Kapitola 5: Funkce více proměnných, jejich spojitost a limita

Chcete-li ukončit prohlížení stiskněte klávesu **Esc**.
Chcete-li pokračovat stiskněte klávesu **Enter**.

Funkce více proměnných, jejich spojitost a limita

Zpět

- **Příklad 5.1.1** Určete a nakreslete definiční obor funkce
$$f(x,y) = \arcsin\,(2x-y) + \arccos\,(x-2y)\,.$$
Napište a zdůvodněte, které z následujících vlastností $\mathcal{D}(f)$ má a které nemá: otevřená, uzavřená, souvislá, konvexní, omezená. Určete hranici $\mathcal{D}(f)$. Je funkce $f(x,y)$ na svém definičním oboru omezená?

- **Příklad 5.1.2** Určete a nakreslete definiční obor funkce
$$f(x,y) = \ln\,\frac{x^2}{2x-y},$$
určete jeho hranici a nakreslete vrstevnici, která prochází bodem $A = (1,1)$.

- **Příklad 5.1.3** Najděte a nakreslete definiční obor funkce
$$f(x,y) = \sqrt{x-\sqrt{y}}.$$
Které vrstevnice procházejí body $A = (1,1),\ B = (5,1),\ C = (4,0)$? Nakreslete je do obrázku.

Zpět

Příklad 5.1.1

Určete a nakreslete definiční obor funkce

$$f(x,y) = \arcsin(2x-y) + \arccos(x-2y)\,.$$

Napište a zdůvodněte, které z následujících vlastností $\mathcal{D}(f)$ má a které nemá: otevřená, uzavřená, souvislá, konvexní, omezená. Určete hranici $\mathcal{D}(f)$. Je funkce $f(x,y)$ na svém definičním oboru omezená?

= ?

Zpět

Příklad 5.1.1

Určete a nakreslete definiční obor funkce

$$f(x,y) = \arcsin\,(2x-y) + \arccos\,(x-2y)\,.$$

Napište a zdůvodněte, které z následujících vlastností $\mathcal{D}(f)$ má a které nemá: otevřená, uzavřená, souvislá, konvexní, omezená. Určete hranici $\mathcal{D}(f)$. Je funkce $f(x,y)$ na svém definičním oboru omezená?

Výsledek:

$$\mathcal{D}(f) = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ 2x-1\le y\le 2x+1\} \ \cap\ \{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \frac{x-1}{2}\le y\le\frac{x+1}{2}\} =$$

$$= \ \text{rovnoběžník } ABCD,\ A=[-1,-1],\ B=\left[\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right],\ C=[1,1],\ D=\left[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right].$$

$$\mathcal{H} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ y=\frac{x-1}{2}, x\in\langle -1,\frac{1}{3}\rangle\} \ \cup\ \{(x,y)\in\mathbb{R}^2, y=2x-1, x\in\langle\frac{1}{3},1\rangle\} \ \cup$$

$$\cup\ \{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ y=\frac{x+1}{2}, x\in\langle -\frac{1}{3},1\rangle\} \ \cup\ \{(x,y)\in\mathbb{R}^2, y=2x+1, x\in\langle -1,-\frac{1}{3}\rangle\}.$$

$\mathcal{D}(f)$ je uzavřená, souvislá, konvexní a omezená množina, není otevřená. Funkce $f(x,y)$ je na svém definičním oboru omezená.

Zpět

Příklad 5.1.1

Určete a nakreslete definiční obor funkce

$$f(x,y) = \arcsin\,(2x-y) + \arccos\,(x-2y)\,.$$

Napište a zdůvodněte, které z následujících vlastností $\mathcal{D}(f)$ má a které nemá: otevřená, uzavřená, souvislá, konvexní, omezená. Určete hranici $\mathcal{D}(f)$. Je funkce $f(x,y)$ na svém definičním oboru omezená?

Návod:

Využijeme znalosti definičního oboru cyklometrických funkcí arcsin a arccos. Obě tyto funkce jsou na svém definičním oboru omezené, tedy i jejich součet je funkce omezená na svém definičním oboru. Hranice $\mathcal{D}(f)$ patří do definičního oboru, je tedy $\mathcal{D}(f)$ uzavřená množina, není otevřená. Zbývá rozhodnout, zda libovolné dva body $\mathcal{D}(f)$ lze spojit úsečkou, která celá leží v $\mathcal{D}(f)$ (konvexnost) a zda pro libovolné dva body $\mathcal{D}(f)$ existuje lomená čára, která je spojuje a leží celá v $\mathcal{D}(f)$ (souvislost). Abychom dokázali omezenost, musíme najít číslo $K > 0$, takové, že vzdálenost libovolného bodu $\mathcal{D}(f)$ od počátku je menší nebo rovna K.

Zpět

Příklad 5.1.1

Určete a nakreslete definiční obor funkce

$$f(x,y) = \arcsin\,(2x-y) + \arccos\,(x-2y)\,.$$

Napište a zdůvodněte, které z následujících vlastností $\mathcal{D}(f)$ má a které nemá: otevřená, uzavřená, souvislá, konvexní, omezená. Určete hranici $\mathcal{D}(f)$. Je funkce $f(x,y)$ na svém definičním oboru omezená?

Řešení:

Funkce $\arcsin(t)$ a $\arccos(t)$ jsou definovány pro $t \in \langle -1, 1\rangle$, tedy musí být

$$-1 \le 2x - y \le 1, \quad -1 \le x - 2y \le 1.$$

Nerovnosti vyřešíme a dostaneme

$$\mathcal{D}(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 2x-1 \le y \le 2x+1\} \ \cap\ \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \frac{x-1}{2} \le y \le \frac{x+1}{2}\}.$$

Jde o rovnoběžník $ABCD$,

$$A = [-1,-1],\ B = \left[\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right],\ C = [1,1],\ D = \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right].$$

Hranice definičního oboru je tvořena úsečkami AB, BC, CD a DA. Všechny tyto úsečky leží v definičním oboru, množina $\mathcal{D}(f)$ je tedy uzavřená a není otevřená.

Další

Příklad 5.1.1

Určete a nakreslete definiční obor funkce

$$f(x,y) = \arcsin\,(2x-y) + \arccos\,(x-2y)\,.$$

Napište a zdůvodněte, které z následujících vlastností $\mathcal{D}(f)$ má a které nemá: otevřená, uzavřená, souvislá, konvexní, omezená. Určete hranici $\mathcal{D}(f)$. Je funkce $f(x,y)$ na svém definičním oboru omezená?

Řešení:

Spojnice libovolných dvou bodů $\mathcal{D}(f)$ leží celá v $\mathcal{D}(f)$, $\mathcal{D}(f)$ je tedy konvexní, a protože libovolné dva body $\mathcal{D}(f)$ lze spojit lomenou čarou, která celá leží v $\mathcal{D}(f)$, $\mathcal{D}(f)$ je tedy souvislá.
Protože "nejvzdálenějšími" body od počátku jsou body A a C a jejich vzdálenost od počátku je $\rho(A,0) = \rho(C,0) = \sqrt{2}$, kde $0 = [0,0] \in \mathbb{R}^2$ je počátek souřadnic, je vzdálenost libovolného bodu $\mathcal{D}(f)$ od počátku menší nebo rovna $\sqrt{2}$. Položíme $K = \sqrt{2}$. Pak $\rho(X,0) \leq K \ \forall\ X = [x,y] \in \mathcal{D}(f)$, množina $\mathcal{D}(f)$ je tedy omezená.
Protože obor hodnot funkce $\mathcal{H}(\arcsin t) = \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$ a obor hodnot funkce $\mathcal{H}(\arccos t) = \langle 0, \pi \rangle$, jsou obě tyto funkce omezené a tedy i jejich součet je funkce omezená na svém definičním oboru.

Zpět

Příklad 5.1.1

Určete a nakreslete definiční obor funkce

$$f(x,y) = \arcsin\,(2x-y) + \arccos\,(x-2y)\,.$$

Napište a zdůvodněte, které z následujících vlastností $\mathcal{D}(f)$ má a které nemá: otevřená, uzavřená, souvislá, konvexní, omezená. Určete hranici $\mathcal{D}(f)$. Je funkce $f(x,y)$ na svém definičním oboru omezená?

Maple:

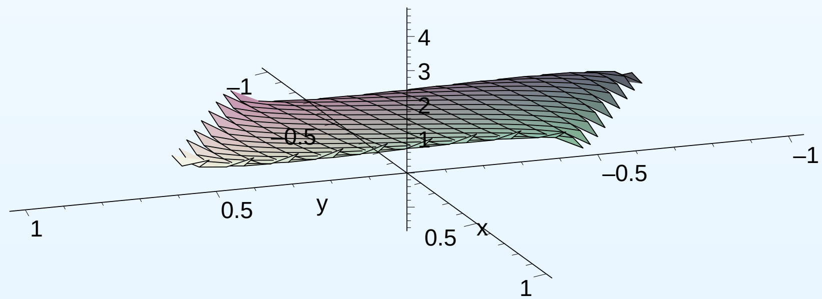
```
> with(plots):
```

```
> f:=(x,y)->arcsin(2*x-y)+arccos(x-2*y);
```

$$f := (x,\, y) \to \arcsin(2\,x - y) + \arccos(x - 2\,y)$$

Pro představu si nakreslíme graf dané funkce.

```
> plot3d(arcsin(2*x-y)+arccos(x-2*y), x=-1.0..1.0,
y=-1..1,axes=normal,numpoints=400,orientation=[70,45]);
```



Pro definiční obor musí platit: $-1 <= 2x-y <= 1$, $-1 <= x-2y <= 1$, Vypočteme souřadnice bodů A, B, C, D, kde bod A je průsečík přímek $y = 2x+1$ a $y = 0.5(x-1)$, bod B průsečík přímek $y = 2x+1$ a $y = 0.5(x-1)$, bod C průsečík přímek $y = 2x-1$ a $y = 0.5(x+1)$, bod D průsečík přímek $y = 2x+1$ a $y = 0.5(x+1)$.

