Kapitola 6: Derivace funkcí více proměnných

Chcete-li ukončit prohlížení stiskněte klávesu **Esc**.
Chcete-li pokračovat stiskněte klávesu **Enter**.

Derivace funkcí více proměnných

- Parciální derivace
- Derivace ve směru
- Derivování složených funkcí
- Taylorův polynom a totální diferenciál
- Newtonova metoda

Zpět

Parciální derivace

- **Příklad 6.1.1** Pomocí definice parciální derivace vypočtěte $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ a $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ funkce $f(x,y) = 2x + 3y^2$.
- **Příklad 6.1.2** Vypočtěte parciální derivace funkce $f(x,y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$.
- **Příklad 6.1.3** Vypočtěte parciální derivace 1. a 2. řádu funkce $f(x,y) = \ln(x-2y)$.
- **Příklad 6.1.4** Vypočtěte gradient funkce $f(x,y,z) = 3\,x^2 + \mathrm{e}^{-xy^2} - z$ v bodě A = [0, 2 , 0]
- **Příklad 6.1.5** Objem kužele V je funkcí poloměru podstavy r a výšky kužele h . Vyjádřete parciální derivace $\frac{\partial V}{\partial r}$ a $\frac{\partial V}{\partial h}$. Co tyto derivace popisují?
- **Příklad 6.1.6** Ověřte, že funkce $u(x,t) = \mathrm{e}^{-a^2 t} \sin x$ je řešením následující rovnice, tzv. rovnice vedení tepla:
  $$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,, \quad t > 0\,, \quad a \in \mathbb{R}\,.$$

Zpět

Příklad 6.1.1

Pomocí definice parciální derivace vypočtěte $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ a $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ funkce $f(x,y) = 2x + 3y^2$.

? Zpět

Příklad 6.1.1

Pomocí definice parciální derivace vypočtěte $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ a $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ funkce $f(x,y) = 2x + 3y^2$.

Výsledek:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2\,, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 6y\,.$$

Zpět

Příklad 6.1.1

Pomocí definice parciální derivace vypočtěte $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ a $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ funkce $f(x, y) = 2x + 3y^2$.

Návod:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h}.$$

Zpět

Příklad 6.1.1

Pomocí definice parciální derivace vypočtěte $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ a $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ funkce $f(x,y) = 2x + 3y^2\,.$

Řešení:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{\left(2(x+h)+3y^2\right) - (2x+3y^2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2h}{h} = 2\,,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{\left(2x+3(y+h)^2\right) - (2x+3y^2)}{h} =$$
$$\lim_{h\to 0} \frac{\left(2x+3y^2+6yh+3h^2\right) - 2x - 3y^2}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{6yh+3h^2}{h} = \lim_{h\to 0}(6y+3h) = 6y\,.$$

Zpět

Příklad 6.1.1

Pomocí definice parciální derivace vypočtěte $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ a $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ funkce $f(x,y) = 2x + 3y^2$.

Maple:

```
> f := (x,y) -> 2*x+3*y^2;
```

$$f := (x,\ y) \to 2\,x + 3\,y^2$$

```
> fx:=limit((f(x+h,y)-f(x,y))/h, h = 0);
```

$$fx := 2$$

```
> fy:=limit((f(x,y+h)-f(x,y))/h, h = 0);
```

$$fy := 6\,y$$

Porovnáme s výpočtem pomocí příkazu diff

```
> diff(f(x,y),x) ;
```

$$2$$

nebo pomocí příkazu D[1]

```
> D[1](f)(x,y);
```

$$2$$

Podobně pro proměnnou y:

```
> diff(f(x,y),y);
```

$$6\,y$$

Další

Příklad 6.1.1

Pomocí definice parciální derivace vypočtěte $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ a $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ funkce $f(x,y) = 2x + 3y^2$.

Maple:

nebo pomocí příkazu D[2]

```
>  D[2](f)(x,y);
```

$$6\,y$$

Zpět

Příklad 6.1.1

Pomocí definice parciální derivace vypočtěte $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ a $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ funkce $f(x, y) = 2x + 3y^2$.

Mathematica:

$\boldsymbol{f[\mathrm{x\_}, \mathrm{y\_}] = 2\ x - 3y\hat{\ }2}$

$2x - 3y^2$

$\boldsymbol{\mathrm{Limit}[(f[x + h, y] - f[x, y])/h, h \to 0]}$

2

$\boldsymbol{\mathrm{Limit}[(f[x, y + h] - f[x, y])/h, h \to 0]}$

$-6y$

Porovnáme s výpočtem derivace pomocí příkazu D.

$\boldsymbol{D[f[x, y], x]}$

2

$\boldsymbol{D[f[x, y], y]}$

$-6y$

Zpět

Příklad 6.1.2

Vypočtěte parciální derivace funkce $f(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$.

? Zpět

Příklad 6.1.2

Vypočtěte parciální derivace funkce $f(x,y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$.

Výsledek:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2}\,, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}, \quad \text{pro } x \neq 0\,.$$

Zpět

Příklad 6.1.2

Vypočtěte parciální derivace funkce $f(x,y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$.

Návod:

Parciální derivace lze počítat pouze v bodech náležejících do definičního oboru $D(f)$. Při výpočtu derivace $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ považujeme proměnnou y za konstantní. Obdobně vypočteme derivaci $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$.

Zpět

Příklad 6.1.2

Vypočtěte parciální derivace funkce $f(x,y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$.

Řešení:

$D(f) = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2, x \neq 0\}$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2} \cdot y \cdot \left(\frac{-1}{x^2}\right) = -\frac{y}{\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)x^2} = -\frac{y}{x^2+y^2} ,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2+y^2} .$$

Zpět

Příklad 6.1.2

Vypočtěte parciální derivace funkce $f(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$.

Maple:

```
> f := (x,y) -> arctan(y/x);
```

$$f := (x,\ y) \to \arctan(\frac{y}{x})$$

Parciální derivace je možno spočítat buď:

```
> fx:= diff(f(x,y),x) ;
```

$$fx := -\frac{y}{x^2\,(1 + \frac{y^2}{x^2})}$$

```
> simplify(%);
```

$$-\frac{y}{x^2 + y^2}$$

nebo pomocí příkazu D[ ]:

```
> fy:=D[2](f)(x,y);
```

$$fy := \frac{1}{x\,(1 + \frac{y^2}{x^2})}$$

```
> simplify(%);
```

$$\frac{x}{x^2 + y^2}$$

Zpět

Příklad 6.1.2

Vypočtěte parciální derivace funkce $f(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$.

Mathematica:

$\boldsymbol{f}$**[x_, y_] = ArcTan[*y*/*x*];**

Výpočet $\dfrac{\partial f}{x}(x, y)$

fx = *D*[*f*[*x*, *y*], *x*]

$-\frac{y}{x^2\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)}$

Simplify[fx]

$-\frac{y}{x^2+y^2}$

Výpočet $\dfrac{\partial f}{y}(x, y)$

fy = *D*[*f*[*x*, *y*], *y*]

$\frac{1}{x\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)}$

Simplify[fy]

$\frac{x}{x^2+y^2}$

Zpět

Příklad 6.1.3

Vypočtěte parciální derivace 1. a 2. řádu funkce $f(x,y) = \ln(x-2y)$.

? Zpět

Příklad 6.1.3

Vypočtěte parciální derivace 1. a 2. řádu funkce $f(x, y) = \ln(x - 2y)$.

Výsledek:

$D(f) = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2,\ x > 2y\}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{x - 2y}\,, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\frac{2}{x - 2y}\,,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = -\frac{1}{(x - 2y)^2}\,, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = -\frac{4}{(x - 2y)^2}\,,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{2}{(x - 2y)^2}\,, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{2}{(x - 2y)^2}\,.$$

Zpět

Příklad 6.1.3

Vypočtěte parciální derivace 1. a 2. řádu funkce $f(x, y) = \ln(x - 2y)$.

Návod:

Parciální derivace lze počítat pouze v bodech náležejících do definičního oboru $D(f)$. Při výpočtu derivace $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ považujeme proměnnou y za konstantní. Obdobně vypočteme derivaci $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$. Parciální derivace 2. řádu počítáme podle vzorce $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \dfrac{\partial}{\partial y}(x, y)\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)\right)$ (značíme $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y)$, pro $x = y$). Smíšené derivace jsou totožné, je-li $f \in C^2$.

Zpět

Příklad 6.1.3

Vypočtěte parciální derivace 1. a 2. řádu funkce $f(x,y) = \ln(x-2y)$.

Řešení:

$D(f) = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2,\ x > 2y\}$,
geometricky je $D(f)$ dolní polorovina pod přímkou $y = \frac{1}{2}x$, bez uvedené přímky.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{x-2y} \cdot 1\,, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{x-2y} \cdot (-2)\,,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -\frac{1}{(x-2y)^2} \cdot 1 = -\frac{1}{(x-2y)^2}\,,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = (-2)(-1)\frac{-2}{(x-2y)^2} = -\frac{4}{(x-2y)^2}\,,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -\frac{1}{(x-2y)^2} \cdot (-2) = \frac{2}{(x-2y)^2}\,, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = -\frac{(-2)}{(x-2y)^2} \cdot 1 = \frac{2}{(x-2y)^2}\,.$$

Vidíme, že smíšené derivace jsou totožné.

Zpět

Příklad 6.1.3

Vypočtěte parciální derivace 1. a 2. řádu funkce $f(x,y) = \ln(x-2y)$.

Maple:

```
> f := (x,y) -> ln(x-2*y);
```

$$f := (x,\ y) \to \ln(x - 2\,y)$$

Parciální derivace 1. řádu:

```
> fx:= diff(f(x,y),x) ;
```

$$fx := \frac{1}{x - 2\,y}$$

```
> fy:= diff(f(x,y),y);
```

$$fy := -\frac{2}{x - 2\,y}$$

Parciální derivace 2. řádu:

```
> fxx:= diff(f(x,y),x$2);
```

$$fxx := -\frac{1}{(x - 2\,y)^2}$$

```
> fyy:= diff(f(x,y),y$2);
```

$$fyy := -\frac{4}{(x - 2\,y)^2}$$

včetně smíšených derivací, které jsou totožné:

```
> fxy:= diff(f(x,y),x,y);
```

$$fxy := \frac{2}{(x - 2\,y)^2}$$

Další

Příklad 6.1.3

Vypočtěte parciální derivace 1. a 2. řádu funkce $f(x,y) = \ln(x-2y)$.

Maple:

```
>   fyx:= diff(f(x,y),y,x);
```

$$fyx := \frac{2}{(x-2\,y)^2}$$

Zpět

Příklad 6.1.3

Vypočtěte parciální derivace 1. a 2. řádu funkce $f(x,y) = \ln(x-2y)$.

Mathematica:

$\boldsymbol{f[\mathrm{x\_}, \mathrm{y\_}] = \mathrm{Log}[x - 2y];}$

Výpočet prvních derivací:

$\boldsymbol{\mathrm{fx} = D[f[x,y], x]}$

$\frac{1}{x-2y}$

$\boldsymbol{\mathrm{fy} = D[f[x,y], y]}$

$-\frac{2}{x-2y}$

Výpočet druhých derivací:

$\boldsymbol{\mathrm{fxx} = D[f[x,y], \{x, 2\}]}$

$-\frac{1}{(x-2y)^2}$

$\boldsymbol{\mathrm{fxy} = D[f[x,y], x, y]}$

$\frac{2}{(x-2y)^2}$

$\boldsymbol{\mathrm{fyy} = D[f[x,y], \{y, 2\}]}$

$-\frac{4}{(x-2y)^2}$

Zpět

Příklad 6.1.4

Vypočtěte gradient funkce $f(x,y,z) = 3\,x^2 + \mathrm{e}^{-x\,y^2} - z$ v bodě $A = [\,0,\ 2\ ,\ 0\,]$

? Zpět

Příklad 6.1.4

Vypočtěte gradient funkce $f(x,y,z) = 3\,x^2 + \mathrm{e}^{-x\,y^2} - z$ v bodě $\mathrm{A} = [\ 0,\ 2\ ,\ 0\,]$

Výsledek:

$\operatorname{grad} f(A) = (-4, 0, -1)$

Zpět

Příklad 6.1.4

Vypočtěte gradient funkce $f(x,y,z) = 3\,x^2 + \mathrm{e}^{-xy^2} - z$ v bodě A $= [\ 0,\ 2\ ,\ 0\,]$

Návod:

$$\text{grad } f(x,y,z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z), \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) \right)$$

Zpět

Příklad 6.1.4

Vypočtěte gradient funkce $f(x,y,z) = 3\,x^2 + \mathrm{e}^{-xy^2} - z$ v bodě A = [0, 2 , 0]

Řešení:

$D(f) = \mathbb{R}^3$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 6\,x - y^2 \mathrm{e}^{-xy^2}\,, \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(\,0,2,0\,) = -4\,,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = -2\,x\,y\,\mathrm{e}^{-xy^2}\,, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(\,0,2,0\,) = 0\,,$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = -1\,, \qquad \frac{\partial f}{\partial z}(\,0,2,0\,) = -1\,.$$

Tedy $\operatorname{grad} f(A) = (-4, 0, -1)\,.$

Zpět

Příklad 6.1.4

Vypočtěte gradient funkce $f(x,y,z) = 3\,x^2 + \mathrm{e}^{-xy^2} - z$ v bodě $\mathrm{A} = [\,0,\,2\,,\,0\,]$

Maple:

```
> f:=(x,y,z)-> 3*x^2+exp(-x*y^2)-z;
```

$$f := (x,\ y,\ z) \to 3\,x^2 + e^{(-x\,y^2)} - z$$

Gradient je vektor parciálních derivací

```
> [diff(f(x,y,z),x),diff(f(x,y,z),y),diff(f(x,y,z),z)];
```

$$[6\,x - y^2\,e^{(-x\,y^2)},\ -2\,x\,y\,e^{(-x\,y^2)},\ -1]$$

který lze vypočítat přímo pomocí příkazu grad:

```
> with(linalg,grad):
> gradf:= grad(f(x,y,z),[x,y,z]);
```

$$gradf := \left[6\,x - y^2\,e^{(-x\,y^2)},\ -2\,x\,y\,e^{(-x\,y^2)},\ -1\right]$$

Nakonec dosadíme souřadnice bodu A:

```
> gradfvA:=subs(x=0,y=2,z=0,grad(f(x,y,z),[x,y,z]));
```

$$gradfvA := [-4\,e^0,\ 0,\ -1]$$

```
> simplify(%);
```

$$[-4,\ 0,\ -1]$$

Zpět

Příklad 6.1.4

Vypočtěte gradient funkce $f(x,y,z) = 3\,x^2 + \mathrm{e}^{-xy^2} - z$ v bodě $A = [\,0,\ 2\ ,\ 0\,]$

Mathematica:

$\boldsymbol{f[\mathrm{x\_}, \mathrm{y\_}, \mathrm{z\_}] = 3x\hat{\ }2 + \mathrm{Exp}[-xy\hat{\ }2] - z;}$

<< Calculus`VectorAnalysis`

$\boldsymbol{\mathrm{Grad}[f[x, y, z], \mathrm{Cartesian}[x, y, z]]}$

$\left\{6x - e^{-xy^2}y^2, -2e^{-xy^2}xy, -1\right\}$

$\boldsymbol{\mathrm{grad} = \mathrm{Grad}[f[x, y, z], \mathrm{Cartesian}[x, y, z]]}$

$\boldsymbol{\mathrm{gradA} = \mathrm{grad}/.\{x \to 0, y \to 2, z \to 0\}}$

$\{-4, 0, -1\}$

Zpět

Příklad 6.1.5

Objem kužele V je funkcí poloměru podstavy r a výšky kužele h. Vyjádřete parciální derivace $\frac{\partial V}{\partial r}$ a $\frac{\partial V}{\partial h}$. Co tyto derivace popisují?

