Kapitola 4: Soustavy diferenciálních rovnic 1. řádu

Chcete-li ukončit prohlížení stiskněte klávesu **Esc**.
Chcete-li pokračovat stiskněte klávesu **Enter**.

Soustavy diferenciálních rovnic 1. řádu

- Autonomní lineární soustavy
- Eulerova metoda

Zpět

- **Příklad 4.1.1** Nalezněte obecné řešení soustavy lineárních diferenciálních rovnic

$$\begin{array}{rcl} x' & = & x + y \\ y' & = & 4x + y \end{array}.$$

- **Příklad 4.1.2** Nalezněte řešení soustavy lineárních diferenciálních rovnic

$$\begin{array}{rcl} x' & = & 3x + 6y \\ y' & = & -x - 2y \end{array},$$

  které vyhovuje počáteční podmínce $x(0) = 2,\ y(0) = 1$.

- **Příklad 4.1.3** Nalezněte obecné řešení soustavy lineárních diferenciálních rovnic

$$\begin{array}{rcl} x' & = & -x - 4y \\ y' & = & x - y \end{array}.$$

- **Příklad 4.1.4** Nalezněte řešení soustavy lineárních diferenciálních rovnic

$$\begin{array}{rcl} x' & = & -x - y \\ y' & = & 5x + y \end{array},$$

  které vyhovuje počáteční podmínce $x(0) = 1,\ y(0) = -1$.

Zpět

Příklad 4.1.1

Nalezněte obecné řešení soustavy lineárních diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= x + y \\ y' &= 4x + y \end{aligned} \quad .$$

Zpět

Příklad 4.1.1

Nalezněte obecné řešení soustavy lineárních diferenciálních rovnic

$$\begin{array}{rcl} x' & = & x + y \\ y' & = & 4x + y \end{array} .$$

Výsledek:

$$\begin{array}{rcl} x(t) & = & C_1\,\mathrm{e}^{-t} + C_2\,\mathrm{e}^{3t} \\ y(t) & = & -2\,C_1\,\mathrm{e}^{-t} + 2\,C_2\,\mathrm{e}^{3t} \end{array} \qquad t \in \mathbb{R}\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Zpět

Příklad 4.1.1

Nalezněte obecné řešení soustavy lineárních diferenciálních rovnic

$$\begin{array}{rcl} x' & = & x+y \\ y' & = & 4x+y \end{array} \; .$$

Návod:

Řešení soustavy dvou lineárních diferenciálních rovnic 1. řádu s konstantními koeficienty hledáme ve tvaru

$$\vec{z}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \mathrm{e}^{\lambda t} \cdot \vec{h} \, ,$$

kde λ je vlastní číslo matice soustavy a $\vec{h}$ je vlastní vektor příslušný k vlastnímu číslu λ.

Zpět

Příklad 4.1.1

Nalezněte obecné řešení soustavy lineárních diferenciálních rovnic

$$\begin{array}{rcl} x' & = & x + y \\ y' & = & 4x + y \end{array} .$$

Řešení:

Položme

$$\vec{z}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \vec{z}\,'(t) = \begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix}.$$

Přepišme zadanou autonomní soustavu pomocí matic:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \vec{z}\,' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \vec{z}\,.$$

Matice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

se nazývá matice soustavy. Řešení této soustavy hledáme ve tvaru

$$\vec{z}(t) = \mathrm{e}^{\lambda t} \cdot \vec{h}\,,$$

kde λ je vlastní číslo matice A a $\vec{h}$ je vlastní vektor příslušný k vlastnímu číslu λ. Číslo λ tedy řeší tzv. charakteristickou rovnici matice A:

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

a k němu příslušný vlastní vektor $\vec{h}$ je pak řešením soustavy

$$(A - \lambda E)\,\vec{h} = \vec{0}\,.$$

Další

Příklad 4.1.1

Nalezněte obecné řešení soustavy lineárních diferenciálních rovnic

$$\begin{array}{rcl} x' & = & x + y \\ y' & = & 4x + y \end{array}.$$

Řešení:

Charakteristická rovnice matice A je

$$\det\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Longrightarrow$$

$$(1-\lambda)(1-\lambda) - 4 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0.$$

Její kořeny jsou $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 3$. (Pro chytřejší poznámka: Kvadratická rovnice je v normovaném tvaru, kořeny lze určit z jejich vlastností $\lambda_1 + \lambda_2 = 2$, $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = -3$.)
Vlastní vektor příslušný k $\lambda_1 = -1$ musí splňovat rovnost

$$(A - (-1)E)\,\vec{h} = \vec{0}\,.$$

$$\Downarrow$$

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) \cdot \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned} 2h_1 + h_2 &= 0 \\ 4h_1 + 2h_2 &= 0 \end{aligned}$$

Další

Příklad 4.1.1

Nalezněte obecné řešení soustavy lineárních diferenciálních rovnic

$$\begin{array}{rcl} x' & = & x + y \\ y' & = & 4x + y \end{array}.$$

Řešení:

První rovnice předchozí soustavy je násobkem druhé rovnice (vždy to tak musí být), proto má soustava nekonečně mnoho řešení (h_1, h_2). Protože hledáme **jeden** vlastní vektor příslušný k $\lambda_1 = -1$, chceme **jedno** libovolné řešení. Zvolíme např. $h_1 = 1$, pak z první rovnice $2 \cdot 1 + h_2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad h_2 = -2$. Vlastní vektor příslušný k $\lambda_1 = -1$ je

$$\vec{h}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Vlastní vektor příslušný k $\lambda_2 = 3$ musí splňovat rovnost

$$(A - 3\,E)\,\vec{h} = \vec{0}\,.$$

$$\Downarrow$$

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned} -2h_1 + h_2 &= 0 \\ 4h_1 - 2h_2 &= 0 \end{aligned}$$

Zvolíme např. $h_1 = 1$, pak z první rovnice $-2 \cdot 1 + h_2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad h_2 = 2$. Vlastní vektor příslušný k $\lambda_2 = 3$ je

$$\vec{h}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Další

Příklad 4.1.1

Nalezněte obecné řešení soustavy lineárních diferenciálních rovnic

$$\begin{array}{rcl} x' & = & x+y \\ y' & = & 4x+y \end{array} .$$

Řešení:

Má-li charakteristická rovnice matice soustavy dvou lineárních diferenciálních rovnic **dva různé reálné** kořeny λ_1, λ_2, pak obecné řešení této soustavy má tvar

$$\vec{z}(t) = C_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 t} \cdot \vec{h}_1 + C_2 \,\mathrm{e}^{\lambda_2 t} \cdot \vec{h}_2 \,, \quad t \in \mathbb{R} \,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R} \,,$$

kde $\vec{h}_1, \vec{h}_2$ jsou příslušné vlastní vektory k λ_1, λ_2. Obecné řešení zadané soustavy lineárních diferenciálních rovnic tedy je

$$\vec{z}(t) = C_1 \mathrm{e}^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + C_2 \,\mathrm{e}^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} , \quad t \in \mathbb{R} \,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R} \,.$$

Rozepišme ho po složkách:

$$\begin{array}{rcl} x(t) & = & C_1 \,\mathrm{e}^{-t} + C_2 \,\mathrm{e}^{3t} \\ y(t) & = & -2\, C_1 \,\mathrm{e}^{-t} + 2\, C_2 \,\mathrm{e}^{3t} \,. \end{array}$$

Zpět

Příklad 4.1.1

Nalezněte obecné řešení soustavy lineárních diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= x + y \\ y' &= 4x + y \end{aligned}.$$

Maple:

```
> DR1:=(diff(x(t),t)=x(t)+y(t));
```

$$DR1 := \frac{d}{dt}\,\mathrm{x}(t) = \mathrm{x}(t) + \mathrm{y}(t)$$

```
> DR2:=(diff(y(t),t)=4*x(t)+y(t));
```

$$DR2 := \frac{d}{dt}\,\mathrm{y}(t) = 4\,\mathrm{x}(t) + \mathrm{y}(t)$$

```
> dsolve({DR1,DR2},{x(t),y(t)});
```

$$\{\mathrm{x}(t) = \_C1\;e^{(-t)} + \_C2\;e^{(3\,t)},\; \mathrm{y}(t) = -2\,\_C1\;e^{(-t)} + 2\,\_C2\;e^{(3\,t)}\}$$