Další

Příklad 5.1.1

Určete a nakreslete definiční obor funkce

$$f(x,y) = \arcsin(2x-y) + \arccos(x-2y)\,.$$

Napište a zdůvodněte, které z následujících vlastností $\mathcal{D}(f)$ má a které nemá: otevřená, uzavřená, souvislá, konvexní, omezená. Určete hranici $\mathcal{D}(f)$. Je funkce $f(x,y)$ na svém definičním oboru omezená?

Maple:

Definičním oborem fce f je rovnoběžník $ABCD$, hranice je tvořena úsečkami AB, BC, CD, DA a leží celá v definičním oboru f.

```
> xA:=solve(2*x+1=0.5*(x-1));
```

$$xA := -1.$$

```
> yA:=2*xA+1;
```

$$yA := -1.$$

```
> xB:=solve(2*x-1=0.5*(x-1));
```

$$xB := 0.3333333333$$

```
> yB:=2*xB-1;
```

$$yB := -0.3333333334$$

```
> xC:=solve(2*x-1=0.5*(x+1));
```

$$xC := 1.$$

```
> yC:=2*xC-1;
```

$$yC := 1.$$

```
> xD:=solve(2*x+1=0.5*(x+1));
```

$$xD := -0.3333333333$$

Další

Příklad 5.1.1

Určete a nakreslete definiční obor funkce

$$f(x,y) = \arcsin\,(2x-y) + \arccos\,(x-2y)\,.$$

Napište a zdůvodněte, které z následujících vlastností $\mathcal{D}(f)$ má a které nemá: otevřená, uzavřená, souvislá, konvexní, omezená. Určete hranici $\mathcal{D}(f)$. Je funkce $f(x,y)$ na svém definičním oboru omezená?

Maple:

```
> yD:=2*xD+1;
```

$$yD := 0.3333333334$$

```
> a1:=contourplot(arcsin(2*x-y)+arccos(x-2*y),x=-1.5..1.5,
y=-1..1,axes=normal,grid=[50,50],filled=true, coloring=[yellow,green]):
> a2:=implicitplot(0.5*(x-1)=y,x=-1.5..1.5,
y=-2..2,axes=normal,grid=[50,50],color=black):
> a3:=implicitplot(2*x+1=y,x=-1.5..1.5,
y=-2..2,axes=normal,grid=[50,50],color=black):
> a4:=implicitplot(2*x-1=y,x=-1.5..1.5,
y=-2..2,axes=normal,grid=[50,50],color=black):
> a5:=implicitplot(0.5*(x+1)=y,x=-1.5..1.5,
y=-2..2,axes=normal,grid=[50,50],color=black):
> a6:=PLOT(POINTS([-1,-1],[1/3,-1/3],[1,1],[-1/3,1/3], SYMBOL(BOX)),
TEXT([-1,-1],'` A`',ALIGNBELOW,ALIGNRIGHT), TEXT([1/3,-1/3],'`
B`',ALIGNBELOW,ALIGNRIGHT), TEXT([1,1],'` C`',ALIGNBELOW,ALIGNRIGHT),
TEXT([-1/3,1/3],'` D`',ALIGNBELOW,ALIGNRIGHT)):
> a7:=PLOT(CURVES([[-1,-1],[1/3,-1/3],[1,1],[-1/3,1/3],
[-1,-1]],THICKNESS(4),COLOR(RGB, .5607, .7372, 0.0))):
```

Další

Příklad 5.1.1

Určete a nakreslete definiční obor funkce

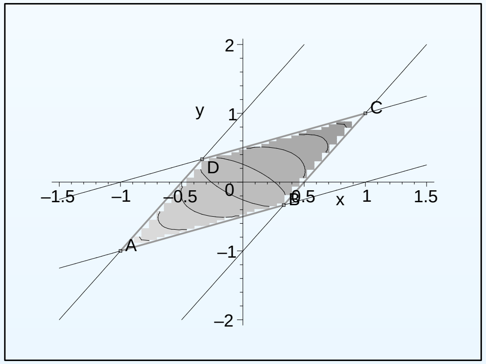
$$f(x,y) = \arcsin\,(2x-y) + \arccos\,(x-2y)\,.$$

Napište a zdůvodněte, které z následujících vlastností $\mathcal{D}(f)$ má a které nemá: otevřená, uzavřená, souvislá, konvexní, omezená. Určete hranici $\mathcal{D}(f)$. Je funkce $f(x,y)$ na svém definičním oboru omezená?

Maple:

Nakreslení celého definičního oboru:

```
>   display({a1,a2,a3,a4,a5,a6,a7});
```



Zpět

Příklad 5.1.1

Určete a nakreslete definiční obor funkce

$$f(x,y) = \arcsin(2x-y) + \arccos(x-2y)\,.$$

Napište a zdůvodněte, které z následujících vlastností $\mathcal{D}(f)$ má a které nemá: otevřená, uzavřená, souvislá, konvexní, omezená. Určete hranici $\mathcal{D}(f)$. Je funkce $f(x,y)$ na svém definičním oboru omezená?

Mathematica:

$\mathbf{f[x\_, y\_] = ArcSin[2x - y] + ArcCos[x - 2y];}$

$\mathbf{Simplify[-1<=2x - y]}$

$y \leq 1 + 2x$

<< Algebra`InequalitySolve`

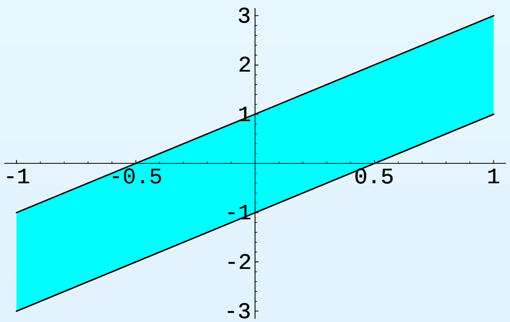
Určení definičního oboru funkce $\arcsin(2x-y)$.

$\mathbf{InequalitySolve[-1<=2x - y \leq 1, y]}$

$-1 + 2x \leq y \leq 1 + 2x$

<< Graphics`FilledPlot`

$\mathbf{g1 = FilledPlot[\{-1 + 2x, 1 + 2x\}, \{x, -1, 1\}];}$



Další

Příklad 5.1.1

Určete a nakreslete definiční obor funkce

$$f(x,y) = \arcsin\,(2x-y) + \arccos\,(x-2y)\,.$$

Napište a zdůvodněte, které z následujících vlastností $\mathcal{D}(f)$ má a které nemá: otevřená, uzavřená, souvislá, konvexní, omezená. Určete hranici $\mathcal{D}(f)$. Je funkce $f(x,y)$ na svém definičním oboru omezená?

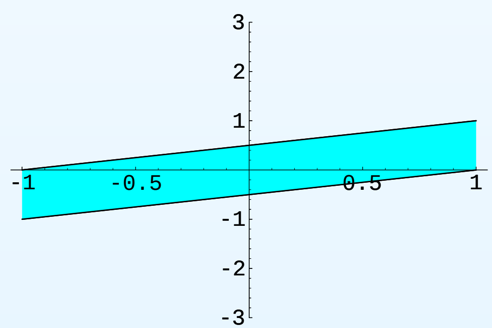
Mathematica:

Určení definičního oboru funkce $\arccos(x-2y)$.

InequalitySolve$[-1 <= x - 2y \leq 1, y]$

$-\frac{1}{2} + \frac{x}{2} \leq y \leq \frac{1}{2} + \frac{x}{2}$

$\mathbf{g2 = FilledPlot}\left[\left\{-\frac{1}{2} + \frac{x}{2}, +\frac{1}{2} + \frac{x}{2}\right\}, \{x, -1, 1\}, \mathbf{PlotRange} \to \{-3, 3\}\right];$



Určení definičního oboru funkce $f(x,y)$.

$\mathbf{Solve}\left[1 + 2x == \frac{1}{2} + \frac{x}{2}, x\right]$
$\mathbf{Solve}\left[1 + 2x == -\frac{1}{2} + \frac{x}{2}, x\right]$

Další

Příklad 5.1.1

Určete a nakreslete definiční obor funkce

$$f(x,y) = \arcsin(2x-y) + \arccos(x-2y)\,.$$

Napište a zdůvodněte, které z následujících vlastností $\mathcal{D}(f)$ má a které nemá: otevřená, uzavřená, souvislá, konvexní, omezená. Určete hranici $\mathcal{D}(f)$. Je funkce $f(x,y)$ na svém definičním oboru omezená?

