočteme determinant matice $\mathbf{A}$. Je-li $\det \mathbf{A} \neq 0$, inverzní matice existuje. Najdeme ji Gaussovou-Jordanovou metodou, t.j. matici $(\mathbf{A}|\mathbf{E})$ převedeme pomocí ekvivalentních úprav na matici $(\mathbf{E}|\mathbf{A}^{-1})$, kde $\mathbf{E}$ je jednotková matice.

Zpět

Příklad 2.2.1

Zjistěte, zda k matici $\mathbf{A}$ existuje matice inverzní. Pokud ano, vypočtěte ji.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Řešení:

Inverzní matice $\mathbf{A}^{-1}$ k matici $\mathbf{A}$ existuje právě když matice $\mathbf{A}$ je regulární, tj. $\det \mathbf{A} \neq 0$. Vypočteme tedy determinant matice $\mathbf{A}$. Počítáme rozvojem podle druhého sloupce:

$$\det \mathbf{A} = 1 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{4+2} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 + 2 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 + 2(1-2) = -1.$$

Využili jsme toho, že determinant horní trojúhelníkové matice je roven součinu diagonálních prvků, druhý determinant matice 3×3 jsme počítali rozvojem podle 1. řádku.
Determinant matice $\mathbf{A}$ je nenulový, tedy matice $\mathbf{A}$ je regulární a inverzní matice existuje.
Nechť $\mathbf{E}$ je jednotková matice. Výpočet provedeme Gaussovou-Jordanovou metodou, tj. matici $(\mathbf{A}|\mathbf{E})$ převedeme pomocí ekvivalentních úprav na matici $(\mathbf{E}|\mathbf{A}^{-1})$:

Další

Příklad 2.2.1

Zjistěte, zda k matici $\mathbf{A}$ existuje matice inverzní. Pokud ano, vypočtěte ji.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Řešení:

$$(\mathbf{A}|\mathbf{E}) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -4 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

K (-2)násobku druhého řádku jsme přičetli první řádek

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 0 & -2 & 4 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -4 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & 1 & -2 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -2 & -2 & -1 \end{array}\right) \sim$$

Od prvního a čtvrtého řádku jsme odečetli druhý. V dalším kroku jsme k prvnímu řádku přičetli dvojnásobek třetího řádku a ke čtvrtému řádku jsme přičetli (-2)násobek třetího. Zbývá upravit čtvrtý sloupec.

Další

Příklad 2.2.1

Zjistěte, zda k matici $\mathbf{A}$ existuje matice inverzní. Pokud ano, vypočtěte ji.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Řešení:

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -2 & -2 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right) = (\mathbf{E}|\mathbf{A}^{-1}).$$

K prvnímu řádku jsme přičetli dvojnásobek čtvrtého, k druhému řádku jsme přičetli (-2)násobek čtvrtého, od třetího řádku jsme odečetli čtvrtý. Při poslední úpravě vydělíme každý řádek diagonálním prvkem. Dostaneme vlevo jednotkovou matici $\mathbf{E}$ a vpravo hledanou inverzní matici $\mathbf{A}^{-1}$.

Zpět

Příklad 2.2.1

Zjistěte, zda k matici $\mathbf{A}$ existuje matice inverzní. Pokud ano, vypočtěte ji.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Maple:

```
> with(linalg):
> A:= matrix(4,4,[2,1,0,0,1,0,-1,2,0,0,1,-1,0,1,0,-1]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

```
> det(A);
```

$$-1$$

```
> inverse(A);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Zpět

Příklad 2.2.1

Zjistěte, zda k matici $\mathbf{A}$ existuje matice inverzní. Pokud ano, vypočtěte ji.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Mathematica:

$\boldsymbol{A = \{\{2,1,0,0\},\{1,0,-1,2\},\{0,0,1,-1\},\{0,1,0,-1\}\};}$

$\mathbf{Det}[\boldsymbol{A}]$

-1

$\boldsymbol{B} = \mathbf{Inverse}[\boldsymbol{A}];$

$\mathbf{MatrixForm}[\boldsymbol{B}]$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Zpět

Příklad 2.2.2

Určete matici reprezentující lineární zobrazení L prostoru $\mathbb{R}^3$ do $\mathbb{R}^3$ definované vztahem

$$L((x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}) = (2x_1 + x_3, x_1 - x_2 - x_3, -x_1 + 3x_2 + 2x_3)^{\mathrm{T}}$$

a nalezněte k ní matici inverzní.