Zpět

Příklad 4.1.1

Nalezněte obecné řešení soustavy lineárních diferenciálních rovnic

$$\begin{array}{rcl} x' & = & x+y \\ y' & = & 4x+y \end{array}.$$

Mathematica:

$$\mathbf{rovnice1} = \boldsymbol{x}'[\boldsymbol{t}] == \boldsymbol{x}[\boldsymbol{t}] + \boldsymbol{y}[\boldsymbol{t}];$$

$$\mathbf{rovnice2} = \boldsymbol{y}'[\boldsymbol{t}] == \mathbf{4}\boldsymbol{x}[\boldsymbol{t}] + \boldsymbol{y}[\boldsymbol{t}];$$

$$\mathbf{reseni} = \mathbf{DSolve}[\{\mathbf{rovnice1}, \mathbf{rovnice2}\}, \{\boldsymbol{x}[\boldsymbol{t}], \boldsymbol{y}[\boldsymbol{t}]\}, \boldsymbol{t}]$$

$$\Big\{\Big\{x[t] \to \tfrac{1}{2}e^{-t}\left(1+e^{4t}\right)C[1] + \tfrac{1}{4}e^{-t}\left(-1+e^{4t}\right)C[2],$$
$$y[t] \to e^{-t}\left(-1+e^{4t}\right)C[1] + \tfrac{1}{2}e^{-t}\left(1+e^{4t}\right)C[2]\Big\}\Big\}$$

Komentář:výsledek je stejný jako náš výsledek, který jsme vypočetli v řešení. Stačí zvolit $C_1 = \frac{1}{2}C[1] - \frac{1}{4}C[2]$ a $C_2 = \frac{1}{2}C[1] + \frac{1}{4}C[2]$

Zpět

Příklad 4.1.2

Nalezněte řešení soustavy lineárních diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= 3x + 6y \\ y' &= -x - 2y \end{aligned},$$

které vyhovuje počáteční podmínce $x(0) = 2,\ y(0) = 1$.

Zpět

Příklad 4.1.2

Nalezněte řešení soustavy lineárních diferenciálních rovnic

$$\begin{array}{rcl} x' & = & 3x + 6y \\ y' & = & -x - 2y \end{array} ,$$

které vyhovuje počáteční podmínce $x(0) = 2,\ y(0) = 1.$

Výsledek:

$$\begin{array}{rcl} x(t) & = & -10 + 12\,\mathrm{e}^t \\ y(t) & = & 5 - 4\,\mathrm{e}^t \end{array} \qquad t \in \mathbb{R}\,.$$

Zpět

Příklad 4.1.2

Nalezněte řešení soustavy lineárních diferenciálních rovnic

$$\begin{array}{rcl} x' & = & 3x + 6y \\ y' & = & -x - 2y \end{array},$$

které vyhovuje počáteční podmínce $x(0) = 2,\ y(0) = 1.$

Návod:

Nejprve najdeme obecné řešení soustavy podle návodu v předchozím příkladě a pak určíme konstanty C_1, C_2 tak, aby nalezené řešení splňovalo počáteční podmínku.

Zpět

Příklad 4.1.2

Nalezněte řešení soustavy lineárních diferenciálních rovnic

$$\begin{array}{rcl} x' & = & 3x + 6y \\ y' & = & -x - 2y \end{array},$$

které vyhovuje počáteční podmínce $x(0) = 2,\ y(0) = 1$.

Řešení:

Položme

$$\vec{z}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \vec{z}\,'(t) = \begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix}.$$

Přepišme zadanou autonomní soustavu pomocí matic:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \vec{z}\,' = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \vec{z}\,.$$

Maticí soustavy je

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Řešení této soustavy hledáme ve tvaru

$$\vec{z}(t) = \mathrm{e}^{\lambda t} \cdot \vec{h}\,,$$

kde λ je vlastní číslo matice A a $\vec{h}$ je vlastní vektor příslušný k vlastnímu číslu λ.
Číslo λ tedy řeší tzv. charakteristickou rovnici matice A:

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

a k němu příslušný vlastní vektor $\vec{h}$ je pak řešením soustavy $(A - \lambda E)\,\vec{h} = \vec{0}\,.$

Další

Příklad 4.1.2

Nalezněte řešení soustavy lineárních diferenciálních rovnic

$$\begin{array}{rcl} x' & = & 3x + 6y \\ y' & = & -x - 2y \end{array},$$

které vyhovuje počáteční podmínce $x(0) = 2,\ y(0) = 1$.

Řešení:

Charakteristická rovnice matice A je

$$\det\left(\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{vmatrix} 3-\lambda & 6 \\ -1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Longrightarrow$$

$$(3-\lambda)(-2-\lambda) + 6 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda^2 - \lambda = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda\,(\lambda - 1) = 0.$$

Její kořeny jsou $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$. Vlastní vektor příslušný k $\lambda_1 = 0$ musí splňovat rovnost

$$(A - 0 \cdot E)\,\vec{h} = \vec{0}\,.$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{array}{r} 3h_1 + 6h_2 = 0 \\ -h_1 - 2h_2 = 0 \end{array}$$

První rovnice předchozí soustavy je násobkem druhé rovnice (vždy to tak musí být), proto má soustava nekonečně mnoho řešení (h_1, h_2). Protože hledáme **jeden** vlastní vektor příslušný k $\lambda_1 = 0$, chceme **jedno** libovolné řešení. Zvolíme např. $h_2 = 1$, pak z druhé rovnice $-h_1 - 2 \cdot 1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad h_1 = -2$.

Další

Příklad 4.1.2

Nalezněte řešení soustavy lineárních diferenciálních rovnic

$$\begin{array}{rcl} x' & = & 3x + 6y \\ y' & = & -x - 2y \end{array},$$

které vyhovuje počáteční podmínce $x(0) = 2,\ y(0) = 1$.

Řešení:

Vlastní vektor příslušný k $\lambda_1 = 0$ je

$$\vec{h}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Vlastní vektor příslušný k $\lambda_2 = 1$ musí splňovat rovnost

$$(A - 1 \cdot E)\,\vec{h} = \vec{0}\,.$$

$$\Downarrow$$

$$\left(\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) \cdot \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned} 2h_1 + 6h_2 &= 0 \\ -h_1 - 3h_2 &= 0 \end{aligned}$$

Zvolíme např. $h_2 = 1$, pak z druhé rovnice $-h_1 - 3 \cdot 1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad h_1 = -3$. Vlastní vektor příslušný k $\lambda_2 = 1$ je

$$\vec{h}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Další

Příklad 4.1.2

Nalezněte řešení soustavy lineárních diferenciálních rovnic

$$\begin{array}{rcl} x' & = & 3x + 6y \\ y' & = & -x - 2y \end{array} ,$$

které vyhovuje počáteční podmínce $x(0) = 2,\; y(0) = 1$.

Řešení:

Obecné řešení zadané soustavy lineárních diferenciálních rovnic tedy je

$$\vec{z}(t) = C_1 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2\,\mathrm{e}^t \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Rozepišme ho po složkách:

$$\begin{array}{rcl} x(t) & = & -2\,C_1 - 3\,C_2\,\mathrm{e}^t \\ y(t) & = & C_1 + C_2\,\mathrm{e}^t\,. \end{array}$$

Nyní určíme konstanty C_1, C_2 tak, aby nalezené řešení vyhovovalo počáteční podmínce $x(0) = 2,\; y(0) = 1$. Po dosazení počátečních podmínek do obecného řešení dostaneme

$$\begin{array}{rcl} 2 & = & -2\,C_1 - 3\,C_2 \\ 1 & = & C_1 + C_2 \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{rcl} 2 & = & -2\,C_1 - 3\,C_2 \\ 2 & = & 2\,C_1 + 2\,C_2 \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{rcl} C_2 & = & -4 \\ C_1 & = & 5 \end{array}$$

Hledané řešení tedy je

$$\begin{array}{rcl} x(t) & = & -10 + 12\,\mathrm{e}^t \\ y(t) & = & 5 - 4\,\mathrm{e}^t \end{array} \qquad t \in \mathbb{R}\,.$$

Rovnice jsou parametrickými rovnicemi trajektorie nalezeného řešení (rovinné křivky).

