Kapitola 3: Lineární diferenciální rovnice

Chcete-li ukončit prohlížení stiskněte klávesu **Esc**.
Chcete-li pokračovat stiskněte klávesu **Enter**.

Lineární diferenciální rovnice

- Obecné řešení homogenní LDR 2. řádu
- Partikulární řešení homogenní LDR 2. řádu (počáteční úloha)
- Obecné řešení LDR 2. řádu
- Partikulární řešení LDR 2. řádu (počáteční úloha)
- Partikulární řešení LDR 2. řádu (okrajová úloha)
- LDR vyšších řádů, metoda snížení řádu

Zpět

Obecné řešení LDR 2. řádu

- **Příklad 3.1.1** Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice (LDR) $y'' + 5y' + 6y = 0$.
- **Příklad 3.1.2** Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $4y'' - 8y' + 3y = 0$.
- **Příklad 3.1.3** Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y'' + y' + y = 0$.
- **Příklad 3.1.4** Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y'' + 4y' + 4y = 0$.

Zpět

Příklad 3.1.1

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice (LDR) $y'' + 5y' + 6y = 0$.

? Zpět

Příklad 3.1.1

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice (LDR) $y'' + 5y' + 6y = 0\,.$

Výsledek:

$y(x) = C_1 \mathrm{e}^{-2x} + C_2\,\mathrm{e}^{-3x}\,, \quad x \in \mathbb{R}\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}\,.$

Zpět

Příklad 3.1.1

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice (LDR) $y'' + 5y' + 6y = 0$.

Návod:

Rovnice je homogenní lineární diferenciální rovnice (HLDR) s konstantními koeficienty tvaru $k_0 y'' + k_1 y' + k_2 y = 0$, $k_0, k_1, k_2 \in \mathbb{R}$, $k_0 \neq 0$. Její řešení hledáme ve tvaru $y = \mathrm{e}^{\lambda x}$, kde $\lambda \in \mathbb{R}$. Konstantu λ určíme tak, aby funkce $y = \mathrm{e}^{\lambda x}$ splňovala zadanou rovnici. Proto musí být λ kořenem **charakteristické rovnice** $k_0 \lambda^2 + k_1 \lambda + k_2 = 0$.

Zpět

Příklad 3.1.1

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice (LDR) $y'' + 5y' + 6y = 0$.

Řešení:

Charakteristická rovnice zadané LDR $y'' + 5y' + 6y = 0$ je

$$\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0.$$

Její kořeny jsou $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -3$. (Pro chytřejší poznámka: Kvadratická rovnice je v normovaném tvaru, kořeny lze určit z jejich vlastností $\lambda_1 + \lambda_2 = -5$, $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 6$.) Má-li charakteristická rovnice **dva různé reálné** kořeny λ_1, λ_2, pak obecné řešení HLDR má tvar

$$y(x) = C_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 x} + C_2\, \mathrm{e}^{\lambda_2 x}\,, \quad x \in \mathbb{R}\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Obecné řešení zadané LDR tedy je

$$y(x) = C_1 \mathrm{e}^{-2x} + C_2\, \mathrm{e}^{-3x}\,, \quad x \in \mathbb{R}\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Zpět

Příklad 3.1.1

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice (LDR) $y'' + 5y' + 6y = 0\,.$

Maple:

```
> DR:=(diff(y(x),x$2)+5*diff(y(x),x)+6*y(x)=0);
```

$$DR := \left(\frac{d^2}{dx^2}\,\mathrm{y}(x)\right) + 5\left(\frac{d}{dx}\,\mathrm{y}(x)\right) + 6\,\mathrm{y}(x) = 0$$

```
> dsolve(DR,y(x));
```

$$\mathrm{y}(x) = \_C1\,e^{(-3\,x)} + \_C2\,e^{(-2\,x)}$$

Zpět

Příklad 3.1.1

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice (LDR) $y'' + 5y' + 6y = 0$.

Mathematica:

$\mathbf{rovnice} = \boldsymbol{y}"[\boldsymbol{x}] + \mathbf{5}\boldsymbol{y}'[\boldsymbol{x}] + \mathbf{6}\boldsymbol{y}[\boldsymbol{x}] == \mathbf{0};$

$\mathbf{reseni} = \mathbf{DSolve}[\mathbf{rovnice}, \boldsymbol{y}[\boldsymbol{x}], \boldsymbol{x}]$

$\{\{y[x] \to e^{-3x} C[1] + e^{-2x} C[2]\}\}$

Zpět

Příklad 3.1.2

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $4y'' - 8y' + 3y = 0$.

? Zpět

Příklad 3.1.2

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $4y'' - 8y' + 3y = 0$.

Výsledek:

$$y(x) = C_1 \mathrm{e}^{\frac{3}{2}x} + C_2\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Zpět

Příklad 3.1.2

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $4y'' - 8y' + 3y = 0$.

Návod:

Rovnice je lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty tvaru $k_0y'' + k_1y' + k_2y = 0$ a její řešení hledáme podle návodu v předchozím příkladě.

Zpět

Příklad 3.1.2

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $4y'' - 8y' + 3y = 0$.

Řešení:

Charakteristická rovnice zadané LDR $4y'' - 8y' + 3y = 0$ je

$$4\lambda^2 - 8\lambda + 3 = 0.$$

Její kořeny jsou $\lambda_1 = \frac{3}{2}$, $\lambda_2 = \frac{1}{2}$. (Kořeny kvadratické rovnice nalezneme pomocí vzorečku $\lambda_{1,2} = \frac{-(-8)\pm\sqrt{(-8)^2-4\cdot4\cdot3}}{2\cdot4}$.) Má-li charakteristická rovnice **dva různé reálné** kořeny λ_1, λ_2, pak obecné řešení HLDR má tvar

$$y(x) = C_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 x} + C_2\, \mathrm{e}^{\lambda_2 x}\,, \quad x \in \mathbb{R}\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Obecné řešení zadané LDR tedy je

$$y(x) = C_1 \mathrm{e}^{\frac{3}{2}x} + C_2\, \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}\,, \quad x \in \mathbb{R}\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Zpět

Příklad 3.1.2

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $4y'' - 8y' + 3y = 0$.

Maple:

```
> DR:=(4*diff(y(x),x$2)-8*diff(y(x),x)+3*y(x)=0);
```

$$DR := 4\left(\frac{d^2}{dx^2}\,\mathrm{y}(x)\right) - 8\left(\frac{d}{dx}\,\mathrm{y}(x)\right) + 3\,\mathrm{y}(x) = 0$$

```
> dsolve(DR,y(x));
```

$$\mathrm{y}(x) = \_C1\, e^{\left(\frac{x}{2}\right)} + \_C2\, e^{\left(\frac{3\,x}{2}\right)}$$

Zpět

Příklad 3.1.2

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $4y'' - 8y' + 3y = 0$.

Mathematica:

$\mathbf{rovnice = 4y"[x] - 8y'[x] + 3y[x] == 0;}$

$\mathbf{reseni = DSolve[rovnice, y[x], x]}$

$$\left\{\left\{y[x] \to e^{x/2}C[1] + e^{3x/2}C[2]\right\}\right\}$$

Zpět

Příklad 3.1.3

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y'' + y' + y = 0$.

? Zpět

Příklad 3.1.3

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y'' + y' + y = 0$.

Výsledek:

$$y(x) = C_1 \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + C_2\, \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right), \quad x \in \mathbb{R}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Zpět

Příklad 3.1.3

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y'' + y' + y = 0$.

Návod:

Rovnice je lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty tvaru $k_0 y'' + k_1 y' + k_2 y = 0$ a její řešení hledáme podle návodu v prvním příkladě.

Zpět

Příklad 3.1.3

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y'' + y' + y = 0$.

Řešení:

Charakteristická rovnice zadané LDR $y'' + y' + y = 0$ je

$$\lambda^2 + \lambda + 1 = 0.$$

Její kořeny jsou $\lambda_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\, i,\ \lambda_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\, i$. (Kořeny kvadratické rovnice hledáme v oboru komplexních čísel, nalezneme je pomocí vzorečku $\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1}$.) Má-li charakteristická rovnice **dva imaginární komplexně sdružené** kořeny $\lambda_1 = a + b\, i, \lambda_2 = a - b\, i$, pak obecné řešení HLDR má tvar

$$y(x) = C_1 \mathrm{e}^{a\,x} \cos bx + C_2\, \mathrm{e}^{a\,x} \sin bx\,, \quad x \in \mathbb{R}\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Obecné řešení zadané LDR tedy je

$$y(x) = C_1 \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} \cos(\frac{\sqrt{3}}{2} x) + C_2\, \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} \sin(\frac{\sqrt{3}}{2} x)\,, \quad x \in \mathbb{R}\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Zpět

Příklad 3.1.3

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y'' + y' + y = 0$.

Maple:

```
> DR:=(diff(y(x),x$2)+diff(y(x),x)+y(x)=0);
```

$$DR := \left(\frac{d^2}{dx^2}\,\mathrm{y}(x)\right) + \left(\frac{d}{dx}\,\mathrm{y}(x)\right) + \mathrm{y}(x) = 0$$

```
> dsolve(DR,y(x));
```

$$\mathrm{y}(x) = \_C1\, e^{(-\frac{x}{2})} \sin\left(\frac{\sqrt{3}\,x}{2}\right) + \_C2\, e^{(-\frac{x}{2})} \cos\left(\frac{\sqrt{3}\,x}{2}\right)$$

Zpět

Příklad 3.1.3

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y'' + y' + y = 0$.

Mathematica:

$\mathbf{rovnice = y"[x] + y'[x] + y[x] == 0;}$

$\mathbf{reseni = DSolve[rovnice, y[x], x]}$

$$\left\{\left\{y[x] \to e^{-x/2}C[2]\mathrm{Cos}\left[\frac{\sqrt{3}x}{2}\right] + e^{-x/2}C[1]\mathrm{Sin}\left[\frac{\sqrt{3}x}{2}\right]\right\}\right\}$$

Zpět

Příklad 3.1.4

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y'' + 4y' + 4y = 0$.

? Zpět

Příklad 3.1.4

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y'' + 4y' + 4y = 0$.

Výsledek:

$y(x) = C_1 \mathrm{e}^{-2x} + C_2\, x\, \mathrm{e}^{-2x}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$

Zpět

Příklad 3.1.4

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y'' + 4y' + 4y = 0$.

Návod:

Rovnice je lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty tvaru $k_0 y'' + k_1 y' + k_2 y = 0$ a její řešení hledáme podle návodu v prvním příkladě.

Zpět

Příklad 3.1.4

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y'' + 4y' + 4y = 0$.

Řešení:

Charakteristická rovnice zadané LDR $y'' + 4y' + 4y = 0$ je

$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0.$$

Její kořeny jsou $\lambda_{1,2} = -2$. (Levou stranu rovnice lze podle vzorečku $A^2 + 2AB + b^2 = (A + B)^2$ upravit, tedy $(x + 2)^2 = 0$.) Má-li charakteristická rovnice **jeden dvojnásobný reálný** kořen λ, pak obecné řešení HLDR má tvar

$$y(x) = C_1 \mathrm{e}^{\lambda x} + C_2\, x\, \mathrm{e}^{\lambda x}\,, \quad x \in \mathbb{R}\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Obecné řešení zadané LDR tedy je

$$y(x) = C_1 \mathrm{e}^{-2x} + C_2\, x\, \mathrm{e}^{-2x}\,, \quad x \in \mathbb{R}\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Zpět

Příklad 3.1.4

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y'' + 4y' + 4y = 0$.

Maple:

```
> DR:=(diff(y(x),x$2)+4*diff(y(x),x)+4*y(x)=0);
```

$$DR := \left(\frac{d^2}{dx^2}\,\mathrm{y}(x)\right) + 4\left(\frac{d}{dx}\,\mathrm{y}(x)\right) + 4\,\mathrm{y}(x) = 0$$

```
> dsolve(DR,y(x));
```

$$\mathrm{y}(x) = \_C1\, e^{(-2\,x)} + \_C2\, e^{(-2\,x)}\, x$$

Zpět

Příklad 3.1.4

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y'' + 4y' + 4y = 0$.

Mathematica:

$\mathbf{rovnice} = \boldsymbol{y}\text{"}[\boldsymbol{x}] + \mathbf{4}\boldsymbol{y}'[\boldsymbol{x}] + \mathbf{4}\boldsymbol{y}[\boldsymbol{x}] == \mathbf{0;}$

$\mathbf{reseni} = \mathbf{DSolve[rovnice,}\ \boldsymbol{y}[\boldsymbol{x}], \boldsymbol{x}]$

$\{\{y[x] \rightarrow e^{-2x}C[1] + e^{-2x}xC[2]\}\}$

Zpět

Příklad 3.1.5

Ověřte, že funkce $y_1(x) = \cos 2x$ a $y_2(x) = \sin 2x$ jsou řešení lineární diferenciální rovnice $y'' + 4\,y = 0$. Tvoří funkce y_1, y_2 fundamentální systém řešení?

? Zpět

Příklad 3.1.5

Ověřte, že funkce $y_1(x) = \cos 2x$ a $y_2(x) = \sin 2x$ jsou řešení lineární diferenciální rovnice $y'' + 4\,y = 0$. Tvoří funkce y_1, y_2 fundamentální systém řešení?

Výsledek:

Ano, tvoří fundamentální systém.

Zpět

Příklad 3.1.5

Ověřte, že funkce $y_1(x) = \cos 2x$ a $y_2(x) = \sin 2x$ jsou řešení lineární diferenciální rovnice $y'' + 4\,y = 0$. Tvoří funkce y_1, y_2 fundamentální systém řešení?

Návod:

Pro $y_1(x)$ a $y_2(x)$ dosazením ověřte pravdivost diferenciální rovnice. Fundamentální systém řešení tvoří v případě LDR 2. řadu dvě lineárně nezávislá řešení. Nezávislost řešení ověřujeme pomocí Wronského determinantu.

Zpět

Příklad 3.1.5

Ověřte, že funkce $y_1(x) = \cos 2x$ a $y_2(x) = \sin 2x$ jsou řešení lineární diferenciální rovnice $y'' + 4\,y = 0$. Tvoří funkce y_1, y_2 fundamentální systém řešení?

Řešení:

Funkci y_1 (resp. y_2) dosadíme do dané diferenciální rovnice. Spočtěme $y_1''(x)$ (resp. $y_2''(x)$):

$$y_1(x) = \cos 2x \quad \Longrightarrow \quad y_1'(x) = -2\sin 2x \quad \Longrightarrow \quad y_1''(x) = -4\cos 2x\,,$$

$$y_2(x) = \sin 2x \quad \Longrightarrow \quad y_2'(x) = 2\cos 2x \quad \Longrightarrow \quad y_2''(x) = -4\sin 2x\,.$$

Dosaďme y_1 a y_1'' (resp. y_2 a y_2'') do levé strany dané rovnice:

$$y_1'' + 4\,y_1 = -4\cos 2x + 4\cos 2x = 0\,,$$

$$y_2'' + 4\,y_2 = -4\sin 2x + 4\sin 2x = 0\,.$$

Pravá strana dané rovnice je rovna nule. Ukázali jsme tak, že jak pro funkci $y_1(x) = \cos 2x$, tak pro funkci $y_2(x) = \sin 2x$ se levá strana rovnice $y'' + 4\,y = 0$ rovná pravé pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Funkce jsou řešení dané diferenciální rovnice. Tvoří fundamentální systém řešení, jsou-li lineárně nezávislé.

Další

Příklad 3.1.5

Ověřte, že funkce $y_1(x) = \cos 2x$ a $y_2(x) = \sin 2x$ jsou řešení lineární diferenciální rovnice $y'' + 4\,y = 0$. Tvoří funkce y_1, y_2 fundamentální systém řešení?

Řešení:

Spočtěme jejich Wronskián:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos 2x & \sin 2x \\ -\sin 2x & \cos 2x \end{vmatrix} = \cos^2 2x + \sin^2 2x = 1 \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}\,.$$

Wronského determinant je různý od nuly, tedy funkce $y_1(x)$ a $y_2(x)$ jsou lineárně nezávislé, tvoří fundamentální systém řešení.

Zpět

Příklad 3.1.5

Ověřte, že funkce $y_1(x) = \cos 2x$ a $y_2(x) = \sin 2x$ jsou řešení lineární diferenciální rovnice $y'' + 4\,y = 0$. Tvoří funkce y_1, y_2 fundamentální systém řešení?

Maple:

```
> res1:=y(x)=cos(2*x);
```

$$res1 := \mathrm{y}(x) = \cos(2\,x)$$

```
> DR:=(diff(y(x),x$2)+4*y(x)=0);
```

$$DR := (\frac{d^2}{dx^2}\,\mathrm{y}(x)) + 4\,\mathrm{y}(x) = 0$$

```
> odetest(res1,DR);
```

$$0$$

```
> res2:=y(x)=sin(2*x);
```

$$res2 := \mathrm{y}(x) = \sin(2\,x)$$

```
> odetest(res2,DR);
```

$$0$$

```
> with(linalg):
Warning, the protected names norm and trace have been redefined and
unprotected
> det(wronskian([cos(2*x),sin(2*x)],x));
```

$$2\cos(2\,x)^2 + 2\sin(2\,x)^2$$

```
> simplify(%);
```

$$2$$

Zpět

Příklad 3.1.5

Ověřte, že funkce $y_1(x) = \cos 2x$ a $y_2(x) = \sin 2x$ jsou řešení lineární diferenciální rovnice $y'' + 4\,y = 0$. Tvoří funkce y_1, y_2 fundamentální systém řešení?

Mathematica:

$\mathbf{rovnice = y"[x] + 4y[x] == 0;}$

$\mathbf{rovnice/.\{y \to Function[x, Cos[2x]]\}}$

True

$\mathbf{rovnice/.\{y \to Function[x, Sin[2x]]\}}$

True

$\mathbf{W = \{\{Cos[2x], Sin[2x]\}, D[\{Cos[2x], Sin[2x]\}, x]\}}$

$\{\{\mathrm{Cos}[2x], \mathrm{Sin}[2x]\}, \{-2\mathrm{Sin}[2x], 2\mathrm{Cos}[2x]\}\}$

$\mathbf{Simplify[Det[W]]}$

2

Zpět

Příklad 3.1.6

Ověřte, že funkce $y_1(x) = \mathrm{e}^x$ a $y_2(x) = x\,\mathrm{e}^x$ jsou řešení lineární diferenciální rovnice $y'' - 2y' + y = 0$. Tvoří funkce y_1, y_2 fundamentální systém řešení?

? Zpět

Příklad 3.1.6

Ověřte, že funkce $y_1(x) = \mathrm{e}^x$ a $y_2(x) = x\,\mathrm{e}^x$ jsou řešení lineární diferenciální rovnice $y'' - 2y' + y = 0$. Tvoří funkce y_1, y_2 fundamentální systém řešení?

Výsledek:

Ano, tvoří fundamentální systém.

Zpět

Příklad 3.1.6

Ověřte, že funkce $y_1(x) = \mathrm{e}^x$ a $y_2(x) = x\,\mathrm{e}^x$ jsou řešení lineární diferenciální rovnice $y'' - 2y' + y = 0$. Tvoří funkce y_1, y_2 fundamentální systém řešení?

Návod:

Pro $y_1(x)$ a $y_2(x)$ dosazením ověřte pravdivost diferenciální rovnice. Fundamentální systém řešení tvoří v případě LDR 2. řadu dvě lineárně nezávislá řešení. Nezávislost řešení ověřujeme pomocí Wronského determinantu.

Zpět

Příklad 3.1.6

Ověřte, že funkce $y_1(x) = \mathrm{e}^x$ a $y_2(x) = x\,\mathrm{e}^x$ jsou řešení lineární diferenciální rovnice $y'' - 2y' + y = 0$. Tvoří funkce y_1, y_2 fundamentální systém řešení?

Řešení:

Funkci y_1 (resp. y_2) dosadíme do dané diferenciální rovnice. Spočtěme $y_1'(x), y_1''(x)$ (resp. $y_2'(x), y_2''(x)$):

$$y_1(x) = \mathrm{e}^x \quad \Longrightarrow \quad y_1'(x) = \mathrm{e}^x \quad \Longrightarrow \quad y_1''(x) = \mathrm{e}^x\,,$$

$$y_2(x) = x\,\mathrm{e}^x \quad \Longrightarrow \quad y_2'(x) = (1+x)\mathrm{e}^x \quad \Longrightarrow \quad y_2''(x) = (2+x)\mathrm{e}^x\,.$$

Dosaďme y_1, y_1' a y_1'' (resp. y_2, y_2' a y_2'') do levé strany dané rovnice:

$$y_1'' - 2y_1' + y_1 = \mathrm{e}^x - 2\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x = 0\,,$$

$$y_2'' - 2y_2' + y_2 = (2+x)\mathrm{e}^x - 2\,(1+x)\mathrm{e}^x + x\,\mathrm{e}^x = 0\,.$$

Pravá strana dané rovnice je rovna nule. Ukázali jsme tak, že jak pro funkci $y_1(x) = \mathrm{e}^x$, tak pro funkci $y_2(x) = x\,\mathrm{e}^x$ se levá strana rovnice $y'' - 2y' + y = 0$ rovná pravé pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Funkce jsou řešení dané diferenciální rovnice. Tvoří fundamentální systém řešení, jsou-li lineárně nezávislé.

Další

Příklad 3.1.6

Ověřte, že funkce $y_1(x) = \mathrm{e}^x$ a $y_2(x) = x\,\mathrm{e}^x$ jsou řešení lineární diferenciální rovnice $y'' - 2y' + y = 0$. Tvoří funkce y_1, y_2 fundamentální systém řešení?

Řešení:

Spočtěme jejich Wronskián:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathrm{e}^x & x\,\mathrm{e}^x \\ \mathrm{e}^x & (1+x)\mathrm{e}^x \end{vmatrix} = (1+x)\mathrm{e}^{2x} - x\,\mathrm{e}^{2x} = \mathrm{e}^{2x} \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}\,.$$

Wronského determinant je různý od nuly, tedy funkce $y_1(x)$ a $y_2(x)$ jsou lineárně nezávislé, tvoří fundamentální systém řešení.