? Zpět

Příklad 2.2.2

Určete matici reprezentující lineární zobrazení L prostoru $\mathbb{R}^3$ do $\mathbb{R}^3$ definované vztahem

$$L((x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}) = (2x_1 + x_3, x_1 - x_2 - x_3, -x_1 + 3x_2 + 2x_3)^{\mathrm{T}}$$

a nalezněte k ní matici inverzní.

Výsledek:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 5 & 3 \\ 2 & -6 & -2 \end{pmatrix}.$$

Zpět

Příklad 2.2.2

Určete matici reprezentující lineární zobrazení L prostoru $\mathbb{R}^3$ do $\mathbb{R}^3$ definované vztahem

$$L((x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}) = (2x_1 + x_3, x_1 - x_2 - x_3, -x_1 + 3x_2 + 2x_3)^{\mathrm{T}}$$

a nalezněte k ní matici inverzní.

Návod:

Porovnáním vektorů $A\overrightarrow{x}$ a $L(\overrightarrow{x})$ získáme prvky matice $\mathbf{A}$. Inverzní matici vypočteme Gaussovou-Jordanovou metodou nebo pomocí algebraických doplňků.

Zpět

Příklad 2.2.2

Určete matici reprezentující lineární zobrazení L prostoru $\mathbb{R}^3$ do $\mathbb{R}^3$ definované vztahem

$$L((x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}) = (2x_1 + x_3, x_1 - x_2 - x_3, -x_1 + 3x_2 + 2x_3)^{\mathrm{T}}$$

a nalezněte k ní matici inverzní.

Řešení:

Protože $L(\overrightarrow{x}) = A\overrightarrow{x}$, dostaneme prvky a_{ij} matice A typu 3×3 porovnáním vektorů $A\overrightarrow{x}$ a $L(\overrightarrow{x})$:

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 \phantom{{}- x_2} + x_3 \\ x_1 - x_2 - x_3 \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 \end{pmatrix}.$$

Tedy matice $\mathbf{A}$ reprezentující lineární zobrazení $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ je

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Nyní vypočteme Gaussovou-Jordanovou metodou inverzní matici, tj. pomocí ekvivalentních úprav převedeme matici $(\mathbf{A}|\mathbf{E})$ na matici $(\mathbf{E}|\mathbf{A}^{-1})$:

$$(\mathbf{A}|\mathbf{E}) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 6 & 5 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \sim$$

Další

Příklad 2.2.2

Určete matici reprezentující lineární zobrazení L prostoru $\mathbb{R}^3$ do $\mathbb{R}^3$ definované vztahem

$$L((x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}) = (2x_1 + x_3, x_1 - x_2 - x_3, -x_1 + 3x_2 + 2x_3)^{\mathrm{T}}$$

a nalezněte k ní matici inverzní.

Řešení:

K (-2)násobku druhého řádku jsme přičetli první, ke dvojnásobku třetího řádku jsme přičetli první. Při další úpravě jsme k třetímu řádku přičetli (-3)násobek druhého.

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -2 & 6 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 8 & 0 & 0 & 2 & 6 & 2 \\ 0 & 8 & 0 & -2 & 10 & 6 \\ 0 & 0 & -4 & -2 & 6 & 2 \end{array}\right) \sim$$

Ke čtyřnásobku prvního řádku jsme přičetli třetí řádek, ke čtyřnásobku druhého řádku jsme přičetli trojnásobek třetího. Zbývá vydělit každý řádek diagonálním prvkem.