? Zpět

Příklad 6.1.5

Objem kužele V je funkcí poloměru podstavy r a výšky kužele h. Vyjádřete parciální derivace $\frac{\partial V}{\partial r}$ a $\frac{\partial V}{\partial h}$. Co tyto derivace popisují?

Výsledek:

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{2\pi r h}{3}, \qquad \frac{\partial V}{\partial h} = \frac{\pi r^2}{3}.$$

Zpět

Příklad 6.1.5

Objem kužele V je funkcí poloměru podstavy r a výšky kužele h. Vyjádřete parciální derivace $\frac{\partial V}{\partial r}$ a $\frac{\partial V}{\partial h}$. Co tyto derivace popisují?

Návod:

Při výpočtu derivace $\frac{\partial V}{\partial r}$ považujeme proměnnou h za konstantní. Obdobně pro derivaci $\frac{\partial V}{\partial h}$ považujeme proměnnou r za konstantní.

Zpět

Příklad 6.1.5

Objem kužele V je funkcí poloměru podstavy r a výšky kužele h. Vyjádřete parciální derivace $\frac{\partial V}{\partial r}$ a $\frac{\partial V}{\partial h}$. Co tyto derivace popisují?

Řešení:

$$V(r,h) = \frac{\pi r^2 h}{3}, \quad \frac{\partial V}{\partial r} = \frac{2\pi r h}{3}, \quad \frac{\partial V}{\partial h} = \frac{\pi r^2}{3}$$

Derivace $\dfrac{\partial V}{\partial r}$ popisuje rychlost změny objemu kužele v závislosti na změně poloměru, za předpokladu, že je výška kužele konstantní. Derivace $\dfrac{\partial V}{\partial h}$ popisuje rychlost změny objemu kužele v závislosti na změně výšky, za předpokladu, že je poloměr konstantní.

Zpět

Příklad 6.1.5

Objem kužele V je funkcí poloměru podstavy r a výšky kužele h. Vyjádřete parciální derivace $\frac{\partial V}{\partial r}$ a $\frac{\partial V}{\partial h}$. Co tyto derivace popisují?

Maple:

Objem kužele:

```
> V:=(r,h)-> Pi*r^2*h/3;
```

$$V := (r,\, h) \to \frac{1}{3}\,\pi\, r^2\, h$$

Parciální derivace objemu kužele dle poloměru a výšky:

```
> Vr:= diff(V(r,h),r) ;
```

$$Vr := \frac{2\,\pi\, r\, h}{3}$$

```
> Vh:= diff(V(r,h),h) ;
```

$$Vh := \frac{\pi\, r^2}{3}$$

Zpět

Příklad 6.1.5

Objem kužele V je funkcí poloměru podstavy r a výšky kužele h. Vyjádřete parciální derivace $\frac{\partial V}{\partial r}$ a $\frac{\partial V}{\partial h}$. Co tyto derivace popisují?

Mathematica:

Objem kužele:

V[r_, h_] = Pi r^2 h/3;

Parciální derivace objemu kužele dle poloměru a výšky:

Vr = D[V[r, h], r]

$$\frac{2h\pi r}{3}$$

Vh = D[V[r, h], h]

$$\frac{\pi r^2}{3}$$

Zpět

Příklad 6.1.6

Ověřte, že funkce $u(x,t) = \mathrm{e}^{-a^2 t} \sin x$ je řešením následující rovnice, tzv. rovnice vedení tepla:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,, \quad t > 0\,, \quad a \in \mathbb{R}\,.$$

? Zpět

Příklad 6.1.6

Ověřte, že funkce $u(x,t) = \mathrm{e}^{-a^2 t} \sin x$ je řešením následující rovnice, tzv. rovnice vedení tepla:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,, \quad t > 0\,, \quad a \in \mathbb{R}\,.$$

Výsledek:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -a^2\, \mathrm{e}^{-a^2 t} \sin x\,.$$

Zpět

Příklad 6.1.6

Ověřte, že funkce $u(x,t) = \mathrm{e}^{-a^2 t} \sin x$ je řešením následující rovnice, tzv. rovnice vedení tepla:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,, \quad t > 0\,, \quad a \in \mathbb{R}\,.$$

Návod:

Porovnáme parciální derivace na obou stranách rovnice.

Zpět

Příklad 6.1.6

Ověřte, že funkce $u(x,t) = \mathrm{e}^{-a^2 t} \sin x$ je řešením následující rovnice, tzv. rovnice vedení tepla:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,, \quad t > 0\,, \quad a \in \mathbb{R}\,.$$

Řešení:

$D(u) = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -a^2\, \mathrm{e}^{-a^2 t} \sin x\,, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \mathrm{e}^{-a^2 t} \cos x\,,$$

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a^2 \cdot \mathrm{e}^{-a^2 t} \cdot (-1) \sin x = -a^2\, \mathrm{e}^{-a^2 t} \sin x\,.$$

Funkce je tedy řešením rovnice na celém $D(u)$.

Zpět

Příklad 6.1.6

Ověřte, že funkce $u(x,t) = \mathrm{e}^{-a^2 t} \sin x$ je řešením následující rovnice, tzv. rovnice vedení tepla:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,, \quad t > 0\,, \quad a \in \mathbb{R}\,.$$

Maple:

```
> u := (x,t) -> exp(-a^2*t)*sin(x);
```

$$u := (x,\, t) \to e^{(-a^2\, t)} \sin(x)$$

Vyjádříme $\frac{\partial}{\partial t} u$

```
> ut := diff(u(x,t),t);
```

$$ut := -a^2\, e^{(-a^2\, t)} \sin(x)$$

a spočítáme $a^2\,(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,u)$:

```
> Prstr := a^2*diff(u(x,t),x$2);
```

$$Prstr := -a^2\, e^{(-a^2\, t)} \sin(x)$$

Tedy daná funkce řeší rovnici vedení tepla.

Zpět

Příklad 6.1.6

Ověřte, že funkce $u(x,t) = \mathrm{e}^{-a^2 t} \sin x$ je řešením následující rovnice, tzv. rovnice vedení tepla:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,, \quad t > 0\,, \quad a \in \mathbb{R}\,.$$

Mathematica:

$\boldsymbol{u[x,t] = \mathrm{Exp}[-a\hat{\ }2t]\mathrm{Sin}[x];}$

Ověření, že funkce splňuje rovnici vedení tepla.

$\boldsymbol{\mathrm{rovnice} = D[u[x,t],t] == a\hat{\ }2D[u[x,t],\{x,2\}]}$

True

Zpět

Derivace ve směru

- Příklad 6.2.1 Pomocí definice vypočtěte derivaci funkce $f(x,y)=\dfrac{x}{y}$ v bodě $B=[4,-1]$ ve směru vektoru $\vec{u}=(-2,3)$.
- Příklad 6.2.2 Vypočtěte směrovou derivaci funkce $f(x,y)=\dfrac{x}{y}$ v bodě $B=[4,-1]$ ve směru vektoru $\vec{u}=(-2,3)$ s pomocí gradientu funkce.
- Příklad 6.2.3 Vypočtěte směrovou derivaci funkce $f(x,y,z)=\cos(xy)+\ln z^2$ v bodě $B=[\pi,1,1]$ ve směru vektoru $\vec{u}=(1,1,1)$ s pomocí gradientu funkce.

Zpět

Příklad 6.2.1

Pomocí definice vypočtěte derivaci funkce $f(x,y) = \dfrac{x}{y}$ v bodě $B = [4,-1]$ ve směru vektoru $\vec{u} = (-2,3)$.

= ? Zpět

Příklad 6.2.1

Pomocí definice vypočtěte derivaci funkce $f(x,y)=\dfrac{x}{y}$ v bodě $B=[4,-1]$ ve směru vektoru $\vec{u}=(-2,3)$.

Výsledek:

$$Df(B,\vec{a})=-10\frac{\sqrt{13}}{13}\,, \qquad \text{kde } \vec{a}=\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}\,.$$

Zpět

Příklad 6.2.1

Pomocí definice vypočtěte derivaci funkce $f(x,y) = \dfrac{x}{y}$ v bodě $B = [4,-1]$ ve směru vektoru $\vec{u} = (-2,3)$.

Návod:

$$Df(B,\vec{a}) = \lim_{h\to 0} \frac{f(B+h\vec{a}) - f(B)}{h}\,, \qquad \text{kde } \|\vec{a}\| = 1\,.$$

Zpět

Příklad 6.2.1

Pomocí definice vypočtěte derivaci funkce $f(x,y)=\dfrac{x}{y}$ v bodě $B=[4,-1]$ ve směru vektoru $\vec{u}=(-2,3)$.

Řešení:

Ověříme, že $B\in D(f)=\{[x,y]\in\mathbb{R}^2,\ y\neq 0\}$,

vypočteme odpovídající jednotkový vektor $\vec{a}=\dfrac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}=\dfrac{\vec{u}}{\sqrt{13}}=\dfrac{\sqrt{13}}{13}(-2,3)$, a dále

$$B+h\vec{a}=[4,-1]+h\frac{\sqrt{13}}{13}(-2,3)=\left[4-\frac{2h\sqrt{13}}{13},-1+\frac{3h\sqrt{13}}{13}\right].$$

Podle definice dostáváme

$$Df(B,\vec{a})=\lim_{h\to 0}\frac{f(B+h\vec{a})-f(B)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{4-\frac{2h\sqrt{13}}{13}}{-1+\frac{3h\sqrt{13}}{13}}-\dfrac{4}{-1}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{10h\sqrt{13}}{-13+3h\sqrt{13}}}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{10\sqrt{13}}{-13+3h\sqrt{13}}=-\frac{10\sqrt{13}}{13}.$$

Zpět

Příklad 6.2.1

Pomocí definice vypočtěte derivaci funkce $f(x,y) = \dfrac{x}{y}$ v bodě $B = [4,-1]$ ve směru vektoru $\vec{u} = (-2,3)$.

Maple:

```
> with(linalg):
> f := (x,y) -> x/y;
```

$$f := (x,\ y) \to \frac{x}{y}$$

```
> BOD := vector([4,-1]);
```

$$BOD := [4,\ -1]$$

```
> u := vector([-2,3]);
```

$$u := [-2,\ 3]$$

Vektor je třeba nejdříve "normovat":

```
> a := vector([-2,3])/norm(u,frobenius);
```

$$a := \frac{1}{13}\,[-2,\ 3]\,\sqrt{13}$$

Můžeme použít jiný příkaz pro normalizaci:

```
> a := normalize(u);
```

$$a := \left[-\frac{2\sqrt{13}}{13},\ \frac{3\sqrt{13}}{13}\right]$$

```
> Dfa := Limit('(f(BOD+h*a)-f(BOD))/h',h=0);
```

$$Dfa := \lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{f}(BOD + h\,a) - \mathrm{f}(BOD)}{h}$$

Další

Příklad 6.2.1

Pomocí definice vypočtěte derivaci funkce $f(x,y)=\dfrac{x}{y}$ v bodě $B=[4,-1]$ ve směru vektoru $\vec{u}=(-2,3)$.

Maple:

```
> P := evalm(BOD+h*a);
```

$$P := \left[4-\frac{2\,h\,\sqrt{13}}{13},\ -1+\frac{3\,h\,\sqrt{13}}{13}\right]$$

```
> Dfa := Limit((f(P[1],P[2])-f(BOD[1],BOD[2]))/h,h=0);
```

$$Dfa := \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{4-\dfrac{2\,h\,\sqrt{13}}{13}}{-1+\dfrac{3\,h\,\sqrt{13}}{13}}+4}{h}$$

```
> Dfa := Limit(simplify((f(P[1],P[2])-f(BOD[1],BOD[2]))/h),h=0);
```

$$Dfa := \lim_{h\to 0}\frac{10\,\sqrt{13}}{-13+3\,h\,\sqrt{13}}$$

Nyní se limita, tj. derivace ve směru v v bodě BOD , vypočítá:

```
> Dfa_BOD := limit((f(P[1],P[2])-f(BOD[1],BOD[2]))/h,h=0);
```

$$Dfa\_BOD := -\frac{10\,\sqrt{13}}{13}$$

Zpět

Příklad 6.2.1

Pomocí definice vypočtěte derivaci funkce $f(x,y)=\dfrac{x}{y}$ v bodě $B=[4,-1]$ ve směru vektoru $\vec{u}=(-2,3)$.

Mathematica:

$\boldsymbol{f[\mathrm{x\_},\mathrm{y\_}]=x/y;}$
$\mathbf{BOD=\{4,-1\};}\boldsymbol{u}\mathbf{=\{-2,3\};}$

Normování vektoru:

$\boldsymbol{v=u/}\mathbf{Norm}[\boldsymbol{u}]$

$\left\{-\frac{2}{\sqrt{13}},\frac{3}{\sqrt{13}}\right\}$

Výpočet derivace ve směru:

$\mathbf{Limit}[\,(\boldsymbol{f}[\mathbf{BOD[[1]]}+\boldsymbol{hv}[[1]],\mathbf{BOD[[2]]}+\boldsymbol{hv}[[2]]]-\boldsymbol{f}[\mathbf{BOD[[1]],BOD[[2]]}])/\boldsymbol{h},\boldsymbol{h}\to\mathbf{0}]$

$-\frac{10}{\sqrt{13}}$

Zpět

Příklad 6.2.2

Vypočtěte směrovou derivaci funkce $f(x,y)=\dfrac{x}{y}$ v bodě $B=[4,-1]$ ve směru vektoru $\vec{u}=(-2,3)$ s pomocí gradientu funkce.

? Zpět

Příklad 6.2.2

Vypočtěte směrovou derivaci funkce $f(x,y) = \dfrac{x}{y}$ v bodě $B = [4,-1]$ ve směru vektoru $\vec{u} = (-2,3)$ s pomocí gradientu funkce.

Výsledek:

$$Df(B,\vec{a}) = -10\frac{\sqrt{13}}{13}\,, \qquad \text{kde } \vec{a} = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}\,.$$

Zpět

Příklad 6.2.2

Vypočtěte směrovou derivaci funkce $f(x,y)=\dfrac{x}{y}$ v bodě $B=[4,-1]$ ve směru vektoru $\vec{u}=(-2,3)$ s pomocí gradientu funkce.

Návod:

$$Df(B,\vec{a}) = \operatorname{grad} f(B)\cdot\vec{a}\,, \qquad \text{kde } \ \|\vec{a}\| = 1\,.$$

Zpět

Příklad 6.2.2

Vypočtěte směrovou derivaci funkce $f(x,y)=\dfrac{x}{y}$ v bodě $B=[4,-1]$ ve směru vektoru $\vec{u}=(-2,3)$ s pomocí gradientu funkce.

Řešení:

$D(f)=\{[x,y]\in\mathbb{R}^2,\ y\neq 0\},\ f\in C^1(G)$, kde $G=\{[x,y]\in\mathbb{R}^2, y<0\}, B\in G$.