Zpět

Příklad 3.1.6

Ověřte, že funkce $y_1(x) = \mathrm{e}^x$ a $y_2(x) = x\,\mathrm{e}^x$ jsou řešení lineární diferenciální rovnice $y'' - 2y' + y = 0$. Tvoří funkce y_1, y_2 fundamentální systém řešení?

Maple:

```
> res1:=y(x)=exp(x);
```

$$res1 := \mathrm{y}(x) = e^x$$

```
> DR:=(diff(y(x),x$2)-2*diff(y(x),x)+y(x)=0);
```

$$DR := \left(\frac{d^2}{dx^2}\,\mathrm{y}(x)\right) - 2\left(\frac{d}{dx}\,\mathrm{y}(x)\right) + \mathrm{y}(x) = 0$$

```
> odetest(res1,DR);
```

$$0$$

```
> res2:=y(x)=x*exp(x);
```

$$res2 := \mathrm{y}(x) = x\,e^x$$

```
> odetest(res2,DR);
```

$$0$$

```
> with(linalg):
Warning, the protected names norm and trace have been redefined and
unprotected
> det(wronskian([exp(x),x*exp(x)],x));
```

$$(e^x)^2$$

```
> simplify(%);
```

$$e^{(2\,x)}$$

Zpět

Příklad 3.1.6

Ověřte, že funkce $y_1(x) = \mathrm{e}^x$ a $y_2(x) = x\,\mathrm{e}^x$ jsou řešení lineární diferenciální rovnice $y'' - 2y' + y = 0$. Tvoří funkce y_1, y_2 fundamentální systém řešení?

Mathematica:

$\mathbf{rovnice} = \boldsymbol{y}\text{"}[\boldsymbol{x}] - \mathbf{2}\boldsymbol{y}'[\boldsymbol{x}] + \boldsymbol{y}[\boldsymbol{x}] == \mathbf{0;}$

$\mathbf{rovnice/.}\{\boldsymbol{y} \to \mathbf{Function}[\boldsymbol{x}, \mathbf{Exp}[\boldsymbol{x}]]\}$

True

$\mathbf{rovnice/.}\{\boldsymbol{y} \to \mathbf{Function}[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\mathbf{Exp}[\boldsymbol{x}]]\}$

$2e^x + 2e^x x - 2\left(e^x + e^x x\right) == 0$

$\mathbf{Simplify[\%]}$

True

$\boldsymbol{W} = \{\{\mathbf{Exp}[\boldsymbol{x}], \boldsymbol{x}\mathbf{Exp}[\boldsymbol{x}]\}, \boldsymbol{D}[\{\mathbf{Exp}[\boldsymbol{x}], \boldsymbol{x}\mathbf{Exp}[\boldsymbol{x}]\}, \boldsymbol{x}]\}$

$\{\{e^x, e^x x\}, \{e^x, e^x + e^x x\}\}$

$\mathbf{Simplify[Det[}\boldsymbol{W}\mathbf{]]}$

e^{2x}

Zpět

Partikulární řešení homogenní LDR 2. řádu (počáteční úloha)

- **Příklad 3.2.1** Nalezněte řešení lineární diferenciální rovnice $y'' + 9y = 0$, které vyhovuje počátečním podmínkám $y(0) = 1, y'(0) = -3.$
- **Příklad 3.2.2** Nalezněte řešení lineární diferenciální rovnice $y'' - y' + \frac{1}{4}\, y = 0$, které vyhovuje počátečním podmínkám $y(0) = 2, y'(0) = \frac{1}{3}.$

Zpět

Příklad 3.2.1

Nalezněte řešení lineární diferenciální rovnice $y'' + 9y = 0$, které vyhovuje počátečním podmínkám $y(0) = 1, y'(0) = -3$.

= ? Zpět

Příklad 3.2.1

Nalezněte řešení lineární diferenciální rovnice $y'' + 9y = 0$, které vyhovuje počátečním podmínkám $y(0) = 1, y'(0) = -3$.

Výsledek:

$y(x) = \cos 3x - \sin 3x\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$

Zpět

Příklad 3.2.1

Nalezněte řešení lineární diferenciální rovnice $y'' + 9y = 0$, které vyhovuje počátečním podmínkám $y(0) = 1, y'(0) = -3$.

Návod:

Rovnice je lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty tvaru $k_0 y'' + k_1 y' + k_2 y = 0$. Nejprve najdeme obecné řešení podle návodu v prvním příkladě a pak určíme konstanty C_1, C_2 tak, aby nalezené řešení splňovalo počáteční podmínky.

Zpět

Příklad 3.2.1

Nalezněte řešení lineární diferenciální rovnice $y'' + 9y = 0$, které vyhovuje počátečním podmínkám $y(0) = 1, y'(0) = -3$.

Řešení:

Charakteristická rovnice zadané LDR $y'' + 9y = 0$ je

$$\lambda^2 + 9 = 0.$$

Její kořeny jsou $\lambda_1 = 3\,i$, $\lambda_2 = -3\,i$. (Rovnici řešíme v oboru komplexních čísel, $\lambda = \pm\sqrt{-9}$.) Má-li charakteristická rovnice **dva ryze imaginární komplexně sdružené** kořeny $\lambda_{1,2} = \pm b\,i$, pak obecné řešení HLDR má tvar

$$y(x) = C_1 \cos bx + C_2 \sin bx\,, \quad x \in \mathbb{R}\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Obecné řešení zadané LDR tedy je

$$y(x) = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x\,, \quad x \in \mathbb{R}\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Nyní určíme konstanty C_1, C_2 tak, aby nalezené řešení vyhovovalo počátečním podmínkám $y(0) = 1, y'(0) = -3$. Spočtěme derivaci obecného řešení $y(x)$: $y'(x) = -3\,C_1 \sin 3x + 3\,C_2 \cos 3x$. Pak po dosazení počátečních podmínek do $y(x)$ a $y'(x)$ dostaneme

$$\begin{aligned} 1 &= y(0) &&= C_1 \cos(3 \cdot 0) + C_2 \sin(3 \cdot 0) \\ -3 &= y'(0) &&= -3\,C_1 \sin(3 \cdot 0) + 3\,C_2 \cos(3 \cdot 0) \end{aligned}$$

Další

Příklad 3.2.1

Nalezněte řešení lineární diferenciální rovnice $y'' + 9y = 0$, které vyhovuje počátečním podmínkám $y(0) = 1, y'(0) = -3$.

Řešení:

Odtud

$$\begin{aligned} 1 &= C_1 \\ -3 &= 3\,C_2 \end{aligned}$$

Hledané řešení má $C_1 = 1$ a $C_2 = -1$, tedy

$$y(x) = \cos 3x - \sin 3x\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Zpět

Příklad 3.2.1

Nalezněte řešení lineární diferenciální rovnice $y'' + 9y = 0$, které vyhovuje počátečním podmínkám $y(0) = 1, y'(0) = -3$.

Maple:

```
> DR:=(diff(y(x),x$2)+9*y(x)=0);
```

$$DR := (\frac{d^2}{dx^2}\,\mathrm{y}(x)) + 9\,\mathrm{y}(x) = 0$$

```
> PP:=y(0)=1,D(y)(0)=-3;
```

$$PP := \mathrm{y}(0) = 1,\ \mathrm{D}(y)(0) = -3$$

```
> dsolve({DR,PP},y(x));
```

$$\mathrm{y}(x) = -\sin(3\,x) + \cos(3\,x)$$

Zpět

Příklad 3.2.1

Nalezněte řešení lineární diferenciální rovnice $y'' + 9y = 0$, které vyhovuje počátečním podmínkám $y(0) = 1, y'(0) = -3$.

Mathematica:

$\mathbf{rovnice} = \boldsymbol{y}\text{"}[\boldsymbol{x}] + \mathbf{9}\boldsymbol{y}[\boldsymbol{x}] == \mathbf{0;}$

$\mathbf{pp1} = \boldsymbol{y}[\mathbf{0}] == -\mathbf{1}; \mathbf{pp2} = \boldsymbol{y}'[\mathbf{0}] == -\mathbf{3};$

$\mathbf{reseni} = \mathbf{DSolve}[\{\mathbf{rovnice}, \mathbf{pp1}, \mathbf{pp2}\}, \boldsymbol{y}[\boldsymbol{x}], \boldsymbol{x}]$

$\{\{y[x] \to \mathrm{Cos}[3x] - \mathrm{Sin}[3x]\}\}$

Zpět

Příklad 3.2.2

Nalezněte řešení lineární diferenciální rovnice $y'' - y' + \frac{1}{4}\, y = 0$, které vyhovuje počátečním podmínkám $y(0) = 2, y'(0) = \frac{1}{3}$.

? Zpět

Příklad 3.2.2

Nalezněte řešení lineární diferenciální rovnice $y'' - y' + \frac{1}{4}\,y = 0$, které vyhovuje počátečním podmínkám $y(0) = 2, y'(0) = \frac{1}{3}$.

Výsledek:

$$y(x) = 2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - \frac{2}{3}\,x\,\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Zpět

Příklad 3.2.2

Nalezněte řešení lineární diferenciální rovnice $y'' - y' + \frac{1}{4}\,y = 0$, které vyhovuje počátečním podmínkám $y(0) = 2, y'(0) = \frac{1}{3}$.

Návod:

Rovnice je lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty tvaru $k_0 y'' + k_1 y' + k_2 y = 0$. Nejprve najdeme obecné řešení stejně jako v předchozích příkladech a pak určíme konstanty C_1, C_2 tak, aby nalezené řešení splňovalo počáteční podmínky.

Zpět

Příklad 3.2.2

Nalezněte řešení lineární diferenciální rovnice $y'' - y' + \frac{1}{4}\, y = 0$, které vyhovuje počátečním podmínkám $y(0) = 2, y'(0) = \frac{1}{3}$.

Řešení:

Charakteristická rovnice zadané LDR $y'' - y' + \frac{1}{4}\, y = 0$ je

$$\lambda^2 - \lambda + \frac{1}{4} = 0.$$

Její kořeny jsou $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}$. (Levou stranu rovnice lze podle vzorečku $A^2 + 2AB + b^2 = (A + B)^2$ upravit, tedy $(x - \frac{1}{2})^2 = 0$.) Má-li charakteristická rovnice **jeden dvojnásobný reálný** kořen λ, pak obecné řešení HLDR má tvar

$$y(x) = C_1 \mathrm{e}^{\lambda x} + C_2\, x\, \mathrm{e}^{\lambda x}\,, \quad x \in \mathbb{R}\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Obecné řešení zadané LDR tedy je

$$y(x) = C_1 \mathrm{e}^{\frac{x}{2}} + C_2\, x\, \mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\,, \quad x \in \mathbb{R}\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Nyní určíme konstanty C_1, C_2 tak, aby nalezené řešení vyhovovalo počátečním podmínkám $y(0) = 2, y'(0) = \frac{1}{3}$. Spočtěme derivaci obecného řešení $y(x)$:
$y'(x) = \frac{1}{2}\, C_1 \mathrm{e}^{\frac{x}{2}} + (C_2 + \frac{1}{2}\, C_2\, x)\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$.

Další

Příklad 3.2.2

Nalezněte řešení lineární diferenciální rovnice $y'' - y' + \frac{1}{4}\,y = 0$, které vyhovuje počátečním podmínkám $y(0) = 2, y'(0) = \frac{1}{3}$.

Řešení:

Pak po dosazení počátečních podmínek do $y(x)$ a $y'(x)$ dostaneme

$$\begin{array}{rcccl} 2 & = & y(0) & = & C_1 \mathrm{e}^{\frac{0}{2}} + C_2 \cdot 0 \cdot \mathrm{e}^{\frac{0}{2}} \\ \frac{1}{3} & = & y'(0) & = & \frac{1}{2}\,C_1 \mathrm{e}^{\frac{0}{2}} + (C_2 + \frac{1}{2}\,C_2 \cdot 0)\mathrm{e}^{\frac{0}{2}} \end{array}$$

Odtud

$$\begin{array}{rcl} 2 & = & C_1 \\ \frac{1}{3} & = & \frac{1}{2}\,C_1 + C_2 \end{array}$$

Hledané řešení má $C_1 = 2$ a $C_2 = -\frac{2}{3}$, tedy

$$y(x) = 2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - \frac{2}{3}\,x\,\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Zpět

Příklad 3.2.2

Nalezněte řešení lineární diferenciální rovnice $y'' - y' + \frac{1}{4}\,y = 0$, které vyhovuje počátečním podmínkám $y(0) = 2, y'(0) = \frac{1}{3}$.

Maple:

```
> DR:=(diff(y(x),x$2)-diff(y(x),x)+1/4*y(x)=0);
```

$$DR := \left(\frac{d^2}{dx^2}\,\mathrm{y}(x)\right) - \left(\frac{d}{dx}\,\mathrm{y}(x)\right) + \frac{1}{4}\,\mathrm{y}(x) = 0$$

```
> PP:=y(0)=2,D(y)(0)=1/3;
```

$$PP := \mathrm{y}(0) = 2,\ \mathrm{D}(y)(0) = \frac{1}{3}$$

```
> dsolve({DR,PP},y(x));
```

$$\mathrm{y}(x) = 2\,e^{\left(\frac{x}{2}\right)} - \frac{2}{3}\,e^{\left(\frac{x}{2}\right)}\,x$$

Zpět

Příklad 3.2.2

Nalezněte řešení lineární diferenciální rovnice $y'' - y' + \frac{1}{4}\,y = 0$, které vyhovuje počátečním podmínkám $y(0) = 2, y'(0) = \frac{1}{3}$.

Mathematica:

$\mathbf{rovnice} = \boldsymbol{y}\text{"}[\boldsymbol{x}] - \boldsymbol{y}'[\boldsymbol{x}] + \mathbf{1/4}\boldsymbol{y}[\boldsymbol{x}] == \mathbf{0};$

$\mathbf{pp1} = \boldsymbol{y}[\mathbf{0}] == \mathbf{2}; \mathbf{pp2} = \boldsymbol{y}'[\mathbf{0}] == \mathbf{1/3};$

$\mathbf{reseni} = \mathbf{DSolve}[\{\mathbf{rovnice}, \mathbf{pp1}, \mathbf{pp2}\}, \boldsymbol{y}[\boldsymbol{x}], \boldsymbol{x}]$

$\left\{\left\{y[x] \to -\frac{2}{3}e^{x/2}(-3+x)\right\}\right\}$

Zpět

Obecné řešení LDR 2. řádu

- Příklad 3.3.1 Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice (LDR) $y'' - 3y' - 4y = 3e^{2x}$.
- Příklad 3.3.2 Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y'' - 3y' - 4y = 2\sin x$.
- Příklad 3.3.3 Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y'' - 3y' - 4y = -8\,e^{x}\cos 2x$.
- Příklad 3.3.4 Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y'' - 3y' - 4y = 3e^{2x} + 2\sin x$.
- Příklad 3.3.5 Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y'' + 2y' = 3 + 4\sin 2x$.
- Příklad 3.3.6 Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y'' + 4y' + 4y = x^{-2}e^{-2x}$, $x > 0$.
- Příklad 3.3.7 Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y'' - y' = \frac{2+x}{x^3}$, $x < 0$.

Zpět

Příklad 3.3.1

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice (LDR) $y'' - 3y' - 4y = 3e^{2x}$.

Zpět

Příklad 3.3.1

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice (LDR) $y'' - 3y' - 4y = 3\mathrm{e}^{2x}$.

Výsledek:

$y(x) = C_1\mathrm{e}^{-x} + C_2\,\mathrm{e}^{4x} - \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{2x}\,, \quad x \in \mathbb{R}\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}\,.$

Zpět

Příklad 3.3.1

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice (LDR) $y'' - 3y' - 4y = 3\mathrm{e}^{2x}$.

Návod:

Rovnice je nehomogenní lineární diferenciální rovnice (NLDR) s konstantními koeficienty $k_0 y'' + k_1 y' + k_2 y = f(x)\,, k_0, k_1, k_2 \in \mathbb{R}\,, k_0 \neq 0$. Její řešení je součtem obecného řešení přiřazené HLDR – $y_H(x)$ a partikulárního (jednoho) řešení zadané NLDR – $y_P(x)$, tj. $y(x) = y_H(x) + y_P(x)$. Obecné řešení $y_H(x)$ je diskutováno v prvním odstavci třetí kapitoly. Partikulární řešení $y_P(x)$ můžeme nalézt pomocí tzv. metody variace konstant; v tomto případě je výhodnější tzv. metoda odhadu. Zpět

Příklad 3.3.1

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice (LDR) $y'' - 3y' - 4y = 3\mathrm{e}^{2x}$.

Řešení:

Obecné řešení zadané NLDR má tvar

$$y(x) = y_H(x) + y_P(x)\,,$$

kde $y_H(x)$ je obecné řešení přiřazené HLDR, tj. diferenciální rovnice $y'' - 3y' - 4y = 0$. Odpovídající charakteristická rovnice je

$$\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0.$$

Její kořeny jsou $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 4$. Obecné řešení přiřazené HLDR tedy je

$$y_H(x) = C_1\mathrm{e}^{-x} + C_2\,\mathrm{e}^{4x}\,, \quad x \in \mathbb{R}\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Ukažme, že pravá strana zadané NLDR $f(x) = 3\mathrm{e}^{2x}$ je tzv. speciální pravá strana

$$\mathrm{e}^{ax}(P(x)\cos bx + Q(x)\sin bx)\,.$$

Položíme-li $a = 2$, $b = 0$, $P(x) = 3$ a $Q(x) = 0$, dostaneme
$\mathrm{e}^{2x}(3\cos 0x + 0\sin 0x) = 3\mathrm{e}^{2x}$.

Další

Příklad 3.3.1

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice (LDR) $y'' - 3y' - 4y = 3\mathrm{e}^{2x}$.

Řešení:

V takovém případě umíme udělat odhad partikulárního (= nějakého, jednoho) řešení zadané NLDR:

$$y_P(x) = x^k \mathrm{e}^{ax}(R(x)\cos bx + S(x)\sin bx)\,,$$

kde $R(x)$, $S(x)$ jsou obecné polynomy stupně $\max\{\mathrm{st}P, \mathrm{st}Q\}$ a konstanty a, b známe z tvaru pravé strany $f(x)$. Je-li číslo $\alpha = a + b\,i = 2 + 0\,i$ kořenem charakteristické rovnice, je hodnota konstanty k rovna násobnosti kořene α. Není-li α kořenem charakteristické rovnice, je $k = 0$. Stupeň polynomu $P(x) = 3$ je $\mathrm{st}P = 0$ a stupeň polynomu $Q(x) = 0$ je $\mathrm{st}Q = 0$. Odtud je $\mathrm{st}R, S = 0$, proto $R(x) = A \in \mathbb{R}$ a $S(x) = B \in \mathbb{R}$. Číslo $\alpha = 2$ není kořenem charakteristické rovnice ($\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 4$), tedy $k = 0$. Máme

$$y_P(x) = x^0 \mathrm{e}^{2x}(A\cos 0x + B\sin 0x) = A\mathrm{e}^{2x}.$$

Zbývá určit konstantu A. Chceme, aby funkce $y_P(x) = A\mathrm{e}^{2x}$ byla řešením zadané NLDR $y'' - 3y' - 4y = 3\mathrm{e}^{2x}$, tedy ji splňovala. Spočtěme $y'_P(x)$ a $y''_P(x)$:

$$y'_P(x) = 2A\mathrm{e}^{2x} \quad \Longrightarrow \quad y''_P(x) = 4A\mathrm{e}^{2x}.$$

Dosaďme do zadané NLDR y_P, y'_P a y''_P :

$$4A\mathrm{e}^{2x} - 3\cdot 2A\mathrm{e}^{2x} - 4\cdot A\mathrm{e}^{2x} = 3\mathrm{e}^{2x}.$$

Další

Příklad 3.3.1

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice (LDR) $y'' - 3y' - 4y = 3\mathrm{e}^{2x}$.

Řešení:

Funkce e^{2x} je kladná, obě strany rovnice vydělíme touto funkcí, pak

$$4A - 6A - 4A = 3 \quad \Longrightarrow \quad A = -\frac{1}{2}.$$

Partikulární řešení zadané NLDR je

$$y_P(x) = -\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{2x}.$$

Obecné řešení rovnice $y'' - 3y' - 4y = 3\mathrm{e}^{2x}$ tedy je

$$y(x) = C_1\mathrm{e}^{-x} + C_2\,\mathrm{e}^{4x} - \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{2x}\,, \quad x \in \mathbb{R}\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Zpět

Příklad 3.3.1

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice (LDR) $y'' - 3y' - 4y = 3\mathrm{e}^{2x}$.

Maple:

```
> DR:=(diff(y(x),x$2)-3*diff(y(x),x)-4*y(x)=3*exp(2*x));
```

$$DR := \left(\frac{d^2}{dx^2}\,\mathrm{y}(x)\right) - 3\left(\frac{d}{dx}\,\mathrm{y}(x)\right) - 4\,\mathrm{y}(x) = 3\,e^{(2\,x)}$$

```
> dsolve(DR,y(x));
```

$$\mathrm{y}(x) = e^{(-x)}\,\_C2 + e^{(4\,x)}\,\_C1 - \frac{1}{2}\,e^{(2\,x)}$$

Zpět

Příklad 3.3.1

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice (LDR) $y'' - 3y' - 4y = 3\mathrm{e}^{2x}$.

Mathematica:

$\mathbf{rovnice} = \boldsymbol{y}\text{"}[\boldsymbol{x}] - \mathbf{3}\boldsymbol{y}'[\boldsymbol{x}] - \mathbf{4}\boldsymbol{y}[\boldsymbol{x}] == \mathbf{3Exp}[\mathbf{2}\boldsymbol{x}];$

$\mathbf{reseni} = \mathbf{DSolve}[\mathbf{rovnice}, \boldsymbol{y}[\boldsymbol{x}], \boldsymbol{x}]$

$\left\{\left\{y[x] \to -\frac{e^{2x}}{2} + e^{-x}C[1] + e^{4x}C[2]\right\}\right\}$

Zpět

Příklad 3.3.2

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y'' - 3y' - 4y = 2\sin x$.

Zpět

Příklad 3.3.2

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y'' - 3y' - 4y = 2\sin x$.

Výsledek:

$y(x) = C_1 \mathrm{e}^{-x} + C_2\, \mathrm{e}^{4x} + \frac{3}{17}\cos x - \frac{5}{17}\sin x\,, \quad x \in \mathbb{R}\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}\,.$

Zpět

Příklad 3.3.2

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y'' - 3y' - 4y = 2\sin x$.