Zpět

Příklad 4.1.2

Nalezněte řešení soustavy lineárních diferenciálních rovnic

$$\begin{array}{rcl} x' & = & 3x + 6y \\ y' & = & -x - 2y \end{array},$$

které vyhovuje počáteční podmínce $x(0) = 2,\ y(0) = 1$.

Maple:

```
> DR1:=(diff(x(t),t)=3*x(t)+6*y(t));
```

$$DR1 := \frac{d}{dt}\,\mathrm{x}(t) = 3\,\mathrm{x}(t) + 6\,\mathrm{y}(t)$$

```
> DR2:=(diff(y(t),t)=-x(t)-2*y(t));
```

$$DR2 := \frac{d}{dt}\,\mathrm{y}(t) = -\mathrm{x}(t) - 2\,\mathrm{y}(t)$$

```
> PP:=x(0)=2,y(0)=1;
```

$$PP := \mathrm{x}(0) = 2,\ \mathrm{y}(0) = 1$$

```
> dsolve({DR1,DR2,PP},{x(t),y(t)});
```

$$\{\mathrm{x}(t) = -10 + 12\,e^t,\ \mathrm{y}(t) = -4\,e^t + 5\}$$

Zpět

Příklad 4.1.2

Nalezněte řešení soustavy lineárních diferenciálních rovnic

$$\begin{array}{rcl} x' & = & 3x + 6y \\ y' & = & -x - 2y \end{array},$$

které vyhovuje počáteční podmínce $x(0) = 2,\ y(0) = 1$.

Mathematica:

$\mathbf{rovnice1 = \boldsymbol{x}'[\boldsymbol{t}] == 3\boldsymbol{x}[\boldsymbol{t}] + 6\boldsymbol{y}[\boldsymbol{t}];}$

$\mathbf{rovnice2 = \boldsymbol{y}'[\boldsymbol{t}] == -\boldsymbol{x}[\boldsymbol{t}] - 2\boldsymbol{y}[\boldsymbol{t}];}$
$\mathbf{pp1 = \boldsymbol{x}[0] == 2;}$
$\mathbf{pp2 = \boldsymbol{y}[0] == 1;}$

$\mathbf{reseni = DSolve[\{rovnice1, rovnice2, pp1, pp2\}, \{\boldsymbol{x}[\boldsymbol{t}], \boldsymbol{y}[\boldsymbol{t}]\}, \boldsymbol{t}]}$

$\{\{x[t] \to 2\left(-5 + 6e^{t}\right), y[t] \to 5 - 4e^{t}\}\}$

Zpět

Příklad 4.1.3

Nalezněte obecné řešení soustavy lineárních diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= -x - 4y \\ y' &= x - y \end{aligned} \quad .$$

? Zpět

Příklad 4.1.3

Nalezněte obecné řešení soustavy lineárních diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= -x - 4y \\ y' &= x - y \end{aligned} \quad .$$

Výsledek:

$$\begin{aligned} x(t) &= -2\,C_1\,\mathrm{e}^{-t}\sin 2t + 2\,C_2\,\mathrm{e}^{-t}\cos 2t \\ y(t) &= C_1\,\mathrm{e}^{-t}\cos 2t + C_2\,\mathrm{e}^{-t}\sin 2t \end{aligned} \qquad t \in \mathbb{R}\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Zpět

Příklad 4.1.3

Nalezněte obecné řešení soustavy lineárních diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= -x - 4y \\ y' &= x - y \end{aligned} .$$

Návod:

Řešení hledáme podle návodu v příkladě 4.1.1. Zpět

Příklad 4.1.3

Nalezněte obecné řešení soustavy lineárních diferenciálních rovnic

$$\begin{array}{rcl} x' & = & -x-4y \\ y' & = & x-y \end{array}\,.$$

Řešení:

Položme

$$\vec{z}(t)=\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \quad\Longrightarrow\quad \vec{z}\,'(t)=\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix}.$$

Přepišme zadanou autonomní soustavu pomocí matic:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad\Longrightarrow\quad \vec{z}\,'=\begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\vec{z}\,.$$

Maticí soustavy je

$$A=\begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Řešení této soustavy hledáme ve tvaru

$$\vec{z}(t)=\mathrm{e}^{\lambda t}\cdot\vec{h}\,,$$

kde λ je vlastní číslo matice A a $\vec{h}$ je vlastní vektor příslušný k vlastnímu číslu λ. Číslo λ tedy řeší tzv. charakteristickou rovnici matice A:

$$\det(A-\lambda E)=0$$

a k němu příslušný vlastní vektor $\vec{h}$ je pak řešením soustavy

$$(A-\lambda E)\,\vec{h}=\vec{0}\,.$$

Další

Příklad 4.1.3

Nalezněte obecné řešení soustavy lineárních diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= -x - 4y \\ y' &= x - y \end{aligned} \quad .$$

Řešení:

Charakteristická rovnice matice A je

$$\det\left(\begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{vmatrix} -1-\lambda & -4 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Longrightarrow$$

$$(-1-\lambda)(-1-\lambda) + 4 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0.$$

Její kořeny jsou $\lambda_1 = -1 + 2\,i$, $\lambda_2 = -1 - 2\,i$. (Kořeny kvadratické rovnice hledáme v oboru komplexních čísel, nalezneme je pomocí vzorečku $\lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4\cdot 1\cdot 5}}{2\cdot 1}$.)

Vlastní vektor příslušný k $\lambda_1 = -1 + 2\,i$ musí splňovat rovnost

$$(A - (-1+2\,i)E)\,\vec{h} = \vec{0}\,.$$

$$\Downarrow$$

$$\left(\begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1+2\,i & 0 \\ 0 & -1+2\,i \end{bmatrix}\right) \cdot \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{bmatrix} -2\,i & -4 \\ 1 & -2\,i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned} -2\,i\,h_1 - 4h_2 &= 0 \\ h_1 - 2\,i\,h_2 &= 0 \end{aligned}$$

První rovnice předchozí soustavy je násobkem druhé rovnice (vždy to tak musí být), proto má soustava nekonečně mnoho řešení (h_1, h_2).

Další

Příklad 4.1.3

Nalezněte obecné řešení soustavy lineárních diferenciálních rovnic

$$\begin{array}{rcl} x' & = & -x-4y \\ y' & = & x-y \end{array} .$$

Řešení:

Protože hledáme **jeden** vlastní vektor příslušný k $\lambda_1 = -1 + 2\,i$, chceme **jedno** libovolné řešení v oboru komplexních čísel. Zvolíme např. $h_2 = 1$, pak z druhé rovnice $h_1 - 2\,i \cdot 1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad h_1 = 2\,i$. Vlastní vektor příslušný k $\lambda_1 = -1 + 2\,i$ je

$$\vec{h}_1 = \begin{bmatrix} 2\,i \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Má-li charakteristická rovnice matice soustavy dvou lineárních diferenciálních rovnic **dva imaginární komplexně sdružené** kořeny $\lambda_1 = a + b\,i, \lambda_2 = a - b\,i$, pak obecné řešení této soustavy má tvar

$$\vec{z}(t) = C_1 \operatorname{Re}(\mathrm{e}^{\lambda_1 t}\vec{h}_1) + C_2 \operatorname{Im}(\mathrm{e}^{\lambda_1 t}\vec{h}_1)\,, \quad t \in \mathbb{R}\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}\,,$$

kde $\vec{h}_1$ je příslušný vlastní vektor k λ_1. Hledejme reálnou a imaginární část komplexního řešení:

$$\vec{z}_1(t) = \mathrm{e}^{\lambda_1 t}\vec{h}_1 = \mathrm{e}^{(-1+2\,i)t} \begin{bmatrix} 2\,i \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Použijeme vzorec $\mathrm{e}^{(a+b\,i)t} = \mathrm{e}^{a\,t}(\cos bt + i\,\sin bt)$. Pak

$$\vec{z}_1(t) = (\mathrm{e}^{-t}\cos 2t + i\,\mathrm{e}^{-t}\sin 2t) \begin{bmatrix} 2\,i \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\,i\,\mathrm{e}^{-t}\cos 2t + 2\,i \cdot i\,\mathrm{e}^{-t}\sin 2t \\ \mathrm{e}^{-t}\cos 2t + i\,\mathrm{e}^{-t}\sin 2t \end{bmatrix}$$