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right) = (\mathbf{E}|\mathbf{A}^{-1}) \implies \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 5 & 3 \\ 2 & -6 & -2 \end{pmatrix}.$$

Zpět

Příklad 2.2.2

Určete matici reprezentující lineární zobrazení L prostoru $\mathbb{R}^3$ do $\mathbb{R}^3$ definované vztahem

$$L((x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}) = (2x_1 + x_3, x_1 - x_2 - x_3, -x_1 + 3x_2 + 2x_3)^{\mathrm{T}}$$

a nalezněte k ní matici inverzní.

Maple:

```
> with(linalg):
> eqns := {2*x1+x3=y1,x1-x2-x3=y2,-x1+3*x2+2*x3=y3};
```

$$eqns := \{2\,x1 + x3 = y1,\ x1 - x2 - x3 = y2,\ -x1 + 3\,x2 + 2\,x3 = y3\}$$

```
> A := genmatrix(eqns, [x1,x2,x3]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

```
> B:=inverse(A);
```

$$B := \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{-1}{4} & \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{-3}{2} & \frac{-1}{2} \end{bmatrix}$$

Zpět

Příklad 2.2.2

Určete matici reprezentující lineární zobrazení L prostoru $\mathbb{R}^3$ do $\mathbb{R}^3$ definované vztahem

$$L((x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}) = (2x_1 + x_3, x_1 - x_2 - x_3, -x_1 + 3x_2 + 2x_3)^{\mathrm{T}}$$

a nalezněte k ní matici inverzní.

Mathematica:

$\boldsymbol{A = \{\{2, 0, 1\}, \{1, -1, -1\}, \{-1, 3, 2\}\};}$

MatrixForm[A]

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{B =}$ **Inverse[A];**

MatrixForm[B]

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Zpět

Příklad 2.2.3

Řešte maticovou rovnici $\mathbf{AX} + \mathbf{X} = \mathbf{A}^2$, kde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

?

Zpět

Příklad 2.2.3

Řešte maticovou rovnici $\mathbf{AX} + \mathbf{X} = \mathbf{A}^2$, kde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Výsledek:

$$\mathbf{X} := \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Zpět

Příklad 2.2.3

Řešte maticovou rovnici $\mathbf{AX}+\mathbf{X}=\mathbf{A}^2$, kde

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Návod:

Nejprve vyjádříme matici $\mathbf{X}$ obecně z maticové rovnice, teprve potom dosadíme konkrétní matici $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}^2$, $\mathbf{A}+\mathbf{E}$ a inverzní matici k $\mathbf{A}+\mathbf{E}$. $\mathbf{E}$ je jednotková matice, matici $\mathbf{A}+\mathbf{E}$ dostaneme vytknutím matice $\mathbf{X}$ a matici $(\mathbf{A}+\mathbf{E})^{-1}$ musíme spočítat (pozor, včas ověřte, že inverzní matice existuje), abychom mohli vypočítat výslednou matici $\mathbf{X}$.

Zpět

Příklad 2.2.3

Řešte maticovou rovnici $\mathbf{AX} + \mathbf{X} = \mathbf{A}^2$, kde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Řešení:

Nejprve vyjádříme matici $\mathbf{X}$ obecně z maticové rovnice. Vytkneme v levé části rovnice matici $\mathbf{X}$ vpravo:

$$\mathbf{AX} + \mathbf{X} = \mathbf{A}^2 \quad \Longrightarrow \quad (\mathbf{A} + \mathbf{E})\mathbf{X} = \mathbf{A}^2,$$

$\mathbf{E}$ je jednotková matice, $\mathbf{E} = \mathrm{diag}(1, 1, 1) \in \mathbb{R}^3$. Nyní bychom potřebovali celou rovnici vynásobit zleva maticí $(\mathbf{A} + \mathbf{E})^{-1}$. To ale musíme vědět, že inverzní matice existuje. Tedy musíme vypočítat matici $\mathbf{A} + \mathbf{E}$ a ověřit, že je regulární, tj. $\det(\mathbf{A} + \mathbf{E}) \neq 0$. Determinant budeme počítat rozvojem podle třetího řádku.

$$\mathbf{A} + \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\det(\mathbf{A} + \mathbf{E}) = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2 + (4 - 1) = 1.$$

Celou rovnici tedy vynásobíme inverzní maticí $(\mathbf{A} + \mathbf{E})^{-1}$ zleva a použijeme definici inverzní matice, tj. $(\mathbf{A} + \mathbf{E})^{-1}(\mathbf{A} + \mathbf{E}) = \mathbf{E}$, a dále rovnost $\mathbf{EX} = \mathbf{X}$.

Další

Příklad 2.2.3

Řešte maticovou rovnici $\mathbf{AX} + \mathbf{X} = \mathbf{A}^2$, kde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Řešení:

$$(\mathbf{A}+\mathbf{E})^{-1}(\mathbf{A}+\mathbf{E})\mathbf{X} = (\mathbf{A}+\mathbf{E})^{-1}\mathbf{A}^2 \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{X} = (\mathbf{A}+\mathbf{E})^{-1}\mathbf{A}^2.$$

Dostali jsme obecný předpis pro matici $\mathbf{X}$. Vypočteme konkrétní matice:

$$\mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$(\mathbf{A}+\mathbf{E}\,|\,\mathbf{E}) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 6 & 0 & 4 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & -2 & -6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 6 & 0 & 0 & 12 & -6 & -12 \\ 0 & -6 & 0 & 6 & -6 & -6 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & -2 & -6 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 3 \end{array}\right) = (\mathbf{E}\,|\,(\mathbf{A}+\mathbf{E})^{-1}).$$

Další

Příklad 2.2.3

Řešte maticovou rovnici $\mathbf{AX} + \mathbf{X} = \mathbf{A}^2$, kde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Řešení:

Zbývá vypočítat $\mathbf{X}$:

$$\mathbf{X} = (\mathbf{A} + \mathbf{E})^{-1}\mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Zpět

Příklad 2.2.3

Řešte maticovou rovnici $\mathbf{AX} + \mathbf{X} = \mathbf{A}^2$, kde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Maple:

```
> with(linalg):
> A:= matrix(3,3,[1,1,1,1,1,0,1,0,0]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> AA:=evalm(A&*A);
```

$$AA := \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> E:=diag(1,1,1);
```

$$E := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Další

Příklad 2.2.3

Řešte maticovou rovnici $\mathbf{AX} + \mathbf{X} = \mathbf{A}^2$, kde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Maple:

```
> evalm(A+E);
```

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> det(%);
```

$$1$$

```
> B:=inverse(A+E);
```

$$B := \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

```
> X:=evalm(B&*AA);
```

$$X := \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Zpět

Příklad 2.2.3

Řešte maticovou rovnici $\mathbf{AX} + \mathbf{X} = \mathbf{A}^2$, kde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Mathematica:

$A = \{\{2, 0, 1\}, \{1, -1, -1\}, \{-1, 3, 2\}\};$

MatrixForm$[A]$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$B = \mathbf{Inverse}[A];$

MatrixForm$[B]$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$A = \{\{1, 1, 1\}, \{1, 1, 0\}, \{1, 0, 0\}\};$

MatrixForm$[A]$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Další

Příklad 2.2.3

Řešte maticovou rovnici $\mathbf{AX} + \mathbf{X} = \mathbf{A}^2$, kde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Mathematica:

$\mathbf{AA} = \boldsymbol{A}.\boldsymbol{A};$

$\mathbf{MatrixForm[AA]}$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\mathbf{EE = \{\{1, 0, 0\}, \{0, 1, 0\}, \{0, 0, 1\}\};}$

$\mathbf{MatrixForm[EE]}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} + \mathbf{EE};$

$\mathbf{MatrixForm}[\boldsymbol{B}]$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Další

Příklad 2.2.3

Řešte maticovou rovnici $\mathbf{AX} + \mathbf{X} = \mathbf{A}^2$, kde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Mathematica:

$\mathbf{Det}[B]$

1

$\mathbf{CC} = \mathbf{Inverse}[B];$

$\mathbf{MatrixForm}[\mathbf{CC}]$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$X = \mathbf{CC.AA};$

$\mathbf{MatrixForm}[X]$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Zpět