Kapitola 7: Extrémy funkcí dvou proměnných

Chcete-li ukončit prohlížení stiskněte klávesu **Esc**.
Chcete-li pokračovat stiskněte klávesu **Enter**.

Extrémy funkcí dvou proměnných

- Lokální extrémy
- Metoda nejmenších čtverců

Zpět

Lokální extrémy

- Příklad 7.1.1 Najděte lokální extrémy funkce $f(x,y) = y + \dfrac{1}{y} - 2\ln^2 x\,.$
- Příklad 7.1.2 Najděte lokální extrémy funkce $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y + 12$ a v bodech odpovídajících lokálním extrémům napište rovnici tečné roviny ke grafu funkce $f(x,y)$.
- Příklad 7.1.3 Určete maximální a minimální hodnotu funkce $f(x,y) = x^2 + 2xy - 4x - 2y + 8\,.$
- Příklad 7.1.4 Zjistěte, zda má funkce $f(x,y) = x^y - x$ v bodě $B = [1,1]$ lokální extrém.
- Příklad 7.1.5 Číslo 24 rozložte na součet tří kladných čísel tak, aby jejich součin byl co největší.
- Příklad 7.1.6 Určete rozměry pravoúhlé vodní nádrže tvaru kvádru o objemu $32\mathrm{m}^3$ tak, aby dno a stěny měly dohromady co nejmenší povrch.

Zpět

Příklad 7.1.1

Najděte lokální extrémy funkce $f(x,y) = y + \dfrac{1}{y} - 2\ln^2 x$.

? Zpět

Příklad 7.1.1

Najděte lokální extrémy funkce $f(x, y) = y + \dfrac{1}{y} - 2\ln^2 x\,.$

Výsledek:

Funkce $f(x, y)$ má lokální maximum v bodě $[1, -1]$, $f(1, -1) = -2\,.$

Zpět

Příklad 7.1.1

Najděte lokální extrémy funkce $f(x,y) = y + \dfrac{1}{y} - 2\ln^2 x$.

Návod:

Najdeme stacionární body funkce (na základě nutné podmínky pro existenci lokálních extrémů) a pro jednotlivé body vypočteme Hessián, s jehož pomocí zkusíme rozhodnout, zda se jedná o sedlové body nebo body lokálních extrémů.

Zpět

Příklad 7.1.1

Najděte lokální extrémy funkce $f(x,y) = y + \dfrac{1}{y} - 2\ln^2 x$.

Řešení:

Definiční obor funkce $f(x,y)$ je určen podmínkami $x > 0$, $y \neq 0$, a tedy

$$D(f) = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0 \wedge y \neq 0\}.$$

Stacionární body uvnitř definičního oboru musí splňovat podmínky

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0\,, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0\,,$$

tj. v tomto případě

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= -4\ln x \cdot \frac{1}{x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 1 - \frac{1}{y^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = \pm 1\,. \end{aligned}$$

Celkem jsme tedy získali dva stacionární body: $A_1 = [1,-1]$, $A_2 = [1,1]$ podezřelé z lokálních extrémů.

Další

Příklad 7.1.1

Najděte lokální extrémy funkce $f(x,y) = y + \dfrac{1}{y} - 2\ln^2 x$.

Řešení:

Zda se jedná skutečně o extrémy, nebo jen o sedlové body, zjistíme pomocí Hessovy matice. Nejprve si vypočteme druhé parciální derivace:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = -4\frac{1}{x^2} + 4\ln x\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{2}{y^3}\,.$$

Hessova matice v bodě $[1,-1]$ má podobu

$$H_f(1,-1) = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix},$$

její determinant $\det H_f(1,-1) = 8 > 0$, což znamená, že v bodě A_1 má funkce $f(x,y)$ lokální extrém. O jeho typu rozhoduje znaménko $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A_1) = -4 < 0$, jedná se tedy o ostré lokální maximum, $f(1,-1) = -2$.