Odpovídající jednotkový vektor je $\vec{a}=\dfrac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}=\dfrac{\vec{u}}{\sqrt{13}}=\dfrac{\sqrt{13}}{13}(-2,3)$.

Ze znalosti gradientu $\operatorname{grad} f(x,y)=\left(\dfrac{1}{y},-\dfrac{x}{y^2}\right)$ a ze známého vzorce

$Df(B,\vec{a})=\operatorname{grad} f(B)\cdot\vec{a}$ dostáváme

$$Df(B,\vec{a})=\frac{\sqrt{13}}{13}\left(\frac{1}{-1},-\frac{4}{(-1)^2}\right)\cdot(-2,3)=\frac{\sqrt{13}}{13}(2-12)=-10\frac{\sqrt{13}}{13}\,.$$

Zpět

Příklad 6.2.2

Vypočtěte směrovou derivaci funkce $f(x,y)=\dfrac{x}{y}$ v bodě $B=[4,-1]$ ve směru vektoru $\vec{u}=(-2,3)$ s pomocí gradientu funkce.

Maple:

```
> with(linalg):
> f := (x,y) -> x/y;
```

$$f := (x,\ y) \to \frac{x}{y}$$

v bodě:

```
> BOD := vector([4,-1]);
```

$$BOD := [4,\ -1]$$

```
> u := vector([-2,3]);
```

$$u := [-2,\ 3]$$

```
> a := normalize(u);
```

$$a := \left[-\frac{2\sqrt{13}}{13},\ \frac{3\sqrt{13}}{13}\right]$$

Ze znalosti gradientu a ze známého vzorce:

```
> vzorec := innerprod(grad(f(x,y),[x,y]), a);
```

$$vzorec := -\frac{\sqrt{13}\,(2\,y+3\,x)}{13\,y^2}$$

Další

Příklad 6.2.2

Vypočtěte směrovou derivaci funkce $f(x,y) = \dfrac{x}{y}$ v bodě $B = [4,-1]$ ve směru vektoru $\vec{u} = (-2,3)$ s pomocí gradientu funkce.

Maple:

dostaneme přímo derivaci ve směru v v bodě BOD:

```
>   der_ve_smeru:= subs({x=BOD[1],y=BOD[2]},vzorec);
```

$$der\_ve\_smeru := -\frac{10\sqrt{13}}{13}$$

Zpět

Příklad 6.2.2

Vypočtěte směrovou derivaci funkce $f(x,y) = \dfrac{x}{y}$ v bodě $B = [4,-1]$ ve směru vektoru $\vec{u} = (-2,3)$ s pomocí gradientu funkce.

Mathematica:

$\boldsymbol{f[\mathrm{x\_}, \mathrm{y\_}] = x/y;}$

$\mathbf{grad} = \{D[f[x,y],x], D[f[x,y],y]\}$

$\left\{\frac{1}{y}, -\frac{x}{y^2}\right\}$

$\mathbf{gradB} = \mathbf{grad}/.\{x \to 4, y \to -1\}$

$\{-1,-4\}$

$\boldsymbol{u = \{-2,3\};}$

Normavání vektoru:

$\boldsymbol{v = u/\mathrm{Norm}[u]}$

$\left\{-\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}}\right\}$

Výpočet derivace ve směru pomocí gradientu:

$\mathbf{DerVeSmeru} = \mathbf{gradB}.\boldsymbol{v}$

$-\frac{10}{\sqrt{13}}$

Zpět

Příklad 6.2.3

Vypočtěte směrovou derivaci funkce $f(x,y,z) = \cos(xy) + \ln z^2$ v bodě $B = [\pi, 1, 1]$ ve směru vektoru $\vec{u} = (1,1,1)$ s pomocí gradientu funkce.

?

Zpět

Příklad 6.2.3

Vypočtěte směrovou derivaci funkce $f(x,y,z) = \cos(xy) + \ln z^2$ v bodě $B = [\pi, 1, 1]$ ve směru vektoru $\vec{u} = (1,1,1)$ s pomocí gradientu funkce.

Výsledek:

$$Df(B,\vec{v}) = 2\frac{\sqrt{3}}{3}\,, \qquad \text{kde} \;\; \vec{v} = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}\,.$$

Zpět

Příklad 6.2.3

Vypočtěte směrovou derivaci funkce $f(x,y,z) = \cos(xy) + \ln z^2$ v bodě $B = [\pi, 1, 1]$ ve směru vektoru $\vec{u} = (1,1,1)$ s pomocí gradientu funkce.

Návod:

$$Df(B,\vec{v}) = \operatorname{grad} f(B) \cdot \vec{v}\,, \qquad \text{kde } \|\vec{v}\| = 1\,.$$

Zpět

Příklad 6.2.3

Vypočtěte směrovou derivaci funkce $f(x,y,z) = \cos(xy) + \ln z^2$ v bodě $B = [\pi, 1, 1]$ ve směru vektoru $\vec{u} = (1,1,1)$ s pomocí gradientu funkce.

Řešení:

$D(f) = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3,\ z \neq 0\},\ f \in C^1(G)$, kde $G = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3, z > 0\}$,

$B \in G$.

Odpovídající jednotkový vektor je $\vec{v} = \dfrac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = \dfrac{\vec{u}}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}(1,1,1)$.

Ze znalosti gradientu $\operatorname{grad} f(x,y,z) = \left(-y\sin(xy), -x\sin(xy), \dfrac{2}{z}\right)$ a ze vzorce

$Df(B,\vec{v}) = \operatorname{grad} f(B) \cdot \vec{a}$ dostáváme

$$Df(B,\vec{v}) = \frac{\sqrt{3}}{3}(-\sin(\pi), -\pi\sin(\pi), 2) \cdot (1,1,1) = \frac{\sqrt{3}}{3}(0+0+2) = 2\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Zpět

Příklad 6.2.3

Vypočtěte směrovou derivaci funkce $f(x,y,z) = \cos(xy) + \ln z^2$ v bodě $B = [\pi, 1, 1]$ ve směru vektoru $\vec{u} = (1,1,1)$ s pomocí gradientu funkce.

Maple:

```
> with(linalg):
> f := (x,y,z) -> cos(x*y)+ ln(z^2);
```

$$f := (x,\ y,\ z) \to \cos(x\,y) + \ln(z^2)$$

```
> BOD := vector([Pi,1,1]);
```

$$BOD := [\pi,\ 1,\ 1]$$

```
> u := vector([1,1,1]);
```

$$a := [1,\ 1,\ 1]$$

```
> v := normalize(u);
```

$$v := \left[\frac{\sqrt{3}}{3},\ \frac{\sqrt{3}}{3},\ \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$$

Ze znalosti gradientu a ze známého vzorce:

```
> vzorec := innerprod(grad(f(x,y,z),[x,y,z]), v);
```

$$vzorec := -\frac{1}{3}\,\frac{\sqrt{3}\,(\sin(x\,y)\,y\,z + \sin(x\,y)\,x\,z - 2)}{z}$$

dostaneme přímo derivaci ve směru v v bodě BOD:

```
> der_ve_smeru:= subs({x=BOD[1],y=BOD[2],z=BOD[3]},vzorec);
```

$$der\_ve\_smeru := -\frac{1}{3}\,\sqrt{3}\,(\sin(\pi) + \sin(\pi)\,\pi - 2)$$

Další

Příklad 6.2.3

Vypočtěte směrovou derivaci funkce $f(x, y, z) = \cos(xy) + \ln z^2$ v bodě $B = [\pi, 1, 1]$ ve směru vektoru $\vec{u} = (1, 1, 1)$ s pomocí gradientu funkce.

Maple:

```
> simplify(%);
```

$$\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Zpět

Příklad 6.2.3

Vypočtěte směrovou derivaci funkce $f(x,y,z) = \cos(xy) + \ln z^2$ v bodě $B = [\pi, 1, 1]$ ve směru vektoru $\vec{u} = (1,1,1)$ s pomocí gradientu funkce.

Mathematica:

$\boldsymbol{f[\mathrm{x\_}, \mathrm{y\_}, \mathrm{z\_}] = \mathrm{Cos}[xy] + \mathrm{Log}[z\verb|^|2];}$

<< Calculus`VectorAnalysis`

$\boldsymbol{\mathrm{grad} = \mathrm{Grad}[f[x,y,z], \mathrm{Cartesian}[x,y,z]]}$

$\left\{-y\mathrm{Sin}[xy], -x\mathrm{Sin}[xy], \frac{2}{z}\right\}$

Výpočet gradientu:

$\boldsymbol{\mathrm{gradB} = \mathrm{grad}/.\{x \to \mathrm{Pi}, y \to 1, z \to 1\}}$

$\{0,0,2\}$

Definice a normování vektoru:

$\boldsymbol{u = \{1,1,1\};}$
$\boldsymbol{v = u/\mathrm{Norm}[u]}$

$\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$

Výpočet směrové derivace pomocí gradientu:

$\boldsymbol{\mathrm{DerVeSmeru} = \mathrm{gradB}.v}$

$\frac{2}{\sqrt{3}}$

Zpět

Derivování složených funkcí

- **Příklad 6.3.1** Napište derivaci $f'(t)$ funkce $f(t) = g(x,y)$, kde $x = \mathrm{e}^t$ a $y = \sin t$, $g \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Pro konkrétní funkci $g(x,y) = xy^2 + 3yx^3$ vypočtěte $f'(0)$.
- **Příklad 6.3.2** Je dána funkce $g(x,y) = x^2 + y^2$, kde $x(r,\varphi) = r\cos\varphi$ a $y(r,\varphi) = r\sin\varphi$. Vypočtěte parciální derivace funkce $f(r,\varphi) = g(x(r,\varphi), y(r,\varphi))$.
- **Příklad 6.3.3** Napište smíšenou parciální derivaci druhého řádu funkce $f(r,s) = h(x,y)$, kde $x(r,s) = r^2 + s^2$ a $y(r,s) = 5rs$, $h \in C^2(\mathbb{R}^2)$.

Zpět

Příklad 6.3.1

Napište derivaci $f'(t)$ funkce $f(t) = g(x, y)$, kde $x = \mathrm{e}^t$ a $y = \sin t$, $g \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Pro konkrétní funkci $g(x, y) = xy^2 + 3yx^3$ vypočtěte $f'(0)$.

?

Zpět

Příklad 6.3.1

Napište derivaci $f'(t)$ funkce $f(t) = g(x, y)$, kde $x = \mathrm{e}^t$ a $y = \sin t$, $g \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Pro konkrétní funkci $g(x, y) = xy^2 + 3yx^3$ vypočtěte $f'(0)$.

Výsledek:

$$f'(t) = \frac{\partial g}{\partial x}(x, y)\,\mathrm{e}^t + \frac{\partial g}{\partial y}(x, y)\,\cos t\,, \qquad f'(0) = 3\,.$$

Zpět

Příklad 6.3.1

Napište derivaci $f'(t)$ funkce $f(t) = g(x,y)$, kde $x = \mathrm{e}^t$ a $y = \sin t$, $g \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Pro konkrétní funkci $g(x,y) = xy^2 + 3yx^3$ vypočtěte $f'(0)$.

Návod:

$$f' = \frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

Zpět

Příklad 6.3.1

Napište derivaci $f'(t)$ funkce $f(t) = g(x,y)$, kde $x = \mathrm{e}^t$ a $y = \sin t$, $g \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Pro konkrétní funkci $g(x,y) = xy^2 + 3yx^3$ vypočtěte $f'(0)$.

Řešení:

$$f'(t) = \frac{\partial g}{\partial x}(x,y)\,\frac{\partial x}{\partial t}(t) + \frac{\partial g}{\partial y}(x,y)\,\frac{\partial y}{\partial t}(t) = \frac{\partial g}{\partial x}(x,y)\,\mathrm{e}^t + \frac{\partial g}{\partial y}(x,y)\,\cos t\,.$$

Konkrétní funkce $g(x,y) = xy^2 + 3yx^3$ má parciální derivace

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = y^2 + 9yx^2\,, \qquad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 2xy + 3x^3\,.$$

Pro $t = 0$ je $x = 1$, $y = 0$ a $\dfrac{\partial g}{\partial x}(1,0) = 0$, $\dfrac{\partial g}{\partial y}(1,0) = 3$,

tedy $f'(0) = 0 \cdot \mathrm{e}^0 + 3 \cdot \cos(0) = 3$.

Zpět

Příklad 6.3.1

Napište derivaci $f'(t)$ funkce $f(t) = g(x, y)$, kde $x = \mathrm{e}^t$ a $y = \sin t$, $g \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Pro konkrétní funkci $g(x, y) = xy^2 + 3yx^3$ vypočtěte $f'(0)$.

Maple:

Připravíme formální vzorec derivování složené funkce tzv. vzorec řetězového derivování

```
> ft := 'gx'*'xt' + 'gy'*'yt';
```

$$ft := gx\,xt + gy\,yt$$

Zadáme vnější funkci a spočítáme parciální derivace

```
> g := x*y^2 + 3*y*x^3;
```

$$g := x\,y^2 + 3\,y\,x^3$$

```
> gx := diff(g,x); gy := diff(g,y);
```

$$gx := y^2 + 9\,y\,x^2$$

$$gy := 2\,x\,y + 3\,x^3$$

Zadáme vnitřní funkce

```
> x := exp(t); y := sin(t);
```

$$x := e^t$$

$$y := \sin(t)$$

a derivujeme každou z nich podle t

```
> xt := diff(exp(t),t); yt := diff(sin(t),t);
```

$$xt := e^t$$

$$yt := \cos(t)$$

Další

Příklad 6.3.1

Napište derivaci $f'(t)$ funkce $f(t) = g(x, y)$, kde $x = \mathrm{e}^t$ a $y = \sin t$, $g \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Pro konkrétní funkci $g(x, y) = xy^2 + 3yx^3$ vypočtěte $f'(0)$.

Maple:

Do vzorce pro řetězového derivování dosadíme připravené derivace v $t = 0$

```
> ftv0 := simplify( subs(t=0,ft) );
```

$$ftv0 := 3$$

Zpět

Příklad 6.3.1

Napište derivaci $f'(t)$ funkce $f(t) = g(x,y)$, kde $x = \mathrm{e}^t$ a $y = \sin t$, $g \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Pro konkrétní funkci $g(x,y) = xy^2 + 3yx^3$ vypočtěte $f'(0)$.

Mathematica:

```
g[a_, b_] = ab^2 + 3ba^3;
x[t_] = Exp[t];
y[t_] = Sin[t];
```

Vypočteme složenou funkci:

```
f[t_] = g[x[t], y[t]]
```

$3e^{3t}\mathrm{Sin}[t] + e^t\mathrm{Sin}[t]^2$

Spočteme přímo derivaci **derf[t_] = D[f[t], t]**

$3e^{3t}\mathrm{Cos}[t] + 9e^{3t}\mathrm{Sin}[t] + 2e^t\mathrm{Cos}[t]\mathrm{Sin}[t] + e^t\mathrm{Sin}[t]^2$

derf[0]

3

Zpět

Příklad 6.3.2

Je dána funkce $g(x,y) = x^2 + y^2$, kde $x(r,\varphi) = r\cos\varphi$ a $y(r,\varphi) = r\sin\varphi$. Vypočtěte parciální derivace funkce $f(r,\varphi) = g(x(r,\varphi), y(r,\varphi))$.