Návod:

Rovnice je NLDR s konstantními koeficienty
$k_0 y'' + k_1 y' + k_2 y = f(x)$, $k_0, k_1, k_2 \in \mathbb{R}$, $k_0 \neq 0$. Její řešení hledáme podle návodu v příkladě 3.3.1.

Zpět

Příklad 3.3.2

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y'' - 3y' - 4y = 2\sin x$.

Řešení:

Obecné řešení zadané NLDR má tvar

$$y(x) = y_H(x) + y_P(x) \,,$$

kde $y_H(x)$ je obecné řešení přiřazené HLDR, tj. diferenciální rovnice $y'' - 3y' - 4y = 0$. Řešení známe z příkladu 3.3.1, je

$$y_H(x) = C_1 \mathrm{e}^{-x} + C_2 \, \mathrm{e}^{4x} \,, \quad x \in \mathbb{R} \,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R} \,.$$

Ukažme, že pravá strana zadané NLDR $f(x) = 2\sin x$ je speciální pravá strana

$$\mathrm{e}^{ax}(P(x)\cos bx + Q(x)\sin bx) \,.$$

Položíme-li $a = 0$, $b = 1$, $P(x) = 0$ a $Q(x) = 2$, dostaneme $\mathrm{e}^{0x}(0 \cdot \cos 1x + 2\sin 1x) = 2\sin x$. Odhad partikulárního řešení je

$$y_P(x) = x^k \mathrm{e}^{ax}(R(x)\cos bx + S(x)\sin bx) \,,$$

kde $a = 0$, $b = 1$. Stupeň polynomu $P(x) = 0$ je $\mathrm{st}P = 0$ a stupeň polynomu $Q(x) = 2$ je $\mathrm{st}Q = 0$. Odtud je $\mathrm{st}R, S = 0$, proto $R(x) = A \in \mathbb{R}$ a $S(x) = B \in \mathbb{R}$. Číslo $\alpha = a + bi = i$ není kořenem charakteristické rovnice ($\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 4$), tedy $k = 0$.

Další

Příklad 3.3.2

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y'' - 3y' - 4y = 2\sin x$.

Řešení:

Máme

$$y_P(x) = x^0 e^{0x}(A\cos 1x + B\sin 1x) = A\cos x + B\sin x.$$

Určeme konstanty A, B. Funkce $y_P(x) = A\cos x + B\sin x$ musí splňovat zadanou NLDR $y'' - 3y' - 4y = 2\sin x$. Spočtěme $y'_P(x)$ a $y''_P(x)$:

$$y'_P(x) = -A\sin x + B\cos x \quad\Longrightarrow\quad y''_P(x) = -A\cos x - B\sin x.$$

Dosaďme do zadané NLDR y_P, y'_P a y''_P :

$$-A\cos x - B\sin x - 3(-A\sin x + B\cos x) - 4(A\cos x + B\sin x) = 2\sin x.$$

$$\Downarrow$$

$$(-A - 3B - 4A)\cos x + (-B + 3A - 4B)\sin x = 0\cos x + 2\sin x.$$

Aby byla poslední rovnost splněna, musí se výrazy u funkcí $\sin x, \cos x$ na levé a pravá straně rovnosti sobě rovnat:

$$\begin{aligned} -3B - 5A &= 0 \\ 3A - 5B &= 2\,. \end{aligned}$$

Odtud $A = -\frac{3}{5}B$, tedy $-\frac{9}{5}B - 5B = 2 \quad\Longrightarrow\quad B = -\frac{5}{17}$ a $A = \frac{3}{17}$.

Další

Příklad 3.3.2

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y'' - 3y' - 4y = 2\sin x$.

Řešení:

Partikulární řešení zadané NLDR je

$$y_P(x) = \frac{3}{17}\cos x - \frac{5}{17}\sin x.$$

Obecné řešení rovnice $y'' - 3y' - 4y = 2\sin x$ tedy je

$$y(x) = C_1 \mathrm{e}^{-x} + C_2\,\mathrm{e}^{4x} + \frac{3}{17}\cos x - \frac{5}{17}\sin x\,, \quad x \in \mathbb{R}\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Zpět

Příklad 3.3.2

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y'' - 3y' - 4y = 2\sin x$.

Maple:

```
> DR:=(diff(y(x),x$2)-3*diff(y(x),x)-4*y(x)=2*sin(x));
```

$$DR := \left(\frac{d^2}{dx^2}\,\mathrm{y}(x)\right) - 3\left(\frac{d}{dx}\,\mathrm{y}(x)\right) - 4\,\mathrm{y}(x) = 2\sin(x)$$

```
> dsolve(DR,y(x));
```

$$\mathrm{y}(x) = e^{(-x)}\,\_C2 + e^{(4\,x)}\,\_C1 + \frac{3}{17}\cos(x) - \frac{5}{17}\sin(x)$$

Zpět

Příklad 3.3.2

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y'' - 3y' - 4y = 2\sin x$.

Mathematica:

$\mathbf{rovnice = y\text{"}[x] - 3y'[x] - 4y[x] == 2Sin[x];}$

$\mathbf{reseni = DSolve[rovnice, y[x], x]}$

$\{\{y[x] \to e^{-x}C[1] + e^{4x}C[2] + \frac{1}{17}(3\mathrm{Cos}[x] - 5\mathrm{Sin}[x])\}\}$

Zpět

Příklad 3.3.3

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y'' - 3y' - 4y = -8\,\mathrm{e}^x \cos 2x$.

? Zpět

Příklad 3.3.3

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y'' - 3y' - 4y = -8\,\mathrm{e}^x \cos 2x$.

Výsledek:

$$y(x) = C_1 \mathrm{e}^{-x} + C_2\,\mathrm{e}^{4x} + \mathrm{e}^x \left(\tfrac{10}{13} \cos 2x + \tfrac{2}{13} \sin 2x \right) , \quad x \in \mathbb{R} , \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R} .$$

Zpět

Příklad 3.3.3

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y'' - 3y' - 4y = -8\,\mathrm{e}^x \cos 2x$.

Návod:

Rovnice je NLDR s konstantními koeficienty
$k_0 y'' + k_1 y' + k_2 y = f(x)$, $k_0, k_1, k_2 \in \mathbb{R}$, $k_0 \neq 0$. Její řešení hledáme podle návodu v příkladě 3.3.1

Zpět

Příklad 3.3.3

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y'' - 3y' - 4y = -8\,\mathrm{e}^{x}\cos 2x$.

Řešení:

Obecné řešení zadané NLDR má tvar

$$y(x) = y_H(x) + y_P(x)\,,$$

kde $y_H(x)$ je obecné řešení přiřazené HLDR, tj. diferenciální rovnice $y'' - 3y' - 4y = 0$. Řešení známe z příkladu 1, je

$$y_H(x) = C_1\mathrm{e}^{-x} + C_2\,\mathrm{e}^{4x}\,, \quad x \in \mathbb{R}\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Ukažme, že pravá strana zadané NLDR $f(x) = -8\,\mathrm{e}^{x}\cos 2x$ je speciální pravá strana

$$\mathrm{e}^{ax}(P(x)\cos bx + Q(x)\sin bx)\,.$$

Položíme-li $a = 1$, $b = 2$, $P(x) = -8$ a $Q(x) = 0$, dostaneme $\mathrm{e}^{x}(-8\cos 2x + 0\sin 2x) = -8\,\mathrm{e}^{x}\cos 2x$. Odhad partikulárního řešení je

$$y_P(x) = x^k\mathrm{e}^{ax}(R(x)\cos bx + S(x)\sin bx)\,,$$

kde $a = 1$, $b = 2$. Stupeň polynomu $P(x) = -8$ je $\mathrm{st}P = 0$ a stupeň polynomu $Q(x) = 0$ je $\mathrm{st}Q = 0$. Odtud je $\mathrm{st}R, S = 0$, proto $R(x) = A \in \mathbb{R}$ a $S(x) = B \in \mathbb{R}$. Číslo $\alpha = a + bi = 1 + 2i$ není kořenem charakteristické rovnice ($\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 4$), tedy $k = 0$.

Další

Příklad 3.3.3

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y'' - 3y' - 4y = -8\,\mathrm{e}^x \cos 2x$.

Řešení:

Máme
$$y_P(x) = x^0 \mathrm{e}^x (A\cos 2x + B\sin 2x) = \mathrm{e}^x (A\cos 2x + B\sin 2x).$$

Určeme konstanty A, B. Funkce $y_P(x) = \mathrm{e}^x (A\cos 2x + B\sin 2x)$ musí splňovat zadanou NLDR $y'' - 3y' - 4y = -8\,\mathrm{e}^x \cos 2x$. Spočtěme $y'_P(x)$ a $y''_P(x)$:

$$y'_P(x) = \mathrm{e}^x (A\cos 2x + B\sin 2x) + \mathrm{e}^x (-2A\sin 2x + 2B\cos 2x)$$

$$\Downarrow$$

$$y''_P(x) = \mathrm{e}^x (A\cos 2x + B\sin 2x) + 2\mathrm{e}^x (-2A\sin 2x + 2B\cos 2x) + \mathrm{e}^x (-4A\cos 2x - 4B\sin 2x).$$

Dosaďme do zadané NLDR y_P, y'_P a y''_P. Levá strana rovnice bude obsahovat mnoho sčítanců. Z důvodu přehlednosti pišme výrazy, které dosazujeme, následujícím způsobem: Na levé straně rovnice se budou vyskytovat násobky funkcí $\mathrm{e}^x \cos 2x$, $\mathrm{e}^x \sin 2x$. Napišme funkce $\mathrm{e}^x \cos 2x$, $\mathrm{e}^x \sin 2x$ pod sebe a připisujme pouze příslušné konstanty, které u funkcí stojí, jak postupně do rovnice dosazujeme y''_P, y'_P a y_P. Aby byla rovnost $y''_P - 3y'_P - 4y_P = -8\,\mathrm{e}^x \cos 2x$ splněna, musí se výrazy u funkcí $\mathrm{e}^x \cos 2x$, $\mathrm{e}^x \sin 2x$ na levé a pravé straně rovnosti sobě rovnat. Vše je zapsáno v následující tabulce.

levá strana	$y'' - 3y' - 4y$	$=$	$-8\,\mathrm{e}^x \cos 2x$	**pravá strana**
$\mathrm{e}^x \cos 2x$:	$A + 4B - 4A - 3A - 6B - 4A$	$=$	-8	: $\mathrm{e}^x \cos 2x$
$\mathrm{e}^x \sin 2x$:	$B - 4A - 4B - 3B + 6A - 4B$	$=$	0	: $\mathrm{e}^x \sin 2x$

Další

Příklad 3.3.3

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y'' - 3y' - 4y = -8\,\mathrm{e}^x \cos 2x$.

Řešení:

Hledejme řešení soustavy dvou rovnic pro neznámé A, B, které jsme z tabulky získali:

$$\begin{array}{rcl} -10A - 2B &=& -8 \\ 2A - 10B &=& 0 \end{array} \quad\Longrightarrow\quad \begin{array}{rcl} -10A - 2B &=& -8 \\ 10A - 50B &=& 0 \end{array} \quad\Longrightarrow\quad \begin{array}{rcl} B &=& \frac{2}{13} \\ A &=& \frac{10}{13} \end{array}$$

Partikulární řešení zadané NLDR je

$$y_P(x) = \mathrm{e}^x \left(\frac{10}{13} \cos 2x + \frac{2}{13} \sin 2x \right) .$$

Obecné řešení rovnice $y'' - 3y' - 4y = -8\,\mathrm{e}^x \cos 2x$ tedy je

$$y(x) = C_1 \mathrm{e}^{-x} + C_2\,\mathrm{e}^{4x} + \mathrm{e}^x \left(\frac{10}{13} \cos 2x + \frac{2}{13} \sin 2x \right) , \quad x \in \mathbb{R} , \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R} .$$

Zpět

Příklad 3.3.3

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y'' - 3y' - 4y = -8\,\mathrm{e}^x \cos 2x$.

Maple:

```
> restart;
> DR:=(diff(y(x),x$2)-3*diff(y(x),x)-4*y(x)=-8*exp(x)*cos(2*x));
```

$$DR := \left(\frac{d^2}{dx^2}\,\mathrm{y}(x)\right) - 3\left(\frac{d}{dx}\,\mathrm{y}(x)\right) - 4\,\mathrm{y}(x) = -8\,e^x \cos(2\,x)$$

```
> dsolve(DR,y(x));
```

$$\mathrm{y}(x) = e^{(-x)}\,\_C2 + e^{(4\,x)}\,\_C1 + \frac{2}{13}\,e^x\,(5\cos(2\,x) + \sin(2\,x))$$

Zpět

Příklad 3.3.3

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y'' - 3y' - 4y = -8\,\mathrm{e}^x \cos 2x$.

Mathematica:

$\mathbf{rovnice} = \boldsymbol{y}\text{''}[\boldsymbol{x}] - \mathbf{3}\boldsymbol{y}'[\boldsymbol{x}] - \mathbf{4}\boldsymbol{y}[\boldsymbol{x}] == -\mathbf{8Exp}[\boldsymbol{x}]\mathbf{Cos}[\mathbf{2}\boldsymbol{x}];$

$\mathbf{reseni} = \mathbf{DSolve}[\mathbf{rovnice}, \boldsymbol{y}[\boldsymbol{x}], \boldsymbol{x}]$

$\left\{\left\{y[x] \to e^{-x}C[1] + e^{4x}C[2] + \frac{2}{13}e^{x}(5\mathrm{Cos}[2x] + \mathrm{Sin}[2x])\right\}\right\}$

Zpět

Příklad 3.3.4

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y'' - 3y' - 4y = 3e^{2x} + 2\sin x$.

? Zpět

Příklad 3.3.4

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y'' - 3y' - 4y = 3\mathrm{e}^{2x} + 2\sin x$.

Výsledek:

$y(x) = C_1\mathrm{e}^{-x} + C_2\,\mathrm{e}^{4x} - \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{2x} + \frac{3}{17}\,\cos x - \frac{5}{17}\,\sin x\,, \quad x \in \mathbb{R}\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}\,.$

Zpět

Příklad 3.3.4

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y'' - 3y' - 4y = 3\mathrm{e}^{2x} + 2\sin x$.

Návod:

Rovnice je NLDR s konstantními koeficienty
$k_0 y'' + k_1 y' + k_2 y = f(x)$, $k_0, k_1, k_2 \in \mathbb{R}$, $k_0 \neq 0$. Použijeme návod z příkladu 1. Pravá strana zadané rovnice však není speciální pravá strana, ale je součtem dvou speciálních pravých stran $f_1(x) + f_2(x)$. Proto hledáme partikulární řešení $y_P(x)$ ve tvaru součtu $y_P(x) = y_{P1}(x) + y_{P2}(x)$, kde $y_{P1}(x)$ je partikulární řešení rovnice
$k_0 y'' + k_1 y' + k_2 y = f_1(x)$ a $y_{P2}(x)$ je partikulární řešení rovnice
$k_0 y'' + k_1 y' + k_2 y = f_2(x)$.

Zpět

Příklad 3.3.4

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y'' - 3y' - 4y = 3\mathrm{e}^{2x} + 2\sin x$.

Řešení:

Obecné řešení zadané NLDR má tvar

$$y(x) = y_H(x) + y_P(x)\,,$$

kde $y_H(x)$ je obecné řešení přiřazené HLDR, tj. diferenciální rovnice $y'' - 3y' - 4y = 0$. Řešení známe z příkladu 1, je

$$y_H(x) = C_1\mathrm{e}^{-x} + C_2\,\mathrm{e}^{4x}\,, \quad x \in \mathbb{R}\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Pravá strana zadané NLDR $f(x) = 3\mathrm{e}^{2x} + 2\sin x$ je součtem dvou speciálních pravých stran $f_1(x) = 3\mathrm{e}^{2x}$, viz Příklad 1 a $f_2(x) = 2\sin x$, viz Příklad 2. Partikulární řešení je součtem partikulárního řešení rovnice $y'' - 3y' - 4y = 3\mathrm{e}^{2x}$ – $y_{P1}(x)$ a partikulárního řešení rovnice $y'' - 3y' - 4y = 2\sin x$ – $y_{P2}(x)$, tj.

$$y_P(x) = y_{P1}(x) + y_{P2}(x)\,.$$

Tyto řešení známe z příkladů 1 a 2. Máme

$$y_P(x) = -\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{2x} + \frac{3}{17}\,\cos x - \frac{5}{17}\,\sin x\,.$$

Další

Příklad 3.3.4

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y'' - 3y' - 4y = 3\mathrm{e}^{2x} + 2\sin x$.

Řešení:

Obecné řešení rovnice $y'' - 3y' - 4y = 3\mathrm{e}^{2x} + 2\sin x$ tedy je

$$y(x) = C_1\mathrm{e}^{-x} + C_2\,\mathrm{e}^{4x} - \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{2x} + \frac{3}{17}\,\cos x - \frac{5}{17}\,\sin x\,, \quad x \in \mathbb{R}\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Zpět

Příklad 3.3.4

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y'' - 3y' - 4y = 3\mathrm{e}^{2x} + 2\sin x$.

Maple:

```
> DR:=(diff(y(x),x$2)-3*diff(y(x),x)-4*y(x)=3*exp(2*x)+2*sin(x));
```

$$DR := (\frac{d^2}{dx^2}\,\mathrm{y}(x)) - 3\,(\frac{d}{dx}\,\mathrm{y}(x)) - 4\,\mathrm{y}(x) = 3\,e^{(2\,x)} + 2\sin(x)$$

```
> dsolve(DR,y(x));
```

$$\mathrm{y}(x) = e^{(4\,x)}\,\_C2 + e^{(-x)}\,\_C1 - \frac{1}{2}\,e^{(2\,x)} + \frac{3}{17}\cos(x) - \frac{5}{17}\sin(x)$$

Zpět

Příklad 3.3.4

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y'' - 3y' - 4y = 3\mathrm{e}^{2x} + 2\sin x$.

Mathematica:

$\mathbf{rovnice} = \boldsymbol{y}\text{"}[\boldsymbol{x}] - \mathbf{3}\boldsymbol{y}'[\boldsymbol{x}] - \mathbf{4}\boldsymbol{y}[\boldsymbol{x}] == \mathbf{3Exp}[\mathbf{2}\boldsymbol{x}] + \mathbf{2Sin}[\boldsymbol{x}];$

$\mathbf{reseni} = \mathbf{DSolve}[\mathbf{rovnice}, \boldsymbol{y}[\boldsymbol{x}], \boldsymbol{x}]$

$\{\{y[x] \to$
$e^{-x}C[1] + e^{4x}C[2] + \frac{1}{34}\left(-17e^{2x} + 6\mathrm{Cos}[x] - 10\mathrm{Sin}[x]\right)\}\}$

Zpět

Příklad 3.3.5

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y'' + 2y' = 3 + 4\sin 2x$.

Zpět

Příklad 3.3.5

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y'' + 2y' = 3 + 4\sin 2x$.

Výsledek:

$y(x) = C_1 + C_2\,\mathrm{e}^{-2x} + \frac{3}{2}\,x - \frac{1}{2}\,\cos 2x - \frac{1}{2}\,\sin 2x\,, \quad x \in \mathbb{R}\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}\,.$

Zpět

Příklad 3.3.5

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y'' + 2y' = 3 + 4\sin 2x$.

Návod:

Rovnice je NLDR s konstantními koeficienty
$k_0 y'' + k_1 y' + k_2 y = f(x)$, $k_0, k_1, k_2 \in \mathbb{R}$, $k_0 \neq 0$. Její řešení hledáme podle návodu v příkladě 3.3.4.

Zpět

Příklad 3.3.5

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y'' + 2y' = 3 + 4\sin 2x$.

Řešení:

Obecné řešení zadané NLDR má tvar

$$y(x) = y_H(x) + y_P(x)\,,$$

kde $y_H(x)$ je obecné řešení přiřazené HLDR, tj. diferenciální rovnice $y'' + 2y' = 0$. Odpovídající charakteristická rovnice je

$$\lambda^2 + 2\lambda = 0.$$

Její kořeny jsou $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -2$. Obecné řešení přiřazené HLDR tedy je

$$y_H(x) = C_1 + C_2\,\mathrm{e}^{-2x}\,, \quad x \in \mathbb{R}\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Pravá strana zadané NLDR $f(x) = 3 + 4\sin 2x$ je součtem dvou speciálních pravých stran $f_1(x) = 3$ a $f_2(x) = 4\sin 2x$. Partikulární řešení hledáme ve tvaru

$$y_P(x) = y_{P1}(x) + y_{P2}(x)\,,$$

kde $y_{P1}(x)$ je partikulární řešení rovnice $y'' + 2y' = 3$ a $y_{P2}(x)$ je partikulární řešení rovnice $y'' + 2y' = 4\sin 2x$. Ukažme, že pravé strany těchto rovnic $f_1(x) = 3$ a $f_2(x) = 4\sin 2x$ jsou speciální pravé strany

$$\mathrm{e}^{ax}(P(x)\cos bx + Q(x)\sin bx)\,.$$

Další

Příklad 3.3.5

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y'' + 2y' = 3 + 4\sin 2x$.

Řešení:

Použijeme následující tabulku.

i	$f_i(x)$	a	b	$P(x)$	$Q(x)$	$e^{ax}(P(x)\cos bx + Q(x)\sin bx)$
1	3	0	0	3	0	$e^{0x}(3\cos 0x + 0\sin 0x) = 3$
2	$4\sin 2x$	0	2	0	4	$e^{0x}(0\cos 2x + 4\sin 2x) = 4\sin 2x$

Odhad partikulárních řešení je

$$y_{Pi}(x) = x^k e^{ax}(R(x)\cos bx + S(x)\sin bx)\,,$$

kde

i	a	b	$R(x)$	$S(x)$	$\alpha = a + bi$	k	$y_{Pi}(x)$
1	0	0	A	B	0	1	$x^1 e^{0x}(A\cos 0x + B\sin 0x) = Ax$
2	0	2	C	D	$2i$	0	$x^0 e^{0x}(C\cos 2x + D\sin 2x) = C\cos 2x + D\sin 2x$

Určeme konstanty A, C, D. Funkce $y_{P1}(x) = Ax$ musí splňovat rovnost $y'' + 2y' = 3$.
Spočtěme $y'_{P1}(x)$ a $y''_{P1}(x)$:

$$y'_{P1}(x) = A \quad \Longrightarrow \quad y''_{P1}(x) = 0\,.$$

Další

Příklad 3.3.5

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y'' + 2y' = 3 + 4\sin 2x$.