Další

Příklad 7.1.1

Najděte lokální extrémy funkce $f(x,y) = y + \dfrac{1}{y} - 2\ln^2 x\,.$

Řešení:

Obdobně pro bod $[1,1]$ dostaneme

$$H_f(1,1) = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \det H_f(1,1) = -8 < 0\,,$$

což znamená, že v bodě A_2 má funkce $f(x,y)$ sedlový bod. Funkce $f(x,y)$ má na svém definičním oboru jediný lokální extrém - ostré lokální maximum v bodě $[1,-1]$, jehož funkční hodnota je -2.

Zpět

Příklad 7.1.1

Najděte lokální extrémy funkce $f(x,y) = y + \dfrac{1}{y} - 2\ln^2 x$.

Maple:

```
> with(linalg):
> f:=(x,y)->y+1/y-2*ln(x)^2;
```

$$f := (x,\ y) \to y + \frac{1}{y} - 2\ln(x)^2$$

Nejprve najdeme stacionární body:

```
> fx:=diff(f(x,y),x);
```

$$fx := -\frac{4\ln(x)}{x}$$

```
> fy:=diff(f(x,y),y);
```

$$fy := 1 - \frac{1}{y^2}$$

```
> solve({fx,fy});
```

$$\{x = 1,\ y = 1\},\ \{x = 1,\ y = -1\}$$

Vypočteme funkční hodnoty ve stacionárních bodech:

```
> f(1,-1);
```

$$-2$$

```
> f(1,1);
```

$$2$$

Další

Příklad 7.1.1

Najděte lokální extrémy funkce $f(x,y) = y + \dfrac{1}{y} - 2\ln^2 x$.

Maple:

Dále ověříme pomocí Hessovy matice postačující podmínku pro lokální extrémy:

```
> fxx:=diff(f(x,y),x,x);
```

$$fxx := -\frac{4}{x^2} + \frac{4\ln(x)}{x^2}$$

```
> fxy:=diff(f(x,y),x,y);
```

$$fxy := 0$$

```
> fyy:=diff(f(x,y),y,y);
```

$$fyy := \frac{2}{y^3}$$

```
> H_f:=matrix(2,2,[fxx,fxy,fxy,fyy]);
```

$$H\_f := \begin{bmatrix} -\frac{4}{x^2} + \frac{4\ln(x)}{x^2} & 0 \\ 0 & \frac{2}{y^3} \end{bmatrix}$$

```
> det(H_f);
```

$$\frac{2\left(-\frac{4}{x^2} + \frac{4\ln(x)}{x^2}\right)}{y^3}$$

Další

Příklad 7.1.1

Najděte lokální extrémy funkce $f(x, y) = y + \dfrac{1}{y} - 2\ln^2 x$.

Maple:

```
> x:=1:y:=-1:det(H_f);
```

$$8$$

```
> fxx;
```

$$-4$$

Hessián je kladné číslo (8), jedná se tedy o lokální extrém, podle znaménka derivace $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, -1) = -4$ jde o lokální maximum.
Podobně pro druhý stacionární bod:

```
> unassign('x','y'):fxx:=diff(f(x,y),x,x):fxy:=diff(f(x,y),x,y):
fyy:=diff(f(x,y),y,y):H_f:=matrix(2,2,[fxx,fxy,fxy,fyy]):x:=1:y:=1:det(H_f);
```

$$-8$$

Hessián je záporné číslo (-8), jde tedy o sedlový bod.

Zpět

Příklad 7.1.1

Najděte lokální extrémy funkce $f(x,y) = y + \dfrac{1}{y} - 2\ln^2 x$.

Mathematica:

$\boldsymbol{f[\mathrm{x\_}, \mathrm{y\_}] = y + 1/y - 2\mathrm{Log}[x]\hat{}2}$

$\frac{1}{y} + y - 2\mathrm{Log}[x]^2$

Nejprve najdeme stacionární body:

$\boldsymbol{\mathrm{df} = \{D[f[x,y],x], D[f[x,y],y]\}}$

$\left\{-\frac{4\mathrm{Log}[x]}{x}, 1 - \frac{1}{y^2}\right\}$

$\boldsymbol{\mathrm{Solve}[\mathrm{df} == \{0,0\}, \{x,y\}]}$

$\{\{x \to 1, y \to -1\}, \{x \to 1, y \to 1\}\}$

Vypočteme funkční hodnoty ve stacionárních bodech:

$\boldsymbol{f[1,-1]}$

-2

$\boldsymbol{f[1,1]}$

2

Dále ověříme pomocí Hessovy matice postačující podmínku pro lokální extrémy:

$\boldsymbol{\mathrm{Hf} = D[f[x,y], \{\{x,y\},2\}]}$

$\left\{\left\{-\frac{4}{x^2} + \frac{4\mathrm{Log}[x]}{x^2}, 0\right\}, \left\{0, \frac{2}{y^3}\right\}\right\}$

$\boldsymbol{\mathrm{Det}[\mathrm{Hf}/.\{x \to 1, y \to -1\}]}$

8

Další

Příklad 7.1.1

Najděte lokální extrémy funkce $f(x, y) = y + \dfrac{1}{y} - 2\ln^2 x$.

Mathematica:

$\mathbf{Hf[[1,1]]/.\{x \to 1, y \to -1\}}$

-4

Hessián je kladné číslo (8), jedná se tedy o lokální extrém, podle znaménka derivace $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, -1) = -4$ jde o lokální maximum.
Podobně pro druhý stacionární bod:

$\mathbf{Det[Hf/.\{x \to 1, y \to 1\}]}$

-8

$\mathbf{Hf[[1,1]]/.\{x \to 1, y \to 1\}}$

-4

Hessián je záporné číslo (-8), jde tedy o sedlový bod.

Zpět

Příklad 7.1.2

Najděte lokální extrémy funkce $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y + 12$ a v bodech odpovídajících lokálním extrémům napište rovnici tečné roviny ke grafu funkce $f(x, y)$.

?

Zpět

Příklad 7.1.2

Najděte lokální extrémy funkce $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y + 12$ a v bodech odpovídajících lokálním extrémům napište rovnici tečné roviny ke grafu funkce $f(x, y)$.

Výsledek:

Funkce má lokální minimum v bodě $[1, 2]$, rovnice tečné roviny v tomto bodě je $z = 7$.

Zpět

Příklad 7.1.2

Najděte lokální extrémy funkce $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y + 12$ a v bodech odpovídajících lokálním extrémům napište rovnici tečné roviny ke grafu funkce $f(x, y)$.

Návod:

Najdeme stacionární body funkce, pro které vypočteme Hessián a rozhodneme, zda se jedná o sedlové body nebo body lokálních extrémů. Pro rovnici tečné roviny ke grafu funkce $f(x, y)$ v bodě $[x_0, y_0]$ použijeme vztah

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)\,.$$

Zpět

Příklad 7.1.2

Najděte lokální extrémy funkce $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y + 12$ a v bodech odpovídajících lokálním extrémům napište rovnici tečné roviny ke grafu funkce $f(x, y)$.

Řešení:

Funkce $f(x, y)$ je definována na $\mathbb{R}^2$. Nejprve zjistíme, pro které hodnoty platí nutná podmínka pro existenci lokálního extrému:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \ \wedge \ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 .$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = 2 .$$

Nalezli jsme jediný stacionární bod $[1, 2]$. Pro druhé parciální derivace platí:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 2 , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 0 , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 2 ,$$

konkrétně pak

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, 2) = 2 , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1, 2) = 0 , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1, 2) = 2 ,$$

Další

Příklad 7.1.2

Najděte lokální extrémy funkce $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y + 12$ a v bodech odpovídajících lokálním extrémům napište rovnici tečné roviny ke grafu funkce $f(x,y)$.

Řešení:

pro Hessovu matici v „podezřelém bodě“ dostáváme:

$$H_f(1,2) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \;\Rightarrow\; \det H_f(1,2) = 4 > 0\,.$$

Vzhledem k tomu, že $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,2) = 2 > 0$, jde o lokální minimum, pro které platí $f(1,2) = 7$. Tečná rovina ke grafu funkce $f(x,y)$ má v bodě $[x_0, y_0]$ obecně rovnici

$$z = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)\,,$$

v bodech lokálních extrémů se tato rovnice zjednoduší na $z = f(x_0,y_0)$, v našem případě tedy tečná rovina ke grafu funkce $f(x,y)$ v bodě $[1,2]$ má rovnici $z = 7$.