Další

Příklad 4.1.3

Nalezněte obecné řešení soustavy lineárních diferenciálních rovnic

$$\begin{array}{rcl} x' & = & -x-4y \\ y' & = & x-y \end{array}\,.$$

Řešení:

$$= \begin{bmatrix} i\,2\,\mathrm{e}^{-t}\cos 2t - 2\,\mathrm{e}^{-t}\sin 2t \\ \mathrm{e}^{-t}\cos 2t + i\,\mathrm{e}^{-t}\sin 2t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\,\mathrm{e}^{-t}\sin 2t \\ \mathrm{e}^{-t}\cos 2t \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 2\,\mathrm{e}^{-t}\cos 2t \\ \mathrm{e}^{-t}\sin 2t \end{bmatrix}.$$

Reálná a imaginární část komplexního řešení $\vec{z}_1(t)$ je

$$\mathrm{Re}\,\vec{z}_1(t) = \begin{bmatrix} -2\,\mathrm{e}^{-t}\sin 2t \\ \mathrm{e}^{-t}\cos 2t \end{bmatrix} = \mathrm{e}^{-t}\begin{bmatrix} -2\sin 2t \\ \cos 2t \end{bmatrix} \quad \mathrm{Im}\,\vec{z}_1(t) = \begin{bmatrix} 2\,\mathrm{e}^{-t}\cos 2t \\ \mathrm{e}^{-t}\sin 2t \end{bmatrix} = \mathrm{e}^{-t}\begin{bmatrix} 2\cos 2t \\ \sin 2t \end{bmatrix}.$$

Obecné řešení zadané soustavy lineárních diferenciálních rovnic tedy je

$$\vec{z}(t) = C_1\,\mathrm{e}^{-t}\begin{bmatrix} -2\sin 2t \\ \cos 2t \end{bmatrix} + C_2\,\mathrm{e}^{-t}\begin{bmatrix} 2\cos 2t \\ \sin 2t \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Rozepišme ho po složkách:

$$\begin{array}{rcl} x(t) & = & -2\,C_1\,\mathrm{e}^{-t}\sin 2t + 2\,C_2\,\mathrm{e}^{-t}\cos 2t \\ y(t) & = & C_1\,\mathrm{e}^{-t}\cos 2t + C_2\,\mathrm{e}^{-t}\sin 2t\,. \end{array}$$

Zpět

Příklad 4.1.3

Nalezněte obecné řešení soustavy lineárních diferenciálních rovnic

$$\begin{array}{rcl} x' & = & -x-4y \\ y' & = & x-y \end{array}.$$

Maple:

```
> DR1:=(diff(x(t),t)=-x(t)-4*y(t));
```

$$DR1 := \frac{d}{dt}\,\mathrm{x}(t) = -\mathrm{x}(t) - 4\,\mathrm{y}(t)$$

```
> DR2:=(diff(y(t),t)=x(t)-y(t));
```

$$DR2 := \frac{d}{dt}\,\mathrm{y}(t) = \mathrm{x}(t) - \mathrm{y}(t)$$

```
> dsolve({DR1,DR2},{x(t),y(t)});
```

$$\{\mathrm{y}(t) = -\frac{1}{2}\,e^{(-t)}\,(\_C1\,\cos(2\,t) - \_C2\,\sin(2\,t)),\ \mathrm{x}(t) = e^{(-t)}\,(\_C1\,\sin(2\,t) + \_C2\,\cos(2\,t))\}$$

Zpět

Příklad 4.1.3

Nalezněte obecné řešení soustavy lineárních diferenciálních rovnic

$$\begin{array}{rcl} x' & = & -x - 4y \\ y' & = & x - y \end{array} .$$

Mathematica:

$\mathbf{rovnice1} = \boldsymbol{x}'[\boldsymbol{t}] == -\boldsymbol{x}[\boldsymbol{t}] - 4\boldsymbol{y}[\boldsymbol{t}];$

$\mathbf{rovnice2} = \boldsymbol{y}'[\boldsymbol{t}] == \boldsymbol{x}[\boldsymbol{t}] - \boldsymbol{y}[\boldsymbol{t}];$

$\mathbf{reseni} = \mathbf{DSolve}[\{\mathbf{rovnice1}, \mathbf{rovnice2}\}, \{\boldsymbol{x}[\boldsymbol{t}], \boldsymbol{y}[\boldsymbol{t}]\}, \boldsymbol{t}]$

$\{\{x[t] \to e^{-t}C[1]\mathrm{Cos}[2t] - 2e^{-t}C[2]\mathrm{Sin}[2t],$
$y[t] \to e^{-t}C[2]\mathrm{Cos}[2t] + \frac{1}{2}e^{-t}C[1]\mathrm{Sin}[2t]\}\}$

Zpět

Příklad 4.1.4

Nalezněte řešení soustavy lineárních diferenciálních rovnic

$$\begin{array}{rcl} x' & = & -x - y \\ y' & = & 5x + y \end{array},$$

které vyhovuje počáteční podmínce $x(0) = 1,\ y(0) = -1.$

Zpět

Příklad 4.1.4

Nalezněte řešení soustavy lineárních diferenciálních rovnic

$$\begin{array}{rcl} x' & = & -x - y \\ y' & = & 5x + y \end{array} \quad ,$$

které vyhovuje počáteční podmínce $x(0) = 1, \; y(0) = -1.$

Výsledek:

$$\begin{array}{rcl} x(t) & = & \cos 2t \\ y(t) & = & 2\,\sin 2t - \cos 2t \end{array} \qquad t \in \mathbb{R}\,.$$

Zpět

Příklad 4.1.4

Nalezněte řešení soustavy lineárních diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= -x - y \\ y' &= 5x + y \end{aligned},$$

které vyhovuje počáteční podmínce $x(0) = 1,\ y(0) = -1$.

Návod:

Nejprve najdeme obecné řešení soustavy podle návodu v příkladě 4.1.1 a pak určíme konstanty C_1, C_2 tak, aby nalezené řešení splňovalo počáteční podmínku.

Zpět

Příklad 4.1.4

Nalezněte řešení soustavy lineárních diferenciálních rovnic

$$\begin{array}{rcl} x' & = & -x-y \\ y' & = & 5x+y \end{array},$$

které vyhovuje počáteční podmínce $x(0)=1,\ y(0)=-1$.

Řešení:

Položme $\vec{z}(t)=\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \Longrightarrow \vec{z}\,'(t)=\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix}$.

Přepišme zadanou autonomní soustavu pomocí matic:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Longrightarrow \vec{z}\,'=\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}\vec{z}\,.$$

Maticí soustavy je

$$A=\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Řešení této soustavy hledáme ve tvaru $\vec{z}(t)=\mathrm{e}^{\lambda t}\cdot\vec{h}$, kde λ je vlastní číslo matice A a $\vec{h}$ je vlastní vektor příslušný k vlastnímu číslu λ. Číslo λ tedy řeší tzv. charakteristickou rovnici matice A:

$$\det(A-\lambda E)=0$$

a k němu příslušný vlastní vektor $\vec{h}$ je pak řešením soustavy $(A-\lambda E)\,\vec{h}=\vec{0}\,.$

Charakteristická rovnice matice A je

$$\det\left(\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}-\lambda\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)=0 \Longrightarrow \begin{vmatrix} -1-\lambda & -1 \\ 5 & 1-\lambda \end{vmatrix}=0 \Longrightarrow$$

$$(-1-\lambda)(1-\lambda)+5=0 \Longrightarrow \lambda^2+4=0.$$

Další

Příklad 4.1.4

Nalezněte řešení soustavy lineárních diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= -x - y \\ y' &= 5x + y \end{aligned} ,$$

které vyhovuje počáteční podmínce $x(0) = 1,\ y(0) = -1$.