Řešení:

Dosaďme do rovnice $y'' + 2y' = 3$ y'_{P1} a y''_{P1} :

$$0 + 2A = 3 \quad \Longrightarrow \quad A = \frac{3}{2}.$$

První sčítanec partikulárního řešení je

$$y_{P1}(x) = \frac{3}{2}\,x.$$

Funkce $y_{P2}(x) = C\cos 2x + D\sin 2x$ musí splňovat rovnost $y'' + 2y' = 4\sin 2x$.
Spočtěme $y'_{P2}(x)$ a $y''_{P2}(x)$:

$$y'_{P2}(x) = -2C\sin 2x + 2D\cos 2x \quad \Longrightarrow \quad y''_{P2}(x) = -4C\cos 2x - 4D\sin 2x\,.$$

Dosaďme do rovnice $y'' + 2y' = 4\sin 2x$ y'_{P2} a y''_{P2} :

$$-4C\cos 2x - 4D\sin 2x + 2(-2C\sin 2x + 2D\cos 2x) = 4\sin 2x$$

$$\Downarrow$$

$$(-4C + 4D)\cos 2x + (-4D - 4C)\sin 2x = 0\cos 2x + 4\sin 2x.$$

Další

Příklad 3.3.5

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y'' + 2y' = 3 + 4\sin 2x$.

Řešení:

Aby byla poslední rovnost splněna, musí se výrazy u funkcí $\sin 2x, \cos 2x$ na levé a pravá straně rovnosti sobě rovnat:

$$\begin{aligned} -4C + 4D &= 0 \\ -4D - 4C &= 4\,. \end{aligned}$$

Odtud $D = C$, tedy $-4C - 4C = 4 \quad \Longrightarrow \quad C = -\frac{1}{2}$ a $D = -\frac{1}{2}$. Druhý sčítanec partikulárního řešení je

$$y_{P2}(x) = -\frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{2}\sin 2x\,.$$

Partikulární řešení zadané NLDR je

$$y_P(x) = \frac{3}{2}\,x - \frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{2}\sin 2x.$$

Obecné řešení rovnice $y'' + 2y' = 3 + 4\sin 2x$ tedy je

$$y(x) = C_1 + C_2\,\mathrm{e}^{-2x} + \frac{3}{2}\,x - \frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{2}\sin 2x\,, \quad x \in \mathbb{R}\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Zpět

Příklad 3.3.5

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y'' + 2y' = 3 + 4\sin 2x$.

Maple:

```
> DR:=(diff(y(x),x$2)+2*diff(y(x),x)=3+4*sin(2*x));
```

$$DR := \left(\frac{d^2}{dx^2}\,\mathrm{y}(x)\right) + 2\left(\frac{d}{dx}\,\mathrm{y}(x)\right) = 3 + 4\sin(2\,x)$$

```
> dsolve(DR,y(x));
```

$$\mathrm{y}(x) = -\frac{1}{2}\sin(2\,x) - \frac{1}{2}\cos(2\,x) - \frac{1}{2}\,e^{(-2\,x)}\,\_C1 + \frac{3\,x}{2} + \_C2$$

Zpět

Příklad 3.3.5

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y'' + 2y' = 3 + 4\sin 2x$.

Mathematica:

rovnice = y"[x] + 2y'[x] == 3 + 4 Sin[2x];

reseni = DSolve[rovnice, y[x], x]

$\{\{y[x] \to \frac{3x}{2} - \frac{1}{2}e^{-2x}C[1] + C[2] - \frac{1}{2}\mathrm{Cos}[2x] - \frac{1}{2}\mathrm{Sin}[2x]\}\}$

Zpět

Příklad 3.3.6

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y'' + 4y' + 4y = x^{-2}\mathrm{e}^{-2x}$, $x > 0$.

?

Zpět

Příklad 3.3.6

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y'' + 4y' + 4y = x^{-2}\mathrm{e}^{-2x}$, $x > 0$.

Výsledek:

$y(x) = \mathrm{e}^{-2x}(C_1 + C_2\,x - \ln x)\,, \quad x \in (0, \infty)\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}\,.$

Zpět

Příklad 3.3.6

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y'' + 4y' + 4y = x^{-2}e^{-2x}$, $x > 0$.

Návod:

Rovnice je NLDR s konstantními koeficienty
$k_0 y'' + k_1 y' + k_2 y = f(x)$, $k_0, k_1, k_2 \in \mathbb{R}$, $k_0 \neq 0$. Její řešení hledáme podle návodu v příkladě 3.3.1. V tomto případě partikulární řešení $y_P(x)$ hledáme pomocí metody variace konstant; metodu odhadu nelze použít.

Zpět

Příklad 3.3.6

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y'' + 4y' + 4y = x^{-2}\mathrm{e}^{-2x}$, $x > 0$.

Řešení:

Obecné řešení zadané NLDR má tvar

$$y(x) = y_H(x) + y_P(x)\,,$$

kde $y_H(x)$ je obecné řešení přiřazené HLDR, tj. diferenciální rovnice $y'' + 4y' + 4y = 0$. Odpovídající charakteristická rovnice je

$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0.$$

Její kořeny jsou $\lambda_{1,2} = -2$. Obecné řešení přiřazené HLDR tedy je

$$y_H(x) = C_1\mathrm{e}^{-2x} + C_2\,x\,\mathrm{e}^{-2x}\,, \quad x > 0\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Pravá strana zadané NLDR $f(x) = x^{-2}\mathrm{e}^{-2x}$ není speciální pravá strana

$$\mathrm{e}^{ax}(P(x)\cos bx + Q(x)\sin bx)\,.$$

V takovém případě pro odhad partikulárního řešení použijeme metodu variace konstant, tj. v obecném řešení přiřazené HLDR nahradíme konstanty C_1, C_2 funkcemi. Dostaneme

$$y_P(x) = C_1(x)\mathrm{e}^{-2x} + C_2(x)\,x\,\mathrm{e}^{-2x}\,.$$

Další

Příklad 3.3.6

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y'' + 4y' + 4y = x^{-2}\mathrm{e}^{-2x}$, $x > 0$.

Řešení:

Nyní musíme najít funkce $C_1(x), C_2(x)$. Pro derivace těchto funkcí umíme sestavit soustavu rovnic

$$\begin{aligned} C_1'(x)\,y_1(x) + C_2'(x)\,y_2(x) &= 0 \\ C_1'(x)\,y_1'(x) + C_2'(x)\,y_2'(x) &= \frac{f(x)}{k_0}\,, \end{aligned}$$

v maticovém tvaru

$$\begin{bmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_1'(x) \\ C_2'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{f(x)}{k_0} \end{bmatrix}.$$

Matici soustavy tvoří matice z Wronského determinantu funkcí $y_1(x) = \mathrm{e}^{-2x}$, $y_2(x) = x\,\mathrm{e}^{-2x}$, které tvoří fundamentální systém řešení přiřazené HLDR. Konkrétně

$$\begin{bmatrix} \mathrm{e}^{-2x} & x\,\mathrm{e}^{-2x} \\ -2\mathrm{e}^{-2x} & (1-2x)\mathrm{e}^{-2x} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_1'(x) \\ C_2'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ x^{-2}\mathrm{e}^{-2x} \end{bmatrix}.$$

Použitím Cramerova pravidla soustavu vyřešíme. Spočtěme determinanty:

$$D = \begin{vmatrix} \mathrm{e}^{-2x} & x\,\mathrm{e}^{-2x} \\ -2\mathrm{e}^{-2x} & (1-2x)\mathrm{e}^{-2x} \end{vmatrix} = (1-2x)\mathrm{e}^{-4x} + 2x\mathrm{e}^{-4x} = \mathrm{e}^{-4x},$$

Další

Příklad 3.3.6

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y'' + 4y' + 4y = x^{-2}\mathrm{e}^{-2x}$, $x > 0$.

Řešení:

$$D_1 = \begin{vmatrix} 0 & x\,\mathrm{e}^{-2x} \\ x^{-2}\mathrm{e}^{-2x} & (1-2x)\mathrm{e}^{-2x} \end{vmatrix} = -x^{-2}x\mathrm{e}^{-4x} = -x^{-1}\mathrm{e}^{-4x},$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} \mathrm{e}^{-2x} & 0 \\ -2\mathrm{e}^{-2x} & x^{-2}\mathrm{e}^{-2x} \end{vmatrix} = x^{-2}\mathrm{e}^{-4x}.$$

Pak

$$C_1'(x) = \frac{D_1}{D} = \frac{-x^{-1}\mathrm{e}^{-4x}}{\mathrm{e}^{-4x}} = -\frac{1}{x}\,, \qquad C_2'(x) = \frac{D_2}{D} = \frac{x^{-2}\mathrm{e}^{-4x}}{\mathrm{e}^{-4x}} = \frac{1}{x^2}\,.$$

Tedy

$$C_1(x) = \int -\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = -\ln|x|\,, \qquad C_2(x) = \int \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{x}\,.$$

Integrační konstanty nepíšeme, neboť hledáme **jedno** řešení $y_P(x)$, tedy **jednu** funkci $C_1(x)$ a **jednu** funkci $C_2(x)$. Partikulární řešení zadané NLDR je

$$y_P(x) = -\ln|x|\,\mathrm{e}^{-2x} - \frac{1}{x}\,x\,\mathrm{e}^{-2x} = -\ln|x|\,\mathrm{e}^{-2x} - \mathrm{e}^{-2x}.$$

Obecné řešení rovnice $y'' + 4y' + 4y = x^{-2}\mathrm{e}^{-2x}$, $x > 0$ tedy je

Další

Příklad 3.3.6

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y'' + 4y' + 4y = x^{-2}\mathrm{e}^{-2x}$, $x > 0$.

Řešení:

$$\begin{aligned} y(x) &= C_1\mathrm{e}^{-2x} + C_2\,x\,\mathrm{e}^{-2x} - \ln|x|\,\mathrm{e}^{-2x} - \mathrm{e}^{-2x}\,, \quad x \in (0,\infty)\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}\,. \\ &= (C_1 + C_2\,x - \ln|x| - 1)\mathrm{e}^{-2x} \\ &= (C_1 + C_2\,x - \ln x)\mathrm{e}^{-2x} \end{aligned}$$

Je-li C_1 libovolná konstanta, je také $C_1 - 1$ libovolná konstanta, označili jsme ji opět C_1. Definičním oborem je interval $(0,\infty)$, na kterém je pravá strana rovnice definovaná a spojitá.

Zpět

Příklad 3.3.6

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y'' + 4y' + 4y = x^{-2}\mathrm{e}^{-2x}$, $x > 0$.

Maple:

```
> DR:=(diff(y(x),x$2)+4*diff(y(x),x)+4*y(x)=1/(x^2)*exp(-2*x));
```

$$DR := \left(\frac{d^2}{dx^2}\,\mathrm{y}(x)\right) + 4\left(\frac{d}{dx}\,\mathrm{y}(x)\right) + 4\,\mathrm{y}(x) = \frac{e^{(-2\,x)}}{x^2}$$

```
> dsolve(DR,y(x));
```

$$\mathrm{y}(x) = e^{(-2\,x)}\,\_C2 + e^{(-2\,x)}\,x\,\_C1 - (\ln(x) + 1)\,e^{(-2\,x)}$$

Zpět

Příklad 3.3.6

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y'' + 4y' + 4y = x^{-2}\mathrm{e}^{-2x}$, $x > 0$.

Mathematica:

$\mathbf{rovnice = y"[x] + 4y'[x] + 4y[x] == 1/(x\hat{}2)Exp[-2x];}$

$\mathbf{reseni = DSolve[rovnice, y[x], x]}$

$\{\{y[x] \to e^{-2x}C[1] + e^{-2x}xC[2] - e^{-2x}(1 + \mathrm{Log}[x])\}\}$

Zpět

Příklad 3.3.7

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y'' - y' = \frac{2+x}{x^3}$, $x < 0$.

Zpět

Příklad 3.3.7

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y'' - y' = \frac{2+x}{x^3}\,,\ x < 0\,.$

Výsledek:

$y(x) = C_1 + C_2\,\mathrm{e}^x + \frac{1}{x}\,, \quad x \in (-\infty, 0)\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}\,.$

Zpět

Příklad 3.3.7

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y'' - y' = \frac{2+x}{x^3}$, $x < 0$.

Návod:

Rovnice je NLDR s konstantními koeficienty
$k_0 y'' + k_1 y' + k_2 y = f(x)$, $k_0, k_1, k_2 \in \mathbb{R}$, $k_0 \neq 0$. Její řešení hledáme podle návodu v příkladě 3.3.1. V tomto případě partikulární řešení $y_P(x)$ hledáme pomocí metody variace konstant; metodu odhadu nelze použít.

Zpět

Příklad 3.3.7

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y'' - y' = \frac{2+x}{x^3}$, $x < 0$.

Řešení:

Obecné řešení zadané NLDR má tvar

$$y(x) = y_H(x) + y_P(x) ,$$

kde $y_H(x)$ je obecné řešení přiřazené HLDR, tj. diferenciální rovnice $y'' - y' = 0$. Odpovídající charakteristická rovnice je

$$\lambda^2 - \lambda = 0.$$

Její kořeny jsou $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$. Obecné řešení přiřazené HLDR tedy je

$$y_H(x) = C_1 + C_2 \mathrm{e}^x , \quad x < 0 , \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R} .$$

Pravá strana zadané NLDR $f(x) = \frac{2+x}{x^3}$ není speciální pravá strana

$$\mathrm{e}^{ax}(P(x)\cos bx + Q(x)\sin bx) .$$

V takovém případě pro odhad partikulárního řešení použijeme metodu variace konstant, tj. v obecném řešení přiřazené HLDR nahradíme konstanty C_1, C_2 funkcemi. Dostaneme

$$y_P(x) = C_1(x) + C_2(x)\mathrm{e}^x .$$

Další

Příklad 3.3.7

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y'' - y' = \frac{2+x}{x^3}$, $x < 0$.

Řešení:

Nyní musíme najít funkce $C_1(x), C_2(x)$. Pro derivace těchto funkcí umíme sestavit soustavu rovnic

$$\begin{aligned} C_1'(x)\, y_1(x) + C_2'(x)\, y_2(x) &= 0 \\ C_1'(x)\, y_1'(x) + C_2'(x)\, y_2'(x) &= \frac{f(x)}{k_0}\,, \end{aligned}$$

v maticovém tvaru

$$\begin{bmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_1'(x) \\ C_2'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{f(x)}{k_0} \end{bmatrix}.$$

Matici soustavy tvoří matice z Wronského determinantu funkcí $y_1(x) = 1,\ y_2(x) = \mathrm{e}^x$, které tvoří fundamentální systém řešení přiřazené HLDR. Konkrétně

$$\begin{bmatrix} 1 & \mathrm{e}^x \\ 0 & \mathrm{e}^x \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_1'(x) \\ C_2'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2+x}{x^3} \end{bmatrix}.$$

Použitím Cramerova pravidla soustavu vyřešíme. Spočtěme determinanty:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & \mathrm{e}^x \\ 0 & \mathrm{e}^x \end{vmatrix} = \mathrm{e}^x, \qquad D_1 = \begin{vmatrix} 0 & \mathrm{e}^x \\ \frac{2+x}{x^3} & \mathrm{e}^x \end{vmatrix} = -\frac{2+x}{x^3}\,\mathrm{e}^x, \qquad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{2+x}{x^3} \end{vmatrix} = \frac{2+x}{x^3}.$$

Další

Příklad 3.3.7

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y'' - y' = \frac{2+x}{x^3}$, $x < 0$.

Řešení:

Pak

$$C_1'(x) = \frac{D_1}{D} = \frac{-\frac{2+x}{x^3}\,\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x} = -\frac{2+x}{x^3}\,, \qquad C_2'(x) = \frac{D_2}{D} = \frac{\frac{2+x}{x^3}}{\mathrm{e}^x} = \frac{2+x}{x^3}\,\mathrm{e}^{-x}\,.$$

Tedy

$$\begin{aligned}
C_1(x) &= \int -\frac{2+x}{x^3}\,\mathrm{d}x = \int \left(-\frac{2}{x^3} - \frac{1}{x^2}\right)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}\,,\\
C_2(x) &= \int \frac{2+x}{x^3}\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{2}{x^3}\,\mathrm{e}^{-x} + \frac{1}{x^2}\,\mathrm{e}^{-x}\right)\,\mathrm{d}x\\
&= \left| \begin{array}{ll} u'(x) = \frac{2}{x^3}\,, & u(x) = -\frac{1}{x^2} \\ v(x) = \mathrm{e}^{-x}, & v'(x) = -\mathrm{e}^{-x} \end{array} \right| = -\frac{1}{x^2}\,\mathrm{e}^{-x} - \int \frac{1}{x^2}\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x + \int \frac{1}{x^2}\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x\\
&= -\frac{1}{x^2}\,\mathrm{e}^{-x}\,.
\end{aligned}$$

Integrační konstanty nepíšeme, neboť hledáme **jedno** řešení $y_P(x)$, tedy **jednu** funkci $C_1(x)$ a **jednu** funkci $C_2(x)$. Partikulární řešení zadané NLDR je

$$y_P(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\,\mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{x} = \frac{1}{x}.$$

Další

Příklad 3.3.7

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y'' - y' = \frac{2+x}{x^3}$, $x < 0$.

Řešení:

Obecné řešení rovnice $y'' - y' = \frac{2+x}{x^3}$, $x < 0$ tedy je

$$y(x) = C_1 + C_2\,\mathrm{e}^x + \frac{1}{x}\,, \quad x \in (-\infty, 0)\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Definičním oborem je interval $(-\infty, 0)$, na kterém je pravá strana rovnice definovaná a spojitá.

Zpět

Příklad 3.3.7

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y'' - y' = \frac{2+x}{x^3}\,,\ x < 0\,.$

Maple:

```
> DR:=(diff(y(x),x$2)-diff(y(x),x)=(2+x)/(x^3));
```

$$DR := \left(\frac{d^2}{dx^2}\,\mathrm{y}(x)\right) - \left(\frac{d}{dx}\,\mathrm{y}(x)\right) = \frac{2+x}{x^3}$$

```
> dsolve(DR,y(x));
```

$$\mathrm{y}(x) = \frac{1}{x} + e^x\,\_C1 + \_C2$$

Zpět

Příklad 3.3.7

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y'' - y' = \frac{2+x}{x^3}\,,\ x < 0\,.$

Mathematica:

$\mathbf{rovnice = y"[x] - y'[x] == (2 + x)/(x\hat{}3);}$

$\mathbf{reseni = DSolve[rovnice, y[x], x]}$

$\{\{y[x] \to \frac{1}{x} + e^x C[1] + C[2]\}\}$

Zpět

Partikulární řešení LDR 2. řádu (počáteční úloha)

- **Příklad 3.4.1** Nalezněte řešení lineární diferenciální rovnice $y'' + y' - 2y = 2x$, které vyhovuje počátečním podmínkám $y(0) = 0, y'(0) = 1$.
- **Příklad 3.4.2** Je funkce $y(x) = -\frac{3}{4}\,x\cos 2x,\ x \in \mathbb{R}$ řešením diferenciální rovnice $y'' + 4y = 3\sin 2x$, které vyhovuje počátečním podmínkám $y(0) = 0\,,\ y'(0) = -\frac{3}{4}$?
- **Příklad 3.4.3** Nalezněte řešení lineární diferenciální rovnice $2y'' + 8y = \frac{1}{\sin^3 2x}$, které vyhovuje počátečním podmínkám $y(\frac{\pi}{4}) = \frac{15}{16}\,,\quad y'(\frac{\pi}{4}) = 4$.

Zpět

Příklad 3.4.1

Nalezněte řešení lineární diferenciální rovnice $y'' + y' - 2y = 2x$, které vyhovuje počátečním podmínkám $y(0) = 0, y'(0) = 1$.

?

Zpět

Příklad 3.4.1

Nalezněte řešení lineární diferenciální rovnice $y'' + y' - 2y = 2x$, které vyhovuje počátečním podmínkám $y(0) = 0, y'(0) = 1$.

Výsledek:

$y(x) = -\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-2x} + \mathrm{e}^{x} - x - \frac{1}{2}, \quad x \in \mathbb{R}$.

Zpět

Příklad 3.4.1

Nalezněte řešení lineární diferenciální rovnice $y'' + y' - 2y = 2x$, které vyhovuje počátečním podmínkám $y(0) = 0, y'(0) = 1$.

Návod:

Rovnice je NLDR s konstantními koeficienty $k_0y'' + k_1y' + k_2y = f(x)$, $k_0, k_1, k_2 \in \mathbb{R}$, $k_0 \neq 0$. Nejprve najdeme obecné řešení stejně jako v předchozích příkladech a pak určíme konstanty C_1, C_2 tak, aby nalezené řešení splňovalo počáteční podmínky.

Zpět

Příklad 3.4.1

Nalezněte řešení lineární diferenciální rovnice $y'' + y' - 2y = 2x$, které vyhovuje počátečním podmínkám $y(0) = 0, y'(0) = 1$.

Řešení:

Obecné řešení zadané NLDR má tvar

$$y(x) = y_H(x) + y_P(x),$$

kde $y_H(x)$ je obecné řešení přiřazené HLDR, tj. diferenciální rovnice $y'' + y' - 2y = 0$. Odpovídající charakteristická rovnice je

$$\lambda^2 + \lambda - 2\lambda = 0.$$

Její kořeny jsou $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 1$. Obecné řešení přiřazené HLDR tedy je

$$y_H(x) = C_1 \mathrm{e}^{-2x} + C_2 \mathrm{e}^{x}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Ukažme, že pravá strana zadané NLDR $f(x) = 2x$ je speciální pravá strana

$$\mathrm{e}^{ax}(P(x)\cos bx + Q(x)\sin bx).$$

Položíme-li $a = 0$, $b = 0$, $P(x) = 2x$ a $Q(x) = 0$, dostaneme $\mathrm{e}^{0x}(2x\cos 0x + 0\sin 0x) = 2x$. Odhad partikulárního řešení je

$$y_P(x) = x^k \mathrm{e}^{ax}(R(x)\cos bx + S(x)\sin bx),$$

kde $a = 0$, $b = 0$. Stupeň polynomu $P(x) = 2x$ je st$P = 1$ a stupeň polynomu $Q(x) = 0$ je st$Q = 0$. Odtud je st$R, S = 1$, proto $R(x) = Ax + B$ a $S(x) = Cx + D$. Číslo $\alpha = a + bi = 0$ není kořenem charakteristické rovnice ($\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 1$), tedy $k = 0$.