Mathematica:

$\mathbf{Solve}\left[-1+2x == -\frac{1}{2}+\frac{x}{2}, x\right]$
$\mathbf{Solve}\left[-1+2x == \frac{1}{2}+\frac{x}{2}, x\right]$

$\{\{x \to -\frac{1}{3}\}\}$

$\{\{x \to -1\}\}$

$\{\{x \to \frac{1}{3}\}\}$

$\{\{x \to 1\}\}$

Definiční obor je kosodélník $A_1B_1C_1D_1$

$\mathbf{B1} = \{x, 1+2x\}/.\{x \to -\frac{1}{3}\};$
$\mathbf{A1} = \{x, 1+2x\}/.\{x \to -1\};$
$\mathbf{D1} = \{x, -1+2x\}/.\{x \to \frac{1}{3}\};$
$\mathbf{C1} = \{x, -1+2x\}/.\{x \to 1\};$
lichob = {A1, B1, C1, D1}

$\{\{-1,-1\}, \{-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\}, \{1,1\}, \{\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\}\}$

r1 = Graphics[{RGBColor[0, 1, 0], Polygon[lichob]}];

Zakreslíme si množinu všech bodů definičního oboru:

Další

Příklad 5.1.1

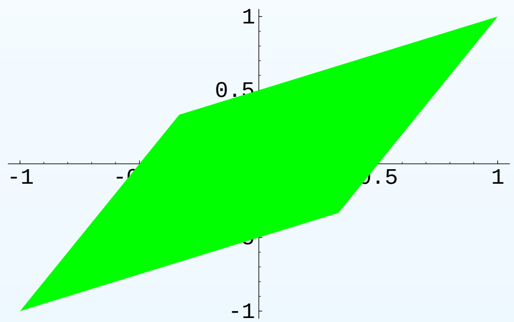
Určete a nakreslete definiční obor funkce

$$f(x,y) = \arcsin\,(2x - y) + \arccos\,(x - 2y)\,.$$

Napište a zdůvodněte, které z následujících vlastností $\mathcal{D}(f)$ má a které nemá: otevřená, uzavřená, souvislá, konvexní, omezená. Určete hranici $\mathcal{D}(f)$. Je funkce $f(x,y)$ na svém definičním oboru omezená?

Mathematica:

Show[r1, Axes → True];



Zpět

Příklad 5.1.2

Určete a nakreslete definiční obor funkce

$$f(x,y) = \ln \frac{x^2}{2x - y},$$

určete jeho hranici a nakreslete vrstevnici, která prochází bodem $A = (1, 1)$.

? Zpět

Příklad 5.1.2

Určete a nakreslete definiční obor funkce

$$f(x, y) = \ln \frac{x^2}{2x - y},$$

určete jeho hranici a nakreslete vrstevnici, která prochází bodem $A = (1, 1)$.

Výsledek:

$$\mathcal{D}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x \neq 0,\ y < 2x\}.$$

$$\mathcal{H} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x = 0,\ y < 0\} \ \cup \ \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ y = 2x\}.$$

Bodem A prochází $0-$vrstevnice $y = -x^2 + 2x,\ x \neq 0.$

Zpět

Příklad 5.1.2

Určete a nakreslete definiční obor funkce

$$f(x,y) = \ln \frac{x^2}{2x-y},$$

určete jeho hranici a nakreslete vrstevnici, která prochází bodem $A = (1,1)$.

Návod:

Nejprve určíme přirozený definiční obor funkce. Využijeme to, že známe definiční obor přirozeného logaritmu. Vrstevnici najdeme tak, že nejprve vypočteme příslušnou z_0 souřadnici bodu A a pak dopočteme odpovídající z_0-vrstevnici.

Zpět

Příklad 5.1.2

Určete a nakreslete definiční obor funkce

$$f(x,y) = \ln \frac{x^2}{2x-y},$$

určete jeho hranici a nakreslete vrstevnici, která prochází bodem $A = (1,1)$.

Řešení:

Definiční obor:
Argument logaritmu musí být kladné číslo, zlomek je kladný, je-li čitatel i jmenovatel kladný nebo záporný. Protože v čitateli je x^2 a $x^2 \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$, musíme vyloučit $x = 0$ a požadovat, aby $2x - y > 0$. Tedy

$$\frac{x^2}{2x-y} > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x \neq 0 \ \wedge \ y < 2x \quad \Longrightarrow$$

$$\mathcal{D}(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \ x \neq 0, \ y < 2x\}.$$

Hranice definičního oboru je tvořena přímkou $y = 2x$ a zápornou částí osy y:

$$\mathcal{H} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \ x = 0, \ y < 0\} \ \cup \ \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \ y = 2x\}.$$

Obrázek je nakreslen v části Maple.
Vrstevnice:
Vrstevnice grafu funkce je křivka v rovině xy, kterou dostaneme tak, že provedeme řez grafu funkce rovinou $z = z_0$ a křivku, kterou tak dostaneme, promítneme do roviny xy. Známe-li bod na vrstevnici, musíme nejprve spočítat na jaké vrstevnici daný bod leží, tj. jakou má zetovou souřadnici z_0. V našem případě dostaneme:

$$A = (1,1): \quad z_0 = \ln \frac{1^2}{2-1} \quad \Longrightarrow \quad z_0 = 0.$$

Další

Příklad 5.1.2

Určete a nakreslete definiční obor funkce

$$f(x,y) = \ln \frac{x^2}{2x-y},$$

určete jeho hranici a nakreslete vrstevnici, která prochází bodem $A = (1,1)$.

Řešení:

Nyní pro $z_0 = 0$ najdeme rovnici vrstevnice, které odpovídá toto z_0:

$$\ln \frac{x^2}{2x-y} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{x^2}{2x-y} = 1 \quad \Longleftrightarrow y = -x^2 + 2x.$$

Vrstevnice je tedy parabola $y = -(x-1)^2 + 1$. Pozor, nesmíme zapomenout, že bod $(0,0)$, který leží na této parabole, nepatří do definičního oboru a musíme ho proto vynechat. Nulová vrstevnice $\mathcal{K}_A$, která prochází bodem A, je tedy

$$\mathcal{K}_A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ y = -x^2 + 2x,\ x \neq 0\}.$$

Je nakreslena v části Maple.

Zpět

Příklad 5.1.2

Určete a nakreslete definiční obor funkce

$$f(x,y) = \ln \frac{x^2}{2x-y},$$

určete jeho hranici a nakreslete vrstevnici, která prochází bodem $A = (1,1)$.

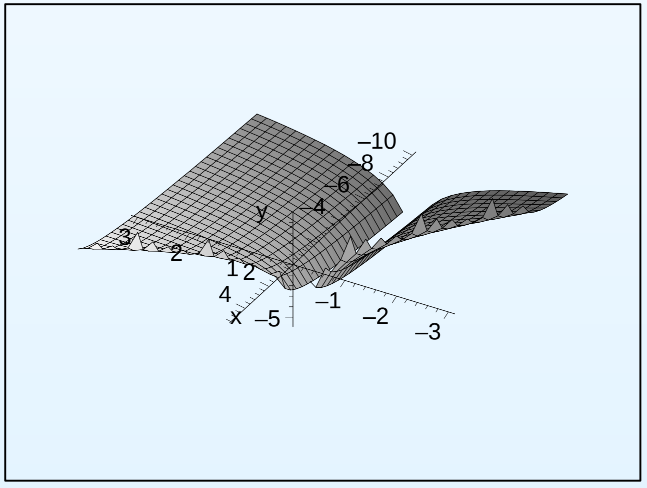
Maple:

```
> with(plots):
> f:=(x,y)->ln(x^2/(2*x-y));
```

$$f := (x,\ y) \to \ln(\frac{x^2}{2\,x-y})$$

Pro představu si nakreslíme graf dané funkce.

```
> plot3d(ln(x^2/(2*x-y)), x=-3..3,
y=-10..5,axes=normal,numpoints=1000,orientation=[120,30]);
```



Další

Příklad 5.1.2

Určete a nakreslete definiční obor funkce

$$f(x,y) = \ln\frac{x^2}{2x-y},$$

určete jeho hranici a nakreslete vrstevnici, která prochází bodem $A = (1,1)$.

Maple:

Vypočteme z-souřadnici bodu A

```
>  f(1,1);
```

$$0$$

Bod A leží na 0-vrstevnici (Maple vypočte tuto křivku v parametrickém tvaru):

```
>  solve(ln(x^2/(2*x-y))=0);
```

$$\{y = -x^2 + 2\,x,\ x = x\}$$

Nyní si nakreslíme definiční obor dané funkce. Silněji je znázorněna 0-vrstevnice. Hranici definičního oboru tvoří přímka $y = 2x$ a polopřímka $x = 0$, $y <= 0$. Hranice do definičního oboru nepatří.

```
>  a1:=contourplot(ln(x^2/(2*x-y)),x=-3..0,y=-10..0,axes=normal,
grid=[60,60],filled=true,coloring=[yellow,green]):
>  a2:=contourplot(ln(x^2/(2*x-y)),x=0..3,y=-10..5,axes=normal,
grid=[60,60],filled=true,coloring=[yellow,green]):
>  a3:=contourplot(ln(x^2/(2*x-y)),x=-3..0,y=-10..5,axes=normal,
grid=[100,100],contours=[0],thickness=3,color=blue):
>  a4:=contourplot(ln(x^2/(2*x-y)),x=0..3,y=-10..5,axes=normal,
grid=[100,100],contours=[0],thickness=3,color=blue):
```

Další

Příklad 5.1.2

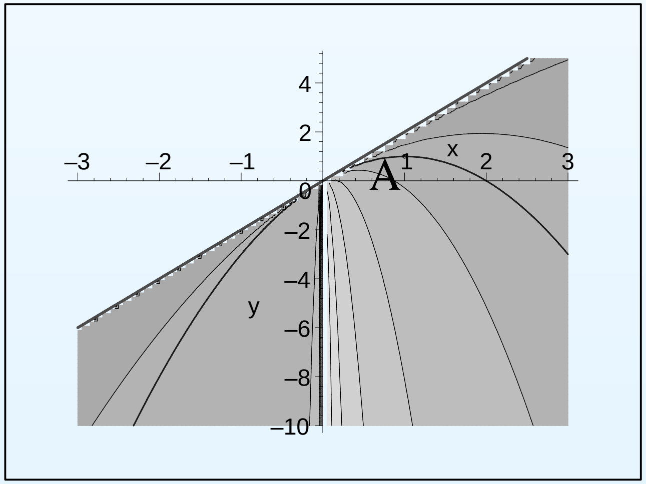
Určete a nakreslete definiční obor funkce

$$f(x,y) = \ln \frac{x^2}{2x-y},$$

určete jeho hranici a nakreslete vrstevnici, která prochází bodem $A = (1,1)$.