Řešení:

Její kořeny jsou $\lambda_1 = 2\,i,\ \lambda_2 = -2\,i$. Vlastní vektor příslušný k $\lambda_1 = 2\,i$ musí splňovat rovnost

$$(A - 2\,i\,E)\,\vec{h} = \vec{0}\,.$$

$$\Downarrow$$

$$\left(\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2\,i & 0 \\ 0 & 2\,i \end{bmatrix}\right) \cdot \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{bmatrix} -1-2\,i & -1 \\ 5 & 1-2\,i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned} (-1-2\,i)\,h_1 - h_2 &= 0 \\ 5\,h_1 + (1-2\,i)\,h_2 &= 0 \end{aligned}$$

První rovnice předchozí soustavy je násobkem druhé rovnice (vždy to tak musí být), proto má soustava nekonečně mnoho řešení (h_1, h_2). Protože hledáme **jeden** vlastní vektor příslušný k $\lambda_1 = 2\,i$, chceme **jedno** libovolné řešení v oboru komplexních čísel. Zvolíme např. $h_1 = 1$, pak z první rovnice $(-1-2\,i)\cdot 1 - h_2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad h_2 = -1-2\,i$.

Vlastní vektor příslušný k $\lambda_1 = 2\,i$ je $\quad \vec{h}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1-2\,i \end{bmatrix}$.

Má-li charakteristická rovnice matice soustavy dvou lineárních diferenciálních rovnic **dva imaginární komplexně sdružené** kořeny $\lambda_{1,2} = \pm b\,i$, pak obecné řešení této soustavy má tvar

$$\vec{z}(t) = C_1\,\mathrm{Re}(\mathrm{e}^{\lambda_1 t}\vec{h}_1) + C_2\,\mathrm{Im}(\mathrm{e}^{\lambda_1 t}\vec{h}_1)\,, \quad t \in \mathbb{R}\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}\,,$$

kde $\vec{h}_1$ je příslušný vlastní vektor k λ_1.

Další

Příklad 4.1.4

Nalezněte řešení soustavy lineárních diferenciálních rovnic

$$\begin{array}{rcl} x' & = & -x-y \\ y' & = & 5x+y \end{array},$$

které vyhovuje počáteční podmínce $x(0)=1,\ y(0)=-1$.

Řešení:

Hledejme reálnou a imaginární část komplexního řešení:

$$\vec{z}_1(t) = \mathrm{e}^{\lambda_1 t}\vec{h}_1 = \mathrm{e}^{2\,i\,t}\begin{bmatrix} 1 \\ -1-2\,i \end{bmatrix}.$$

Použijeme vzorec $\mathrm{e}^{b\,i\,t} = \cos bt + i\,\sin bt$. Pak

$$\vec{z}_1(t) = (\cos 2t + i\,\sin 2t)\begin{bmatrix} 1 \\ -1-2\,i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 2t + i\,\sin 2t \\ -\cos 2t + 2\,\sin 2t + i\,(-\sin 2t - 2\,\cos 2t) \end{bmatrix}$$

Reálná a imaginární část komplexního řešení $\vec{z}_1(t)$ je

$$\operatorname{Re}\vec{z}_1(t) = \begin{bmatrix} \cos 2t \\ 2\,\sin 2t - \cos 2t \end{bmatrix} \quad \operatorname{Im}\vec{z}_1(t) = \begin{bmatrix} \sin 2t \\ -2\,\cos 2t - \sin 2t \end{bmatrix}.$$

Obecné řešení zadané soustavy lineárních diferenciálních rovnic tedy je

$$\vec{z}(t) = C_1\begin{bmatrix} \cos 2t \\ 2\,\sin 2t - \cos 2t \end{bmatrix} + C_2\begin{bmatrix} \sin 2t \\ -2\,\cos 2t - \sin 2t \end{bmatrix}, \quad t\in\mathbb{R}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Další

Příklad 4.1.4

Nalezněte řešení soustavy lineárních diferenciálních rovnic

$$\begin{array}{rcl} x' & = & -x - y \\ y' & = & 5x + y \end{array} ,$$

které vyhovuje počáteční podmínce $x(0) = 1,\ y(0) = -1.$

Řešení:

Rozepišme ho po složkách:

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t \\ y(t) &= 2\,C_1 \sin 2t - C_1 \cos 2t - 2\,C_2 \cos 2t - C_2 \sin 2t\,. \end{aligned}$$

Nyní určíme konstanty C_1, C_2 tak, aby nalezené řešení vyhovovalo počáteční podmínce $x(0) = 1,\ y(0) = -1$. Po dosazení počátečních podmínek do obecného řešení dostaneme

$$\begin{aligned} 1 &= x(0) = C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 \\ -1 &= y(0) = 2\,C_1 \sin 0 - C_1 \cos 0 - 2\,C_2 \cos 0 - C_2 \sin 0 \end{aligned}$$

Odtud

$$\begin{array}{rcl} 1 & = & C_1 \\ -1 & = & -C_1 - 2\,C_2 \end{array} \implies \begin{array}{rcl} C_1 & = & 1 \\ C_2 & = & 0 \end{array}$$

Hledané řešení tedy je

$$\begin{array}{rcl} x(t) & = & \cos 2t \\ y(t) & = & 2\sin 2t - \cos 2t \end{array} \qquad t \in \mathbb{R}\,.$$

Rovnice jsou parametrickými rovnicemi trajektorie nalezeného řešení (rovinné křivky).

Zpět

Příklad 4.1.4

Nalezněte řešení soustavy lineárních diferenciálních rovnic

$$\begin{array}{rcl} x' & = & -x-y \\ y' & = & 5x+y \end{array},$$

které vyhovuje počáteční podmínce $x(0)=1,\ y(0)=-1$.

Maple:

```
> DR1:=(diff(x(t),t)=-x(t)-y(t));
```

$$DR1 := \frac{d}{dt}\,\mathrm{x}(t) = -\mathrm{x}(t) - \mathrm{y}(t)$$

```
> DR2:=(diff(y(t),t)=5*x(t)+y(t));
```

$$DR2 := \frac{d}{dt}\,\mathrm{y}(t) = 5\,\mathrm{x}(t) + \mathrm{y}(t)$$

```
> PP:=x(0)=1,y(0)=-1;
```

$$PP := \mathrm{x}(0) = 1,\ \mathrm{y}(0) = -1$$

```
> dsolve({DR1,DR2,PP},{x(t),y(t)});
```

$$\{\mathrm{x}(t) = \cos(2\,t),\ \mathrm{y}(t) = 2\sin(2\,t) - \cos(2\,t)\}$$

Zpět

Příklad 4.1.4

Nalezněte řešení soustavy lineárních diferenciálních rovnic

$$\begin{array}{rcl} x' &=& -x-y \\ y' &=& 5x+y \end{array},$$

které vyhovuje počáteční podmínce $x(0)=1,\ y(0)=-1.$

Mathematica:

$$\mathbf{rovnice1} = \boldsymbol{x'[t] == -x[t] - y[t];}$$
$$\mathbf{rovnice2} = \boldsymbol{y'[t] == 5x[t] + y[t];}$$

$$\mathbf{pp1} = \boldsymbol{x[0] == 1;}$$
$$\mathbf{pp2} = \boldsymbol{y[0] == -1;}$$

$$\mathbf{reseni = DSolve[\{rovnice1, rovnice2, pp1, pp2\}, \{\boldsymbol{x[t], y[t]}\}, \boldsymbol{t}]}$$

$$\{\{x[t] \to \mathrm{Cos}[2t], y[t] \to -\mathrm{Cos}[2t] + 2\mathrm{Sin}[2t]\}\}$$

Zpět

Eulerova metoda

- **Příklad 4.2.1** Pomocí Eulerovy metody nalezněte přibližnou hodnotu řešení autonomní soustavy diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= xy \\ y' &= x - y\,, \end{aligned}$$

  které vyhovuje počáteční podmínce $x(0) = 1$, $y(0) = 2$, v bodě $t = 2$. Použijte krok $h = 0,5$.

- **Příklad 4.2.2** Pomocí Eulerovy metody nalezněte přibližnou hodnotu řešení neautonomní soustavy diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= x \cdot y \cdot t \\ y' &= x - y + t\,, \end{aligned}$$

  které vyhovuje počáteční podmínce $x(1) = 1$, $y(1) = 2$, v bodě $t = 2$. Použijte krok $h = 0,25$.

- **Příklad 4.2.3** Pomocí Eulerovy metody nalezněte přibližnou hodnotu řešení neautonomní soustavy diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= x + 2t \\ y' &= \frac{x}{y}\,, \end{aligned}$$

  které vyhovuje počáteční podmínce $x(0) = 4$, $y(0) = 5$, v bodě $t = -1$. Použijte krok $h = 0,25$.