Další

Příklad 3.4.1

Nalezněte řešení lineární diferenciální rovnice $y'' + y' - 2y = 2x$, které vyhovuje počátečním podmínkám $y(0) = 0, y'(0) = 1$.

Řešení:

Máme

$$y_P(x) = x^0 \mathrm{e}^{0x}((Ax+B)\cos 0x + (Cx+D)\sin 0x) = Ax + B.$$

Určeme konstanty A, B. Funkce $y_P(x) = Ax + B$ musí splňovat zadanou NLDR $y'' + y' - 2y = 2x$. Spočtěme $y'_P(x)$ a $y''_P(x)$:

$$y'_P(x) = A \quad \Longrightarrow \quad y''_P(x) = 0$$

Dosaďme do zadané NLDR y_P, y'_P a y''_P:

$$0 + A - 2(Ax+B) = 2x \quad \Longrightarrow \quad A - 2B - 2Ax = 2x$$

Polynomy na obou stranách rovnice se rovnají, jestliže se rovnají koeficienty u stejných mocnin proměnné x na levé a pravé straně, tj.

$$\begin{aligned} A - 2B &= 0 \\ -2A &= 2 \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} A &= -1 \\ B &= -\tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

Partikulární řešení zadané NLDR je

$$y_P(x) = -x - \frac{1}{2}.$$

Další

Příklad 3.4.1

Nalezněte řešení lineární diferenciální rovnice $y'' + y' - 2y = 2x$, které vyhovuje počátečním podmínkám $y(0) = 0, y'(0) = 1$.

Řešení:

Obecné řešení rovnice $y'' + y' - 2y = 2x$ tedy je

$$y(x) = C_1 \mathrm{e}^{-2x} + C_2\,\mathrm{e}^{x} - x - \frac{1}{2}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Nyní určíme konstanty C_1, C_2 tak, aby nalezené řešení vyhovovalo počátečním podmínkám $y(0) = 0, y'(0) = 1$. Spočtěme derivaci obecného řešení $y(x)$: $y'(x) = -2C_1\mathrm{e}^{-2x} + C_2\,\mathrm{e}^{x} - 1$. Pak po dosazení počátečních podmínek do $y(x)$ a $y'(x)$ dostaneme

$$\begin{aligned} 0 &= y(0) = C_1\mathrm{e}^{-2\cdot 0} + C_2\,\mathrm{e}^{0} - 0 - \tfrac{1}{2} \\ 1 &= y'(0) = -2C_1\mathrm{e}^{-2\cdot 0} + C_2\,\mathrm{e}^{0} - 1 \end{aligned}$$

Odtud

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2} &= C_1 + C_2 \\ 2 &= -2C_1 + C_2 \end{aligned} \quad\Longrightarrow\quad \begin{aligned} 1 &= 2C_1 + 2C_2 \\ 2 &= -2C_1 + C_2 \end{aligned}$$

Hledané řešení má $C_2 = 1$ a $C_1 = -\frac{1}{2}$, tedy

$$y(x) = -\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-2x} + \mathrm{e}^{x} - x - \frac{1}{2}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Zpět

Příklad 3.4.1

Nalezněte řešení lineární diferenciální rovnice $y'' + y' - 2y = 2x$, které vyhovuje počátečním podmínkám $y(0) = 0, y'(0) = 1$.

Maple:

```
> DR:=(diff(y(x),x$2)+diff(y(x),x)-2*y(x)=2*x);
```

$$DR := \left(\frac{d^2}{dx^2}\,\mathrm{y}(x)\right) + \left(\frac{d}{dx}\,\mathrm{y}(x)\right) - 2\,\mathrm{y}(x) = 2\,x$$

```
> PP:=y(0)=0,D(y)(0)=1;
```

$$PP := \mathrm{y}(0) = 0,\ \mathrm{D}(y)(0) = 1$$

```
> dsolve({DR,PP},y(x));
```

$$\mathrm{y}(x) = e^x - \frac{1}{2}\,e^{(-2\,x)} - \frac{1}{2} - x$$

Zpět

Příklad 3.4.1

Nalezněte řešení lineární diferenciální rovnice $y'' + y' - 2y = 2x$, které vyhovuje počátečním podmínkám $y(0) = 0, y'(0) = 1$.

Mathematica:

$\mathbf{rovnice = y"[x] + y'[x] - 2y[x] == 2x;}$

$\mathbf{pp1 = y[0] == 0; pp2 = y'[0] == 1;}$

$\mathbf{reseni = DSolve[\{rovnice, pp1, pp2\}, y[x], x]}$

$\{\{y[x] \to \frac{1}{2} e^{-2x} \left(-1 - e^{2x} + 2e^{3x} - 2e^{2x} x\right)\}\}$

Simplify[%]

$\left\{\left\{y[x] \to -\frac{1}{2} - \frac{e^{-2x}}{2} + e^{x} - x\right\}\right\}$ Zpět

Příklad 3.4.2

Je funkce $y(x) = -\frac{3}{4}\,x\cos 2x$, $x \in \mathbb{R}$ řešením diferenciální rovnice $y'' + 4y = 3\sin 2x$, které vyhovuje počátečním podmínkám $y(0) = 0$, $y'(0) = -\frac{3}{4}$?

?

Zpět

Příklad 3.4.2

Je funkce $y(x) = -\frac{3}{4}\, x \cos 2x,\ x \in \mathbb{R}$ řešením diferenciální rovnice $y'' + 4y = 3 \sin 2x$, které vyhovuje počátečním podmínkám $y(0) = 0\,,\ y'(0) = -\frac{3}{4}$?

Výsledek:

Ano, je řešením dané počáteční úlohy.

Zpět

Příklad 3.4.2

Je funkce $y(x) = -\frac{3}{4}\, x \cos 2x$, $x \in \mathbb{R}$ řešením diferenciální rovnice $y'' + 4y = 3 \sin 2x$, které vyhovuje počátečním podmínkám $y(0) = 0$, $y'(0) = -\frac{3}{4}$?

Návod:

Vypočteme $y''(x)$ a do diferenciální rovnice dosadíme za $y''(x)$ a $y(x)$. Levá strana rovnice se musí rovnat pravé pro všechna reálná x a musí být splněny počáteční podmínky.

Zpět

Příklad 3.4.2

Je funkce $y(x) = -\frac{3}{4}\, x \cos 2x$, $x \in \mathbb{R}$ řešením diferenciální rovnice $y'' + 4y = 3\sin 2x$, které vyhovuje počátečním podmínkám $y(0) = 0$, $y'(0) = -\frac{3}{4}$?

Řešení:

Ověříme, zda jsou splněny počáteční podmínky.

$$y(0) = -\frac{3}{4} \cdot 0 \cdot \cos 0 = 0$$

Spočteme $y'(x)$:

$$y'(x) = -\frac{3}{4} \cos 2x + \frac{6}{4}\, x \sin 2x$$

$$\Downarrow$$

$$y'(0) = -\frac{3}{4} \cos 0 + \frac{6}{4} \cdot 0 \cdot \sin 0 = -\frac{3}{4}$$

Dále zkoumejme, zda je daná funkce řešením příslušné rovnice. Spočteme $y''(x)$:

$$y''(x) = \frac{6}{4} \sin 2x + \frac{6}{4} \sin 2x + \frac{12}{4}\, x \cos 2x = 3\sin 2x + 3x \cos 2x.$$

Levá strava rovnice je

$$L := y'' + 4y = 3\sin 2x + 3x\cos 2x + 4\left(-\frac{3}{4}\, x \cos 2x\right) = 3 \sin 2x$$

a pravá strana rovnice je

$$P := 3\sin 2x.$$

Ukázali jsme, že $L = P$ pro všechna reálná x. Funkce $y(x) = -\frac{3}{4}\, x \cos 2x$ je řešením dané počáteční úlohy.

Zpět

Příklad 3.4.2

Je funkce $y(x) = -\frac{3}{4}\, x \cos 2x$, $x \in \mathbb{R}$ řešením diferenciální rovnice $y'' + 4y = 3 \sin 2x$, které vyhovuje počátečním podmínkám $y(0) = 0$, $y'(0) = -\frac{3}{4}$?

Maple:

```
> res:=y(x)=-3/4*x*cos(2*x);
```

$$res := \mathrm{y}(x) = -\frac{3}{4}\, x \cos(2\, x)$$

```
> DR:=(diff(y(x),x$2)+4*y(x)=3*sin(2*x));
```

$$DR := (\frac{d^2}{dx^2}\, \mathrm{y}(x)) + 4\, \mathrm{y}(x) = 3 \sin(2\, x)$$

```
> odetest(res,DR);
```

$$0$$

```
> y:=x->-3/4*x*cos(2*x);
```

$$y := x \to -\frac{3}{4}\, x \cos(2\, x)$$

```
> y(0);
```

$$0$$

```
> D(y)(0);
```

$$\frac{-3}{4}$$

Zpět

Příklad 3.4.2

Je funkce $y(x) = -\frac{3}{4}\, x \cos 2x,\ x \in \mathbb{R}$ řešením diferenciální rovnice $y'' + 4y = 3 \sin 2x$, které vyhovuje počátečním podmínkám $y(0) = 0\,,\ y'(0) = -\frac{3}{4}$?

Mathematica:

$\mathbf{rovnice = \boldsymbol{y}"[\boldsymbol{x}] + 4\boldsymbol{y}[\boldsymbol{x}] == 3Sin[2\boldsymbol{x}];}$

$\mathbf{reseni = Function[\boldsymbol{x}, -3/4\boldsymbol{x}Cos[2\boldsymbol{x}]]}$

$\text{Function}\left[x, -\frac{3}{4}x\text{Cos}[2x]\right]$

$\mathbf{rovnice/.\{\boldsymbol{y} \to reseni\}}$

True

$\mathbf{\boldsymbol{y}[0] == 0/.\{\boldsymbol{y} \to reseni\}}$

True

$\mathbf{\boldsymbol{y}'[0] == -3/4/.\{\boldsymbol{y} \to reseni\}}$

True

Zpět

Příklad 3.4.3

Nalezněte řešení lineární diferenciální rovnice $2y'' + 8y = \frac{1}{\sin^3 2x}$, které vyhovuje počátečním podmínkám $y(\frac{\pi}{4}) = \frac{15}{16}$, $y'(\frac{\pi}{4}) = 4$.

? Zpět

Příklad 3.4.3

Nalezněte řešení lineární diferenciální rovnice $2y'' + 8y = \frac{1}{\sin^3 2x}$, které vyhovuje počátečním podmínkám $y(\frac{\pi}{4}) = \frac{15}{16}$, $\quad y'(\frac{\pi}{4}) = 4.$

Výsledek:

$$y(x) = -2\cos 2x + \sin 2x + \frac{2\cos^2 2x - 1}{16\sin 2x}\,, \quad x \in (0, \tfrac{\pi}{2})\,.$$

Zpět

Příklad 3.4.3

Nalezněte řešení lineární diferenciální rovnice $2y'' + 8y = \frac{1}{\sin^3 2x}$, které vyhovuje počátečním podmínkám $y(\frac{\pi}{4}) = \frac{15}{16}$, $\quad y'(\frac{\pi}{4}) = 4$.

Návod:

Rovnice je NLDR s konstantními koeficienty
$k_0 y'' + k_1 y' + k_2 y = f(x)\,, k_0, k_1, k_2 \in \mathbb{R}\,, k_0 \neq 0$. Nejprve najdeme obecné řešení stejně jako v příkladě 3.4.1 a pak určíme konstanty C_1, C_2 tak, aby nalezené řešení splňovalo počáteční podmínky.

Zpět

Příklad 3.4.3

Nalezněte řešení lineární diferenciální rovnice $2y'' + 8y = \frac{1}{\sin^3 2x}$, které vyhovuje počátečním podmínkám $y(\frac{\pi}{4}) = \frac{15}{16}$, $y'(\frac{\pi}{4}) = 4$.

Řešení:

Obecné řešení zadané NLDR má tvar

$$y(x) = y_H(x) + y_P(x) ,$$

kde $y_H(x)$ je obecné řešení přiřazené HLDR, tj. diferenciální rovnice $2y'' + 8y = 0$. Odpovídající charakteristická rovnice je

$$2\lambda^2 + 8 = 0.$$

Její kořeny jsou $\lambda_1 = 2i$, $\lambda_2 = -2i$. Obecné řešení přiřazené HLDR tedy je

$$y_H(x) = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x , \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R} .$$

Pravá strana zadané NLDR $f(x) = \frac{1}{\sin^3 2x}$ není speciální pravá strana

$$\mathrm{e}^{ax}(P(x) \cos bx + Q(x) \sin bx) .$$

V takovém případě pro odhad partikulárního řešení použijeme metodu variace konstant, tj. v obecném řešení přiřazené HLDR nahradíme konstanty C_1, C_2 funkcemi. Dostaneme

$$y_P(x) = C_1(x) \cos 2x + C_2(x) \sin 2x .$$

Nyní musíme najít funkce $C_1(x), C_2(x)$. Pro derivace těchto funkcí umíme sestavit soustavu rovnic

$$\begin{aligned} C_1'(x)\, y_1(x) + C_2'(x)\, y_2(x) &= 0 \\ C_1'(x)\, y_1'(x) + C_2'(x)\, y_2'(x) &= \frac{f(x)}{k_0} , \end{aligned}$$

Další

Příklad 3.4.3

Nalezněte řešení lineární diferenciální rovnice $2y'' + 8y = \frac{1}{\sin^3 2x}$, které vyhovuje počátečním podmínkám $y(\frac{\pi}{4}) = \frac{15}{16}$, $\quad y'(\frac{\pi}{4}) = 4$.

Řešení:

v maticovém tvaru

$$\begin{bmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_1'(x) \\ C_2'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{f(x)}{k_0} \end{bmatrix}.$$

Matici soustavy tvoří matice z Wronského determinantu funkcí $y_1(x) = \cos 2x$, $y_2(x) = \sin 2x$, které tvoří fundamentální systém řešení přiřazené HLDR. Konkrétně

$$\begin{bmatrix} \cos 2x & \sin 2x \\ -2\sin 2x & 2\cos 2x \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_1'(x) \\ C_2'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sin^3 2x} \end{bmatrix}.$$

Použitím Cramerova pravidla soustavu vyřešíme. Spočtěme determinanty:

$$D = \begin{vmatrix} \cos 2x & \sin 2x \\ -2\sin 2x & 2\cos 2x \end{vmatrix} = 2\cos^2 2x + 2\sin^2 2x = 2$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 0 & \sin 2x \\ \frac{1}{2\sin^3 2x} & 2\cos 2x \end{vmatrix} = -\frac{\sin 2x}{2\sin^3 2x} = -\frac{1}{2\sin^2 2x}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} \cos 2x & 0 \\ -2\sin 2x & \frac{1}{2\sin^3 2x} \end{vmatrix} = \frac{\cos 2x}{2\sin^3 2x}.$$

Další

Příklad 3.4.3

Nalezněte řešení lineární diferenciální rovnice $2y'' + 8y = \frac{1}{\sin^3 2x}$, které vyhovuje počátečním podmínkám $y(\frac{\pi}{4}) = \frac{15}{16}$, $\quad y'(\frac{\pi}{4}) = 4$.

Řešení:

Pak

$$C_1'(x) = \frac{D_1}{D} = \frac{-\dfrac{1}{2\sin^2 2x}}{2} = -\frac{1}{4\sin^2 2x}\,, \qquad C_2'(x) = \frac{D_2}{D} = \frac{\dfrac{\cos 2x}{2\sin^3 2x}}{2} = \frac{\cos 2x}{4\sin^3 2x}\,.$$

Tedy

$$\begin{aligned} C_1(x) &= \frac{1}{4}\int \frac{-1}{\sin^2 2x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\,\frac{\operatorname{cotg} 2x}{2} = \frac{1}{8}\,\frac{\cos 2x}{\sin 2x}\,, \\ C_2(x) &= \frac{1}{4}\int \frac{\cos 2x}{\sin^3 2x}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} \sin 2x = t \\ 2\cos 2x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{array} \right| = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{t^3} = -\frac{1}{16}\,\frac{1}{t^2} = -\frac{1}{16}\,\frac{1}{\sin^2 2x}\,. \end{aligned}$$

Integrační konstanty nepíšeme, neboť hledáme **jedno** řešení $y_P(x)$, tedy **jednu** funkci $C_1(x)$ a **jednu** funkci $C_2(x)$. Partikulární řešení zadané NLDR je

$$y_P(x) = \frac{1}{8}\,\frac{\cos 2x}{\sin 2x}\cos 2x - \frac{1}{16}\,\frac{1}{\sin^2 2x}\sin 2x = \frac{2\cos^2 2x - 1}{16\sin 2x}.$$

Obecné řešení rovnice $2y'' + 8y = \frac{1}{\sin^3 2x}$ tedy je

$$y(x) = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x + \frac{2\cos^2 2x - 1}{16\sin 2x}\,, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Další

Příklad 3.4.3

Nalezněte řešení lineární diferenciální rovnice $2y'' + 8y = \frac{1}{\sin^3 2x}$, které vyhovuje počátečním podmínkám $y(\frac{\pi}{4}) = \frac{15}{16}$, $\quad y'(\frac{\pi}{4}) = 4$.

Řešení:

Definičními obory jsou intervaly $I_k = (k\,\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + k\,\frac{\pi}{2})\,, k \in \mathbb{Z}$, na kterých je pravá strana rovnice definovaná a spojitá.
Nyní určíme konstanty C_1, C_2 tak, aby nalezené řešení vyhovovalo počátečním podmínkám $y(\frac{\pi}{4}) = \frac{15}{16}$, $y'(\frac{\pi}{4}) = 4$. Spočtěme derivaci obecného řešení $y(x)$:

$$y'(x) = -2\,C_1 \sin 2x + 2\,C_2 \cos 2x + \frac{1}{16}\,\frac{-8\cos 2x \sin 2x \sin 2x - (2\cos^2 2x - 1)2\cos 2x}{\sin^2 2x}.$$

Pak po dosazení počátečních podmínek do $y(x)$ a $y'(x)$ dostaneme

$$\frac{15}{16} \quad = \quad y(\tfrac{\pi}{4}) \quad = \quad C_1 \cos\tfrac{\pi}{2} + C_2 \sin\tfrac{\pi}{2} + \frac{2\cos^2\frac{\pi}{2} - 1}{16\sin\frac{\pi}{2}}$$

$$4 \quad = \quad y'(\tfrac{\pi}{4}) \quad = \quad -2\,C_1 \sin\tfrac{\pi}{2} + 2\,C_2\cos\tfrac{\pi}{2} + \frac{1}{16}\,\frac{-8\cos\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2} - (2\cos^2\frac{\pi}{2} - 1)2\cos\frac{\pi}{2}}{\sin^2\frac{\pi}{2}}$$

Odtud

$$\begin{aligned} 1 &= C_2 \\ 4 &= -2C_1 \end{aligned}$$

Hledané řešení má $C_1 = -2$ a $C_2 = 1$, tedy

$$y(x) = -2\cos 2x + \sin 2x + \frac{2\cos^2 2x - 1}{16\sin 2x}\,, \qquad x \in (0, \tfrac{\pi}{2})\,.$$

Z intervalů I_k jsme vybrali vzhledem k počátečním podmínkám ten, ve kterém leží číslo $\frac{\pi}{4}$.

Příklad 3.4.3

Nalezněte řešení lineární diferenciální rovnice $2y'' + 8y = \frac{1}{\sin^3 2x}$, které vyhovuje počátečním podmínkám $y(\frac{\pi}{4}) = \frac{15}{16}$, $y'(\frac{\pi}{4}) = 4$.

Maple:

```
> DR:=(2*diff(y(x),x$2)+8*y(x)=(1)/((sin(2*x))^3));
```

$$DR := 2\left(\frac{d^2}{dx^2}\,\mathrm{y}(x)\right) + 8\,\mathrm{y}(x) = \frac{1}{\sin(2\,x)^3}$$

```
> PP:=y(Pi/4)=15/16,D(y)(Pi/4)=4;
```

$$PP := \mathrm{y}(\frac{\pi}{4}) = \frac{15}{16},\ \mathrm{D}(y)(\frac{\pi}{4}) = 4$$

```
> dsolve({DR,PP},y(x));
```

$$\mathrm{y}(x) = \sin(2\,x) - 2\cos(2\,x) + \frac{1}{16}\,\frac{-1 + 2\cos(2\,x)^2}{\sin(2\,x)}$$

Zpět

Příklad 3.4.3

Nalezněte řešení lineární diferenciální rovnice $2y'' + 8y = \frac{1}{\sin^3 2x}$, které vyhovuje počátečním podmínkám $y(\frac{\pi}{4}) = \frac{15}{16}$, $y'(\frac{\pi}{4}) = 4$.

Mathematica:

rovnice = 2*y*"[*x*] + 8*y*[*x*] == 1/(Sin[2*x*]^3);

pp1 = *y*[Pi/4]==15/16; pp2 = *y*′[Pi/4] == 4;

reseni = DSolve[{rovnice, pp1, pp2}, *y*[*x*], *x*]

$\{\{y[x] \to \frac{1}{16}(-32\mathrm{Cos}[2x] + \mathrm{Cos}[2x]\mathrm{Cot}[2x] + 15\mathrm{Sin}[2x])\}\}$

Použijeme-li goniometrické vzorce dostaneme po úpravě stejný výsledek jako v řešení a v MAPLE.