Maple:

```
> a5:=implicitplot(x=0,x=-3..3,y=-10..0,axes=normal,thickness=2,
color=red):
> a6:=implicitplot(y=2*x,x=-3..3,y=-10..5,axes=normal,grid=[50,50],
thickness=5,color=red):
> a7:=PLOT(POINTS([1,1],SYMBOL(CIRCLE)), TEXT([1,1],'`
A`',ALIGNBELOW,ALIGNLEFT,FONT(SYMBOL,20))):
> display({a1,a2,a3,a4,a5,a6,a7});
```




```
> b1:=plot(-x^2+2*x,x=-3..3,y=-4..4,color=blue):
```

Další

Příklad 5.1.2

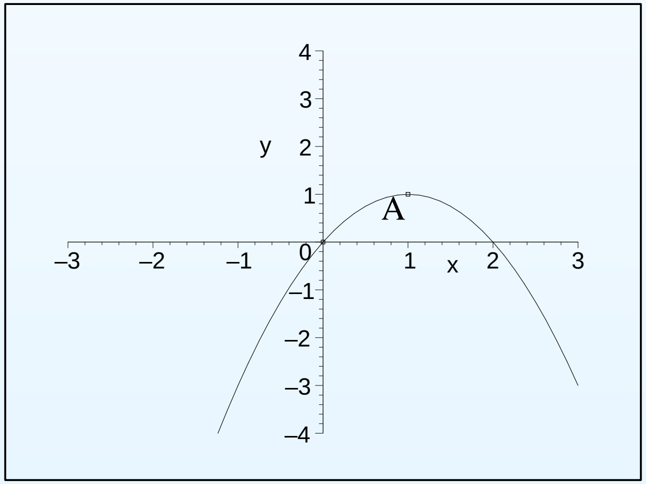
Určete a nakreslete definiční obor funkce

$$f(x,y) = \ln \frac{x^2}{2x-y},$$

určete jeho hranici a nakreslete vrstevnici, která prochází bodem $A = (1,1)$.

Maple:

```
>  b2:=PLOT(POINTS([0,0],SYMBOL(BOX))):
>  b3:=PLOT(POINTS([1,1],SYMBOL(BOX)), TEXT([1,1],''
A'',ALIGNBELOW,ALIGNLEFT,FONT(SYMBOL,15))):
>  display({b1,b2,b3});
```



Zpět

Příklad 5.1.2

Určete a nakreslete definiční obor funkce

$$f(x,y) = \ln \frac{x^2}{2x-y},$$

určete jeho hranici a nakreslete vrstevnici, která prochází bodem $A = (1,1)$.

Mathematica:

$\boldsymbol{f[\mathrm{x\_}, \mathrm{y\_}] = \mathrm{Log}[(x\char`^2)/(2x-y)]}$

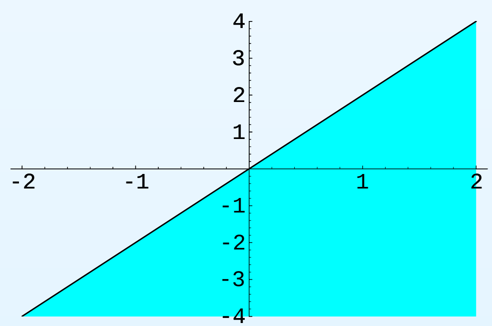
$\mathrm{Log}\left[\frac{x^2}{2x-y}\right]$

Určíme a nakreslíme definiční obor funkce:

$\mathbf{InequalitySolve}[(2x-y)>0, y]$

$y < 2x$

$\mathbf{g1 = FilledPlot}[\{2x, -9999\}, \{x, -2, 2\}, \mathbf{PlotRange} \to \{-4, 4\}];$



Další

Příklad 5.1.2

Určete a nakreslete definiční obor funkce

$$f(x,y) = \ln \frac{x^2}{2x-y},$$

určete jeho hranici a nakreslete vrstevnici, která prochází bodem $A = (1,1)$.

Mathematica:

Určíme $z-$tovou souřadnici vrstevnice:

$\mathbf{zA = \boldsymbol{f}[1,1]}$

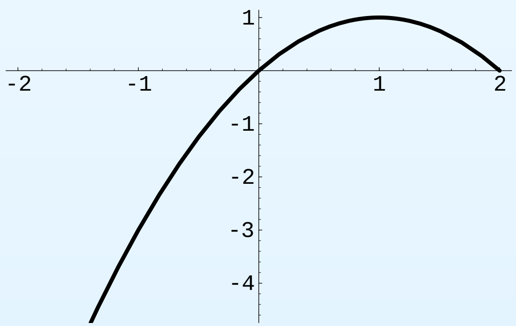
0

Vypočteme předpis pro vrstevnici a zakreslíme ji do definičního oboru:

$\mathbf{Solve[\boldsymbol{f}[\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}] == zA, \boldsymbol{y}]}$

$\{\{y \to 2x - x^2\}\}$

$\mathbf{g2 = Plot[2\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}\hat{}2, \{\boldsymbol{x}, -2, 2\}, PlotStyle \to \{Thickness[0.008]\}];}$



Další

Příklad 5.1.2

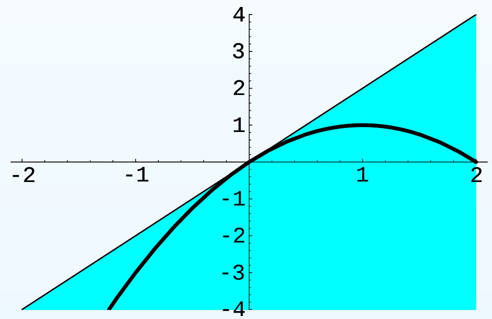
Určete a nakreslete definiční obor funkce

$$f(x,y) = \ln \frac{x^2}{2x-y},$$

určete jeho hranici a nakreslete vrstevnici, která prochází bodem $A = (1,1)$.

Mathematica:

Show[{g1, g2}];



Zpět

Příklad 5.1.3

Najděte a nakreslete definiční obor funkce

$$f(x,y) = \sqrt{x - \sqrt{y}}.$$

Které vrstevnice procházejí body $A = (1,1)$, $B = (5,1)$, $C = (4,0)$? Nakreslete je do obrázku.

Zpět

Příklad 5.1.3

Najděte a nakreslete definiční obor funkce

$$f(x,y) = \sqrt{x - \sqrt{y}}.$$

Které vrstevnice procházejí body $A = (1,1),\ B = (5,1),\ C = (4,0)$? Nakreslete je do obrázku.

Výsledek:

$$\mathcal{D}(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x \geq \sqrt{y},\ y \geq 0\}.$$

Bodem A prochází $0-$vrstevnice $y = x^2,\ x \geq 0$;
body B a C prochází $2-$vrstevnice $y = (x-4)^2,\ x \geq 4$.

Zpět

Příklad 5.1.3

Najděte a nakreslete definiční obor funkce

$$f(x,y)=\sqrt{x-\sqrt{y}}.$$

Které vrstevnice procházejí body $A=(1,1),\ B=(5,1),\ C=(4,0)$? Nakreslete je do obrázku.

Návod:

Nejprve určíme přirozený definiční obor funkce. Využijeme to, že známe definiční obor odmocniny. Vrstevnice najdeme tak, že nejprve vypočteme příslušnou z_0 souřadnici každého bodu a pak dopočteme odpovídající z_0-vrstevnici.

Zpět

Příklad 5.1.3

Najděte a nakreslete definiční obor funkce

$$f(x,y)=\sqrt{x-\sqrt{y}}.$$

Které vrstevnice procházejí body $A=(1,1),\ B=(5,1),\ C=(4,0)$? Nakreslete je do obrázku.

Řešení:

Definiční obor:
Pod odmocninou musí být nezáporné číslo, tj.

$$y\geq 0 \quad \wedge \quad x-\sqrt{y}\ \geq\ 0 \quad \Longrightarrow$$

$$D(f)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x\geq\sqrt{y},\ y\geq 0\}.$$

Obrázek je nakreslen v části Maple.
Vrstevnice:
Vrstevnice grafu funkce je křivka v rovině xy, kterou dostaneme tak, že provedeme řez grafu funkce rovinou $z=z_0$ a křivku, kterou tak dostaneme, promítneme do roviny xy. Známe-li bod na vrstevnici, musíme nejprve spočítat na jaké vrstevnici daný bod leží, tj. jakou má zetovou souřadnici z_0. V našem případě dostaneme:

$$\begin{array}{lll}
\text{Bod A=(1,1):} \quad z_0=\sqrt{1-\sqrt{1}} & \Longrightarrow & z_0=0\\
\text{Bod B=(5,1):} \quad z_0=\sqrt{5-\sqrt{1}} & \Longrightarrow & z_0=2\\
\text{Bod C=(4,0):} \quad z_0=\sqrt{4-\sqrt{0}} & \Longrightarrow & z_0=2
\end{array}$$

Další

Příklad 5.1.3

Najděte a nakreslete definiční obor funkce

$$f(x,y) = \sqrt{x - \sqrt{y}}.$$

Které vrstevnice procházejí body $A = (1,1),\ B = (5,1),\ C = (4,0)$? Nakreslete je do obrázku.

Řešení:

Nyní pro vypočtená z_0 najdeme rovnici křivky = vrstevnice, které odpovídá toto z_0.

$$z_0 = 0: \quad \begin{aligned} 0 &= \sqrt{x - \sqrt{y}} \\ x - \sqrt{y} &= 0 \\ 0 \le \sqrt{y} &= x \\ y = x^2&,\ x \ge 0 \end{aligned} \qquad \mathcal{K}_A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ y = x^2 \wedge x \ge 0\}$$

$$z_0 = 2: \quad \begin{aligned} 2 &= \sqrt{x - \sqrt{y}} \\ x - \sqrt{y} &= 4 \\ 0 \le \sqrt{y} &= x - 4 \\ y = (x-4)^2&,\ x \ge 4 \end{aligned} \qquad \mathcal{K}_{B,C} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ y = (x-4)^2 \wedge x \ge 4\}$$

Nulová vrstevnice $\mathcal{K}_A$, která prochází bodem A, i 2−vrstevnice $K_{B,C}$, která prochází body $B,\ C$ jsou zakresleny do obrázku v části Maple.