Zpět

Příklad 4.2.1

Pomocí Eulerovy metody nalezněte přibližnou hodnotu řešení autonomní soustavy diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= xy \\ y' &= x - y\,, \end{aligned}$$

které vyhovuje počáteční podmínce $x(0) = 1$, $y(0) = 2$, v bodě $t = 2$. Použijte krok $h = 0,5$.

? Zpět

Příklad 4.2.1

Pomocí Eulerovy metody nalezněte přibližnou hodnotu řešení autonomní soustavy diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= xy \\ y' &= x - y\,, \end{aligned}$$

které vyhovuje počáteční podmínce $x(0) = 1$, $y(0) = 2$, v bodě $t = 2$. Použijte krok $h = 0,5$.

Výsledek:

$$\begin{aligned} x(2) &\doteq 15,18 \\ y(2) &\doteq 4,59 \end{aligned} .$$

Zpět

Příklad 4.2.1

Pomocí Eulerovy metody nalezněte přibližnou hodnotu řešení autonomní soustavy diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= xy \\ y' &= x - y\,, \end{aligned}$$

které vyhovuje počáteční podmínce $x(0) = 1,\; y(0) = 2$, v bodě $t = 2$. Použijte krok $h = 0,5$.

Návod:

Přibližnou hodnotu řešení hledáme pomocí iteračních vzorců

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i + h \cdot f(x_i, y_i) \\ y_{i+1} &= y_i + h \cdot g(x_i, y_i) \end{aligned}\,,$$

přičemž $x_0 = 1\,,\; y_0 = 2\,,\; h = 0,5\,,\; f(x_i, y_i) = x_i\, y_i\,,\; g(x_i, y_i) = x_i - y_i$.

Zpět

Příklad 4.2.1

Pomocí Eulerovy metody nalezněte přibližnou hodnotu řešení autonomní soustavy diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= xy \\ y' &= x - y\,, \end{aligned}$$

které vyhovuje počáteční podmínce $x(0) = 1$, $y(0) = 2$, v bodě $t = 2$. Použijte krok $h = 0,5$.

Řešení:

Zadanou soustavu diferenciálních rovnic neumíme analyticky vyřešit. Pomocí Eulerovy metody však můžeme získat přibližné hodnoty řešení počáteční úlohy v konečném počtu tzv. uzlových bodů $t_0, t_1, \ldots, t_n$ z definičního oboru řešení. Použijeme iterační vzorce

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i + h \cdot f(x_i, y_i) \\ y_{i+1} &= y_i + h \cdot g(x_i, y_i) \end{aligned},$$

kde $f(x_i, y_i) = x_i\, y_i$, $g(x_i, y_i) = x_i - y_i$, $x_0 = x(0) = 1$ a $y_0 = y(0) = 2$. Dvojice (x_i, y_i) je aproximací řešení v bodě t_i, tedy $x(t_i) \doteq x_i$ a $y(t_i) \doteq y_i$. Uzlové body t_i jsou dány krokem $h = 0,5$. Platí $t_i = t_{i-1} + 0,5 = t_0 + i \cdot 0,5$. V bodě t_0 je dána počáteční podmínka, tedy $t_0 = 0$, $t_1 = 0,5$, $t_2 = 1$ atd. Počet kroků lze určit z předchozího vztahu pro uzlové body, přičemž předpokládáme, že bod t_i je poslední, v něm hledáme přibližnou hodnotu řešení, tj.

$$i = \frac{t_i - t_0}{0,5} = \frac{2-0}{0,5} = 4\,.$$

Další

Příklad 4.2.1

Pomocí Eulerovy metody nalezněte přibližnou hodnotu řešení autonomní soustavy diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= xy \\ y' &= x - y\,, \end{aligned}$$

které vyhovuje počáteční podmínce $x(0) = 1$, $y(0) = 2$, v bodě $t = 2$. Použijte krok $h = 0,5$.

Řešení:

Výpočty v jednotlivých krocích zaznamenáme do tabulky. V prvním sloupci je pořadí kroku i, ve druhém sloupci je bod t_i, ve kterém hledáme aproximaci řešení, ve třetím sloupci je x_i, aproximace hodnoty $x(t_i)$, ve čtvrtém sloupci je y_i, aproximace hodnoty $y(t_i)$, v pátém sloupci je „pomocný“ výpočet $h \cdot f(x_i, y_i)$ a v šestém sloupci je „pomocný“ výpočet $h \cdot g(x_i, y_i)$.

i	t_i	x_i	y_i	$0,5 \cdot x_i\, y_i$	$0,5 \cdot (x_i - y_i)$
0	0	1	2	1	-0,5
1	0,5	2	1,5	1,5	0,25
2	1	3,5	1,75	3,06	0,88
3	1,5	6,56	2,62	8,61	1,97
4	2	**15,18**	**4,59**		

Přibližná hodnota řešení dané počáteční úlohy v bodě $t = 2$ je $x_4 = 15,18$; $y_4 = 4,59$; tedy $x(2) \doteq 15,18$; $y(2) \doteq 4,59$.

Zpět

Příklad 4.2.1

Pomocí Eulerovy metody nalezněte přibližnou hodnotu řešení autonomní soustavy diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= xy \\ y' &= x - y\,, \end{aligned}$$

které vyhovuje počáteční podmínce $x(0) = 1$, $y(0) = 2$, v bodě $t = 2$. Použijte krok $h = 0,5$.

Maple:

```
> DR1:=(diff(x(t),t)=x(t)*y(t));
```

$$DR1 := \frac{d}{dt}\,\mathrm{x}(t) = \mathrm{x}(t)\,\mathrm{y}(t)$$

```
> DR2:=(diff(y(t),t)=x(t)-y(t));
```

$$DR2 := \frac{d}{dt}\,\mathrm{y}(t) = \mathrm{x}(t) - \mathrm{y}(t)$$

```
> PP:=x(0)=1,y(0)=2;
```

$$PP := \mathrm{x}(0) = 1,\ \mathrm{y}(0) = 2$$

```
> dsolve({DR1,DR2,PP},{x(t),y(t)},numeric,
method=classical[foreuler],output=array([0,0.5,1,1.5,2]),stepsize=0.5) :
> evalf(%,3);
```

$$\left[\begin{array}{c} [t,\ \mathrm{x}(t),\ \mathrm{y}(t)] \\ \left[\begin{array}{ccc} 0. & 1. & 2. \\ 0.5 & 2. & 1.50 \\ 1. & 3.50 & 1.75 \\ 1.5 & 6.56 & 2.62 \\ 2. & 15.2 & 4.59 \end{array}\right] \end{array}\right]$$

Příklad 4.2.1

Pomocí Eulerovy metody nalezněte přibližnou hodnotu řešení autonomní soustavy diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= xy \\ y' &= x - y\,, \end{aligned}$$

které vyhovuje počáteční podmínce $x(0) = 1$, $y(0) = 2$, v bodě $t = 2$. Použijte krok $h = 0,5$.

Mathematica:

Mathematice nemá program na vypočet řešení soustavy diferencialnich rovnic pomocí Eulerovy metody (pro řešení používá přesnější metody). Můžeme si ale jednoduchý program na Eulerovu metodu pro soustavu dvou diferenciálních rovnic napsat:

```
EulerMetod[f1, f2, x0, y0, a, b, h]:=Module[{n, v, x1, y1, x2, y2},
t = a;
n = (b − a)/h;
v = {{"t", "x", "y"}, {a, x0, y0}};
x1 = x0; y1 = y0;
For[i = 1, i ≤ n, {x2 = x1 + hf1[t, x1, y1]; y2 = y1 + hf2[t, x1, y1];
v = Join[v, {{t + h, x2, y2}}]; x1 = x2; y1 = y2; t = t + h; i = i + 1}];
Print[MatrixForm[v]]]
```

Nyní použijeme program EulerMetod na náš příklad.

Další

Příklad 4.2.1

Pomocí Eulerovy metody nalezněte přibližnou hodnotu řešení autonomní soustavy diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= xy \\ y' &= x - y\,, \end{aligned}$$

které vyhovuje počáteční podmínce $x(0) = 1$, $y(0) = 2$, v bodě $t = 2$. Použijte krok $h = 0,5$.