Zpět

Partikulární řešení LDR 2. řádu (okrajová úloha)

- **Příklad 3.5.1** Najděte partikulární řešení diferenciální rovnice $y'' + 2y' + y = \mathrm{e}^{-x}$ vyhovující okrajovým podmínkám $y(0) = 0,\ y(2) = 0\,.$
- **Příklad 3.5.2** Řešte okrajovou úlohu $y''(t) = -\pi^2 y(t)\,, \quad y(0) = 0, \quad y\left(\frac{1}{2}\right) = -3.$ (může se jednat o linearizovaný model kyvadla, kde řešením je funkce úhlového vychýlení y, které vyhovuje LDR a daným okrajovým podmínkám)
- **Příklad 3.5.3** Řešte okrajovou úlohu $y''(t) + \pi^2 y(t) = 0\,, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1\,.$
- **Příklad 3.5.4** Řešte okrajovou úlohu $y'' + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 y = -x\,, \quad y(0) = 0,\ y(1) = 0\,.$

Zpět

Příklad 3.5.1

Najděte partikulární řešení diferenciální rovnice $y'' + 2y' + y = \mathrm{e}^{-x}$ vyhovující okrajovým podmínkám $y(0) = 0,\ y(2) = 0$.

? Zpět

Příklad 3.5.1

Najděte partikulární řešení diferenciální rovnice $y'' + 2y' + y = \mathrm{e}^{-x}$ vyhovující okrajovým podmínkám $y(0) = 0,\ y(2) = 0$.

Výsledek:

$y(x) = -x\,\mathrm{e}^{-x} + \frac{1}{2}\,x^2\,\mathrm{e}^{-x}, \quad x \in \mathbb{R}$.

Zpět

Příklad 3.5.1

Najděte partikulární řešení diferenciální rovnice $y'' + 2y' + y = \mathrm{e}^{-x}$ vyhovující okrajovým podmínkám $y(0) = 0,\ y(2) = 0$.

Návod:

Najdeme všechna řešení homogenní rovnice příslušné k zadané LDR 2. řádu ve tvaru $y_H = C_1\,\varphi_1 + C_2\,\varphi_2$, kde $\varphi_{1,2}$ tvoří fundamentální systém prostoru řešení HLDR. Dále vypočítáme jedno (libovolné) partikulární řešení y_p pro rovnici s pravou stranou.
Vyjádříme obecné řešení (stejně jako u počátečních úloh) jako součet
$y_{ON} = C_1\,\varphi_1 + C_2\,\varphi_2 + y_p$.
Hledané partikulární řešení y okrajové úlohy musí splňovat okrajové podmínky.
Stanovíme (pokud to lze) koeficienty C_1 a C_2 pro vyjádření hledaného partikulárního řešení okrajové úlohy.

Zpět

Příklad 3.5.1

Najděte partikulární řešení diferenciální rovnice $y'' + 2y' + y = \mathrm{e}^{-x}$ vyhovující okrajovým podmínkám $y(0) = 0,\ y(2) = 0$.

Řešení:

Řešíme nejdříve příslušnou HLDR s konstantními koeficienty. Charakteristická rovnice $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$ má jeden dvojnásobný kořen $\lambda_{1,2} = -1$, tedy řešení HLDR je tvaru $y_H = C_1 \mathrm{e}^{-x} + C_2\, x\, \mathrm{e}^{-x}$.
Partikulární řešení NLDR budeme hledat v odhadnutém tvaru $y_p = A\, x^2\, \mathrm{e}^{-x}$. Po vyjádření derivací $y_p'',\ y_p'$ a dosazení do zadané rovnice dostáváme $A = \frac{1}{2}$, tedy $y_p = \frac{1}{2}\, x^2\, \mathrm{e}^{-x}$.
Obecné řešení je tedy: $y_{ON} = C_1 \mathrm{e}^{-x} + C_2\, x\, \mathrm{e}^{-x} + \frac{1}{2}\, x^2\, \mathrm{e}^{-x}$.
Hledané partikulární řešení musí splňovat zadané okrajové podmínky. Tedy

$$C_1 \mathrm{e}^0 + 0 + 0 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad C_1 = 0$$

$$C_1 \mathrm{e}^{-2} + C_2\, 2\, \mathrm{e}^{-2} + \frac{1}{2}\, 2^2\, \mathrm{e}^{-2} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad C_2 = -1.$$

Řešení okrajové úlohy je tedy: $y(x) = -x\, \mathrm{e}^{-x} + \frac{1}{2}\, x^2\, \mathrm{e}^{-x}, \quad x \in \mathbb{R}$.

Zpět

Příklad 3.5.1

Najděte partikulární řešení diferenciální rovnice $y'' + 2y' + y = \mathrm{e}^{-x}$ vyhovující okrajovým podmínkám $y(0) = 0,\ y(2) = 0$.

Maple:

```
> rovnice1:=diff(y(x),x$2)+2*diff(y(x),x)+y(x)=exp(-x);
```

$$\mathit{rovnice1} := (\frac{d^2}{dx^2}\,\mathrm{y}(x)) + 2\,(\frac{d}{dx}\,\mathrm{y}(x)) + \mathrm{y}(x) = e^{(-x)}$$

```
> podminky1:=y(0)=0,y(2)=0;
```

$$\mathit{podminky1} := \mathrm{y}(0) = 0,\ \mathrm{y}(2) = 0$$

S těmito podmínkami má úloha jednoznačné řešení:

```
> reseni:=dsolve({rovnice1,podminky1},y(x));
```

$$\mathit{reseni} := \mathrm{y}(x) = -e^{(-x)}\,x + \frac{1}{2}\,x^2\,e^{(-x)}$$

Správnost výpočtu ověříme dosazením obecného řešení do původní rovnice.

```
> subs(reseni,{rovnice1,podminky1});
```

$$\{\mathrm{y}(2) = 0,\ \mathrm{y}(0) = 0,$$
$$(\frac{d^2}{dx^2}\,(-e^{(-x)}\,x + \frac{1}{2}\,x^2\,e^{(-x)})) + 2\,(\frac{d}{dx}\,(-e^{(-x)}\,x + \frac{1}{2}\,x^2\,e^{(-x)})) - e^{(-x)}\,x + \frac{1}{2}\,x^2\,e^{(-x)} = e^{(-x)}$$
$$\}$$

```
> simplify(%);
```

$$\{\mathrm{y}(2) = 0,\ \mathrm{y}(0) = 0,\ e^{(-x)} = e^{(-x)}\}$$

Další

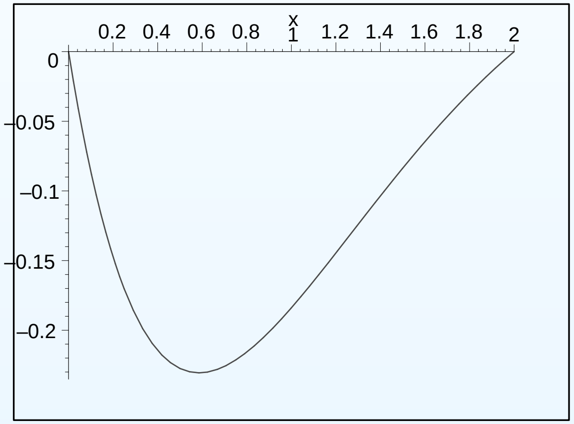
Příklad 3.5.1

Najděte partikulární řešení diferenciální rovnice $y'' + 2y' + y = e^{-x}$ vyhovující okrajovým podmínkám $y(0) = 0,\ y(2) = 0$.

Maple:

Nakreslíme graf partikulárního řešení na intervalu $\langle 0, 2\rangle$.

```
> assign(reseni);
> plot(y(x),x=0..2);
```




```
> unassign(y);
```

Zpět

Příklad 3.5.1

Najděte partikulární řešení diferenciální rovnice $y'' + 2y' + y = \mathrm{e}^{-x}$ vyhovující okrajovým podmínkám $y(0) = 0,\ y(2) = 0$.

Mathematica:

$\mathbf{rovnice = y"[x] + 2y'[x] + y[x]{=}{=}Exp[-x];}$

$\mathbf{podminka1 = y[0]{=}{=}0;}$

$\mathbf{podminka2 = y[2]{=}{=}0;}$

S těmito podmínkami má úloha jednoznačné řešení:

reseni = DSolve[{rovnice, podminka1, podminka2}, *y*, *x*][[1]]

$\left\{y \to \text{Function}\left[\{x\}, \frac{1}{2}e^{-x}(-2+x)x\right]\right\}$

Správnost výpočtu ověříme dosazením obecného řešení do původní rovnice a okrajových podmínek.

Simplify[{rovnice, podminka1, podminka2}/.reseni]

{True, True, True}

Nakreslíme graf partikulárního řešení na intervalu $\langle 0, 2\rangle$.

rp = (*y*/.reseni)[*x*]

$\frac{1}{2}e^{-x}(-2+x)x$

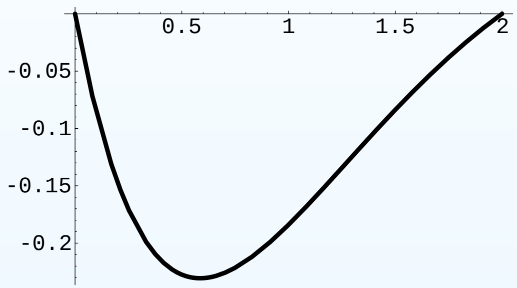
Další

Příklad 3.5.1

Najděte partikulární řešení diferenciální rovnice $y'' + 2y' + y = \mathrm{e}^{-x}$ vyhovující okrajovým podmínkám $y(0) = 0,\ y(2) = 0$.

Mathematica:

$\mathbf{Plot[rp, \{\mathit{x}, 0, 2\}, PlotStyle \to \{Thickness[0.01]\}];}$



Zpět

Příklad 3.5.2

Řešte okrajovou úlohu $y''(t) = -\pi^2 y(t)$, $\quad y(0) = 0, \quad y\left(\frac{1}{2}\right) = -3$. (může se jednat o linearizovaný model kyvadla, kde řešením je funkce úhlového vychýlení y, které vyhovuje LDR a daným okrajovým podmínkám)

?

Zpět

Příklad 3.5.2

Řešte okrajovou úlohu $y''(t) = -\pi^2 y(t)\,, \quad y(0) = 0, \quad y\left(\frac{1}{2}\right) = -3$. (může se jednat o linearizovaný model kyvadla, kde řešením je funkce úhlového vychýlení y, které vyhovuje LDR a daným okrajovým podmínkám)

Výsledek:

Řešením je funkce $y(t) = -3\sin(\pi t)\,.$

Zpět

Příklad 3.5.2

Řešte okrajovou úlohu $y''(t) = -\pi^2 y(t)\,, \quad y(0) = 0, \quad y\left(\frac{1}{2}\right) = -3$. (může se jednat o linearizovaný model kyvadla, kde řešením je funkce úhlového vychýlení y, které vyhovuje LDR a daným okrajovým podmínkám)

Návod:

Najdeme všechna řešení homogenní rovnice příslušné k zadané LDR 2. řádu ve tvaru $y_H = C_1\,\varphi_1 + C_2\,\varphi_2$, kde $\varphi_{1,2}$ tvoří fundamentální systém prostoru řešení HLDR. Vyjádříme obecné řešení (stejně jako u počátečních úloh) $y_{ON} = y_H = C_1\,\varphi_1 + C_2\,\varphi_2$. Hledané partikulární řešení y okrajové úlohy musí splňovat okrajové podmínky. Stanovíme (pokud to lze) koeficienty C_1 a C_2 pro vyjádření hledaného partikulárního řešení okrajové úlohy.

Zpět

Příklad 3.5.2

Řešte okrajovou úlohu $y''(t) = -\pi^2 y(t)$, $\quad y(0) = 0, \quad y\left(\frac{1}{2}\right) = -3$. (může se jednat o linearizovaný model kyvadla, kde řešením je funkce úhlového vychýlení y, které vyhovuje LDR a daným okrajovým podmínkám)

Řešení:

Jedná se o řešení HLDR s konstantními koeficienty. Charakteristická rovnice $\lambda^2 + \pi^2 = 0$ má komplexně sdružené kořeny $\lambda_{1,2} = \pm i\,\pi$.
Obecné řešení je tedy: $y_{ON} = y_H = C_1 \cos \pi\, t + C_2 \sin \pi\, t$.
Hledané partikulární řešení musí splňovat zadané okrajové podmínky. Tedy

$$C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad C_1 = 0$$

$$C_1 \cos \frac{\pi}{2} + C_2 \sin \frac{\pi}{2} = -3 \qquad \Rightarrow \qquad C_2 = -3.$$

Řešení okrajové úlohy je tedy: $y(t) = -3\sin(\pi t)$.

Zpět

Příklad 3.5.2

Řešte okrajovou úlohu $y''(t) = -\pi^2 y(t)$, $\quad y(0) = 0, \quad y\left(\frac{1}{2}\right) = -3$. (může se jednat o linearizovaný model kyvadla, kde řešením je funkce úhlového vychýlení y, které vyhovuje LDR a daným okrajovým podmínkám)

Maple:

```
> rovnice2:=diff(y(x),x$2)=-Pi^2*y(x);
```

$$rovnice2 := \frac{d^2}{dx^2}\,\mathrm{y}(x) = -\pi^2\,\mathrm{y}(x)$$

```
> reseni:=dsolve({rovnice2},y(x));
```

$$reseni := \{\mathrm{y}(x) = \_C1\,\sin(\pi\,x) + \_C2\,\cos(\pi\,x)\}$$

```
> podminky2:=y(0)=0, y(1/2)=-3;
```

$$podminky2 := \mathrm{y}(0) = 0,\ \mathrm{y}(\frac{1}{2}) = -3$$

S těmito podmínkami má úloha jednoznačné řešení:

```
> reseni:=dsolve({rovnice2,podminky2},y(x));
```

$$reseni := \mathrm{y}(x) = -3\sin(\pi\,x)$$

Správnost výpočtu ověříme dosazením obecného řešení do původní rovnice.

```
> subs(reseni,{rovnice2,podminky2});
```

$$\{\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,(-3\sin(\pi\,x)) = 3\,\pi^2\sin(\pi\,x),\ \mathrm{y}(0) = 0,\ \mathrm{y}(\frac{1}{2}) = -3\}$$

```
> simplify(%);
```

$$\{\mathrm{y}(0) = 0,\ \mathrm{y}(\frac{1}{2}) = -3,\ 3\,\pi^2\sin(\pi\,x) = 3\,\pi^2\sin(\pi\,x)\}$$

Další

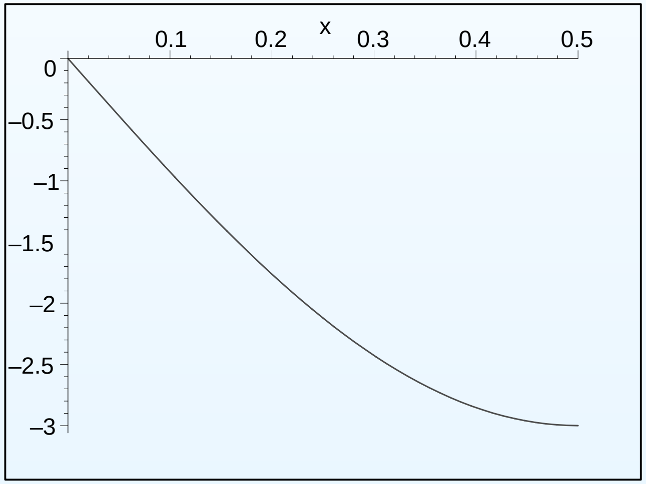
Příklad 3.5.2

Řešte okrajovou úlohu $y''(t) = -\pi^2 y(t)\,, \quad y(0) = 0, \quad y\left(\frac{1}{2}\right) = -3.$ (může se jednat o linearizovaný model kyvadla, kde řešením je funkce úhlového vychýlení y, které vyhovuje LDR a daným okrajovým podmínkám)

Maple:

Nakreslíme graf partikulárního řešení na intervalu $\langle 0, 1/2\rangle$.

```
> assign(reseni);
> plot(y(x),x=0..1/2,thickness=3);
```




```
> unassign(y);
```

Zpět

Příklad 3.5.2

Řešte okrajovou úlohu $y''(t) = -\pi^2 y(t)$, $y(0) = 0$, $y\left(\frac{1}{2}\right) = -3$. (může se jednat o linearizovaný model kyvadla, kde řešením je funkce úhlového vychýlení y, které vyhovuje LDR a daným okrajovým podmínkám)

Mathematica:

rovnice = y"[x]== − Pi^2y[x];

podminka1 = y[0]==0;

podminka2 = y[1/2] == −3;

S těmito podmínkami má úloha jednoznačné řešení:

reseni = DSolve[{rovnice, podminka1, podminka2}, y, x][[1]]

$\{y \to \mathrm{Function}[\{x\}, -3\mathrm{Sin}[\pi x]]\}$

Správnost výpočtu ověříme dosazením obecného řešení do původní rovnice.

Simplify[{rovnice, podminka1, podminka2}/.reseni]

{True, True, True}

Nakreslíme graf partikulárního řešení na intervalu $\langle 0, 1/2\rangle$.

rp = (y/.reseni)[x]

$-3\mathrm{Sin}[\pi x]$

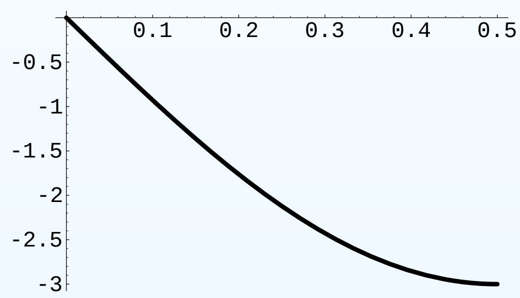
Další

Příklad 3.5.2

Řešte okrajovou úlohu $y''(t) = -\pi^2 y(t)$, $\quad y(0) = 0, \quad y\left(\frac{1}{2}\right) = -3$. (může se jednat o linearizovaný model kyvadla, kde řešením je funkce úhlového vychýlení y, které vyhovuje LDR a daným okrajovým podmínkám)

Mathematica:

Plot[rp, {*x*, 0, 1/2}, PlotStyle → {Thickness[0.01]}];



Zpět

Příklad 3.5.3

Řešte okrajovou úlohu $y''(t) + \pi^2 y(t) = 0\,, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1\,.$

?

Zpět

Příklad 3.5.3

Řešte okrajovou úlohu $y''(t) + \pi^2 y(t) = 0\,, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1\,.$

Výsledek:

Okrajová úloha nemá řešení.

Zpět

Příklad 3.5.3

Řešte okrajovou úlohu $y''(t) + \pi^2 y(t) = 0\,, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1\,.$

Návod:

Najdeme všechna řešení homogenní rovnice příslušné k zadané LDR 2. řádu ve tvaru $y_H = C_1\,\varphi_1 + C_2\,\varphi_2$, kde $\varphi_{1,2}$ tvoří fundamentální systém prostoru řešení HLDR. Vyjádříme obecné řešení (stejně jako u počátečních úloh) $y_{ON} = y_H = C_1\,\varphi_1 + C_2\,\varphi_2$. Hledané partikulární řešení y okrajové úlohy musí splňovat okrajové podmínky. Stanovíme (pokud to lze) koeficienty C_1 a C_2 pro vyjádření hledaného partikulárního řešení okrajové úlohy.

Zpět

Příklad 3.5.3

Řešte okrajovou úlohu $y''(t) + \pi^2 y(t) = 0\,, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1\,.$

Řešení:

Jedná se o řešení HLDR s konstantními koeficienty. Charakteristická rovnice $\lambda^2 + \pi^2 = 0$ má komplexně sdružené kořeny $\lambda_{1,2} = \pm i\,\pi\,.$
Obecné řešení je tedy: $y_{ON} = y_H = C_1 \cos \pi\, t + C_2 \sin \pi\, t\,.$
Hledané partikulární řešení musí splňovat zadané okrajové podmínky. Tedy

$$C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 = 0$$

$$C_1 \cos \pi + C_2 \sin \pi = 1$$

Tato soustava pro C_1, C_2 nemá řešení. Okrajová úloha je tedy neřešitelná.

Zpět

Příklad 3.5.3

Řešte okrajovou úlohu $y''(t) + \pi^2 y(t) = 0\,,\quad y(0) = 0,\quad y(1) = 1\,.$

Maple:

```
> rovnice3:=diff(y(x),x$2)+Pi^2*y(x) = 0;
```

$$rovnice3 := \left(\frac{d^2}{dx^2}\,\mathrm{y}(x)\right) + \pi^2\,\mathrm{y}(x) = 0$$

```
> podminky3:=y(0)=0,y(1)=1;
```

$$podminky3 := \mathrm{y}(0) = 0,\ \mathrm{y}(1) = 1$$

Jedná se o stejnou HLDR jako v předchozím příkladě,

```
> reseni:=dsolve({rovnice3},y(x));
```

$$reseni := \{\mathrm{y}(x) = \_C1\,\sin(\pi\,x) + \_C2\,\cos(\pi\,x)\}$$

ale jinou okrajovou úlohu. S podmínkami $y(0) = 0,\ y(1) = 1$ úloha nemá řešení:

```
> reseni:=dsolve({rovnice3,podminky3},y(x));
```

$$reseni :=$$

Zpět

Příklad 3.5.3

Řešte okrajovou úlohu $y''(t) + \pi^2 y(t) = 0\,, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1\,.$

Mathematica:

rovnice = $\boldsymbol{y}$" [$\boldsymbol{x}$]== − Pi^2$\boldsymbol{y}$[$\boldsymbol{x}$];

podminka1 = $\boldsymbol{y}$[0]==0;

podminka2 = $\boldsymbol{y}$[1] == 1;

Jedná se o stejnou HLDR jako v předchozím příkladě,

reseni = DSolve[rovnice, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{x}$]
$\{\{y \to \text{Function}[\{x\}, C[1]\text{Cos}[\pi x] + C[2]\text{Sin}[\pi x]]\}\}$

ale jinou okrajovou úlohu.
S podmínkami $y(0) = 0,\ y(1) = 1$ úloha nemá řešení:

reseni = DSolve[{rovnice, podminka1, podminka2}, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{x}$]

DSolve::bvnul : For some branches of the general solution,
the given boundary conditions lead to an empty solution. More. . .