Zpět

Příklad 5.1.3

Najděte a nakreslete definiční obor funkce

$$f(x,y) = \sqrt{x - \sqrt{y}}.$$

Které vrstevnice procházejí body $A = (1,1)$, $B = (5,1)$, $C = (4,0)$? Nakreslete je do obrázku.

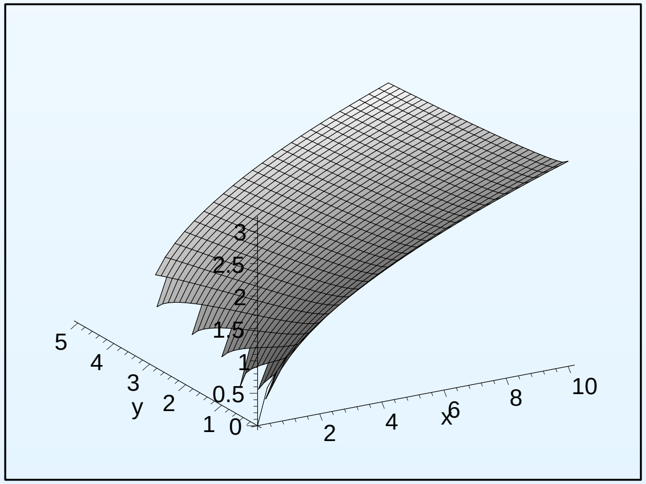
Maple:

```
> with(plots):
> f:=(x,y)->sqrt(x-sqrt(y));
```

$$f := (x,\, y) \to \sqrt{x - \sqrt{y}}$$

Pro představu si nakreslíme graf dané funkce.

```
> plot3d(sqrt(x-sqrt(y)), x=0..10,
y=0..5,axes=normal,numpoints=1000,orientation=[240,60]);
```



Vypočteme z-souřadnice bodů A,B,C

Další

Příklad 5.1.3

Najděte a nakreslete definiční obor funkce

$$f(x,y)=\sqrt{x-\sqrt{y}}.$$

Které vrstevnice procházejí body $A=(1,1)$, $B=(5,1)$, $C=(4,0)$? Nakreslete je do obrázku.

Maple:

```
> f(1,1);
```

$$0$$

```
> f(5,1);
```

$$2$$

```
> f(4,0);
```

$$2$$

Bod A leží na 0-vrstevnici (Maple vypočte tuto křivku v parametrickém tvaru):

```
> solve(sqrt(x-sqrt(y))=0);
```

$$\{y=y,\, x=\sqrt{y}\}$$

Body B,C leží na 2-vrstevnici (opět v parametrickém tvaru):

```
> solve(sqrt(x-sqrt(y))=2);
```

$$\{y=(x-4)^2,\, x=x\}$$

Nyní si nakreslíme definiční obor dané funkce. Silněji jsou znázorněny obě vrstevnice. Nulová vrstevnice a kladná část osy x tvoří hranici definičního oboru a patří do něj.

```
> a1:=contourplot(sqrt(x-sqrt(y)),x=0..8,y=0..5,axes=boxed,grid=[50,50]
,filled=true,coloring=[yellow,green]):
```

Další

Příklad 5.1.3

Najděte a nakreslete definiční obor funkce

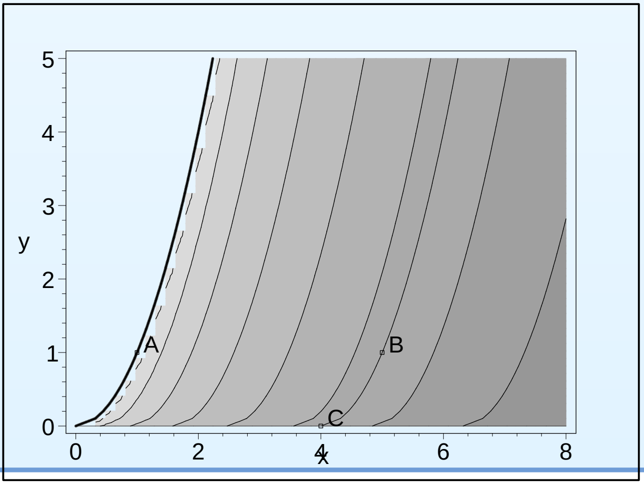
$$f(x,y) = \sqrt{x - \sqrt{y}}.$$

Které vrstevnice procházejí body $A = (1,1)$, $B = (5,1)$, $C = (4,0)$? Nakreslete je do obrázku.

Maple:

```
> a2:=contourplot(sqrt(x-sqrt(y)),x=0..8,y=0..5,axes=boxed,grid=[50,50]
,contours=[2],thickness=2,color=black):
> a3:=implicitplot(x=sqrt(y),x=0..8,y=0..5,axes=boxed,grid=[50,50],thic
kness=3,color=black):
> a4:=implicitplot(y=0,x=0..8,y=0..5,axes=boxed,thickness=2,color=red):

> a5:=implicitplot(x=sqrt(y),x=0..8,y=0..5,axes=boxed,grid=[50,50],thic
kness=5,color=red):
> a6:=PLOT(POINTS([1,1],[5,1],[4,0],SYMBOL(BOX)), TEXT([1,1],'`
A`',ALIGNBELOW,ALIGNRIGHT), TEXT([5,1],'` B`',ALIGNBELOW,ALIGNRIGHT),
TEXT([4,0],'` C`',ALIGNBELOW,ALIGNRIGHT)):
> display({a1,a2,a3,a4,a5,a6});
```



Zpět

Příklad 5.1.3

Najděte a nakreslete definiční obor funkce

$$f(x,y)=\sqrt{x-\sqrt{y}}.$$

Které vrstevnice procházejí body $A=(1,1),\ B=(5,1),\ C=(4,0)$? Nakreslete je do obrázku.

Mathematica:

$\boldsymbol{f[\mathrm{x\_},\mathrm{y\_}]=\mathrm{Sqrt}[x-\mathrm{Sqrt}[y]]}$

$\sqrt{x-\sqrt{y}}$

Určení a nakreslení definičního oboru:

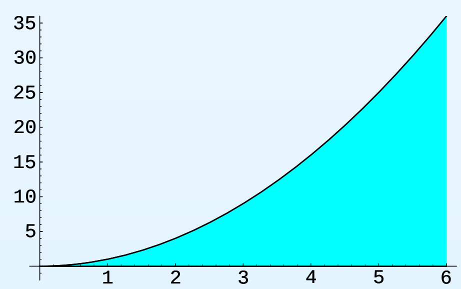
$\boldsymbol{\mathrm{InequalitySolve}[x-\mathrm{Sqrt}[y]>=0,x]}$

$x\geq\sqrt{y}$

$\boldsymbol{\mathrm{InequalitySolve}\left[(x)\hat{}2\geq\left(\sqrt{y}\right)\hat{}2,y\right]}$

$y\leq x^2$

$\boldsymbol{\mathrm{g1}=\mathrm{FilledPlot}[\{x\hat{}2,0\},\{x,0,6\},\mathrm{PlotRange}\rightarrow\{-2,36\}];}$



Další

Příklad 5.1.3

Najděte a nakreslete definiční obor funkce

$$f(x,y) = \sqrt{x - \sqrt{y}}.$$

Které vrstevnice procházejí body $A = (1,1)$, $B = (5,1)$, $C = (4,0)$? Nakreslete je do obrázku.

Mathematica:

Určení a nakreslení vrstevnic:

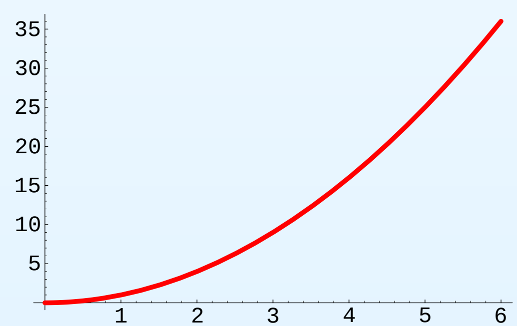
$\mathbf{zA = f[1,1]}$

0

$\mathbf{Solve[f[x,y] == zA, y]}$

$\{\{y \to x^2\}\}$

$\mathbf{g2 = Plot[x\^{}2, \{x, 0, 6\},}$
$\mathbf{PlotStyle \to \{Thickness[0.01], RGBColor[1,0,0]\}];}$



$\mathbf{zB = f[5,1]}$

2

Další

Příklad 5.1.3

Najděte a nakreslete definiční obor funkce

$$f(x,y) = \sqrt{x - \sqrt{y}}.$$

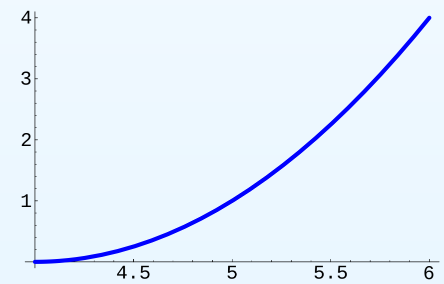
Které vrstevnice procházejí body $A = (1,1)$, $B = (5,1)$, $C = (4,0)$? Nakreslete je do obrázku.