Zpět

Příklad 6.3.2

Je dána funkce $g(x,y) = x^2 + y^2$, kde $x(r,\varphi) = r\cos\varphi$ a $y(r,\varphi) = r\sin\varphi$. Vypočtěte parciální derivace funkce $f(r,\varphi) = g(x(r,\varphi), y(r,\varphi))$.

Výsledek:

$$\frac{\partial f}{\partial r}(r,\varphi) = 2r\,, \qquad \frac{\partial f}{\partial \varphi}(r,\varphi) = 0\,.$$

Zpět

Příklad 6.3.2

Je dána funkce $g(x,y) = x^2 + y^2$, kde $x(r,\varphi) = r\cos\varphi$ a $y(r,\varphi) = r\sin\varphi$. Vypočtěte parciální derivace funkce $f(r,\varphi) = g(x(r,\varphi), y(r,\varphi))$.

Návod:

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial g}{\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial g}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial r}\,, \qquad \frac{\partial f}{\partial \varphi} = \frac{\partial g}{\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial g}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial \varphi}\,,$$

nebo vyjdeme přímo z rovnosti $f(r,\varphi) = (x(r,\varphi))^2 + (y(r,\varphi))^2$.

Zpět

Příklad 6.3.2

Je dána funkce $g(x,y) = x^2 + y^2$, kde $x(r,\varphi) = r\cos\varphi$ a $y(r,\varphi) = r\sin\varphi$. Vypočtěte parciální derivace funkce $f(r,\varphi) = g(x(r,\varphi), y(r,\varphi))$.

Řešení:

$$f(r,\varphi) = g\,(\,x(r,t), y(r,t)\,) = g(r\cos t, r\sin t)$$

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial g}{\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial g}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial r} \;\Rightarrow\; \frac{\partial f}{\partial r}(r,\varphi) = 2x\;\cos\varphi + 2y\;\sin\varphi =$$
$$= 2r\cos\varphi\cos\varphi + 2r\sin\varphi\sin\varphi = 2r,$$

$$\frac{\partial f}{\partial \varphi} = \frac{\partial g}{\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial g}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial \varphi} \;\Rightarrow\; \frac{\partial f}{\partial \varphi}(r,\varphi) = 2x\,(-r\sin\varphi) + 2y\,r\cos\varphi =$$
$$= 2r\cos\varphi\,(-r\sin\varphi) + 2r\sin\varphi\,r\cos\varphi = 0\,.$$

Pro kontrolu určíme přímo předpis složené funkce $f(r,\varphi) = (r\cos\varphi)^2 + (r\sin\varphi))^2 = r^2$. Tedy

$$\frac{\partial f}{\partial r}(r,\varphi) = 2r\,, \qquad \frac{\partial f}{\partial \varphi}(r,\varphi) = 0\,.$$

Zpět

Příklad 6.3.2

Je dána funkce $g(x,y) = x^2 + y^2$, kde $x(r,\varphi) = r\cos\varphi$ a $y(r,\varphi) = r\sin\varphi$. Vypočtěte parciální derivace funkce $f(r,\varphi) = g(x(r,\varphi), y(r,\varphi))$.

Maple:

Připravíme formální vzorec derivování složené funkce.
$r :=' r' : Phi :=' Phi' : x :=' x' : y :=' y'$: tzv. vzorec řetězového derivování

```
> fr := 'gx'*'xr' + 'gy'*'yr';
```

$$fr := gx\,xr + gy\,yr$$

```
> fp := 'gx'*'xp' + 'gy'*'yp';
```

$$fp := gx\,xp + gy\,yp$$

Zadáme vnější funkci a spočítáme parciální derivace

```
> g := x^2 + y^2;
```

$$g := x^2 + y^2$$

```
> gx := diff(g,x); gy := diff(g,y);
```

$$gx := 2\,x$$

$$gy := 2\,y$$

Zadáme vnitřní funkce

```
> x := r*cos(Phi); y := r*sin(Phi);
```

$$x := r\cos(\Phi)$$

$$y := r\sin(\Phi)$$

a derivujeme každou z nich podle r a Φ

Další

Příklad 6.3.2

Je dána funkce $g(x,y) = x^2 + y^2$, kde $x(r,\varphi) = r\cos\varphi$ a $y(r,\varphi) = r\sin\varphi$. Vypočtěte parciální derivace funkce $f(r,\varphi) = g(x(r,\varphi), y(r,\varphi))$.

Maple:

```
> xr := diff(r*cos(Phi),r); yr := diff(r*sin(Phi),r);
```

$$xr := \cos(\Phi)$$

$$yr := \sin(\Phi)$$

```
> xp := diff(r*cos(Phi),Phi); yp := diff(r*sin(Phi),Phi);
```

$$xp := -r\sin(\Phi)$$

$$yp := r\cos(\Phi)$$

Do vzorce pro řetězové derivování dosadíme připravené derivace

```
> fr := simplify(fr );
```

$$fr := 2\,r$$

```
> fp := simplify(fp );
```

$$fp := 0$$

Nebo vypočteme přímo parciální derivace složené funkce:

```
> f:= (r,Phi) -> (r*cos(Phi))^2 +(r*sin(Phi))^2 ;
```

$$f := (r,\ \Phi) \to r^2\cos(\Phi)^2 + r^2\sin(\Phi)^2$$

```
> Dfr:= diff(f(r,Phi),r);
```

$$Dfr := 2\,r\cos(\Phi)^2 + 2\,r\sin(\Phi)^2$$

Další

Příklad 6.3.2

Je dána funkce $g(x, y) = x^2 + y^2$, kde $x(r, \varphi) = r\cos\varphi$ a $y(r, \varphi) = r\sin\varphi$. Vypočtěte parciální derivace funkce $f(r, \varphi) = g(x(r, \varphi), y(r, \varphi))$.

Maple:

```
> simplify(Dfr );
```

$$2\,r$$

```
> Dfr:= diff(f(r,Phi),Phi);
```

$$Dfr := 0$$

Zpět

Příklad 6.3.2

Je dána funkce $g(x, y) = x^2 + y^2$, kde $x(r, \varphi) = r\cos\varphi$ a $y(r, \varphi) = r\sin\varphi$. Vypočtěte parciální derivace funkce $f(r, \varphi) = g(x(r, \varphi), y(r, \varphi))$.

Mathematica:

$\boldsymbol{g[\mathrm{a\_}, \mathrm{b\_}] = a\hat{\ }2 + b\hat{\ }2;}$
$\boldsymbol{x[\mathrm{r\_}, \varphi\_] = r\mathrm{Cos}[\varphi];}$
$\boldsymbol{y[\mathrm{r\_}, \varphi] = r\mathrm{Sin}[\varphi];}$

Vypočteme složenou funkci:

$\boldsymbol{f[\mathrm{r\_}, \varphi\_] = g[x[r, \varphi], y[r, \varphi]]}$

$r^2\mathrm{Cos}[\varphi]^2 + r^2\mathrm{Sin}[\varphi]^2$

Spočteme přímo derivace

$\boldsymbol{\mathrm{derfr}[\mathrm{r\_}, \varphi\_] = D[f[r, \varphi], r]}$

$2r\mathrm{Cos}[\varphi]^2 + 2r\mathrm{Sin}[\varphi]^2$

Simplify[%]

$2r$

$\boldsymbol{\mathrm{derfphi}[\mathrm{r\_}, \varphi\_] = D[f[r, \varphi], \varphi]}$

0

Zpět

Příklad 6.3.3

Napište smíšenou parciální derivaci druhého řádu funkce $f(r,s) = h(x,y)$, kde $x(r,s) = r^2 + s^2$ a $y(r,s) = 5rs$, $h \in C^2(\mathbb{R}^2)$.

Zpět

Příklad 6.3.3

Napište smíšenou parciální derivaci druhého řádu funkce $f(r,s) = h(x,y)$, kde $x(r,s) = r^2 + s^2$ a $y(r,s) = 5rs$, $h \in C^2(\mathbb{R}^2)$.

Výsledek:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r \partial s}(r,s) = \frac{\partial^2 f}{\partial s \partial r}(r,s) =$$

$$= 4rs\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,y) + 10(r^2+s^2)\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}(x,y) + 25rs\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}(x,y) + 5\,\frac{\partial h}{\partial y}(x,y).$$

Zpět

Příklad 6.3.3

Napište smíšenou parciální derivaci druhého řádu funkce $f(r,s) = h(x,y)$, kde $x(r,s) = r^2 + s^2$ a $y(r,s) = 5rs$, $h \in C^2(\mathbb{R}^2)$.

Návod:

$\dfrac{\partial f}{\partial r} = \dfrac{\partial h}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial r} + \dfrac{\partial h}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial r}$, parciální derivace 2. řádu počítáme podle vzorce

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial r \partial s} = \dfrac{\partial}{\partial s}\left(\dfrac{\partial f}{\partial r}\right)$. Smíšené derivace 2. řádu jsou totožné, je-li $f \in C^2$.

Zpět

Příklad 6.3.3

Napište smíšenou parciální derivaci druhého řádu funkce $f(r,s) = h(x,y)$, kde $x(r,s) = r^2 + s^2$ a $y(r,s) = 5rs$, $h \in C^2(\mathbb{R}^2)$.

Řešení:

$$f(r,s) = h\,(\,x(r,s), y(r,s)\,) = h(r^2+s^2, 5rs)$$

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial h}{\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial h}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial r} \;\Rightarrow\; \frac{\partial f}{\partial r}(r,s) = \frac{\partial h}{\partial x}(x,y)\,2r + \frac{\partial h}{\partial y}(x,y)\,5s\,,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r\partial s}(r,s) = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial h}{\partial x}(x,y)2r + \frac{\partial h}{\partial y}(x,y)5s\right) =$$

$$= \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,y)\,2s + \frac{\partial^2 h}{\partial x\partial y}(x,y)\,5r\right)2r + \left(\frac{\partial^2 h}{\partial y\partial x}(x,y)2s + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}(x,y)5r\right)5s + \frac{\partial h}{\partial y}(x,y)\,5 =$$

$$= 4rs\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,y) + 10(r^2+s^2)\frac{\partial^2 h}{\partial x\partial y}(x,y) + 25rs\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}(x,y) + 5\,\frac{\partial h}{\partial y}(x,y)\,.$$

Zpět

Příklad 6.3.3

Napište smíšenou parciální derivaci druhého řádu funkce $f(r,s) = h(x,y)$, kde $x(r,s) = r^2 + s^2$ a $y(r,s) = 5rs$, $h \in C^2(\mathbb{R}^2)$.

Maple:

Zadáme vnitřní funkce:

```
> x := r^2+s^2; y := 5*r*s;
```

$$x := r^2 + s^2$$

$$y := 5\,r\,s$$

Zadáme formálně vnější funkci

```
> f :='f': f := h(x,y);
```

$$f := \mathrm{h}(r^2 + s^2,\, 5\,r\,s)$$

Připravíme si formálně požadovanou druhou derivaci

```
> fs := Diff(f,s): frs := Diff(fs,r);
```

$$frs := \frac{\partial^2}{\partial r\,\partial s}\,\mathrm{h}(r^2 + s^2,\, 5\,r\,s)$$

```
> fs :=diff(f,s);
```

$$fs := 2\,\mathrm{D}_1(h)(r^2 + s^2,\, 5\,r\,s)\,s + 5\,\mathrm{D}_2(h)(r^2 + s^2,\, 5\,r\,s)\,r$$

kde $\mathrm{D}_1(h)$, resp. $\mathrm{D}_2(h)$, znamená maplovský zápis pro první parciální derivaci podle první resp. druhé proměnné. Následujícím příkazem dostaváme hledanou smíšenou derivaci druhého řádu:

Další

Příklad 6.3.3

Napište smíšenou parciální derivaci druhého řádu funkce $f(r,s) = h(x,y)$, kde $x(r,s) = r^2 + s^2$ a $y(r,s) = 5rs$, $h \in C^2(\mathbb{R}^2)$.

Maple:

```
>  frs := simplify(diff(diff(f,s),r));
```

$$frs := 4\,s\,\mathrm{D}_{1,\,1}(h)(r^2+s^2,\,5\,r\,s)\,r + 10\,\mathrm{D}_{1,\,2}(h)(r^2+s^2,\,5\,r\,s)\,s^2 + 10\,\mathrm{D}_{1,\,2}(h)(r^2+s^2,\,5\,r\,s)\,r^2 + 25\,r\,\mathrm{D}_{2,\,2}(h)(r^2+s^2,\,5\,r\,s)\,s + 5\,\mathrm{D}_2(h)(r^2+s^2,\,5\,r\,s)$$

kde např. $\mathrm{D}_{1,\,2}(h)$ znamená maplovský zápis pro smíšenou druhou parciální derivaci funkce h.

Zpět

Příklad 6.3.3

Napište smíšenou parciální derivaci druhého řádu funkce $f(r,s) = h(x,y)$, kde $x(r,s) = r^2 + s^2$ a $y(r,s) = 5rs$, $h \in C^2(\mathbb{R}^2)$.

Mathematica:

$$\boldsymbol{x}[\mathbf{r\_}, \mathbf{s\_}] = \boldsymbol{r}\verb|^|\mathbf{2} + \boldsymbol{s}\verb|^|\mathbf{2};$$
$$\boldsymbol{y}[\mathbf{r\_}, \mathbf{s\_}] = \mathbf{5}\boldsymbol{rs};$$

Nejdříve definujeme složenou funkci f

$$\boldsymbol{f}[\mathbf{r\_}, \mathbf{s\_}] = \boldsymbol{h}[\boldsymbol{x}[\boldsymbol{r}, \boldsymbol{s}], \boldsymbol{y}[\boldsymbol{r}, \boldsymbol{s}]]$$

$$h\left[r^2 + s^2, 5rs\right]$$

Nyní spočteme první a druhé derivace.

$$\mathbf{derfr}[\mathbf{r\_}, \mathbf{s\_}] = \boldsymbol{D}[\boldsymbol{f}[\boldsymbol{r}, \boldsymbol{s}], \boldsymbol{r}]$$

$$5sh^{(0,1)}\left[r^2 + s^2, 5rs\right] + 2rh^{(1,0)}\left[r^2 + s^2, 5rs\right]$$

$$\mathbf{derfs}[\mathbf{r\_}, \mathbf{s\_}] = \boldsymbol{D}[\boldsymbol{f}[\boldsymbol{r}, \boldsymbol{s}], \boldsymbol{s}]$$

$$5rh^{(0,1)}\left[r^2 + s^2, 5rs\right] + 2sh^{(1,0)}\left[r^2 + s^2, 5rs\right]$$

$$\mathbf{derfrr}[\mathbf{r\_}, \mathbf{s\_}] = \boldsymbol{D}[\boldsymbol{f}[\boldsymbol{r}, \boldsymbol{s}], \{\boldsymbol{r}, \mathbf{2}\}]$$

$$2h^{(1,0)}\left[r^2 + s^2, 5rs\right] + 5s\left(5sh^{(0,2)}\left[r^2 + s^2, 5rs\right] + 2rh^{(1,1)}\left[r^2 + s^2, 5rs\right]\right) +$$
$$2r\left(5sh^{(1,1)}\left[r^2 + s^2, 5rs\right] + 2rh^{(2,0)}\left[r^2 + s^2, 5rs\right]\right)$$

Další

Příklad 6.3.3

Napište smíšenou parciální derivaci druhého řádu funkce $f(r,s) = h(x,y)$, kde $x(r,s) = r^2 + s^2$ a $y(r,s) = 5rs$, $h \in C^2(\mathbb{R}^2)$.