{}

Zpět

Příklad 3.5.4

Řešte okrajovou úlohu $y'' + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 y = -x\,, \quad y(0) = 0,\ y(1) = 0\,.$

Zpět

Příklad 3.5.4

Řešte okrajovou úlohu $y'' + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 y = -x\,, \quad y(0) = 0,\ y(1) = 0\,.$

Výsledek:

Řešením je funkce $y(x) = \dfrac{4}{\pi^2}\,\sin\left(\dfrac{\pi x}{2}\right) - \dfrac{4x}{\pi^2}\,.$

Zpět

Příklad 3.5.4

Řešte okrajovou úlohu $y'' + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 y = -x\,, \quad y(0) = 0,\ y(1) = 0\,.$

Návod:

Najdeme všechna řešení homogenní rovnice příslušné k zadané LDR 2. řádu ve tvaru $y_H = C_1\,\varphi_1 + C_2\,\varphi_2$, kde $\varphi_{1,2}$ tvoří fundamentální systém prostoru řešení HLDR. Dále vypočítáme jedno (libovolné) partikulární řešení y_p pro rovnici s pravou stranou. Vyjádříme obecné řešení (stejně jako u počátečních úloh) jako součet $y_{ON} = C_1\,\varphi_1 + C_2\,\varphi_2 + y_p$.
Hledané partikulární řešení y okrajové úlohy musí splňovat okrajové podmínky. Stanovíme (pokud to lze) koeficienty C_1 a C_2 pro vyjádření hledaného partikulárního řešení okrajové úlohy.

Zpět

Příklad 3.5.4

Řešte okrajovou úlohu $y'' + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 y = -x\,, \quad y(0) = 0,\ y(1) = 0\,.$

Řešení:

Řešíme nejdříve příslušnou HLDR s konstantními koeficienty. Charakteristická rovnice $\lambda^2 + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = 0$ má komplexně sdružené kořeny $\lambda_{1,2} = \pm i\,\dfrac{\pi}{2}$, tedy řešení HLDR je tvaru
$y_H = C_1 \cos\dfrac{\pi}{2}\,x + C_2 \sin\dfrac{\pi}{2}\,x\,.$
Partikulární řešení NLDR budeme hledat v odhadnutém tvaru $y_p = A\,x + B$. Po vyjádření derivací y_p'', y_p' a dosazení do zadané rovnice dostáváme
$A = -\dfrac{4}{\pi^2}\,,\ B = 0\,,$ tedy $y_p = -\dfrac{4}{\pi^2}\,x\,.$
Obecné řešení je tedy: $y_{ON} = C_1 \cos\dfrac{\pi}{2}\,x + C_2 \sin\dfrac{\pi}{2}\,x - \dfrac{4}{\pi^2}\,x\,.$
Hledané partikulární řešení musí splňovat zadané okrajové podmínky. Tedy

$$C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 - 0 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad C_1 = 0$$

$$C_1 \cos\frac{\pi}{2} + C_2 \sin\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi^2} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad C_2 = \frac{4}{\pi^2}$$

Řešení okrajové úlohy je tedy: $y(x) = \dfrac{4}{\pi^2}\sin\left(\dfrac{\pi x}{2}\right) - \dfrac{4x}{\pi^2}\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$

Zpět

Příklad 3.5.4

Řešte okrajovou úlohu $y'' + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 y = -x\,, \quad y(0) = 0,\ y(1) = 0\,.$

Maple:

```
> rovnice4:=diff(y(x),x$2)+(Pi/2)^2*y(x) = -x;
```

$$rovnice4 := \left(\frac{d^2}{dx^2}\,\mathrm{y}(x)\right) + \frac{1}{4}\,\pi^2\,\mathrm{y}(x) = -x$$

```
> podminky4:=y(0)=0,y(1)=0;
```

$$podminky4 := \mathrm{y}(0) = 0,\ \mathrm{y}(1) = 0$$

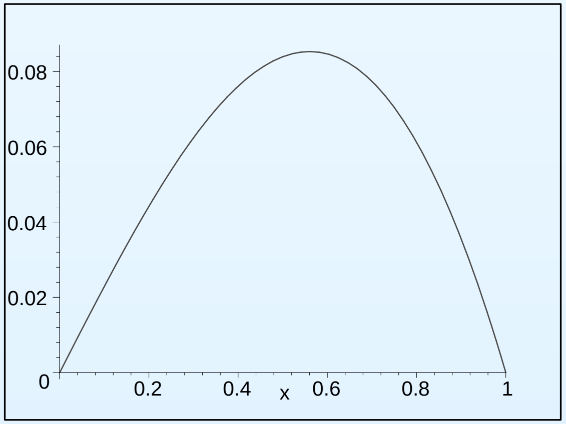
S těmito podmínkami má úloha jednoznačné řešení:

```
> reseni:=dsolve({rovnice4,podminky4},y(x));
```

$$reseni := \mathrm{y}(x) = \frac{4\sin\left(\frac{\pi\,x}{2}\right)}{\pi^2} - \frac{4\,x}{\pi^2}$$

Následuje graf partikulárního řešení na intervalu $\langle 0, 1\rangle$

```
> assign(reseni);
> assign(reseni);plot(y(x),x=0..1,thickness=3);unassign(y);
```



Zpět

Příklad 3.5.4

Řešte okrajovou úlohu $y'' + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 y = -x\,, \quad y(0) = 0,\ y(1) = 0\,.$

Mathematica:

rovnice = y"[x] + (Pi/2)^2y[x]== − x;

podminka1 = y[0]==0;

podminka2 = y[1] == 0;

S těmito podmínkami má úloha jednoznačné řešení:

reseni = DSolve[{rovnice, podminka1, podminka2}, y, x][[1]]

$$\left\{y \to \text{Function}\left[\{x\}, \frac{-4x + 4\text{Sin}\left[\frac{\pi x}{2}\right] + \pi^2\text{Sin}\left[\frac{\pi x}{2}\right]}{\pi^2}\right]\right\}$$

Simplify[{rovnice, podminka1, podminka2}/.reseni]

{True, True, True}

Následuje graf partikulárního řešení na intervalu $\langle 0, 1\rangle$

rp = (y/.reseni)[x]

$$\frac{-4x + 4\text{Sin}\left[\frac{\pi x}{2}\right] + \pi^2\text{Sin}\left[\frac{\pi x}{2}\right]}{\pi^2}$$

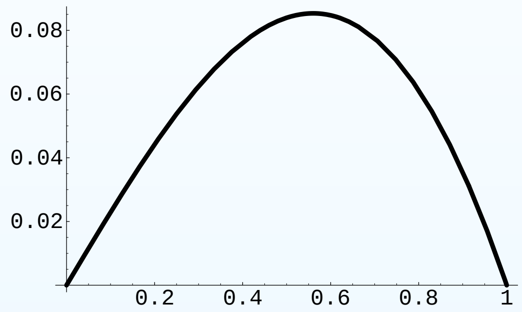
Další

Příklad 3.5.4

Řešte okrajovou úlohu $y'' + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 y = -x\,, \quad y(0) = 0,\ y(1) = 0\,.$

Mathematica:

$\mathbf{Plot[rp, \{\boldsymbol{x}, 0, 1\}, PlotStyle \rightarrow \{Thickness[0.01]\}];}$



Zpět

- **Příklad 3.6.1** Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice (LDR) $y''' + 3y'' - 4y' = 0\,.$
- **Příklad 3.6.2** Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y''' + y = 0\,.$
- **Příklad 3.6.3** Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y''' - 9y'' + 27y' - 27y = 0\,.$
- **Příklad 3.6.4** Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y^{(4)} + 16y'' = 0\,.$
- **Příklad 3.6.5** Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y''' - y = x\,.$
- **Příklad 3.6.6** Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y^{(4)} + 2y'' + y = 3\sin x - 5\cos x\,.$
- **Příklad 3.6.7** Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $xy'' - y' = x^2 \mathrm{e}^x\,,\ x > 0\,.$

Zpět

Příklad 3.6.1

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice (LDR) $y''' + 3y'' - 4y' = 0$.

= ?

Zpět

Příklad 3.6.1

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice (LDR) $y''' + 3y'' - 4y' = 0\,.$

Výsledek:

$$y(x) = C_1 + C_2\,\mathrm{e}^{x} + C_3\,\mathrm{e}^{-4x}\,, \quad x \in \mathbb{R}\,, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}\,.$$

Zpět

Příklad 3.6.1

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice (LDR) $y''' + 3y'' - 4y' = 0\,.$

Návod:

Rovnice je homogenní lineární diferenciální rovnice (HLDR) s konstantními koeficienty tvaru $k_0y''' + k_1y'' + k_2y' + k_3y = 0\,, k_0, k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}\,, k_0 \neq 0$. Její řešení hledáme ve tvaru $y = \mathrm{e}^{\lambda x}$, kde $\lambda \in \mathbb{R}$. Konstantu λ určíme tak, aby funkce $y = \mathrm{e}^{\lambda x}$ splňovala zadanou rovnici. Proto musí být λ kořenem **charakteristické rovnice** $k_0\lambda^3 + k_1\lambda^2 + k_2\lambda + k_3 = 0$.

Zpět

Příklad 3.6.1

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice (LDR) $y''' + 3y'' - 4y' = 0\,.$

Řešení:

Charakteristická rovnice zadané LDR $y''' + 3y'' - 4y' = 0$ je

$$\lambda^3 + 3\lambda^2 - 4\lambda = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\lambda\,(\lambda^2 + 3\lambda - 4) = 0.$$

Její kořeny jsou $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -4$. Má-li charakteristická rovnice **tři různé reálné** kořeny $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, pak obecné řešení HLDR má tvar

$$y(x) = C_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 x} + C_2\,\mathrm{e}^{\lambda_2 x} + C_3\,\mathrm{e}^{\lambda_3 x}\,, \quad x \in \mathbb{R}\,, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}\,.$$

Obecné řešení zadané LDR tedy je

$$y(x) = C_1 + C_2\,\mathrm{e}^{x} + C_3\,\mathrm{e}^{-4x}\,, \quad x \in \mathbb{R}\,, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}\,.$$

Zpět

Příklad 3.6.1

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice (LDR) $y''' + 3y'' - 4y' = 0$.

Maple:

```
> DR:=(diff(y(x),x$3)+3*diff(y(x),x$2)-4*diff(y(x),x)=0);
```

$$DR := \left(\frac{d^3}{dx^3}\,\mathrm{y}(x)\right) + 3\left(\frac{d^2}{dx^2}\,\mathrm{y}(x)\right) - 4\left(\frac{d}{dx}\,\mathrm{y}(x)\right) = 0$$

```
> dsolve(DR,y(x));
```

$$\mathrm{y}(x) = \_C1 + \_C2\, e^{(-4\,x)} + \_C3\, e^{x}$$

```
> restart;
```

Zpět

Příklad 3.6.1

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice (LDR) $y''' + 3y'' - 4y' = 0$.

Mathematica:

$\mathbf{rovnice} = \boldsymbol{y}\text{"'}[\boldsymbol{x}] + \mathbf{3}\boldsymbol{y}\text{"}[\boldsymbol{x}] - \mathbf{4}\boldsymbol{y}'[\boldsymbol{x}] == \mathbf{0};$

$\mathbf{reseni} = \mathbf{DSolve}[\mathbf{rovnice}, \boldsymbol{y}[\boldsymbol{x}], \boldsymbol{x}]$

$\{\{y[x] \to -\frac{1}{4}e^{-4x}C[1] + e^{x}C[2] + C[3]\}\}$

Poznámka: Výsledek je totožný s předchozími výsledky, protože konstantu $-\frac{1}{4}$ můžeme zahrnout do konstanty $C[1]$.

Zpět

Příklad 3.6.2

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y''' + y = 0$.

? Zpět

Příklad 3.6.2

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y''' + y = 0$.

Výsledek:

$$y(x) = C_1\,\mathrm{e}^{-x} + C_2\,\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\cos(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\,x) + C_3\,\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\sin(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\,x)\,, \quad x \in \mathbb{R}\,, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}\,.$$

Zpět

Příklad 3.6.2

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y''' + y = 0$.

Návod:

Rovnice je LDR s konstantními koeficienty tvaru $k_0 y''' + k_1 y'' + k_2 y' + k_3 y = 0$ a její řešení hledáme podle návodu v předchozím příkladě.

Zpět

Příklad 3.6.2

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y''' + y = 0$.

Řešení:

Charakteristická rovnice zadané LDR $y''' + y = 0$ je

$$\lambda^3 + 1 = 0.$$

Rozložme podle vzorce $A^3 + B^3 = (A + B) \cdot (A^2 - AB + B^2)$ levou stranu rovnice na součin:

$$(\lambda + 1)(\lambda^2 - \lambda + 1) = 0.$$

Její kořeny jsou $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\, i$, $\lambda_3 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\, i$. Má-li charakteristická rovnice **jeden reálný kořen** λ_1 a **dva imaginární komplexně sdružené** kořeny $\lambda_2 = a + b\, i, \lambda_3 = a - b\, i$, pak obecné řešení HLDR má tvar

$$y(x) = C_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 x} + C_2 \mathrm{e}^{ax} \cos bx + C_3\, \mathrm{e}^{ax} \sin bx\,, \quad x \in \mathbb{R}\,, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}\,.$$

Obecné řešení zadané LDR tedy je

$$y(x) = C_1\, \mathrm{e}^{-x} + C_2\, \mathrm{e}^{\frac{x}{2}} \cos(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\, x) + C_3\, \mathrm{e}^{\frac{x}{2}} \sin(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\, x)\,, \quad x \in \mathbb{R}\,, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}\,.$$

Zpět

Příklad 3.6.2

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y''' + y = 0$.

Maple:

```
> DR:=(diff(y(x),x$3)+y(x)=0);
```

$$DR := (\frac{d^3}{dx^3}\,\mathrm{y}(x)) + \mathrm{y}(x) = 0$$

```
> dsolve(DR,y(x));
```

$$\mathrm{y}(x) = \_C1\, e^{(-x)} + \_C2\, e^{(\frac{x}{2})} \sin(\frac{\sqrt{3}\,x}{2}) + \_C3\, e^{(\frac{x}{2})} \cos(\frac{\sqrt{3}\,x}{2})$$

Zpět

Příklad 3.6.2

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y''' + y = 0$.

Mathematica:

$$\mathbf{rovnice} = \boldsymbol{y}\text{'''}[\boldsymbol{x}] + \boldsymbol{y}[\boldsymbol{x}] == \mathbf{0};$$

$$\mathbf{reseni} = \mathbf{DSolve}[\mathbf{rovnice}, \boldsymbol{y}[\boldsymbol{x}], \boldsymbol{x}]$$

$$\{\{y[x] \to e^{-x}C[1] + e^{x/2}C[3]\mathrm{Cos}\left[\frac{\sqrt{3}x}{2}\right] + e^{x/2}C[2]\mathrm{Sin}\left[\frac{\sqrt{3}x}{2}\right]\}\}$$

Zpět

Příklad 3.6.3

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y''' - 9y'' + 27y' - 27y = 0\,.$

? Zpět

Příklad 3.6.3

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y''' - 9y'' + 27y' - 27y = 0$.

Výsledek:

$$y(x) = C_1\,\mathrm{e}^{3x} + C_2\,x\,\mathrm{e}^{3x} + C_3\,x^2\,\mathrm{e}^{3x}\,, \quad x \in \mathbb{R}\,, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}\,.$$

Zpět

Příklad 3.6.3

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y''' - 9y'' + 27y' - 27y = 0\,.$

Návod:

Rovnice je LDR s konstantními koeficienty tvaru $k_0 y''' + k_1 y'' + k_2 y' + k_3 y = 0$ a její řešení hledáme podle návodu v prvním příkladě.

Zpět

Příklad 3.6.3

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y''' - 9y'' + 27y' - 27y = 0\,.$

Řešení:

Charakteristická rovnice zadané LDR $y''' - 9y'' + 27y' - 27y = 0$ je

$$\lambda^3 - 9\lambda^2 + 27\lambda - 27 = 0.$$

Levou stranu rovnice upravíme podle vzorce $A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3 = (A-B)^3$:

$$(\lambda - 3)^3 = 0.$$

Má jeden trojnásobný kořen $\lambda = 3$. Má-li charakteristická rovnice **jeden reálný** kořen λ **násobnosti tři**, pak obecné řešení HLDR má tvar

$$y(x) = C_1 \mathrm{e}^{\lambda x} + C_2\, x\, \mathrm{e}^{\lambda x} + C_3\, x^2\, \mathrm{e}^{\lambda x}\,, \quad x \in \mathbb{R}\,, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}\,.$$

Obecné řešení zadané LDR tedy je

$$y(x) = C_1\, \mathrm{e}^{3x} + C_2\, x\, \mathrm{e}^{3x} + C_3\, x^2\, \mathrm{e}^{3x}\,, \quad x \in \mathbb{R}\,, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}\,.$$

Zpět

Příklad 3.6.3

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y''' - 9y'' + 27y' - 27y = 0\,.$

Maple:

```
> DR:=(diff(y(x),x$3)-9*diff(y(x),x$2)+27*diff(y(x),x)-27*y(x)=0);
```

$$DR := \left(\frac{d^3}{dx^3}\,\mathrm{y}(x)\right) - 9\left(\frac{d^2}{dx^2}\,\mathrm{y}(x)\right) + 27\left(\frac{d}{dx}\,\mathrm{y}(x)\right) - 27\,\mathrm{y}(x) = 0$$

```
> dsolve(DR,y(x));
```

$$\mathrm{y}(x) = \_C1\, e^{(3\,x)} + \_C2\, e^{(3\,x)}\, x + \_C3\, e^{(3\,x)}\, x^2$$

Zpět

Příklad 3.6.3

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y''' - 9y'' + 27y' - 27y = 0$.

Mathematica:

$\mathbf{rovnice = y'''[x] - 9y''[x] + 27y'[x] - 27y[x] == 0;}$

$\mathbf{reseni = DSolve[rovnice, y[x], x]}$

$\{\{y[x] \to e^{3x}C[1] + e^{3x}xC[2] + e^{3x}x^2C[3]\}\}$

Zpět

Příklad 3.6.4

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y^{(4)} + 16y'' = 0$.

Zpět

Příklad 3.6.4

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y^{(4)} + 16y'' = 0$.

Výsledek:

$y(x) = C_1 + C_2 x + C_3 \cos 4x + C_4 \sin 4x\,, \quad x \in \mathbb{R}\,, \quad C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}\,.$

Zpět

Příklad 3.6.4

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y^{(4)} + 16y'' = 0\,.$

Návod:

Rovnice je LDR s konstantními koeficienty řádu 4. Její řešení hledáme analogicky jako v předchozích příkladech.

Zpět

Příklad 3.6.4

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y^{(4)} + 16y'' = 0\,.$

Řešení:

Charakteristická rovnice zadané LDR $y^{(4)} + 16y'' = 0$ je

$$\lambda^4 + 16\lambda^2 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\lambda^2(\lambda^2 + 16) = 0.$$

Její kořeny jsou $\lambda_{1,2} = 0$, $\lambda_3 = 4\,i$, $\lambda_4 = -4\,i$. Má-li charakteristická rovnice **jeden dvojnásobný reálný** kořen λ a **dva ryze imaginární komplexně sdružené** kořeny $\lambda_{3,4} = \pm b\,i$, pak obecné řešení HLDR má tvar

$$y(x) = C_1 \mathrm{e}^{\lambda x} + C_2\, x\, \mathrm{e}^{\lambda x} + C_3 \cos bx + C_4\, \sin bx\,, \quad x \in \mathbb{R}\,, \quad C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}\,.$$

Obecné řešení zadané LDR tedy je

$$y(x) = C_1 + C_2 x + C_3 \cos 4x + C_4 \sin 4x\,, \quad x \in \mathbb{R}\,, \quad C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}\,.$$

Zpět

Příklad 3.6.4

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y^{(4)} + 16y'' = 0\,.$

Maple:

```
> DR:=(diff(y(x),x$4)+16*diff(y(x),x$2)=0);
```

$$DR := \left(\frac{d^4}{dx^4}\,\mathrm{y}(x)\right) + 16\left(\frac{d^2}{dx^2}\,\mathrm{y}(x)\right) = 0$$

```
> dsolve(DR,y(x));
```

$$\mathrm{y}(x) = \_C1 + \_C2\,x + \_C3\,\sin(4\,x) + \_C4\,\cos(4\,x)$$

Zpět

Příklad 3.6.4

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y^{(4)} + 16y'' = 0$.

Mathematica:

$\mathbf{rovnice} = \boldsymbol{y}\mathbf{''''[\boldsymbol{x}] + 16\boldsymbol{y}''[\boldsymbol{x}] == 0;}$

$\mathbf{reseni = DSolve[rovnice, \boldsymbol{y}[\boldsymbol{x}], \boldsymbol{x}]}$

$\{\{y[x] \to C[3] + xC[4] - \frac{1}{16}C[1]\mathrm{Cos}[4x] - \frac{1}{16}C[2]\mathrm{Sin}[4x]\}\}$

Poznámka: Výsledek je totožný s předchozími výsledky, protože konstantu $-\frac{1}{16}$ můžeme zahrnout do konstanty $C[1]$ a $C[2]$.

Zpět

Příklad 3.6.5

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y''' - y = x$.

Zpět

Příklad 3.6.5

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y''' - y = x$.

Výsledek:

$$y(x) = C_1 e^{x} + C_2\, e^{-\frac{x}{2}} \cos(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\, x) + C_3\, e^{-\frac{x}{2}} \sin(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\, x) - x\,, \quad x \in \mathbb{R}\,, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}\,.$$

Zpět

Příklad 3.6.5

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y''' - y = x$.

Návod:

Rovnice je NLDR s konstantními koeficienty 3. řádu $k_0y''' + k_1y'' + k_2y' + k_3y = f(x)$, $k_0, k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}$, $k_0 \neq 0$. Její řešení je součtem obecného řešení přiřazené HLDR – $y_H(x)$ a partikulárního (jednoho) řešení zadané NLDR – $y_P(x)$, tj. $y(x) = y_H(x) + y_P(x)$. Obecné řešení $y_H(x)$ je diskutováno v předchozích příkladech. Partikulární řešení $y_P(x)$ můžeme nalézt pomocí tzv. metody variace konstant; v tomto případě je výhodnější tzv. metoda odhadu.

Zpět

Příklad 3.6.5

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y''' - y = x$.