Mathematica:

f1[t_, x_, y_]:=*xy*;
f2[t_, x_, y_]:=*x* − *y*;

***a* = 0; *b* = 2; *h* = 0.5;**

x0 = 1; y0 = 2;

EulerMetod[f1, f2, x0, y0, *a*, *b*, *h*]

$$\begin{pmatrix} t & x & y \\ 0 & 1 & 2 \\ 0.5 & 2. & 1.5 \\ 1. & 3.5 & 1.75 \\ 1.5 & 6.5625 & 2.625 \\ 2. & 15.1758 & 4.59375 \end{pmatrix}$$

Zpět

Příklad 4.2.2

Pomocí Eulerovy metody nalezněte přibližnou hodnotu řešení neautonomní soustavy diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= x \cdot y \cdot t \\ y' &= x - y + t\,, \end{aligned}$$

které vyhovuje počáteční podmínce $x(1) = 1$, $y(1) = 2$, v bodě $t = 2$. Použijte krok $h = 0,25$.

Zpět

Příklad 4.2.2

Pomocí Eulerovy metody nalezněte přibližnou hodnotu řešení neautonomní soustavy diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= x \cdot y \cdot t \\ y' &= x - y + t\,, \end{aligned}$$

které vyhovuje počáteční podmínce $x(1) = 1$, $y(1) = 2$, v bodě $t = 2$. Použijte krok $h = 0,25$.

Výsledek:

$$\begin{aligned} x(2) &\doteq 9,53 \\ y(2) &\doteq 3,52 \end{aligned}.$$

Zpět

Příklad 4.2.2

Pomocí Eulerovy metody nalezněte přibližnou hodnotu řešení neautonomní soustavy diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= x \cdot y \cdot t \\ y' &= x - y + t\,, \end{aligned}$$

které vyhovuje počáteční podmínce $x(1) = 1$, $y(1) = 2$, v bodě $t = 2$. Použijte krok $h = 0,25$.

Návod:

Přibližnou hodnotu řešení hledáme pomocí iteračních vzorců

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i + h \cdot f(t_i, x_i, y_i) \\ y_{i+1} &= y_i + h \cdot g(t_i, x_i, y_i) \end{aligned}\,,$$

přičemž $x_0 = 1\,,\; y_0 = 2\,,\; h = 0,25\,,\; f(x_i, y_i) = x_i\, y_i\, t_i\,,\; g(x_i, y_i) = x_i - y_i + t_i.$

Zpět

Příklad 4.2.2

Pomocí Eulerovy metody nalezněte přibližnou hodnotu řešení neautonomní soustavy diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= x \cdot y \cdot t \\ y' &= x - y + t\,, \end{aligned}$$

které vyhovuje počáteční podmínce $x(1) = 1$, $y(1) = 2$, v bodě $t = 2$. Použijte krok $h = 0,25$.

Řešení:

Zadanou soustavu diferenciálních rovnic neumíme analyticky vyřešit. Pomocí Eulerovy metody však můžeme získat přibližné hodnoty řešení počáteční úlohy v konečném počtu tzv. uzlových bodů $t_0, t_1, \dots, t_n$ z definičního oboru řešení. Použijeme iterační vzorce

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i + h \cdot f(x_i, y_i) \\ y_{i+1} &= y_i + h \cdot g(x_i, y_i) \end{aligned}\;,$$

kde $f(x_i, y_i) = x_i\, y_i\, t$, $g(x_i, y_i) = x_i - y_i + t$, $x_0 = x(1) = 1$ a $y_0 = y(1) = 2$. Dvojice (x_i, y_i) je aproximací řešení v bodě t_i, tedy $x(t_i) \doteq x_i$ a $y(t_i) \doteq y_i$. Uzlové body t_i jsou dány krokem $h = 0,25$. Platí $t_i = t_{i-1} + 0,25 = t_0 + i \cdot 0,25$. V bodě t_0 je dána počáteční podmínka, tedy $t_0 = 1$, $t_1 = 1,25$, $t_2 = 1,5$ atd. Počet kroků lze určit z předchozího vztahu pro uzlové body, přičemž předpokládáme, že bod t_i je poslední, v něm hledáme přibližnou hodnotu řešení, tj.

$$i = \frac{t_i - t_0}{0,25} = \frac{2-1}{0,25} = 4\,.$$

Další

Příklad 4.2.2

Pomocí Eulerovy metody nalezněte přibližnou hodnotu řešení neautonomní soustavy diferenciálních rovnic

$$
\begin{aligned}
x' &= x \cdot y \cdot t \\
y' &= x - y + t \, ,
\end{aligned}
$$

které vyhovuje počáteční podmínce $x(1) = 1$, $y(1) = 2$, v bodě $t = 2$. Použijte krok $h = 0,25$.

Řešení:

Výpočty v jednotlivých krocích zaznamenáme do tabulky. V prvním sloupci je pořadí kroku i, ve druhém sloupci je bod t_i, ve kterém hledáme aproximaci řešení, ve třetím sloupci je x_i, aproximace hodnoty $x(t_i)$, ve čtvrtém sloupci je y_i, aproximace hodnoty $y(t_i)$, v pátém sloupci je „pomocný" výpočet $h \cdot f(x_i, y_i)$ a v šestém sloupci je „pomocný" výpočet $h \cdot g(x_i, y_i)$.

i	t_i	x_i	y_i	$0,25 \cdot x_i\, y_i\, t$	$0,25 \cdot (x_i - y_i + t)$
0	1	1	2	0,5	0
1	1,25	1,5	2	0,94	0,19
2	1,5	2,44	2,19	2,00	0,44
3	1,75	4,44	2,63	5,10	0,89
4	2	**9,53**	**3,52**		

Přibližná hodnota řešení dané počáteční úlohy v bodě $t = 2$ je $x_4 = 9,53$; $y_4 = 3,52$; tedy $x(2) \doteq 9,53$; $y(2) \doteq 3,52$.

Zpět

Příklad 4.2.2

Pomocí Eulerovy metody nalezněte přibližnou hodnotu řešení neautonomní soustavy diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= x \cdot y \cdot t \\ y' &= x - y + t\,, \end{aligned}$$

které vyhovuje počáteční podmínce $x(1) = 1$, $y(1) = 2$, v bodě $t = 2$. Použijte krok $h = 0,25$.

Maple:

```
> DR1:=(diff(x(t),t)=x(t)*y(t)*t);
```

$$DR1 := \frac{d}{dt}\,\mathrm{x}(t) = \mathrm{x}(t)\,\mathrm{y}(t)\,t$$

```
> DR2:=(diff(y(t),t)=x(t)-y(t)+t);
```

$$DR2 := \frac{d}{dt}\,\mathrm{y}(t) = \mathrm{x}(t) - \mathrm{y}(t) + t$$

```
> PP:=x(1)=1,y(1)=2;
```

$$PP := \mathrm{x}(1) = 1,\ \mathrm{y}(1) = 2$$

```
> dsolve({DR1,DR2,PP},{x(t),y(t)},numeric,
method=classical[foreuler],output=array([1,1.25,1.5,1.75,2]),stepsize=
0.25):
> evalf(%,3);
```

$$\left[\begin{array}{c} [t,\ \mathrm{x}(t),\ \mathrm{y}(t)] \\ \left[\begin{array}{ccc} 1. & 1. & 2. \\ 1.25 & 1.50 & 2. \\ 1.5 & 2.44 & 2.19 \\ 1.75 & 4.44 & 2.62 \\ 2. & 9.53 & 3.52 \end{array}\right] \end{array}\right]$$

Zpět

Příklad 4.2.2

Pomocí Eulerovy metody nalezněte přibližnou hodnotu řešení neautonomní soustavy diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= x \cdot y \cdot t \\ y' &= x - y + t\,, \end{aligned}$$

které vyhovuje počáteční podmínce $x(1) = 1$, $y(1) = 2$, v bodě $t = 2$. Použijte krok $h = 0,25$.