Mathematica:

derfrs[r_, s_] = $D[f[r,s], r, s]$

$$5h^{(0,1)}\left[r^2+s^2, 5rs\right] + 5s\left(5rh^{(0,2)}\left[r^2+s^2, 5rs\right] + 2sh^{(1,1)}\left[r^2+s^2, 5rs\right]\right) + 2r\left(5rh^{(1,1)}\left[r^2+s^2, 5rs\right] + 2sh^{(2,0)}\left[r^2+s^2, 5rs\right]\right)$$

derfss[r_, s_] = $D[f[r,s], \{s, 2\}]$

$$2h^{(1,0)}\left[r^2+s^2, 5rs\right] + 5r\left(5rh^{(0,2)}\left[r^2+s^2, 5rs\right] + 2sh^{(1,1)}\left[r^2+s^2, 5rs\right]\right) + 2s\left(5rh^{(1,1)}\left[r^2+s^2, 5rs\right] + 2sh^{(2,0)}\left[r^2+s^2, 5rs\right]\right)$$

Zde $h^{(1,1)}$ značí druhou derivaci funkce h podle první a podle druhé proměnné. Podobně ostatní symboly $h^{(2,0)}$, $h^{(1,0)}$,...

Zpět

Taylorův polynom a totální diferenciál

- Příklad 6.4.1 Najděte Taylorův polynom druhého stupně funkce $f(x,y) = x\,\mathrm{e}^y$, který aproximuje funkci f v okolí bodu $[x_0, y_0] = [2, 0]$.
- Příklad 6.4.2 Napište Taylorův polynom 2. stupně pro funkci $f(x,y) = \sin(x^2 + y^2)$ v bodě $[x_0, y_0] = [1, 0]$ a pomocí něho vypočtěte přibližně hodnotu $f(1,1; 0,1)$.
- Příklad 6.4.3 Vypočtěte přibližnou hodnotu $\dfrac{1}{3,05^2 + 0,05}$ pomocí Taylorova polynomu druhého stupně.
- Příklad 6.4.4 Napište formálně totální diferenciál funkce: $f(x,y) = y^2 \sin x$ v bodě $[x_0, y_0]$.
- Příklad 6.4.5 Vypočtěte totální diferenciál funkce $f(x,y) = \sqrt{9x^2 + y^2}$ v bodě $[2, 8]$ pro přírůstky $dx = -0,05, dy = 0,08$.

Zpět

Příklad 6.4.1

Najděte Taylorův polynom druhého stupně funkce $f(x,y) = x\,e^y$, který aproximuje funkci f v okolí bodu $[x_0, y_0] = [2, 0]$.

? Zpět

Příklad 6.4.1

Najděte Taylorův polynom druhého stupně funkce $f(x,y) = x\,\mathrm{e}^y$, který aproximuje funkci f v okolí bodu $[x_0, y_0] = [2, 0]$.

Výsledek:

$$T_2(x,y) = x + 2y + (x-2)y + y^2 .$$

Zpět

Příklad 6.4.1

Najděte Taylorův polynom druhého stupně funkce $f(x,y) = x\,\mathrm{e}^y$, který aproximuje funkci f v okolí bodu $[x_0, y_0] = [2, 0]$.

Návod:

Taylorův polynom druhého stupně T_2 v okolí bodu $[x_0, y_0]$ je definovaný vztahem

$$T_2(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) +$$

$$+ \tfrac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)(x-x_0)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)(y-y_0)^2 \right).$$

Zpět

Příklad 6.4.1

Najděte Taylorův polynom druhého stupně funkce $f(x,y) = x\,\mathrm{e}^y$, který aproximuje funkci f v okolí bodu $[x_0, y_0] = [2, 0]$.

Řešení:

Do vzorce pro $T_2(x,y)$ dosadíme funkční hodnotu $f(x_0,y_0)$ a hodnoty parciálních derivací funkce f v bodě $[x_0, y_0] = [2, 0]$.

$f(2,0) = 2$,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \mathrm{e}^y \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(2,0) = 1\,,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x\,\mathrm{e}^y \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(2,0) = 2\,,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2,0) = 0\,,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \mathrm{e}^y \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(2,0) = 1\,,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x\,\mathrm{e}^y \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(2,0) = 2\,.$$

$$T_2(x,y) = 2+1\cdot(x-2)+2\cdot(y-0)+\frac{1}{2!}\Big(0\cdot(x-2)^2 + 2\cdot 1\cdot(x-2)(y-0) + 2\cdot(y-0)^2\Big) =$$
$$= 2 + (x-2) + 2y + (x-2)y + y^2 = x + 2y + (x-2)y + y^2\,.$$

Tento polynom aproximuje funkci f v okolí bodu $[x_0, y_0] = [2, 0]$.

Zpět

Příklad 6.4.1

Najděte Taylorův polynom druhého stupně funkce $f(x,y) = x\,\mathrm{e}^y$, který aproximuje funkci f v okolí bodu $[x_0, y_0] = [2, 0]$.

Maple:

```
> f:=(x,y)->x*exp(y);
```

$$f := (x,\ y) \to x\,e^y$$

Příkaz mtaylor, narozdíl od příkazu taylor pro funkci jedné proměnné, neobsahuje zbytek.

```
> mtaylor(f(x,y),[x=2,y=0],2+1);
```

$$2\,y + x + y^2 + (x-2)\,y$$

Je možno vyjádřit jednotlivé koeficienty rozvoje:
Hodnota f $[x_0,\ y_0]$

```
> coeftayl(f(x,y),[x,y]=[2,0],[0,0]);
```

$$2$$

Koeficient u $(x - x_0)\,(y - y_0)^0$

```
> coeftayl(f(x,y),[x,y]=[2,0],[1,0]);
```

$$1$$

Koeficient u $(x - x_0)^0\,(y - y_0)$

```
> coeftayl(f(x,y),[x,y]=[2,0],[0,1]);
```

$$2$$

Koeficient u $(x - x_0)^2\,(y - y_0)^0$

```
> coeftayl(f(x,y),[x,y]=[2,0],[2,0]);
```

$$0$$

Další

Příklad 6.4.1

Najděte Taylorův polynom druhého stupně funkce $f(x,y) = x\,\mathrm{e}^y$, který aproximuje funkci f v okolí bodu $[x_0, y_0] = [2, 0]$.

Maple:

Koeficient u $(x - x_0)\,(y - y_0)$

```
> coeftayl(f(x,y),[x,y]=[2,0],[1,1]);
```

$$1$$

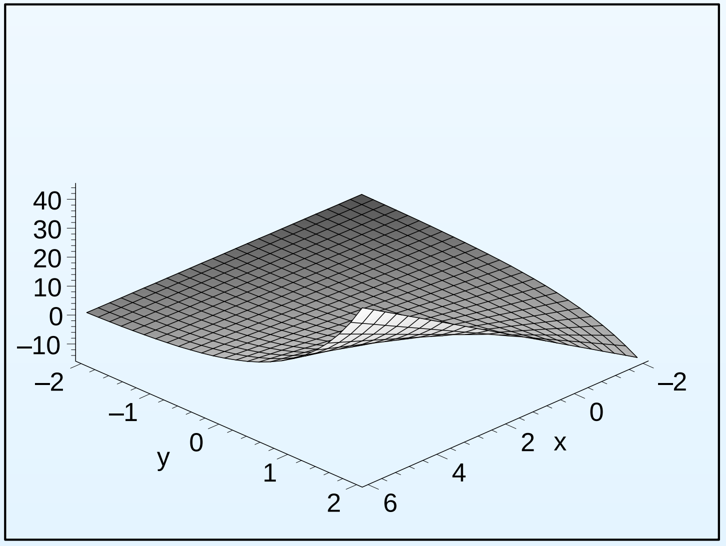
Koeficient u $(x - x_0)^0\,(y - y_0)^2$

```
> coeftayl(f(x,y),[x,y]=[2,0],[0,2]);
```

$$1$$

Průběh funkce v okolí bodu $[x_0,\ y_0]$ lze ukázat pomocí grafu

```
> with(plots):plot3d(f(x,y),x=-2..6,y=-2..2,axes=framed);
```



Další

Příklad 6.4.1

Najděte Taylorův polynom druhého stupně funkce $f(x, y) = x\,\mathrm{e}^y$, který aproximuje funkci f v okolí bodu $[x_0, y_0] = [2, 0]$.

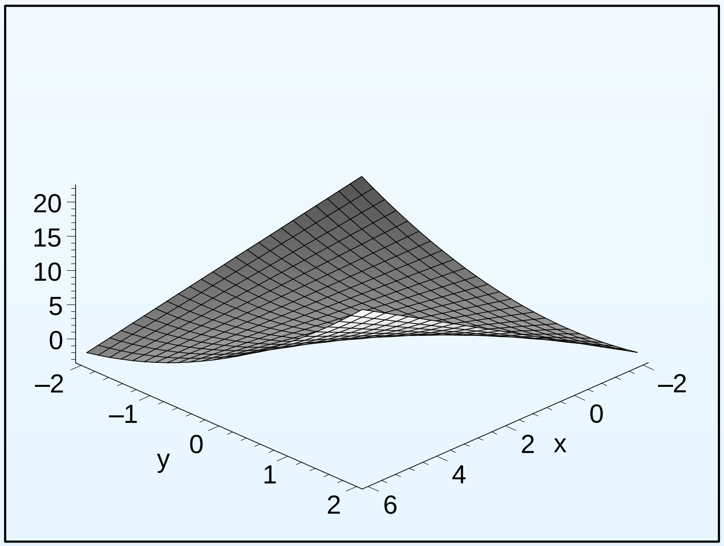
Maple:

Průběh aproximujícího Taylorova polynomu v okolí bodu $[x_0,\ y_0]$ lze ukázat pomocí grafu

```
> T2:=(x,y)->mtaylor(f(x,y),[x=2,y=0],2+1);
```

$$T2 := (x,\ y) \to \mathrm{mtaylor}(\mathrm{f}(x,\ y),\ [x = 2,\ y = 0],\ 3)$$

```
> with(plots):plot3d(T2(x,y),x=-2..6,y=-2..2,axes=framed);
```



Zpět

Příklad 6.4.1

Najděte Taylorův polynom druhého stupně funkce $f(x,y) = x\,\mathrm{e}^y$, který aproximuje funkci f v okolí bodu $[x_0, y_0] = [2, 0]$.

Mathematica:

$\boldsymbol{f[\mathrm{x\_}, \mathrm{y\_}] = x\mathrm{Exp}[y];}$

$\mathbf{x0 = 2; y0 = 0;}$

Výpočet Taylorova polynomu:

$\boldsymbol{\mathrm{T2}[\mathrm{x\_}, \mathrm{y\_}] = f[\mathrm{x0}, \mathrm{y0}] + \mathrm{Derivative}[1,0][f][\mathrm{x0}, \mathrm{y0}](x - \mathrm{x0}) + \mathrm{Derivative}[0,1][f][\mathrm{x0}, \mathrm{y0}](y - \mathrm{y0}) +}$
$\boldsymbol{1/2(\mathrm{Derivative}[2,0][f][\mathrm{x0}, \mathrm{y0}](x - \mathrm{x0})\hat{\ }2 + 2\mathrm{Derivative}[1,1][f][\mathrm{x0}, \mathrm{y0}](x - \mathrm{x0})(y - \mathrm{y0}) +}$
$\boldsymbol{\mathrm{Derivative}[0,2][f][\mathrm{x0}, \mathrm{y0}](y - \mathrm{y0})\hat{\ }2)}$

$x + 2y + \frac{1}{2}\left(2(-2 + x)y + 2y^2\right)$

Zpět

Příklad 6.4.2

Napište Taylorův polynom 2. stupně pro funkci $f(x,y) = \sin(x^2 + y^2)$ v bodě $[x_0, y_0] = [1, 0]$ a pomocí něho vypočtěte přibližně hodnotu $f(1,1; 0,1)$.

Zpět

Příklad 6.4.2

Napište Taylorův polynom 2. stupně pro funkci $f(x,y) = \sin(x^2 + y^2)$ v bodě $[x_0, y_0] = [1, 0]$ a pomocí něho vypočtěte přibližně hodnotu $f(1,1; 0,1)$.

Výsledek:

$$T_2(x) = \sin(1) + 2\cos(1)(x-1) + (\cos(1) - 2\sin(1))(x-1)^2 + \cos(1)y^2\,,$$

$$f(1,1;0,1) \doteq T_2(1,1;0,1) \doteq 0,943508.$$

Zpět

Příklad 6.4.2

Napište Taylorův polynom 2. stupně pro funkci $f(x,y) = \sin(x^2+y^2)$ v bodě $[x_0,y_0] = [1,0]$ a pomocí něho vypočtěte přibližně hodnotu $f(1,1;0,1)$.

Návod:

Taylorův polynom druhého stupně T_2 v okolí bodu $[x_0,y_0]$ je definovaný vztahem

$$T_2(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) +$$

$$+\tfrac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)(x-x_0)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)(y-y_0)^2\right).$$

Zpět

Příklad 6.4.2

Napište Taylorův polynom 2. stupně pro funkci $f(x,y) = \sin(x^2+y^2)$ v bodě $[x_0,y_0] = [1,0]$ a pomocí něho vypočtěte přibližně hodnotu $f(1,1;0,1)$.

Řešení:

Do vzorce pro $T_2(x,y)$ dosadíme funkční hodnotu $f(x_0,y_0)$ a hodnoty parciálních derivací funkce f v bodě $[x_0,y_0] = [1,0]$

$f(1,0) = \sin(1)$,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x\cos(x^2+y^2) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(1,0) = 2\cos(1)\,,$$

$$\tfrac{\partial f}{\partial y} = 2y\cos(x^2+y^2) \qquad \Rightarrow \qquad \tfrac{\partial f}{\partial y}(1,0) = 0\,,$$

$$\tfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2\cos(x^2+y^2) - 4x^2\sin(x^2+y^2) \qquad \Rightarrow \qquad \tfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,0) = 2\cos(1) - 4\sin(1)\,,$$

$$\tfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -4xy\sin(x^2+y^2) \qquad \Rightarrow \qquad \tfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,0) = 0\,,$$

$$\tfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2\cos(x^2+y^2) - 4y^2\sin(x^2+y^2) \qquad \Rightarrow \qquad \tfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,0) = 2\cos(1)\,.$$

$$T_2(x,y) = \sin(1) + 2\cos(1)(x-1) + 0\cdot y +$$

$$+\tfrac{1}{2!}\left(2(\cos(1) - 2\sin(1))(x-1)^2 + 2\cdot 0\cdot (x-1)y + 2\cos(1)y^2\right) =$$

$$= \sin(1) + 2\cos(1)(x-1) + (\cos(1) - 2\sin(1))(x-1)^2 + \cos(1)y^2.$$

Další

Příklad 6.4.2

Napište Taylorův polynom 2. stupně pro funkci $f(x,y) = \sin(x^2+y^2)$ v bodě $[x_0, y_0] = [1, 0]$ a pomocí něho vypočtěte přibližně hodnotu $f(1,1;0,1)$.