Řešení:

Obecné řešení zadané NLDR má tvar

$$y(x) = y_H(x) + y_P(x)\,,$$

kde $y_H(x)$ je obecné řešení přiřazené HLDR, tj. diferenciální rovnice $y''' - y = 0$.
Odpovídající charakteristická rovnice je

$$\lambda^3 - 1 = 0.$$

Rozložme podle vzorce $A^3 - B^3 = (A - B) \cdot (A^2 + AB + B^2)$ levou stranu rovnice na součin:

$$(\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda + 1) = 0.$$

Její kořeny jsou $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\, i$, $\lambda_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\, i$. Obecné řešení přiřazené HLDR tedy je

$$y(x) = C_1\, \mathrm{e}^{x} + C_2\, \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} \cos(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\, x) + C_3\, \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} \sin(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\, x)\,, \quad x \in \mathbb{R}\,, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}\,.$$

Ukažme, že pravá strana zadané NLDR $f(x) = x$ je tzv. speciální pravá strana

$$\mathrm{e}^{a\,x}(P(x)\cos bx + Q(x)\sin bx)\,.$$

Další

Příklad 3.6.5

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y''' - y = x$.

Řešení:

Položíme-li $a = 0$, $b = 0$, $P(x) = x$ a $Q(x) = 0$, dostaneme $\mathrm{e}^{0x}(x\cos 0x + 0\sin 0x) = x$. V takovém případě umíme udělat odhad partikulárního řešení zadané NLDR:

$$y_P(x) = x^k \mathrm{e}^{ax}(R(x)\cos bx + S(x)\sin bx)\,,$$

kde $R(x)$, $S(x)$ jsou obecné polynomy stupně $\max\{\mathrm{st}P, \mathrm{st}Q\}$ a konstanty a, b známe z tvaru pravé strany $f(x)$. Je-li číslo $\alpha = a + b\,i = 0 + 0\,i$ kořenem charakteristické rovnice, je hodnota konstanty k rovna násobnosti tohoto kořene α. Není-li α kořenem charakteristické rovnice, je $k = 0$. Stupeň polynomu $P(x) = x$ je $\mathrm{st}P = 1$ a stupeň polynomu $Q(x) = 0$ je $\mathrm{st}Q = 0$. Odtud je $\mathrm{st}R, S = 1$, proto $R(x) = Ax + B$ a $S(x) = Cx + D$. Číslo $\alpha = 0$ není kořenem charakteristické rovnice ($\lambda_1 = 1, \lambda_{2,3} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\,i$), tedy $k = 0$. Máme

$$y_P(x) = x^0 \mathrm{e}^{0x}((Ax + B)\cos 0x + (Cx + D)\sin 0x) = Ax + B.$$

Zbývá určit konstanty A, B. Chceme, aby funkce $y_P(x) = Ax + B$ byla řešením zadané NLDR $y''' - y = x$, tedy ji splňovala. Spočtěme $y_P'''(x)$:

$$y_P'(x) = A \quad \Longrightarrow \quad y_P''(x) = y_P'''(x) = 0.$$

Další

Příklad 3.6.5

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y''' - y = x$.

Řešení:

Dosaďme do zadané NLDR y_P a y_P''' :

$$0 - (Ax + B) = x.$$

Polynomy na obou stranách rovnice se rovnají, jestliže se rovnají koeficienty u stejných mocnin proměnné x na levé a pravé straně, tj.

$$\begin{array}{rcl} -A & = & 1 \\ B & = & 0 \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{rcl} A & = & -1 \\ B & = & 0 \end{array}$$

Partikulární řešení zadané NLDR je

$$y_P(x) = -x .$$

Obecné řešení rovnice $y''' - y = x$ tedy je

$$y(x) = C_1 \mathrm{e}^x + C_2 \,\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} \cos(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\, x) + C_3 \,\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} \sin(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\, x) - x \,, \quad x \in \mathbb{R} \,, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R} \,.$$

Zpět

Příklad 3.6.5

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y''' - y = x$.

Maple:

```
> DR:=(diff(y(x),x$3)-y(x)=x);
```

$$DR := \left(\frac{d^3}{dx^3}\,\mathrm{y}(x)\right) - \mathrm{y}(x) = x$$

```
> dsolve(DR,y(x));
```

$$\mathrm{y}(x) = -x + \_C1\, e^x + \_C2\, e^{(-\frac{x}{2})} \sin\left(\frac{\sqrt{3}\,x}{2}\right) + \_C3\, e^{(-\frac{x}{2})} \cos\left(\frac{\sqrt{3}\,x}{2}\right)$$

Zpět

Příklad 3.6.5

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y''' - y = x$.

Mathematica:

$\mathbf{rovnice = y'''[x] - y[x] == x;}$

$\mathbf{reseni = DSolve[rovnice, y[x], x]}$

$\{\{y[x] \to -x + e^{x} C[1] + e^{-x/2} C[2] \mathrm{Cos}\left[\frac{\sqrt{3}x}{2}\right] + e^{-x/2} C[3] \mathrm{Sin}\left[\frac{\sqrt{3}x}{2}\right]\}\}$

Zpět

Příklad 3.6.6

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y^{(4)} + 2y'' + y = 3\sin x - 5\cos x$.

? Zpět

Příklad 3.6.6

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y^{(4)} + 2y'' + y = 3\sin x - 5\cos x$.

Výsledek:

$$y(x) = \cos x \left(C_1 + C_3\, x + \frac{5}{8}\, x^2 \right) + \sin x \left(C_2 + C_4\, x - \frac{3}{8}\, x^2 \right) \ ,$$

$x \in \mathbb{R}\,, \quad C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}\,.$

Zpět

Příklad 3.6.6

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y^{(4)} + 2y'' + y = 3\sin x - 5\cos x$.

Návod:

Rovnice je NLDR s konstantními koeficienty 4. řádu. Její řešení hledáme podle návodu v předchozím příkladě.

Zpět

Příklad 3.6.6

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y^{(4)} + 2y'' + y = 3\sin x - 5\cos x$.

Řešení:

Obecné řešení zadané NLDR má tvar

$$y(x) = y_H(x) + y_P(x) ,$$

kde $y_H(x)$ je obecné řešení přiřazené HLDR, tj. diferenciální rovnice $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$. Odpovídající charakteristická rovnice je

$$\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$(\lambda^2 + 1)^2 = 0.$$

Má dva dvojnásobné kořeny $\lambda_{1,2} = i$, $\lambda_{3,4} = -i$. Má-li charakteristická rovnice **dva dvojnásobné ryze imaginární komplexně sdružené** kořeny $\lambda_{1,2,3,4} = \pm b\,i$, pak obecné řešení HLDR má tvar

$$y(x) = C_1 \cos bx + C_2 \sin bx + C_3\, x\, \cos bx + C_4\, x\, \sin bx\,, \quad x \in \mathbb{R}\,, \quad C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}\,.$$

Obecné řešení zadané LDR tedy je

$$y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x + C_3\, x\, \cos x + C_4\, x\, \sin x\,, \quad x \in \mathbb{R}\,, \quad C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}\,.$$

Další

Příklad 3.6.6

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y^{(4)} + 2y'' + y = 3\sin x - 5\cos x$.

Řešení:

Ukažme, že pravá strana zadané NLDR $f(x) = 3\sin x - 5\cos x$ je speciální pravá strana

$$e^{ax}(P(x)\cos bx + Q(x)\sin bx)\ .$$

Položíme-li $a = 0$, $b = 1$, $P(x) = -5$ a $Q(x) = 3$, dostaneme $e^{0x}(-5\cos x + 3\sin x) = 3\sin x - 5\cos x$. Odhad partikulárního řešení je

$$y_P(x) = x^k e^{ax}(R(x)\cos bx + S(x)\sin bx)\ ,$$

kde $a = 0$, $b = 1$. Stupeň polynomu $P(x) = -5$ je $\mathrm{st}P = 0$ a stupeň polynomu $Q(x) = 3$ je $\mathrm{st}Q = 0$. Odtud je $\mathrm{st}R, S = 0$, proto $R(x) = A \in \mathbb{R}$ a $S(x) = B \in \mathbb{R}$. Číslo $\alpha = a + bi = i$ je dvojnásobným kořenem charakteristické rovnice, tedy $k = 2$. Máme

$$y_P(x) = x^2 e^{0x}(A\cos x + B\sin x) = x^2(A\cos x + B\sin x).$$

Určeme konstanty A, B. Funkce $y_P(x) = x^2(A\cos x + B\sin x)$ musí splňovat zadanou NLDR $y^{(4)} + 2y'' + y = 3\sin x - 5\cos x$. Spočtěme $y_P''(x)$ a $y_P^{(4)}(x)$:

$$y_P'(x) = 2x(A\cos x + B\sin x) + x^2(-A\sin x + B\cos x)$$

$$\Downarrow$$

$$y_P''(x) = 2(A\cos x + B\sin x) + 4x(-A\sin x + B\cos x) + x^2(-A\cos x - B\sin x).$$

$$\Downarrow$$

Další

Příklad 3.6.6

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y^{(4)} + 2y'' + y = 3\sin x - 5\cos x$.

Řešení:

$$y_P'''(x) = 6(-A\sin x + B\cos x) + 6x(-A\cos x - B\sin x) + x^2(A\sin x - B\cos x).$$
$$\Downarrow$$
$$y_P^{(4)}(x) = 12(-A\cos x - B\sin x) + 8x(A\sin x - B\cos x) + x^2(A\cos x + B\sin x).$$

Dosaďme do zadané NLDR y_P, y_P'' a $y_P^{(4)}$. Levá strana rovnice bude obsahovat mnoho sčítanců. Z důvodu přehlednosti pišme výrazy, které dosazujeme, následujícím způsobem: Na levé straně rovnice se budou vyskytovat násobky funkcí $\sin x$, $\cos x$, $x\sin x$, $x\cos x$, $x^2\sin x$, $x^2\cos x$. Napišme tyto funkce pod sebe a připisujme pouze příslušné konstanty, které u funkcí stojí, jak postupně do rovnice dosazujeme $y_P^{(4)}$, y_P'' a y_P. Aby byla rovnost $y_P^{(4)} + 2y_P'' + y_P = 3\sin x - 5\cos x$ splněna, musí se výrazy u funkcí $\sin x$, $\cos x$ na levé a pravé straně rovnosti sobě rovnat. Vše je zapsáno v následující tabulce.

levá strana	$y^{(4)} + 2y'' + y$	$=$	$3\sin x - 5\cos x$	**pravá strana**
$\sin x$:	$-12B + 4B$	$=$	3	: $\sin x$
$\cos x$:	$-12A + 4A$	$=$	-5	: $\cos x$
$x\sin x$:	$8A - 8A$	$=$	0	: $x\sin x$
$x\cos x$:	$-8B + 8B$	$=$	0	: $x\cos x$
$x^2\sin x$:	$B - 2B + B$	$=$	0	: $x^2\sin x$
$x^2\cos x$:	$A - 2A + A$	$=$	0	: $x^2\cos x$

Další

Příklad 3.6.6

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y^{(4)} + 2y'' + y = 3\sin x - 5\cos x\,.$

Řešení:

Hledejme řešení soustavy dvou rovnic pro neznámé A, B, které jsme z tabulky získali:

$$\begin{aligned} -8B &= 3 \\ -8A &= -5 \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} B &= -\tfrac{3}{8} \\ A &= \tfrac{5}{8} \end{aligned}$$

Partikulární řešení zadané NLDR je

$$y_P(x) = x^2\left(\frac{5}{8}\cos x - \frac{3}{8}\sin x\right).$$

Obecné řešení rovnice $y^{(4)} + 2y'' + y = 3\sin x - 5\cos x$ tedy je

$$\begin{aligned} y(x) &= C_1\cos x + C_2\sin x + C_3\,x\cos x + C_4\,x\sin x + x^2\left(\tfrac{5}{8}\cos x - \tfrac{3}{8}\sin x\right) \\ &= \cos x\left(C_1 + C_3\,x + \tfrac{5}{8}\,x^2\right) + \sin x\left(C_2 + C_4\,x - \tfrac{3}{8}\,x^2\right), \quad x \in \mathbb{R}, \quad C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

Zpět

Příklad 3.6.6

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y^{(4)} + 2y'' + y = 3\sin x - 5\cos x$.

Maple:

```
> DR:=(diff(y(x),x$4)+2*diff(y(x),x$2)+y(x)=3*sin(x)-5*cos(x));
```

$$DR := \left(\frac{d^4}{dx^4}\,\mathrm{y}(x)\right) + 2\left(\frac{d^2}{dx^2}\,\mathrm{y}(x)\right) + \mathrm{y}(x) = 3\sin(x) - 5\cos(x)$$

```
> dsolve(DR,y(x));
```

$$\mathrm{y}(x) = \left(-\frac{3}{8}\,x^2 + \frac{3}{8} - \frac{5}{4}\,x\right)\sin(x) + \left(\frac{5}{8}\,x^2 - \frac{35}{32} - \frac{3}{4}\,x\right)\cos(x) + \_C1\,\sin(x) + \_C2\,\cos(x) + \_C3\,\sin(x)\,x + \_C4\,\cos(x)\,x$$

Možná komentář, že to je zbytečně dlouhý zápis obecného řešení.

Zpět

Příklad 3.6.6

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y^{(4)} + 2y'' + y = 3\sin x - 5\cos x$.

Mathematica:

$$\mathbf{rovnice = y''''[x] + 2y''[x] + y[x] == 3Sin[x] - 5Cos[x];}$$

$$\mathbf{reseni = DSolve[rovnice, y[x], x]}$$

$\{\{y[x] \to C[1]\mathrm{Cos}[x] + xC[2]\mathrm{Cos}[x] + C[3]\mathrm{Sin}[x] + xC[4]\mathrm{Sin}[x] +$
$\frac{1}{16}\left(-12x\mathrm{Cos}[x] + 10x^2\mathrm{Cos}[x] - 20\mathrm{Cos}[x]^3 + 12x\mathrm{Cos}[x]^3 -\right.$
$5\mathrm{Cos}[x]\mathrm{Cos}[2x] - 6x\mathrm{Cos}[x]\mathrm{Cos}[2x] - 20x\mathrm{Sin}[x] - 6x^2\mathrm{Sin}[x] -$
$12\mathrm{Cos}[x]^2\mathrm{Sin}[x] - 20x\mathrm{Cos}[x]^2\mathrm{Sin}[x] - 3\mathrm{Cos}[2x]\mathrm{Sin}[x] +$
$\left.10x\mathrm{Cos}[2x]\mathrm{Sin}[x] + 9\mathrm{Cos}[x]\mathrm{Sin}[2x] - 15\mathrm{Sin}[x]\mathrm{Sin}[2x]\right)\}\}$

$$\mathbf{r1 = Simplify[reseni]}$$

$\left\{\left\{y[x] \to \frac{1}{16}\left(\left(-25 + 10x^2 + 16C[1] + 2x(-3 + 8C[2])\right)\mathrm{Cos}[x] +\right.\right.\right.$
$\left.\left.\left.\left(3 - 6x^2 + 16C[3] + 2x(-15 + 8C[4])\right)\mathrm{Sin}[x]\right)\right\}\right\}$

Poznámka: Výsledek je totožný s předchozími výsledky, protože konstanty můžeme volit následovně $C_1 = \frac{1}{16}(-25 + 16C[1])$, $C_3 = 2(-3 + 8C[2])$, $C_2 = \frac{1}{16}(3 + 16C[3])$ a $C_4 = 2(-15 + 8C[4])$.

Zpět

Příklad 3.6.7

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $xy'' - y' = x^2 e^x\,,\ x > 0\,.$

? Zpět

Příklad 3.6.7

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $xy'' - y' = x^2 \mathrm{e}^x\,,\ x > 0\,.$

Výsledek:

$$y(x) = C_1 + C_2\,\frac{x^2}{2} + x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x\,, \quad x \in (0, \infty)\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Zpět

Příklad 3.6.7

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $xy'' - y' = x^2 \mathrm{e}^x$, $x > 0$.

Návod:

Rovnice je NLDR 2. řádu. Její koeficiety nejsou konstantní funkce (x u y'') , proto neumíme nalézt obecné řešení přiřazené HLDR, ani partikulární řešení zadané NLDR. Vzhledem k tomu, že se v rovnici nevyskytuje funkce y, je výhodné zavést substituci $y'(x) = z(x)$. Dostaneme tak NLDR 1. řádu, kterou umíme vyřešit, viz. Sbírka řešených příkladů k Matematice I, Diferenciální rovnice 1. řádu, LDR 1. řádu. Postup se nazývá metoda snížení řádu.

Zpět

Příklad 3.6.7

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $xy'' - y' = x^2 \mathrm{e}^x$, $x > 0$.

Řešení:

Zadaná NLDR je 2. řádu s nekonstantními koeficienty, tedy neumíme nalézt obecné řešení přiřazené HLDR, ani partikulární řešení zadané NLDR. Protože se v rovnici nevyskytuje funkce y, zavedeme substituci $y'(x) = z(x)$. Pak $y''(x) = z'(x)$. Dosaďme do zadané NLDR za y' a y'':

$$xz' - z = x^2 \mathrm{e}^x, \quad x > 0\,.$$

Substitucí jsme snížili řád rovnice. Nová diferenciální rovnice je NLDR 1. řádu. Obě strany rovnice vydělíme funkcí x:

$$z' - \frac{1}{x}\,z = x\,\mathrm{e}^x, \quad x > 0\,.$$

Její obecné řešení má tvar

$$z(x) = z_H(x) + z_P(x)\,,$$

kde $z_H(x)$ je obecné řešení přiřazené HLDR, tj. diferenciální rovnice

$$z' - \frac{1}{x}\,z = 0.$$

Platí, že $z_H(x) = C\varphi(x)$, kde $\varphi(x)$ je jedno nenulové řešení přiřazené HLDR. Hledejme ho pomocí metody separace proměnných:

Další

Příklad 3.6.7

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $xy'' - y' = x^2 \mathrm{e}^x$, $x > 0$.

Řešení:

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x}\,z \quad \Rightarrow \quad \int \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z = \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \quad \Rightarrow \quad \ln|z| = \ln|x| \quad \Rightarrow \quad |z| = |x| \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \text{např.} \quad z = \varphi(x) = x.$$

Integrační konstantu jsme nepsali, protože hledáme **jedno** řešení $\varphi(x)$. Tedy

$$z_H(x) = C\,x.$$

Partikulární řešení NLDR $z' - \frac{1}{x}\,z = x\,\mathrm{e}^x$ hledáme ve tvaru součinu

$$z_P(x) = C(x)\,\varphi(x) = C(x)\,x,$$

kde $C(x)$ je neznámá funkce, tj. v $z_H(x)$ nahradíme konstantu C funkcí $C(x)$. Zbývá určit funkci $C(x)$. Chceme, aby $z_P(x)$ splňovalo rovnost $z' - \frac{1}{x}\,z = x\,\mathrm{e}^x$. Proto spočteme $z'_P(x)$: $z'_P(x) = C'(x)\,x + C(x)$ a dosadíme z'_P a z_P do rovnice.

$$z' - \frac{1}{x}\,z = x\,\mathrm{e}^x \quad \Rightarrow \quad C'(x)\,x + C(x) - \frac{1}{x}\,C(x)\,x = x\,\mathrm{e}^x \quad \Rightarrow \quad C'(x) = \mathrm{e}^x$$

$$\Rightarrow \quad C(x) = \int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \quad \Rightarrow \quad C(x) = \mathrm{e}^x$$

Integrační konstantu nepíšeme, neboť hledáme **jedno** řešení $z_P(x)$, tedy **jednu** funkci $C(x)$.

Další

Příklad 3.6.7

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $xy'' - y' = x^2 e^x$, $x > 0$.

Řešení:

Partikulární řešení rovnice $z' - \frac{1}{x} z = x\,e^x$ je

$$z_P(x) = e^x \cdot x = xe^x .$$

Její obecné řešení je tedy

$$z(x) = C\,x + xe^x .$$

Vzhledem k tomu, že $z(x) = y'(x)$, je

$$\begin{aligned} y(x) &= \int (C\,x + xe^x)\,dx = C\,\frac{x^2}{2} + \int xe^x\,dx = \left| \begin{array}{ll} u'(x) = e^x , & u(x) = e^x \\ v(x) = x, & v'(x) = 1 \end{array} \right| \\ &= C\,\frac{x^2}{2} + xe^x - \int e^x\,dx = C\,\frac{x^2}{2} + xe^x - e^x + D \\ &= C_1 + C_2\,\frac{x^2}{2} + xe^x - e^x , \quad x \in (0,\infty) , \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R} . \end{aligned}$$

Definičním oborem je interval $(0,\infty)$, na kterém je pravá strana rovnice a koeficienty rovnice definované a spojité. Konstanty jsme přejmenovali pouze proto, aby bylo vidět, že obecné řešení zadané NLDR má opět tvar

$$y(x) = y_H(x) + y_P(x) ,$$

kde obecné řešení přiřazené HLDR $y_H(x)$ je lineární kombinací dvou lineárně nezávislých řešení přiřazené HLDR.

Zpět

Příklad 3.6.7

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $xy'' - y' = x^2 e^x$, $x > 0$.

Maple:

```
> DR:=(x*diff(y(x),x$2)-diff(y(x),x)=x^2*exp(x));
```

$$DR := x\,(\frac{d^2}{dx^2}\,\mathrm{y}(x)) - (\frac{d}{dx}\,\mathrm{y}(x)) = x^2\,e^x$$

```
> dsolve(DR,y(x));
```

$$\mathrm{y}(x) = x\,e^x - e^x + \frac{x^2\,\_C1}{2} + \_C2$$

Zpět

Příklad 3.6.7

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $xy'' - y' = x^2 e^x$, $x > 0$.

Mathematica:

$\mathbf{rovnice} = \boldsymbol{x}\ \boldsymbol{y}\text{"}[\boldsymbol{x}] - \boldsymbol{y}'[\boldsymbol{x}] == \boldsymbol{x}\text{\^{}}\mathbf{2Exp}[\boldsymbol{x}];$

$\mathbf{reseni} = \mathbf{DSolve}[\mathbf{rovnice}, \boldsymbol{y}[\boldsymbol{x}], \boldsymbol{x}]$

$\{\{y[x] \to e^x(-1+x) + \frac{1}{2}x^2 C[1] + C[2]\}\}$

Zpět