Mathematica:

Pro výpočet použijeme program EulerMetod z příkladu 4.2.1

f1[t_, x_, y_]:=xyt;
f2[t_, x_, y_]:=$x - y + t$;

$\boldsymbol{a = 1; b = 2; h = 0.25;}$

x0 = 1; y0 = 2;

EulerMetod[f1, f2, x0, y0, a, b, h]

$$\begin{pmatrix} t & x & y \\ 1 & 1 & 2 \\ 1.25 & 1.5 & 2 \\ 1.5 & 2.4375 & 2.1875 \\ 1.75 & 4.43701 & 2.625 \\ 2. & 9.53264 & 3.5155 \end{pmatrix}$$

Zpět

Příklad 4.2.3

Pomocí Eulerovy metody nalezněte přibližnou hodnotu řešení neautonomní soustavy diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= x + 2t \\ y' &= \frac{x}{y}, \end{aligned}$$

které vyhovuje počáteční podmínce $x(0) = 4$, $y(0) = 5$, v bodě $t = -1$. Použijte krok $h = 0,25$.

Zpět

Příklad 4.2.3

Pomocí Eulerovy metody nalezněte přibližnou hodnotu řešení neautonomní soustavy diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= x + 2t \\ y' &= \frac{x}{y}\,, \end{aligned}$$

které vyhovuje počáteční podmínce $x(0) = 4$, $y(0) = 5$, v bodě $t = -1$. Použijte krok $h = 0,25$.

Výsledek:

$$\begin{aligned} x(2) &\doteq 1,90 \\ y(2) &\doteq 4,40 \end{aligned}.$$

Zpět

Příklad 4.2.3

Pomocí Eulerovy metody nalezněte přibližnou hodnotu řešení neautonomní soustavy diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= x + 2t \\ y' &= \frac{x}{y}\,, \end{aligned}$$

které vyhovuje počáteční podmínce $x(0) = 4$, $y(0) = 5$, v bodě $t = -1$. Použijte krok $h = 0,25$.

Návod:

Přibližnou hodnotu řešení hledáme pomocí iteračních vzorců

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i - h \cdot f(t_i, x_i, y_i) \\ y_{i+1} &= y_i - h \cdot g(t_i, x_i, y_i) \end{aligned}\,,$$

přičemž $x_0 = 4\,,\ y_0 = 5\,,\ h = 0,25\,,\ f(x_i, y_i) = x_i + 2t_i\,,\ g(x_i, y_i) = \dfrac{x_i}{y_i}.$

Zpět

Příklad 4.2.3

Pomocí Eulerovy metody nalezněte přibližnou hodnotu řešení neautonomní soustavy diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= x + 2t \\ y' &= \frac{x}{y}\,, \end{aligned}$$

které vyhovuje počáteční podmínce $x(0) = 4$, $y(0) = 5$, v bodě $t = -1$. Použijte krok $h = 0,25$.

Řešení:

Pomocí Eulerovy metody získáme přibližné hodnoty řešení počáteční úlohy v konečném počtu tzv. uzlových bodů $t_0, t_1, \ldots, t_n$ z definičního oboru řešení. Použijeme iterační vzorce

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i - h \cdot f(x_i, y_i) \\ y_{i+1} &= y_i - h \cdot g(x_i, y_i) \end{aligned}\,,$$

kde $f(x_i, y_i) = x_i + 2t$, $g(x_i, y_i) = \frac{x_i}{y_i}$, $x_0 = x(0) = 4$ a $y_0 = y(0) = 5$. Ve vzorcích je narozdíl od předchozích příkladů znaménko mínus a to proto, že hledáme přibližnou hodnotu řešení v bodě menším než je bod, ve kterém je dána počáteční podmínka. Dvojice (x_i, y_i) je aproximací řešení v bodě t_i, tedy $x(t_i) \doteq x_i$ a $y(t_i) \doteq y_i$. Uzlové body t_i jsou dány krokem $h = 0,25$. Platí $t_i = t_{i-1} - 0,25 = t_0 - i \cdot 0,25$. V bodě t_0 je dána počáteční podmínka, tedy $t_0 = 0$, $t_1 = -0,25$, $t_2 = -0,5$ atd. Počet kroků lze určit z předchozího vztahu pro uzlové body, přičemž předpokládáme, že bod t_i je poslední, v něm hledáme přibližnou hodnotu řešení, tj.

$$i = \frac{t_0 - t_i}{0,25} = \frac{0 - (-1)}{0,25} = 4\,.$$

Další

Příklad 4.2.3

Pomocí Eulerovy metody nalezněte přibližnou hodnotu řešení neautonomní soustavy diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= x + 2t \\ y' &= \frac{x}{y}\,, \end{aligned}$$

které vyhovuje počáteční podmínce $x(0) = 4$, $y(0) = 5$, v bodě $t = -1$. Použijte krok $h = 0,25$.

Řešení:

Výpočty v jednotlivých krocích zaznamenáme do tabulky. V prvním sloupci je pořadí kroku i, ve druhém sloupci je bod t_i, ve kterém hledáme aproximaci řešení, ve třetím sloupci je x_i, aproximace hodnoty $x(t_i)$, ve čtvrtém sloupci je y_i, aproximace hodnoty $y(t_i)$, v pátém sloupci je „pomocný“ výpočet $h \cdot f(x_i, y_i)$ a v šestém sloupci je „pomocný“ výpočet $h \cdot g(x_i, y_i)$.

i	t_i	x_i	y_i	$0,25\,(x_i + 2t)$	$0,25\,\frac{x_i}{y_i}$
0	0	4	5	1	0,2
1	-0,25	3	4,8	0,63	0,16
2	-0,5	2,38	4,64	0,34	0,13
3	-0,75	2,03	4,52	0,13	0,11
4	-1	**1,90**	**4,40**		

Přibližná hodnota řešení dané počáteční úlohy v bodě $t = -1$ je $x_4 = 1,90\,;$ $y_4 = 4,40;$ tedy $x(-1) \doteq 1,90\,;$ $y(-1) \doteq 4,40$.

Zpět

Příklad 4.2.3

Pomocí Eulerovy metody nalezněte přibližnou hodnotu řešení neautonomní soustavy diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= x + 2t \\ y' &= \frac{x}{y}\,, \end{aligned}$$

které vyhovuje počáteční podmínce $x(0) = 4$, $y(0) = 5$, v bodě $t = -1$. Použijte krok $h = 0,25$.

Maple:

```
> DR1:=(diff(x(t),t)=x(t)+2*t);
```

$$DR1 := \frac{d}{dt}\,\mathrm{x}(t) = \mathrm{x}(t) + 2\,t$$

```
> DR2:=(diff(y(t),t)=x(t)/y(t));
```

$$DR2 := \frac{d}{dt}\,\mathrm{y}(t) = \frac{\mathrm{x}(t)}{\mathrm{y}(t)}$$

```
> PP:=x(0)=4,y(0)=5;
```

$$PP := \mathrm{x}(0) = 4,\ \mathrm{y}(0) = 5$$

```
> dsolve({DR1,DR2,PP},{x(t),y(t)},numeric,
method=classical[foreuler],output=array([-1,-0.75,-0.5,-0.25,0]),steps
ize=0.25):
> evalf(%,3);
```

$$\begin{bmatrix} [t,\ \mathrm{x}(t),\ \mathrm{y}(t)] \\ \begin{bmatrix} -1. & 1.90 & 4.40 \\ -0.75 & 2.03 & 4.52 \\ -0.5 & 2.38 & 4.64 \\ -0.25 & 3. & 4.80 \\ 0. & 4. & 5. \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

Příklad 4.2.3

Pomocí Eulerovy metody nalezněte přibližnou hodnotu řešení neautonomní soustavy diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= x + 2t \\ y' &= \frac{x}{y}, \end{aligned}$$

které vyhovuje počáteční podmínce $x(0) = 4$, $y(0) = 5$, v bodě $t = -1$. Použijte krok $h = 0,25$.

Mathematica:

Pro výpočet použijeme program EulerMetod z prikladu 4.2.1

```
f1[t_, x_, y_]:=x + 2 t;
f2[t_, x_, y_]:=x/y;

a = 0; b = -1; h = -0.25;

x0 = 4; y0 = 5;

EulerMetod[f1, f2, x0, y0, a, b, h]
```

$$\begin{pmatrix} t & x & y \\ 0 & 4 & 5 \\ -0.25 & 3. & 4.8 \\ -0.5 & 2.375 & 4.64375 \\ -0.75 & 2.03125 & 4.51589 \\ -1. & 1.89844 & 4.40344 \end{pmatrix}$$

Zpět