Řešení:

Tento polynom aproximuje funkci f v okolí bodu $[x_0, y_0] = [2, 0]$.

Přibližnou hodnotu funkce $f(1,1;0,1)$ vypočteme dosazením bodu [1,1; 0,1] do vypočteného Taylorova polynomu. Tedy

$f(1,1;0,1) \doteq T_2(1,1;0,1) =$

$= \sin(1) + 2\cos(1)(0,1) + (\cos(1) - 2\sin(1))(0,1)^2 + \cos(1)(0,1)^2 \doteq 0,943508.$

Zpět

Příklad 6.4.2

Napište Taylorův polynom 2. stupně pro funkci $f(x,y)=\sin(x^2+y^2)$ v bodě $[x_0,y_0]=[1,0]$ a pomocí něho vypočtěte přibližně hodnotu $f(1,1;0,1)$.

Maple:

```
> f:= (x,y) -> sin(x^2+y^2);
```

$$f := (x,\, y) \rightarrow \sin(x^2+y^2)$$

```
> mtaylor(f(x,y),[x=1,y=0],2+1);
```

$$\sin(1)+2\cos(1)\,(x-1)+(-2\sin(1)+\cos(1))\,(x-1)^2+\cos(1)\,y^2$$

```
> T2:= (x,y) ->mtaylor(f(x,y),[x=1,y=0],2+1);
```

$$T2 := (x,\, y) \rightarrow \mathrm{mtaylor}(\mathrm{f}(x,\, y),\, [x=1,\, y=0],\, 3)$$

Přibližnou hodnotu funkce f(1,1; 0,1) vypočteme dosazením bodu [1,1; 0,1] do tohoto Taylorova polynomu.

```
> subs(x=1.1,y=0.1,T2(x,y));
```

$$0.98\sin(1)+0.22\cos(1)$$

```
> simplify(%);
```

$$0.9435080724$$

Skutečná hodnota funkce f(1,1; 0,1) je (zaokrouhleno na 10 desetinných míst):

```
> f(1.1, 0.1);
```

$$0.9390993563$$

Zpět

Příklad 6.4.2

Napište Taylorův polynom 2. stupně pro funkci $f(x,y)=\sin(x^2+y^2)$ v bodě $[x_0,y_0]=[1,0]$ a pomocí něho vypočtěte přibližně hodnotu $f(1,1;0,1)$.

Mathematica:

```
f[x_, y_] = Sin[x^2 + y^2];
x0 = 1; y0 = 0;
T2[x_, y_] = f[x0, y0] + Derivative[1, 0][f][x0, y0](x - x0) + Derivative[0, 1][f][x0, y0](y - y0)+
1/2(Derivative[2, 0][f][x0, y0](x - x0)^2 + 2Derivative[1, 1][f][x0, y0](x - x0)(y - y0)+
Derivative[0, 2][f][x0, y0](y - y0)^2)
```

$2(-1+x)\mathrm{Cos}[1]+\frac{1}{2}\left(2y^2\mathrm{Cos}[1]+(-1+x)^2(2\mathrm{Cos}[1]-4\mathrm{Sin}[1])\right)+\mathrm{Sin}[1]$

Přibližnou hodnotu funkce f(1,1; 0,1) vypočteme dosazením bodu [1,1; 0,1] do tohoto Taylorova polynomu.

```
T2[1.1, 0.1]
```

0.943508

Skutečná hodnota funkce f(1,1; 0,1) je (zaokrouhleno na 6 desetinných míst):

```
f[1.1, 0.1]
```

0.939099

Zpět

Příklad 6.4.3

Vypočtěte přibližnou hodnotu $\dfrac{1}{3,05^2 + 0,05}$ pomocí Taylorova polynomu druhého stupně.

? Zpět

Příklad 6.4.3

Vypočtěte přibližnou hodnotu $\dfrac{1}{3,05^2+0,05}$ pomocí Taylorova polynomu druhého stupně.

Výsledek:

$$T_2(x) = \frac{1}{9} - \frac{2}{27}(x-3) - \frac{1}{81}y + \frac{1}{27}(x-3)^2 + \frac{4}{243}(x-3)y + \frac{1}{729}y^2\,,$$

$$\frac{1}{3,05^2+0,05} \doteq T_2(3,05;0,05) \doteq 0,106927.$$

Zpět

Příklad 6.4.3

Vypočtěte přibližnou hodnotu $\dfrac{1}{3,05^2+0,05}$ pomocí Taylorova polynomu druhého stupně.

Návod:

Taylorův polynom druhého stupně T_2 v okolí bodu $[x_0, y_0]$ je definovaný vztahem

$$T_2(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) +$$

$$+\tfrac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)(x-x_0)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)(y-y_0)^2\right).$$

Zpět

Příklad 6.4.3

Vypočtěte přibližnou hodnotu $\dfrac{1}{3,05^2+0,05}$ pomocí Taylorova polynomu druhého stupně.

Řešení:

Položíme $f(x,y)=\dfrac{1}{x^2+y}$ a zvolíme bod $[x_0,y_0]=[3,0]$. Do vzorce pro $T_2(x,y)$ dosadíme funkční hodnotu $f(x_0,y_0)$ a hodnoty parciálních derivací funkce f v bodě $[x_0,y_0]=[3,0]$

$$f(3,0)=\frac{1}{9}\,,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{-2x}{(x^2+y)^2}\qquad\Rightarrow\qquad\frac{\partial f}{\partial x}(3,0)=\frac{-2}{27}\,,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{-1}{(x^2+y)^2}\qquad\Rightarrow\qquad\frac{\partial f}{\partial y}(3,0)=\frac{-1}{81}\,,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{8x(x^2+y)-2(x^2+y)}{(x^2+y)^4}=\frac{8x^2}{(x^2+y)^3}-\frac{2}{(x^2+y)^2}\qquad\Rightarrow\qquad\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(3,0)=\frac{2}{27}\,,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{4x}{(x^2+y)^3}\qquad\Rightarrow\qquad\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(3,0)=\frac{4}{243}\,,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{2}{(x^2+y)^3}\qquad\Rightarrow\qquad\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(3,0)=\frac{2}{729}\,.$$

Další

Příklad 6.4.3

Vypočtěte přibližnou hodnotu $\dfrac{1}{3,05^2+0,05}$ pomocí Taylorova polynomu druhého stupně.

Řešení:

$$T_2(x,y) = \frac{1}{9} - \frac{2}{27}(x-3) - \frac{1}{81}y + \frac{1}{27}(x-3)^2 + \frac{4}{243}(x-3)y + \frac{1}{729}y^2\,.$$

Přibližnou hodnotu $f(3,05;0,05)$ vypočteme dosazením bodu [3,05; 0,05] do vypočteného Taylorova polynomu. Tedy

$$f(3,05;0,05) \doteq T_2(3,05;0,05) =$$

$$= \frac{1}{9} - \frac{2}{27}0,05 - \frac{1}{81}0,05 + \frac{1}{27}(0,05)^2 + \frac{4}{243}0,05\cdot 0,05 + \frac{1}{729}(0,05)^2 \doteq 0,106927\,.$$

Zpět

Příklad 6.4.3

Vypočtěte přibližnou hodnotu $\dfrac{1}{3,05^2+0,05}$ pomocí Taylorova polynomu druhého stupně.

Maple:

Zvolíme bod [3,0] a funkci f

```
> f:=(x,y)->1/(x^2+y);
```

$$f := (x,\, y) \to \frac{1}{x^2+y}$$

Ověříme správnost vypočtených parciálních derivací:

```
> fx:= diff(f(x,y),x) ;
```

$$fx := -\frac{2\,x}{(x^2+y)^2}$$

```
> fy:= diff(f(x,y),y) ;
```

$$fy := -\frac{1}{(x^2+y)^2}$$

```
> fxx:= diff(f(x,y),x$2);
```

$$fxx := \frac{8\,x^2}{(x^2+y)^3} - \frac{2}{(x^2+y)^2}$$

```
> fyy:= diff(f(x,y),y$2);
```

$$fyy := \frac{2}{(x^2+y)^3}$$

Další

Příklad 6.4.3

Vypočtěte přibližnou hodnotu $\dfrac{1}{3,05^2+0,05}$ pomocí Taylorova polynomu druhého stupně.

Maple:

```
> fxy:= diff(f(x,y),x,y);
```

$$fxy := \frac{4\,x}{(x^2+y)^3}$$

Taylorův polynom v bodě [3,0] vypočteme přímo příkazem:

```
> mtaylor(f(x,y),[x=3,y=0],2+1);
```

$$\frac{1}{3}-\frac{2\,x}{27}-\frac{y}{81}+\frac{(x-3)^2}{27}+\frac{4\,(x-3)\,y}{243}+\frac{y^2}{729}$$

```
> T2:= (x,y) ->mtaylor(f(x,y),[x=3,y=0],2+1);
```

$$T2 := (x,\ y) \to \mathrm{mtaylor}(\mathrm{f}(x,\ y),\ [x=3,\ y=0],\ 3)$$

Přibližnou hodnotu funkce f(3,05; 0,05) vypočteme dosazením bodu [3,05; 0.05] do tohoto Taylorova polynomu.

```
> subs(x=3.05,y=0.05,T2(x,y));
```

$$0.1069272977$$

Skutečná hodnota funkce f(3,05; 0,05) je (zaokrouhleno na 10 desetinných míst):

```
> f(3.05, 0.05);
```

$$0.1069232825$$

Zpět

Příklad 6.4.3

Vypočtěte přibližnou hodnotu $\dfrac{1}{3,05^2+0,05}$ pomocí Taylorova polynomu druhého stupně.

Mathematica:

Zvolíme bod [3,0] a funkci $f(x,y)=\frac{1}{x^2+y}$

$\boldsymbol{f[\mathrm{x\_}, \mathrm{y\_}] = 1/(x\hat{}2+y);}$

$\mathbf{x0 = 3; y0 = 0;}$

Výpočet Taylorova polynomu:

T2[x_, y_] = f[x0, y0] + Derivative[1, 0][f][x0, y0](x − x0) + Derivative[0, 1][f][x0, y0](y − y0)+ 1/2(Derivative[2, 0][f][x0, y0](x − x0)^2 + 2Derivative[1, 1][f][x0, y0](x − x0)(y − y0)+ Derivative[0, 2][f][x0, y0](y − y0)^2)

$\frac{1}{9}-\frac{2}{27}(-3+x)-\frac{y}{81}+\frac{1}{2}\left(\frac{2}{27}(-3+x)^2+\frac{8}{243}(-3+x)y+\frac{2y^2}{729}\right)$

Přibližnou hodnotu $\frac{1}{(3.05)^2+0.05}$ vypočteme dosazením bodu [3,05; 0,05] do Taylorova polynomu.

T2[3.05, 0.05]

0.106927

Skutečná hodnota:

***f*[3.05, 0.05]**

0.106923

Zpět

Příklad 6.4.4

Napište formálně totální diferenciál funkce: $f(x, y) = y^2 \sin x$ v bodě $[x_0, y_0]$.

Zpět

Příklad 6.4.4

Napište formálně totální diferenciál funkce: $f(x,y) = y^2 \sin x$ v bodě $[x_0, y_0]$.

Výsledek:

$$\mathrm{d}f(x_0, y_0) = y_0^2 \cos x_0 \;\mathrm{d}x + 2y_0 \sin x_0 \;\mathrm{d}y \,.$$

Zpět

Příklad 6.4.4

Napište formálně totální diferenciál funkce: $f(x,y) = y^2 \sin x$ v bodě $[x_0, y_0]$.

Návod:

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y\,.$$

Zpět

Příklad 6.4.4

Napište formálně totální diferenciál funkce: $f(x, y) = y^2 \sin x$ v bodě $[x_0, y_0]$.

Řešení:

Protože $\dfrac{\partial f}{\partial x} = y^2 \cos x\,, \quad \dfrac{\partial f}{\partial y} = 2y \sin x\,,$

je $\mathrm{d}f(x_0, y_0) = y_0^2 \cos x_0 \; \mathrm{d}x + 2y_0 \sin x_0 \; \mathrm{d}y\,.$

Zpět

Příklad 6.4.4

Napište formálně totální diferenciál funkce: $f(x,y) = y^2 \sin x$ v bodě $[x_0, y_0]$.

Maple:

```
> f:= (x,y) -> y^2*sin(x);
```

$$f := (x,\ y) \to y^2 \sin(x)$$

```
> 'df' = 'fx'*dx + 'fy'*dy ;
```

$$df = fx\ dx + fy\ dy$$

Vyjádříme parciální derivace a dosadíme do nich bod $[x_0,\ y_0]$.

```
> fx :=subs({x=x0,y=y0},diff(f(x,y),x));
```

$$fx := y0^2 \cos(x0)$$

```
> fy :=subs({x=x0,y=y0},diff(f(x,y),y));
```

$$fy := 2\ y0 \sin(x0)$$

Totální diferenciál je výraz

```
> df := fx*dx+fy*dy;
```

$$df := y0^2 \cos(x0)\ dx + 2\ y0 \sin(x0)\ dy$$

Zpět

Příklad 6.4.4

Napište formálně totální diferenciál funkce: $f(x,y) = y^2 \sin x$ v bodě $[x_0, y_0]$.

Mathematica:

$\boldsymbol{f[\mathrm{x\_}, \mathrm{y\_}] = y\hat{\ }2\mathrm{Sin}[x];}$

Výpočet totálního diferenciálu:

$\mathbf{df = Derivative[1,0][\boldsymbol{f}][x0,y0]dx{+}Derivative[0,1][\boldsymbol{f}][x0,y0]dy}$

$\mathrm{dxy0}^2\mathrm{Cos}[\mathrm{x0}] + 2\mathrm{dyy0Sin}[\mathrm{x0}]$

Výpočet pomocí funkce Dt[f] pro výpočet totálního diferenciálu:

$\mathbf{Dt[\boldsymbol{f}[\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}]]/.\{\boldsymbol{x} \to x0, \boldsymbol{y} \to y0\}}$

$\mathrm{y0}^2\mathrm{Cos}[\mathrm{x0}]\mathrm{Dt}[\mathrm{x0}] + 2\mathrm{y0Dt}[\mathrm{y0}]\mathrm{Sin}[\mathrm{x0}]$

Dt[x0] značí dx a Dt[y0] značí dy

Zpět

Příklad 6.4.5

Vypočtěte totální diferenciál funkce $f(x,y)=\sqrt{9x^2+y^2}$ v bodě $[2,8]$ pro přírůstky $dx=-0,05, dy=0,08$.

? Zpět

Příklad 6.4.5

Vypočtěte totální diferenciál funkce $f(x,y)=\sqrt{9x^2+y^2}$ v bodě $[2,8]$ pro přírůstky $dx=-0,05, dy=0,08\,.$

Výsledek:

$$\mathrm{d}f(2,8)=-0,026\,.$$

Zpět

Příklad 6.4.5

Vypočtěte totální diferenciál funkce $f(x,y) = \sqrt{9x^2 + y^2}$ v bodě $[2,8]$ pro přírůstky $dx = -0,05, dy = 0,08$.

Návod:

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y\,.$$

Zpět

Příklad 6.4.5

Vypočtěte totální diferenciál funkce $f(x,y)=\sqrt{9x^2+y^2}$ v bodě $[2,8]$ pro přírůstky $dx=-0,05, dy=0,08$.