Mathematica:

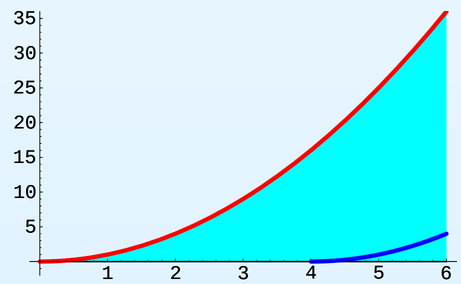
Solve[$f[x, y]$ == zB, y]

$\{\{y \to 16 - 8x + x^2\}\}$

g3 = Plot[16 − 8x + x^2, {x, 2, 3},
PlotStyle → {Thickness[0.01], RGBColor[0, 0, 1]}];



Show[{g1, g2, g3}];



Zpět

Graf funkce dvou proměnných

- Příklad 5.2.1 Vyšetřete graf funkce

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}\,,$$

  metodou řezu.

- Příklad 5.2.2 Určete vrstevnice funkce $f(x, y) = \frac{1}{x^2+y^2+1}$ pro dané $z_0 = \frac{1}{2},\ \frac{1}{5}$.

Zpět

Příklad 5.2.1

Vyšetřete graf funkce

$$f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}\,,$$

metodou řezu.

? Zpět

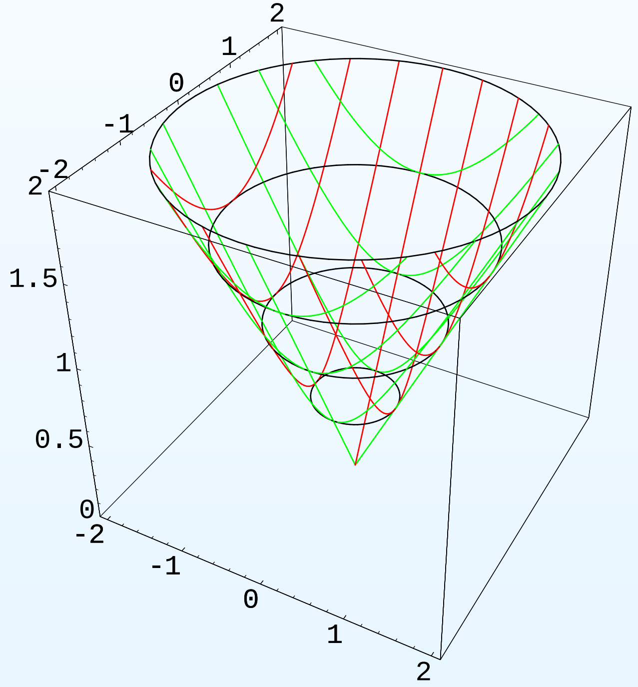
Příklad 5.2.1

Vyšetřete graf funkce

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}\,,$$

metodou řezu.

Výsledek:



Zpět

Příklad 5.2.1

Vyšetřete graf funkce

$$f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}\,,$$

metodou řezu.

Návod:

Nakreslíme si postupně řezy rovinami $z = z_0$, $y = y_0$, $x = x_0$, pro různé hodnoty konstant x_0 , x_0 , z_0 .

Zpět

Příklad 5.2.1

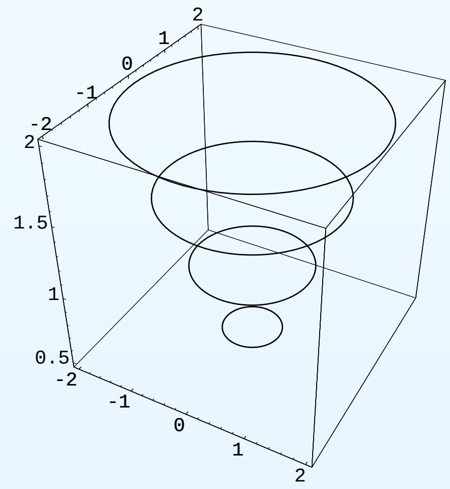
Vyšetřete graf funkce

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}\,,$$

metodou řezu.

Řešení:

Nakreslíme si nejdříve řezy rovinami $z = z_0$ pro $z_0 = 0.5, 1.0, 1.5, 2.0.$
V rovině $z_0 = 0.5$ dostanu kružnici popsanou rovnicí $x^2 + y^2 = 0.25.$
V rovině $z_0 = 1.0$ dostanu kružnici popsanou rovnicí $x^2 + y^2 = 1.0.$
V rovině $z_0 = 1.5$ dostanu kružnici popsanou rovnicí $x^2 + y^2 = 2.25.$
V rovině $z_0 = 0.5$ dostanu kružnici popsanou rovnicí $x^2 + y^2 = 4.$
Všechny řezy si zakreslíme.



Zpět

Příklad 5.2.1

Vyšetřete graf funkce

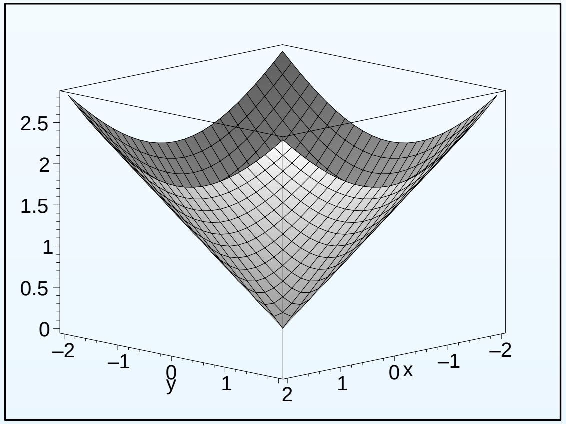
$$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}\,,$$

metodou řezu.

Maple:

Graf nebudeme vyšetřovat metodou řezu, ale nakreslíme si ho přímo.

```
> plot3d(sqrt(x^2+y^2),x=-2..2,y=-2..2,axes='boxed',orientation=[45,75]
);
```



Zpět

Příklad 5.2.1

Vyšetřete graf funkce

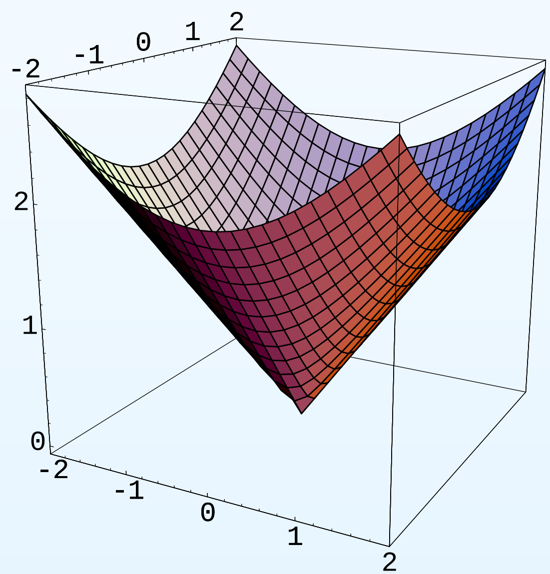
$$f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}\,,$$

metodou řezu.

Mathematica:

Graf nebudeme vyšetřovat metodou řezu, ale nakreslíme si ho přímo.

Plot3D[Sqrt[x^2 + y^2], {x, −2, 2}, {y, −2, 2},BoxRatios → {1, 1, 1}, ViewPoint->{1.5, −2.8, 1.0}];



Zpět

Příklad 5.2.2

Určete vrstevnice funkce $f(x, y) = \frac{1}{x^2+y^2+1}$ pro dané $z_0 = \frac{1}{2},\ \frac{1}{5}$.

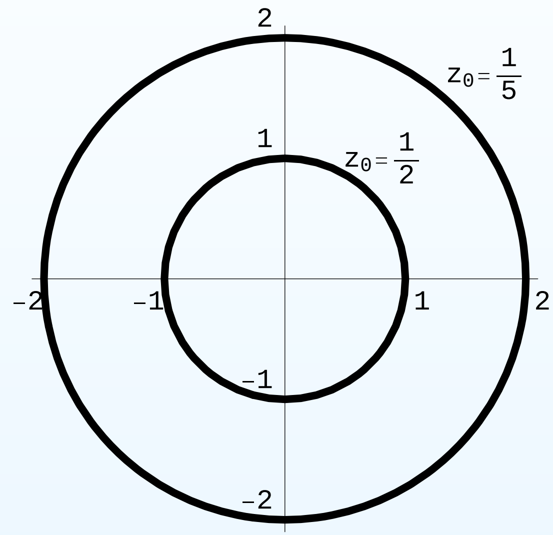
? Zpět

Příklad 5.2.2

Určete vrstevnice funkce $f(x, y) = \frac{1}{x^2+y^2+1}$ pro dané $z_0 = \frac{1}{2}, \frac{1}{5}$.

Výsledek:

$\mathrm{D}(f) = \mathbb{R}^2$,



Zpět

Příklad 5.2.2

Určete vrstevnice funkce $f(x, y) = \frac{1}{x^2+y^2+1}$ pro dané $z_0 = \frac{1}{2}, \frac{1}{5}$.

Návod:

Nakreslete křivky, jejíž body splňují rovnici:

a) $\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{x^2 + y^2 + 1}$

b) $\dfrac{1}{5} = \dfrac{1}{x^2 + y^2 + 1}.$

Zpět

Příklad 5.2.2

Určete vrstevnice funkce $f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2+1}$ pro dané $z_0 = \frac{1}{2},\ \frac{1}{5}$.