Řešení:

Protože

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{9x}{\sqrt{9x^2+y^2}} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(2,8)=\frac{18}{10}=1,8\,,$$

$$\tfrac{\partial f}{\partial y}=\tfrac{y}{\sqrt{9x^2+y^2}} \qquad \Rightarrow \qquad \tfrac{\partial f}{\partial y}(2,8)=\tfrac{8}{10}=0,8$$

je $\quad \mathrm{d}f(2,8)=1,8\ \mathrm{d}x+0,8\ \mathrm{d}y=1,8\cdot(-0,05)+0,8\cdot 0,08=-0,026\,.$

Zpět

Příklad 6.4.5

Vypočtěte totální diferenciál funkce $f(x,y)=\sqrt{9x^2+y^2}$ v bodě $[2,8]$ pro přírůstky $dx=-0,05$, $dy=0,08$.

Maple:

```
> f := (x,y) -> sqrt(9*x^2+y^2);
```

$$f := (x,\ y) \to \sqrt{9\,x^2+y^2}$$

Napíšeme formálně totální diferenciál funkce

```
> 'df' = 'fx'*dx + 'fy'*dy ;
```

$$df = fx\ dx + fy\ dy$$

a dosadíme

```
> fx :=subs({x=2,y=8},diff(f(x,y),x));
```

$$fx := \frac{9\sqrt{100}}{50}$$

```
> fy :=subs({x=2,y=8},diff(f(x,y),y));
```

$$fy := \frac{2\sqrt{100}}{25}$$

```
> dx := -0.05; dy := 0.08;
```

$$dx := -0.05$$

$$dy := 0.08$$

Totální diferenciál je výraz

```
> df := fx*dx+fy*dy;
```

$$df := -0.002600000000\sqrt{100}$$

Další

Příklad 6.4.5

Vypočtěte totální diferenciál funkce $f(x,y) = \sqrt{9x^2 + y^2}$ v bodě $[2,8]$ pro přírůstky $dx = -0,05, dy = 0,08$.

Maple:

```
>   simplify(%);
```

$$-0.02600000000$$

Zpět

Příklad 6.4.5

Vypočtěte totální diferenciál funkce $f(x,y)=\sqrt{9x^2+y^2}$ v bodě $[2,8]$ pro přírůstky $dx=-0,05,\, dy=0,08$.

Mathematica:

$\boldsymbol{f}$**[x_, y_] = Sqrt[9*x*^2 + *y*^2];**

Výpočet totálního diferenciálu:

df = Derivative[1, 0][*f*][x0, y0]dx+Derivative[0, 1][*f*][x0, y0]dy

$$\frac{9\mathrm{dx}\ \mathrm{x0}}{\sqrt{9\mathrm{x0}^2+\mathrm{y0}^2}}+\frac{\mathrm{dy}\ \mathrm{y0}}{\sqrt{9\mathrm{x0}^2+\mathrm{y0}^2}}$$

Dosazení za $x_0,\ y_0,\ x,\ y$:

df/.{x0 → 2, y0 → 8, dx → −0.05, dy → 0.08}

-0.026

Zpět

Newtonova metoda

- **Příklad 6.5.1** Newtonovou metodou vypočtěte první aproximaci řešení soustavy nelineárních rovnic
  $x^2 + y^2 = 1\,, \quad \sin x = y\ .$
  Pro výpočet kořene ve III. kvadrantu zvolte nultou aproximaci $x_0 = -1\,,\ y_0 = -1\,.$

- **Příklad 6.5.2** Newtonovou metodou vypočtěte první aproximaci řešení soustavy nelineárních rovnic
  $$\begin{aligned} x - y^2 - 1 &= 0 \\ 2x^2 - y &= 0\,. \end{aligned}$$
  Pro výpočet kořene zvolte nultou aproximaci $\left[\frac{1}{2}\,,\ \frac{1}{2}\right]\ .$

Zpět

Příklad 6.5.1

Newtonovou metodou vypočtěte první aproximaci řešení soustavy nelineárních rovnic
$x^2 + y^2 = 1\,, \quad \sin x = y\,.$
Pro výpočet kořene ve III. kvadrantu zvolte nultou aproximaci $x_0 = -1\,,\ y_0 = -1\,.$

? Zpět

Příklad 6.5.1

Newtonovou metodou vypočtěte první aproximaci řešení soustavy nelineárních rovnic
$x^2 + y^2 = 1\,, \quad \sin x = y\,.$
Pro výpočet kořene ve III. kvadrantu zvolte nultou aproximaci $x_0 = -1\,,\ y_0 = -1\,.$

Výsledek:

Soustava má dvě řešení $\mathbf{X}\,,\ \widetilde{\mathbf{X}}\,.$ První aproximace řešení soustavy ve III. kvadrantu je $\mathbf{X_1} \doteq [-0,778309; -0,721691]\,.$ Po dvou dalších iteracích provedených v Maplu (lze rovněž pomocí příkazu fsolve) lze výsledek

$$\mathbf{X} \doteq [-0,739085; -0,673612]\,,\ \ \widetilde{\mathbf{X}} \doteq [0,739085; 0,673612]\,.$$

pokládat za řešení soustavy.

Zpět

Příklad 6.5.1

Newtonovou metodou vypočtěte první aproximaci řešení soustavy nelineárních rovnic
$x^2 + y^2 = 1\,, \quad \sin x = y\,.$
Pro výpočet kořene ve III. kvadrantu zvolte nultou aproximaci $x_0 = -1\,,\ y_0 = -1\,.$

Návod:

Nechť je dána soustava rovnic

$$\begin{aligned} f_1(x,y) &= 0 \\ f_2(x,y) &= 0\,. \end{aligned}$$

Ze soustavy lineárních algebraických rovnic

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(\mathbf{X_0}) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(\mathbf{X_0}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(\mathbf{X_0}) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(\mathbf{X_0}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_x \\ \Delta_y \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{X_0}) \\ f_2(\mathbf{X_0}) \end{bmatrix},$$

kde $\mathbf{X_0} = [x_0, y_0]$ je počáteční "přiblížení", vypočítáme $\mathbf{\Delta X} = [\Delta_x\,, \Delta_y]\,.$ Potom $\mathbf{X_1} = \mathbf{X_0} + \mathbf{\Delta X}$ je první další přiblížení soustavy nelineárních rovnic.

Zpět

Příklad 6.5.1

Newtonovou metodou vypočtěte první aproximaci řešení soustavy nelineárních rovnic
$x^2 + y^2 = 1\,, \quad \sin x = y\ .$
Pro výpočet kořene ve III. kvadrantu zvolte nultou aproximaci $x_0 = -1\,,\ y_0 = -1\,.$

Řešení:

Z grafického znázornění (v Maplu) je zřejmé, že má soustava dvě řešení navzájem symetrická vůči počátku.
Je zadáno počáteční přiblížení $\mathbf{X_0} = [-1, -1]$ k řešení soustavy ve III. kvadrantu.
Přepíšeme soustavu a řešíme Newtonovou metodou

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 1 &= 0 \\ y - \sin x &= 0\ , \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 2x_0 & 2y_0 \\ -\cos x_0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_x \\ \Delta_y \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} x_0^2 + y_0^2 - 1 \\ y_0 - \sin x_0 \end{bmatrix} .$$

Tedy

$$\begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -\cos(-1) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_x \\ \Delta_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 + \sin(-1) \end{bmatrix} .$$

Řešíme-li soustavu lineárních algebraických rovnic dostáváme

$$\begin{bmatrix} \Delta_x \\ \Delta_y \end{bmatrix} \doteq \begin{bmatrix} 0,221691 \\ 0,278309 \end{bmatrix} ,$$

Další

Příklad 6.5.1

Newtonovou metodou vypočtěte první aproximaci řešení soustavy nelineárních rovnic
$x^2 + y^2 = 1\,, \quad \sin x = y\,.$
Pro výpočet kořene ve III. kvadrantu zvolte nultou aproximaci $x_0 = -1\,,\ y_0 = -1\,.$

Řešení:

tedy aproximace prvního kořene je $\mathbf{X_1} \doteq [-0,778309; -0,721691]\,.$

Odvodíme aproximaci druhého kořene, tedy $[0,778309; 0,721691]$, nebo tento kořen spočítáme Newtonovou metodou při zadání počátečního přiblížení $[1,1]$.

Zpět

Příklad 6.5.1

Newtonovou metodou vypočtěte první aproximaci řešení soustavy nelineárních rovnic
$x^2 + y^2 = 1\,, \quad \sin x = y\ .$
Pro výpočet kořene ve III. kvadrantu zvolte nultou aproximaci $x_0 = -1\,,\ y_0 = -1\,.$

Maple:

```
> with(linalg):
> f1:= x^2 + y^2 - 1;
```

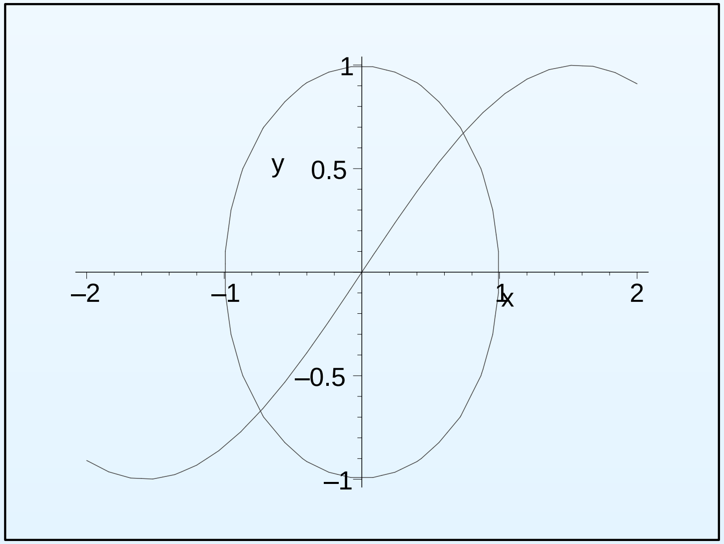
$$f1 := x^2 + y^2 - 1$$

```
> f2:=y - sin(x);
```

$$f2 := y - \sin(x)$$

Obě funkce znázorníme graficky.

```
> plots[implicitplot]({f1=0,f2=0},x=-2..2,y=-2.5..2.5);
```



Úloha má 2 řešení symetrické podle počátku.

Další

Příklad 6.5.1

Newtonovou metodou vypočtěte první aproximaci řešení soustavy nelineárních rovnic
$x^2 + y^2 = 1\,, \quad \sin x = y\,.$
Pro výpočet kořene ve III. kvadrantu zvolte nultou aproximaci $x_0 = -1\,,\ y_0 = -1\,.$

Maple:

```
> f := vector([f1,f2]);
```

$$f := [x^2 + y^2 - 1,\ y - \sin(x)]$$

Vypočtěme matici parciálnich derivací vektorové funkce f.

```
> Df := jacobian(f,[x,y]);
```

$$Df := \begin{bmatrix} 2\,x & 2\,y \\ -\cos(x) & 1 \end{bmatrix}$$

Pro výpočet jednoho ze dvou kořenů ve III. kvadrantu zvolme nultou aproximaci [-1,-1].

```
> Aprox[0]:=[-1.0,-1.0];
```

$$Aprox_0 := [-1.0,\ -1.0]$$

```
> J[0]:=subs(x=Aprox[0][1],y=Aprox[0][2],evalm(Df));
```

$$J_0 := \begin{bmatrix} -2.0 & -2.0 \\ -\cos(-1.0) & 1 \end{bmatrix}$$

```
> F[0]:=subs(x=Aprox[0][1],y=Aprox[0][2],evalm(f));
```

$$F_0 := [1.00,\ -1.0 - \sin(-1.0)]$$

Další

Příklad 6.5.1

Newtonovou metodou vypočtěte první aproximaci řešení soustavy nelineárních rovnic
$x^2 + y^2 = 1\,, \quad \sin x = y\ .$
Pro výpočet kořene ve III. kvadrantu zvolte nultou aproximaci $x_0 = -1\,,\ y_0 = -1\,.$

Maple:

Řešíme soustavu lineárních algebraických rovnic

```
> DX:=linsolve(J[0],-F[0]);
```

$$DX := [0.2216908872,\ 0.2783091128]$$

```
> Aprox[1]:=evalm(Aprox[0]+DX);
```

$$Aprox_1 := [-0.7783091128,\ -0.7216908872]$$

Pomocí Maplu uděláme ještě několik (nmax) dalších aproximací, (zvolíme nmax = 2).

```
> nmax:=2;
```

$$nmax := 2$$

```
> for n from 1 to nmax do
> J[n]:=subs(x=Aprox[n][1],y=Aprox[n][2],evalm(Df));
> F[n]:=subs(x=Aprox[n][1],y=Aprox[n][2],evalm(f));
> DX:=linsolve(J[n],-F[n]);
> Aprox[n+1]:= evalm(Aprox[n]+DX);
> end do;
```

Další

Příklad 6.5.1

Newtonovou metodou vypočtěte první aproximaci řešení soustavy nelineárních rovnic
$x^2 + y^2 = 1\,, \quad \sin x = y\;.$
Pro výpočet kořene ve III. kvadrantu zvolte nultou aproximaci $x_0 = -1\,,\ y_0 = -1\,.$

Maple:

$$J_1 := \begin{bmatrix} -1.556618226 & -1.443381774 \\ -\cos(-0.7783091128) & 1 \end{bmatrix}$$

$$F_1 := [0.1266028118,\ -0.7216908872 - \sin(-0.7783091128)]$$

$$DX := [0.03803185367,\ 0.04669709457]$$

$$Aprox_2 := [-0.7402772591,\ -0.6749937926]$$

$$J_2 := \begin{bmatrix} -1.480554518 & -1.349987585 \\ -\cos(-0.7402772591) & 1 \end{bmatrix}$$

$$F_2 := [0.0036270403,\ -0.6749937926 - \sin(-0.7402772591)]$$

$$DX := [0.001191042484,\ 0.001380484524]$$

$$Aprox_3 := [-0.7390862166,\ -0.6736133081]$$

Druhý kořen I. kvadrantu je symetrický podle počátku. Ověříme ho výpočtem přímo pomocí příkazu fsolve:

```
> koren2:=fsolve({f1,f2},{x=1,y=1});
```

$$koren2 := \{x = 0.7390851332,\ y = 0.6736120292\}$$

Zpět

Příklad 6.5.1

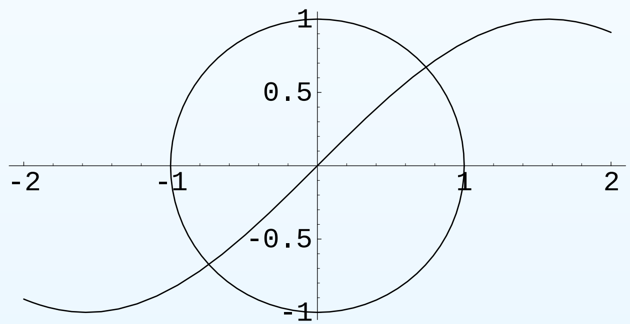
Newtonovou metodou vypočtěte první aproximaci řešení soustavy nelineárních rovnic
$x^2 + y^2 = 1\,, \quad \sin x = y\,.$
Pro výpočet kořene ve III. kvadrantu zvolte nultou aproximaci $x_0 = -1\,,\ y_0 = -1\,.$

Mathematica:

f1[x_, y_] = x^2 + y^2 − 1;f2[x_, y_] = Sin[x] − y;

<< Graphics`ImplicitPlot`

ImplicitPlot[{f1[x, y] == 0, f2[x, y] == 0}, {x, −2, 2}];



Z grafického znázornění vyplývá, že soustava má dvě řešení.

Jacobf = Outer[D, {f1[x, y], f2[x, y]}, {x, y}]

$\{\{2x, 2y\}, \{\mathrm{Cos}[x], -1\}\}$

F[x_, y_] = {f1[x, y], f2[x, y]};

Další

Příklad 6.5.1

Newtonovou metodou vypočtěte první aproximaci řešení soustavy nelineárních rovnic
$x^2 + y^2 = 1\,, \quad \sin x = y\ .$
Pro výpočet kořene ve III. kvadrantu zvolte nultou aproximaci $x_0 = -1\,,\ y_0 = -1\,.$

Mathematica:

$\mathbf{x0 = -1; y0 = 0;}$

$\mathbf{reseni = \{\{''i'', ''xi'', ''yi''\}, \{0, x0, y0\}\};}$

$\mathbf{nmax = 2;}$

Program pro výpočet řešení pomocí Newtonovy metody:

```
For[i = 1, i ≤ nmax,{dX = LinearSolve[N[Jacobf/.{x → x0, y → y0}],
N[−F[x0, y0]]];x1 = N[x0 + dX[[1]]]; y1 = N[y0 + dX[[2]]];
reseni = Join[reseni, {{i, x1, y1}}]; x0 = x1;y0 = y1; i = i + 1}]
```

Řešení:

MatrixForm[reseni]

$$\begin{pmatrix} i & \xi & \text{yi} \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1. & -0.841471 \\ 2 & -0.756617 & -0.709971 \end{pmatrix}$$

Zpět

Příklad 6.5.2

Newtonovou metodou vypočtěte první aproximaci řešení soustavy nelineárních rovnic

$$x - y^2 - 1 = 0$$
$$2x^2 - y = 0\,.$$

Pro výpočet kořene zvolte nultou aproximaci $\left[\frac{1}{2}\,,\ \frac{1}{2}\right]$.

?

Zpět

Příklad 6.5.2

Newtonovou metodou vypočtěte první aproximaci řešení soustavy nelineárních rovnic

$$x - y^2 - 1 = 0$$
$$2x^2 - y = 0\,.$$

Pro výpočet kořene zvolte nultou aproximaci $\left[\frac{1}{2}\,,\ \frac{1}{2}\right]$.

Výsledek:

První "aproximace"řešení soustavy je $\mathbf{X_1} \doteq \left[-\dfrac{1}{4}\,,\ -1\right]$. Soustava však nemá řešení (viz grafické znázornění). Po několika dalších iteracích metody provedených v Maplu je zřejmé, že proces nekonverguje.

Zpět

Příklad 6.5.2

Newtonovou metodou vypočtěte první aproximaci řešení soustavy nelineárních rovnic

$$x - y^2 - 1 = 0$$
$$2x^2 - y = 0\,.$$

Pro výpočet kořene zvolte nultou aproximaci $\left[\frac{1}{2}\,,\;\frac{1}{2}\right]$.

Návod:

Nechť je dána soustava rovnic

$$\begin{aligned} f_1(x,y) &= 0 \\ f_2(x,y) &= 0\,. \end{aligned}$$

Ze soustavy lineárních algebraických rovnic

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(\mathbf{X_0}) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(\mathbf{X_0}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(\mathbf{X_0}) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(\mathbf{X_0}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_x \\ \Delta_y \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{X_0}) \\ f_2(\mathbf{X_0}) \end{bmatrix},$$

kde $\mathbf{X_0} = [x_0, y_0]$ je počáteční přiblížení, vypočítáme $\Delta\mathbf{X} = [\Delta_x\,,\Delta_y]$. Potom $\mathbf{X_1} = \mathbf{X_0} + \Delta\mathbf{X}$ je první další přiblížení soustavy nelineárních rovnic.

Zpět

Příklad 6.5.2

Newtonovou metodou vypočtěte první aproximaci řešení soustavy nelineárních rovnic

$$x - y^2 - 1 = 0$$
$$2x^2 - y = 0\,.$$

Pro výpočet kořene zvolte nultou aproximaci $\left[\frac{1}{2}\,,\ \frac{1}{2}\right]$.

Řešení:

Z grafického znázornění je zřejmé, že soustava nemá řešení.
Zkusíme však přesto (jen formálně) vypočítat z počátečního zadaného přiblížení $\mathbf{X_0} = \left[\frac{1}{2}\,,\ \frac{1}{2}\right]$ první další přiblížení Newtonovou metodou.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2y_0 \\ 4x_0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_x \\ \Delta_y \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} x_0 - y_0^2 - 1 \\ 2x_0^2 - y_0 \end{bmatrix}.$$

Tedy

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_x \\ \Delta_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Řešíme-li soustavu lineárních algebraických rovnic dostáváme

$$\begin{bmatrix} \Delta_x \\ \Delta_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} \\ -\frac{3}{2} \end{bmatrix}.$$

Další

Příklad 6.5.2

Newtonovou metodou vypočtěte první aproximaci řešení soustavy nelineárních rovnic

$$x - y^2 - 1 = 0$$
$$2x^2 - y = 0\,.$$

Pro výpočet kořene zvolte nultou aproximaci $\left[\frac{1}{2}\,,\ \frac{1}{2}\right]$.

Řešení:

Tedy první "aproximace"kořene je $\mathbf{X_1} = [-\dfrac{1}{4}, -1]$, ačkoli tento výpočet neměl jiný smysl než pouze procvičit Newtonovu metodu.

Zpět

Příklad 6.5.2

Newtonovou metodou vypočtěte první aproximaci řešení soustavy nelineárních rovnic

$$x - y^2 - 1 = 0$$
$$2x^2 - y = 0\,.$$

Pro výpočet kořene zvolte nultou aproximaci $\left[\frac{1}{2}\,,\ \frac{1}{2}\right]$.

Maple:

```
> with(linalg):
> f1:=x-y^2-1;
```

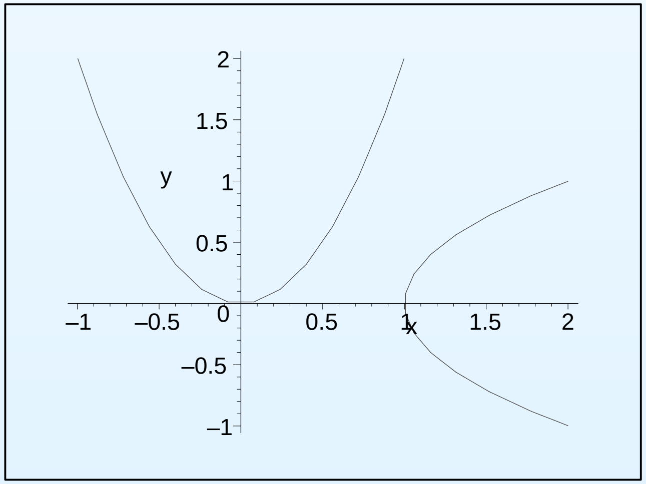
$$f1 := x - y^2 - 1$$

```
> f2:=2*x^2-y;
```

$$f2 := 2\,x^2 - y$$

Z grafického znázornění je zřejmé, že soustava nemá řešení.

```
> plots[implicitplot]({f1=0,f2=0},x=-2..2,y=-2..2);
```



Další

Příklad 6.5.2

Newtonovou metodou vypočtěte první aproximaci řešení soustavy nelineárních rovnic

$$x - y^2 - 1 = 0$$
$$2x^2 - y = 0\,.$$

Pro výpočet kořene zvolte nultou aproximaci $\left[\frac{1}{2}\,,\ \frac{1}{2}\right]$.

Maple:

Neexistující kořen soustavy přesto "aproximujeme" pomocí Newtonovy metody.

```
> f := vector([f1,f2]);
```

$$f := [x - y^2 - 1,\ 2\,x^2 - y]$$

Vypočtěme matici parciálnich derivací vektorové funkce f.

```
> Df := jacobian(f,[x,y]);
```

$$Df := \begin{bmatrix} 1 & -2\,y \\ 4\,x & -1 \end{bmatrix}$$

Zvolíme nultou aproximaci [0,5;0,5]

```
> Aprox[0]:=[0.5,0.5];
```

$$Aprox_0 := [0.5,\ 0.5]$$

```
> J[0]:=subs(x=Aprox[0][1],y=Aprox[0][2],evalm(Df));
```

$$J_0 := \begin{bmatrix} 1 & -1.0 \\ 2.0 & -1 \end{bmatrix}$$

Další

Příklad 6.5.2

Newtonovou metodou vypočtěte první aproximaci řešení soustavy nelineárních rovnic

$$x - y^2 - 1 = 0$$
$$2x^2 - y = 0\,.$$

Pro výpočet kořene zvolte nultou aproximaci $\left[\frac{1}{2}\,,\ \frac{1}{2}\right]$.

Maple:

```
> F[0]:=subs(x=Aprox[0][1],y=Aprox[0][2],evalm(f));
```

$$F_0 := [-0.75,\ 0.]$$

Řešíme soustavu lineárních algebraických rovnic:

```
> DX:=linsolve(J[0],-F[0]);
```

$$DX := [-0.7500000000,\ -1.500000000]$$

```
> Aprox[1]:=evalm(Aprox[0]+DX);
```

$$Aprox_1 := [-0.2500000000,\ -1.000000000]$$

Udělejme nmax dalších aproximací, (zvolime nmax = 4).

```
> nmax:=4;
```

$$nmax := 4$$

```
> for n from 1 to nmax do
> J[n]:=subs(x=Aprox[n][1],y=Aprox[n][2],evalm(Df)):
> F[n]:=subs(x=Aprox[n][1],y=Aprox[n][2],evalm(f)):;
> DX:=linsolve(J[n],-F[n]):
> Aprox[n+1]:= evalm(Aprox[n]+DX);
> end do;
```

Další

Příklad 6.5.2

Newtonovou metodou vypočtěte první aproximaci řešení soustavy nelineárních rovnic

$$x - y^2 - 1 = 0$$
$$2x^2 - y = 0\,.$$

Pro výpočet kořene zvolte nultou aproximaci $\left[\frac{1}{2}\,,\ \frac{1}{2}\right]$.

Maple:

$$Aprox_2 := [-0.2500000000,\ 0.125000000]$$

$$Aprox_3 := [0.7625000000,\ -0.887500000]$$

$$Aprox_4 := [0.3549149777,\ -0.0803218179]$$

$$Aprox_5 := [0.8419945324,\ 0.9434166001]$$

Vidíme, že hodnoty složek vektoru DX, ani při volbě nmax=4 , nekonvergují k 0.

Zpět

Příklad 6.5.2

Newtonovou metodou vypočtěte první aproximaci řešení soustavy nelineárních rovnic

$$x - y^2 - 1 = 0$$
$$2x^2 - y = 0\,.$$

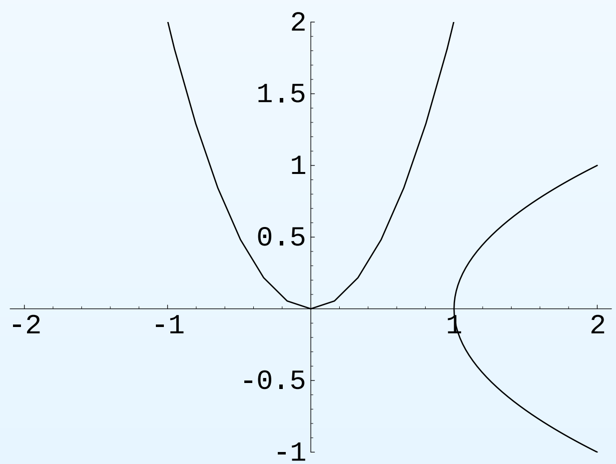
Pro výpočet kořene zvolte nultou aproximaci $\left[\frac{1}{2}\,,\ \frac{1}{2}\right]$.

Mathematica:

f1[x_, y_] = $x - y$^2 − 1;f2[x_, y_] = 2x^2 − y;

<< Graphics`ImplicitPlot`

ImplicitPlot[{f1[x, y] == 0, f2[x, y] == 0}, {x, −2, 2},PlotRange → {−1, 2}];



Z grafického znázornění vyplývá, že soustava nemá řešení.
Přesto můžeme zkusit použít Newtonovu metodu.

Další

Příklad 6.5.2

Newtonovou metodou vypočtěte první aproximaci řešení soustavy nelineárních rovnic

$$x - y^2 - 1 = 0$$
$$2x^2 - y = 0\,.$$

Pro výpočet kořene zvolte nultou aproximaci $\left[\frac{1}{2}\,,\;\frac{1}{2}\right]$.

Mathematica:

$\mathbf{Jacobf = Outer}[\boldsymbol{D}, \{\mathbf{f1}[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}], \mathbf{f2}[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}]\}, \{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\}]$

$\{\{1, -2y\}, \{4x, -1\}\}$

$\boldsymbol{F}[\mathbf{x\_}, \mathbf{y\_}] = \{\mathbf{f1}[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}], \mathbf{f2}[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}]\};$

$\mathbf{x0 = -1; y0 = 0;}$

$\mathbf{reseni = \{\{"i", "xi", "yi"\}, \{0, x0, y0\}\};}$

$\mathbf{nmax = 4;}$

$\mathbf{For}[\boldsymbol{i} = \mathbf{1}, \boldsymbol{i} \leq \mathbf{nmax}, \{\mathbf{dX = LinearSolve}[\boldsymbol{N}[\mathbf{Jacobf}/.\{\boldsymbol{x} \rightarrow \mathbf{x0}, \boldsymbol{y} \rightarrow \mathbf{y0}\}],$
$\boldsymbol{N}[-\boldsymbol{F}[\mathbf{x0, y0}]]]; \mathbf{x1} = \boldsymbol{N}[\mathbf{x0 + dX[[1]]}]; \mathbf{y1} = \boldsymbol{N}[\mathbf{y0 + dX[[2]]}];$
$\mathbf{reseni = Join}[\mathbf{reseni}, \{\{\boldsymbol{i}, \mathbf{x1, y1}\}\}]; \mathbf{x0 = x1;}$
$\mathbf{y0 = y1;} \boldsymbol{i} = \boldsymbol{i} + \mathbf{1}\}]$

Další

Příklad 6.5.2

Newtonovou metodou vypočtěte první aproximaci řešení soustavy nelineárních rovnic

$$\begin{aligned} x - y^2 - 1 &= 0 \\ 2x^2 - y &= 0\,. \end{aligned}$$

Pro výpočet kořene zvolte nultou aproximaci $\left[\frac{1}{2}\,,\ \frac{1}{2}\right]$.

Mathematica:

MatrixForm[reseni]

$$\begin{pmatrix} i & \text{xi} & \text{yi} \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1. & -6. \\ 2 & -0.22449 & -2.89796 \\ 3 & 1.62064 & -1.55606 \\ 4 & 0.704928 & -0.683218 \end{pmatrix}$$

Newtonova metoda nekonverguje.

Zpět