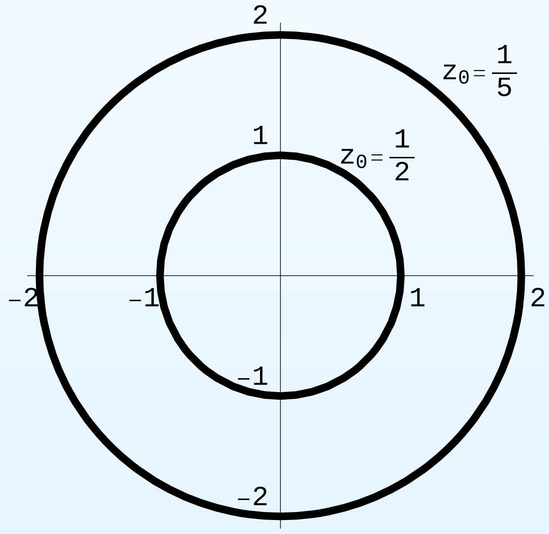
Řešení:

Nakreslíme křivky, jejíž body splnůjí rovnici:

a) $\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{x^2+y^2+1} \Rightarrow x^2 + y^2 = 1$

b) $\dfrac{1}{5} = \dfrac{1}{x^2+y^2+1} \Rightarrow x^2 + y^2 = 4.$

Vrstevnice jsou tedy kružnice o poloměru 1 a 2.



Zpět

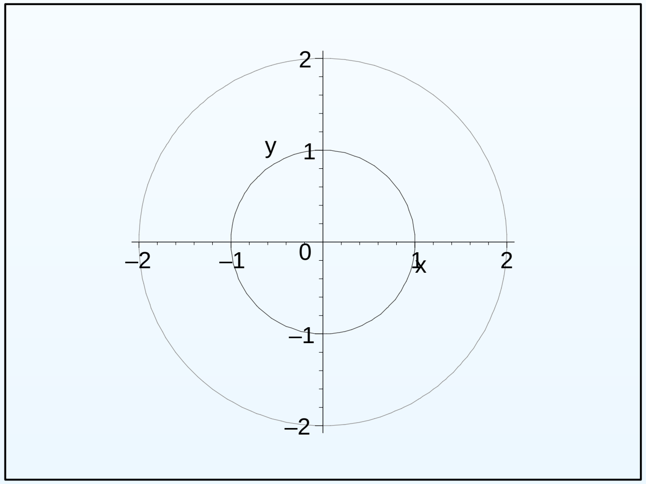
Příklad 5.2.2

Určete vrstevnice funkce $f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2+1}$ pro dané $z_0 = \frac{1}{2}, \frac{1}{5}$.

Maple:

Nakreslíme přímo vrstevnice pro $z_0 = \frac{1}{2}$ a $z_0 = \frac{1}{5}$.

```
> plots[contourplot](1/(x^2+y^2+1),x=-2..2,y=-2..2,contours =
[1/2,1/5],scaling=constrained);
```



Zpět

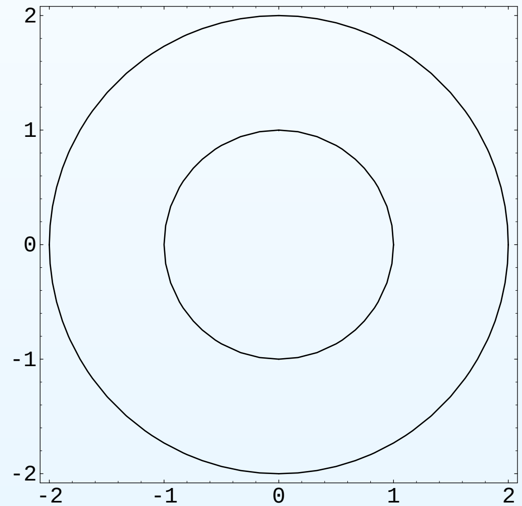
Příklad 5.2.2

Určete vrstevnice funkce $f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2+1}$ pro dané $z_0 = \frac{1}{2}, \frac{1}{5}$.

Mathematica:

Nakreslíme přímo vrstevnice pro $z_0 = \frac{1}{2}$ a $z_0 = \frac{1}{5}$.

ContourPlot[1/(x^2 + y^2 + 1), {x, −2, 2}, {y, −2, 2},
Contours → {1/2, 1/5}, ContourShading → False];



Zpět

Limita funkce dvou proměnných

- Příklad 5.3.1 Vypočtěte $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2-\sqrt{x\,y+4}}{x\,y}$.
- Příklad 5.3.2 Vypočtěte $\lim\limits_{(x,y)\to(2,2)} \dfrac{x^4-y^4}{x^2-y^2}$.
- Příklad 5.3.3 Vypočtěte $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x\,y(x+y)}{x^2+y^2}$.
- Příklad 5.3.4 Vypočtěte $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{y}{x-y}$.

Zpět

Příklad 5.3.1

Vypočtěte $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2-\sqrt{x\,y+4}}{x\,y}$.

? Zpět

Příklad 5.3.1

Vypočtěte $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2-\sqrt{x\,y+4}}{x\,y}$.

Výsledek:

$-\dfrac{1}{4}$.

Zpět

Příklad 5.3.1

Vypočtěte $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2-\sqrt{x\,y+4}}{x\,y}$.

Návod:

Limita je typu „$\frac{0}{0}$“. Rozšíříme funkci výrazem $2+\sqrt{x\,y+4}$, upravíme a pak limitu vypočteme.

Zpět

Příklad 5.3.1

Vypočtěte $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2-\sqrt{x\,y+4}}{x\,y}$.

Řešení:

Limita je typu „$\frac{0}{0}$“. Rozšíříme funkci výrazem $2+\sqrt{x\,y+4}$.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2-\sqrt{x\,y+4}}{x\,y} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{-x\,y}{x\,y(2+\sqrt{x\,y+4})} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} -\frac{1}{2+\sqrt{x\,y+4}} = -\frac{1}{4}\,.$$

Zpět

Příklad 5.3.1

Vypočtěte $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2-\sqrt{x\,y+4}}{x\,y}$.

Maple:

S limitami to je v MAPLE horší. Často nám limitu nespočte.

```
> limit((2-sqrt(x*y+4))/(x*y),{x=0,y=0});
```

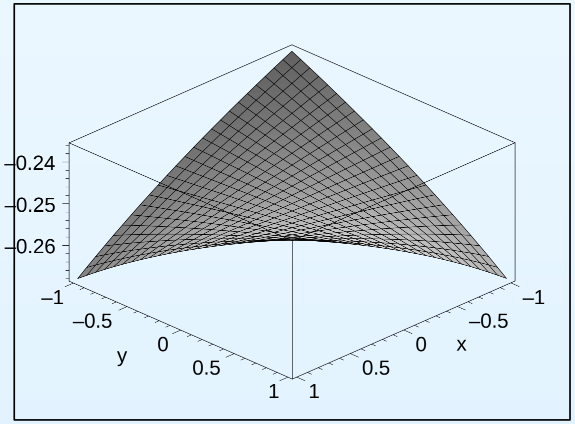
$$\mathrm{limit}\left(\frac{2-\sqrt{x\,y+4}}{x\,y},\ \{y=0,\ x=0\}\right)$$

```
> limit(expand((2-sqrt(x*y+4))*(2+sqrt(x*y+4)))/(x*y*(2+sqrt(x*y+4))),
{x=0,y=0});
```

$$\mathrm{limit}\left(-\frac{1}{2+\sqrt{x\,y+4}},\ \{y=0,\ x=0\}\right)$$

Zda limita existuje zjistíme z obrázku. Potom můžeme vypočítat limity postupně podle x a potom podle y.

```
> plot3d(expand((2-sqrt(x*y+4))*(2+sqrt(x*y+4)))/(x*y*(2+sqrt(x*y+4))),
x=-1..1,y=-1..1,axes=box);
```



Další

Příklad 5.3.1

Vypočtěte $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2-\sqrt{x\,y+4}}{x\,y}$.

Maple:

```
>   limit(limit((2-sqrt(x*y+4))/(x*y),x=0),y=0);
```

$$\frac{-1}{4}$$

Zpět

Příklad 5.3.1

Vypočtěte $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2-\sqrt{x\,y+4}}{x\,y}$.

Mathematica:

Nejdříve funkci upravíme:

$\mathbf{Expand[(2 - Sqrt[}\boldsymbol{xy}\mathbf{ + 4])(2 + Sqrt[}\boldsymbol{xy}\mathbf{ + 4])]/(}\boldsymbol{xy}\mathbf{(2 + Sqrt[}\boldsymbol{x * y}\mathbf{ + 4]))}$

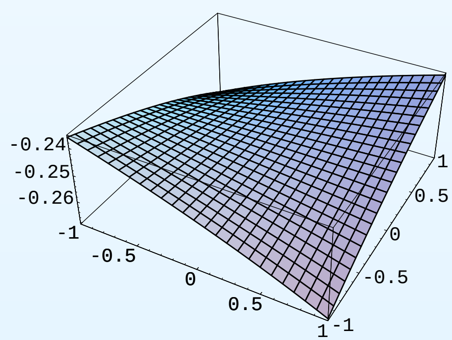
$-\frac{1}{2+\sqrt{4+x\,y}}$

$\boldsymbol{f}\mathbf{[x\_, y\_] = -1/(2 + (}\boldsymbol{xy}\mathbf{ + 4)\hat{}\,(1/2))}$

$-\frac{1}{2+\sqrt{4+x\,y}}$

Ověříme si, zda limita existuje

$\mathbf{Plot3D[}\boldsymbol{f}\mathbf{[}\boldsymbol{x, y}\mathbf{], \{}\boldsymbol{x}\mathbf{, -1, 1\}, \{}\boldsymbol{y}\mathbf{, -1, 1\}];}$



Další

Příklad 5.3.1

Vypočtěte $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2-\sqrt{x\,y+4}}{x\,y}$.

Mathematica:

Vypočteme limity postupně podle x a potom podle y.

Limit[Limit[f[x, y], $x \to 0$], $y \to 0$]

$-\frac{1}{4}$

Zpět

Příklad 5.3.2

Vypočtěte $\lim\limits_{(x,y)\to(2,2)} \dfrac{x^4 - y^4}{x^2 - y^2}$.

Zpět

Příklad 5.3.2

Vypočtěte $\lim\limits_{(x,y)\to(2,2)} \dfrac{x^4 - y^4}{x^2 - y^2}$.

Výsledek:

8 .

Zpět

Příklad 5.3.2

Vypočtěte $\lim\limits_{(x,y)\to(2,2)} \dfrac{x^4 - y^4}{x^2 - y^2}$.

Návod:

Limita je typu „$\frac{0}{0}$“. Pokrátíme zlomek výrazem $x^2 - y^2$.

Zpět

Příklad 5.3.2

Vypočtěte $\lim\limits_{(x,y)\to(2,2)} \dfrac{x^4 - y^4}{x^2 - y^2}$.

Řešení:

Limita je typu „$\frac{0}{0}$“. Pokrátíme zlomek výrazem $x^2 - y^2$.

$$\lim_{(x,y)\to(2,2)} \frac{x^4 - y^4}{x^2 - y^2} = \lim_{(x,y)\to(2,2)} \frac{(x^2 - y^2)(x^2 + y^2)}{x^2 - y^2} = \lim_{(x,y)\to(2,2)} x^2 + y^2 = 8\,.$$

Zpět

Příklad 5.3.2

Vypočtěte $\lim\limits_{(x,y)\to(2,2)} \dfrac{x^4-y^4}{x^2-y^2}$.

Maple:

```
> limit((x^4-y^4)/(x^2-y^2),{x=2,y=2});
```

$$8$$

Zpět

Příklad 5.3.2

Vypočtěte $\lim\limits_{(x,y)\to(2,2)} \dfrac{x^4 - y^4}{x^2 - y^2}$.

Mathematica:

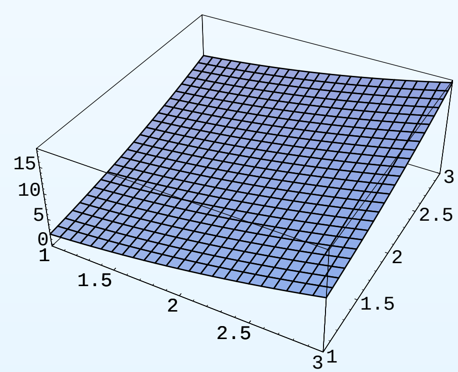
Nejdříve funkci upravíme:

$\boldsymbol{f}$**[x_, y_] = Simplify[($\boldsymbol{x}$^4 − $\boldsymbol{y}$^4)/($\boldsymbol{x}$^2 − $\boldsymbol{y}$^2)]**

$x^2 + y^2$

Ověříme si, zda limita existuje

Plot3D[$\boldsymbol{f}$[$\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$], {$\boldsymbol{x}$, 1, 3}, {$\boldsymbol{y}$, 1, 3}];



Vypočteme limity postupně podle x a potom podle y.

Limit[Limit[$\boldsymbol{f}$[$\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$], $\boldsymbol{x} \to$ 2], $\boldsymbol{y} \to$ 2]

8

Zpět

Příklad 5.3.3

Vypočtěte $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x\,y(x+y)}{x^2+y^2}$.

Zpět

Příklad 5.3.3

Vypočtěte $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x\,y(x+y)}{x^2+y^2}$.

Výsledek:

0 .

Zpět

Příklad 5.3.3

Vypočtěte $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x\,y(x+y)}{x^2+y^2}$.

Návod:

Při výpočtu limity přejdeme k polárním souřadnicím

$$\begin{array}{rcl} x & = & r\,\cos t \\ y & = & r\,\sin t \quad r \in \langle 0, \infty\rangle\,,\ t \in \langle 0, \pi\rangle \end{array} \; .$$

Zpět

Příklad 5.3.3

Vypočtěte $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x\,y(x+y)}{x^2+y^2}$.

Řešení:

Při výpočtu limity přejdeme k polárním souřadnicím

$$\begin{array}{rcl} x & = & r\,\cos t \\ y & = & r\,\sin t \quad r\in\langle 0,\infty\rangle\,,\ t\in\langle 0,\pi\rangle \end{array} .$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\,y(x+y)}{x^2+y^2} = \lim_{(r,t)\to(0,t)} \frac{r\,\cos t\, r\,\sin t(r\,\cos t\,+\,r\,\sin t)}{r^2} =$$

$$= \lim_{(r,t)\to(0,t)} r\,\cos t\,\sin t(\cos t\,+\,\sin t) = 0\,.$$

Zpět

Příklad 5.3.3

Vypočtěte $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x\,y(x+y)}{x^2+y^2}$.

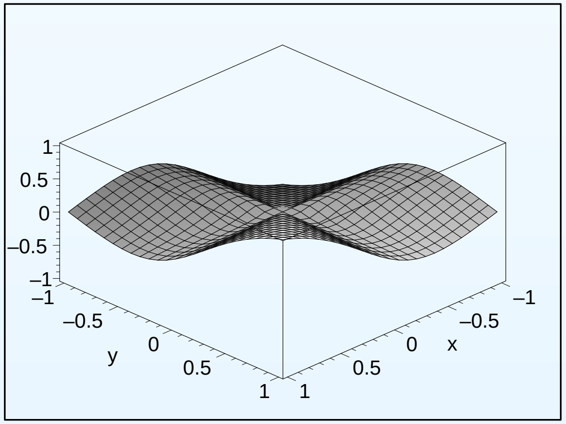
Maple:

```
>
> limit(x*y*(x+y)/(x^2+y^2),{x=0,y=0});
```

$$\mathrm{limit}(\frac{x\,y\,(x+y)}{x^2+y^2},\ \{y=0,\ x=0\})$$

Opět musíme zjistit, zda limita existuje a pak vypočítat limity postupně podle x a potom podle y.

```
> plot3d(x*y*(x+y)/(x^2+y^2),x=-1..1,y=-1..1,axes=box);
```




```
> limit(limit(x*y*(x+y)/(x^2+y^2),x=0),y=0);
```

$$0$$

Zpět

Příklad 5.3.3

Vypočtěte $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x\,y(x+y)}{x^2+y^2}$.

Mathematica:

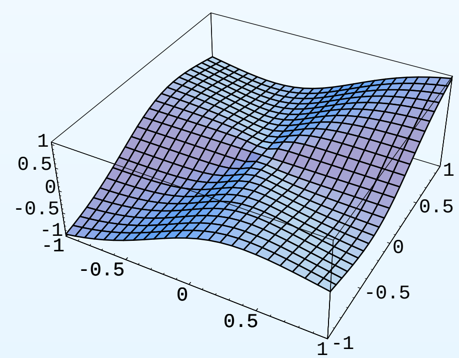
Nejdříve definujeme funkci:

$\boldsymbol{f[\mathrm{x\_}, \mathrm{y\_}] = xy(x+y)/(x\hat{\ }2+y\hat{\ }2)}$

$\frac{x\,y\,(x+y)}{x^2+y^2}$

Ověříme si, zda limita existuje

$\mathbf{Plot3D}[\boldsymbol{f}[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}], \{\boldsymbol{x}, -\mathbf{1}, \mathbf{1}\}, \{\boldsymbol{y}, -\mathbf{1}, \mathbf{1}\}],$



Vypočteme limity postupně podle x a potom podle y.

$\mathbf{Limit}[\mathbf{Limit}[\boldsymbol{f}[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}], \boldsymbol{x} \to 0], \boldsymbol{y} \to 0]$

0

Zpět

Příklad 5.3.4

Vypočtěte $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{y}{x-y}$.

? Zpět

Příklad 5.3.4

Vypočtěte $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{y}{x-y}$.

Výsledek:

Limita neexistuje.

Zpět

Příklad 5.3.4

Vypočtěte $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{y}{x-y}$.

Návod:

Při výpočtu limity přejdeme k polárním souřadnicím

$$\begin{array}{lcl} x & = & r\,\cos t \\ y & = & r\,\sin t \quad r \in \langle 0, \infty\rangle\,,\ t \in \langle 0, \pi\rangle \end{array} \quad .$$

Zpět

Příklad 5.3.4

Vypočtěte $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{y}{x-y}$.

Řešení:

Při výpočtu limity přejdeme k polárním souřadnicím

$$\begin{aligned} x &= r\ \cos t \\ y &= r\ \sin t \quad r \in \langle 0, \infty \rangle\ ,\ t \in \langle 0, \pi \rangle \end{aligned} \quad .$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y}{x-y} = \lim_{(r,t)\to(0,t)} \frac{r\ \sin t}{r\ \cos t\ -\ r\ \cos t} = \lim_{(r,t)\to(0,t)} \frac{\sin t}{\cos t\ -\ \cos t} = \frac{\sin t}{\cos t\ -\ \cos t}$$

Limita závisí na t, je pro každé t jiná. Limita neexistuje.

Zpět

Příklad 5.3.4

Vypočtěte $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{y}{x-y}$.

Maple:

```
> limit(y/(x-y),{x=0,y=0});
```

$$undefined$$

Zpět

Příklad 5.3.4

Vypočtěte $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{y}{x-y}$.

Mathematica:

Nejdříve definujeme funkci:

$\boldsymbol{f[\mathrm{x\_}, \mathrm{y\_}] = y/(x-y)}$

$\frac{y}{x-y}$

Spočteme limity podle x a y, potom podle y a x.

$\textbf{Limit[Limit[}\boldsymbol{f[x,y], x \to} \textbf{0], } \boldsymbol{y \to} \textbf{0]==Limit[Limit[}\boldsymbol{f[x,y], y\to}\textbf{0], }\boldsymbol{x \to}\textbf{0]}$

False

Limity jsou různé, původní limita tedy neexistuje.

Zpět