Zpět

Příklad 7.1.2

Najděte lokální extrémy funkce $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y + 12$ a v bodech odpovídajících lokálním extrémům napište rovnici tečné roviny ke grafu funkce $f(x,y)$.

Maple:

```
> with(linalg):
> f:=(x,y)->x^2+y^2-2*x-4*y+12;
```

$$f := (x,\ y) \to x^2 + y^2 - 2\,x - 4\,y + 12$$

Hledáme stacionární body:

```
> fx:=diff(f(x,y),x);
```

$$fx := 2\,x - 2$$

```
> fy:=diff(f(x,y),y);
```

$$fy := 2\,y - 4$$

```
> solve({fx,fy});
```

$$\{x = 1,\ y = 2\}$$

Funkční hodnota v jediném stacionárním bodě je:

```
> f(1,2);
```

$$7$$

```
> fxx:=diff(f(x,y),x,x);fxy:=diff(f(x,y),x,y);fyy:=diff(f(x,y),y,y);
```

$$fxx := 2$$

$$fxy := 0$$

$$fyy := 2$$

Další

Příklad 7.1.2

Najděte lokální extrémy funkce $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y + 12$ a v bodech odpovídajících lokálním extrémům napište rovnici tečné roviny ke grafu funkce $f(x,y)$.

Maple:

```
> x:=1:y:=2:fx:fY:z:=fx(1,2)*(x-1)+fy(1,2)*(y-2)+7;
```

$$z := 7$$

Rovnice tečné roviny v daném bodě je $z = 7$.

```
> H_f:=matrix(2,2,[fxx,fxy,fxy,fyy]);
```

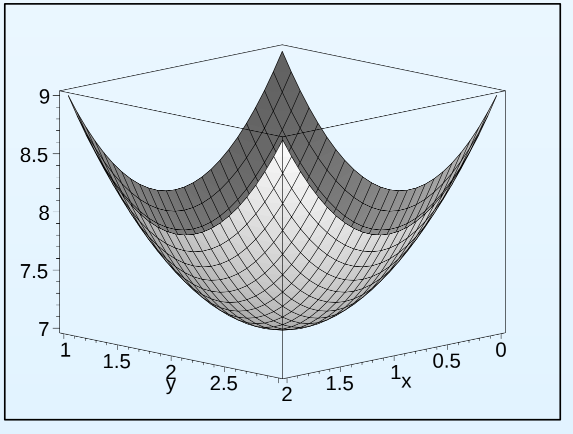
$$H\_f := \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

```
> det(H_f);
```

$$4$$

Hessián v daném bodě je kladný, jde tedy skutečně o lokální extrém, podle znaménka derivace fxx se jedná o lokální minimum. Průběh funkce v okolí tohoto bodu si můžeme přiblížit pomocí grafu:

```
> plot3d(f(x,y),x=0..2,y=1..3);
```



Zpět

Příklad 7.1.2

Najděte lokální extrémy funkce $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y + 12$ a v bodech odpovídajících lokálním extrémům napište rovnici tečné roviny ke grafu funkce $f(x,y)$.

Mathematica:

$f[\mathrm{x\_}, \mathrm{y\_}] = x\hat{}2 + y\hat{}2 - 2x - 4y + 12$

$12 - 2x + x^2 - 4y + y^2$

Nejprve najdeme stacionární body:

$\mathrm{df} = \{D[f[x,y],x], D[f[x,y],y]\}$

$\{-2 + 2x, -4 + 2y\}$

$\mathrm{Solve}[\mathrm{df} == \{0,0\}, \{x,y\}]$

$\{\{x \to 1, y \to 2\}\}$

Vypočteme funkční hodnotu ve stacionárním bodě:

$f[1,2]$

7

Dále ověříme pomocí Hessovy matice postačující podmínku pro lokální extrém:

$\mathrm{Hf} = D[f[x,y], \{\{x,y\},2\}]$

$\{\{2,0\},\{0,2\}\}$

$\mathrm{Det}[\mathrm{Hf}/.\{x \to 1, y \to 2\}]$

4

$\mathrm{Hf}[[1,1]]$

2

Další

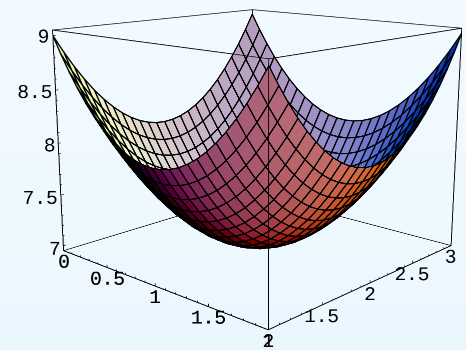
Příklad 7.1.2

Najděte lokální extrémy funkce $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y + 12$ a v bodech odpovídajících lokálním extrémům napište rovnici tečné roviny ke grafu funkce $f(x, y)$.

Mathematica:

Hessián v daném bodě je kladný, jde tedy skutečně o lokální extrém, podle znaménka derivace $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, 2)$ se jedná o lokální minimum. Průběh funkce v okolí tohoto bodu si můžeme přiblížit pomocí grafu:

$\mathbf{Plot3D[f[x, y], \{x, 0, 2\}, \{y, 1, 3\}, BoxRatios \to \{1, 1, 0.8\},}$
$\mathbf{ViewPoint\text{->}\{2.236, -2.417, 0.779\}]};$



Nyní sestrojíme rovnici tečny:

$\mathbf{tecna = Simplify[-f[1, 2] == (df[[1]]/.\{x \to 1, y \to 2\})(x - 1) + (df[[2]]/.\{x \to 1, y \to 2\})(y - 2)]}$

$z == 7$

Zpět

Příklad 7.1.3

Určete maximální a minimální hodnotu funkce $f(x, y) = x^2 + 2xy - 4x - 2y + 8$.

? Zpět

Příklad 7.1.3

Určete maximální a minimální hodnotu funkce $f(x, y) = x^2 + 2xy - 4x - 2y + 8$.

Výsledek:

Funkce $f(x, y)$ nabývá na $\mathbb{R}^2$ neomezeně velkých i malých hodnot, žádné lokální extrémy nemá.

Zpět

Příklad 7.1.3

Určete maximální a minimální hodnotu funkce $f(x, y) = x^2 + 2xy - 4x - 2y + 8$.

Návod:

Hledáme globální extrémy funkce na jejím definičním oboru (globální extrém může být v bodě lokálního extrému, v bodě, v němž neexistuje derivace nebo v krajním bodě definičního oboru).

Zpět

Příklad 7.1.3

Určete maximální a minimální hodnotu funkce $f(x, y) = x^2 + 2xy - 4x - 2y + 8$.

Řešení:

Funkce $f(x, y)$ je na $\mathbb{R}^2$ spojitá. Vzhledem k tomu, že $\mathbb{R}^2$ není omezená množina (není ani kompaktní), nemáme existenci (konečných) extrémů zaručenu. Stacionární body najdeme řešením soustavy rovnic:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= 2x + 2y - 4 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= 2x - 2 = 0 \end{aligned}\right\} \quad \Leftrightarrow \quad x = 1, y = 1 .$$

Nalezli jsme jediný stacionární bod $A = [1, 1]$. Vypočítáme si Hessián v tomto bodě:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, 1) = 2 , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1, 1) = 2 , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1, 1) = 0 ,$$

$$H_f(1, 1) = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \det H_f(1, 1) = -4 < 0 .$$

Jde o sedlový bod; funkce $f(x, y)$ tedy nemá na $\mathbb{R}^2$ žádný lokální extrém (parciální derivace existují ve všech bodech definičního oboru, žádný bod přitom nesplňuje postačující podmínku pro existenci lokálního extrému). Vzhledem k povaze množiny $\mathbb{R}^2$ (nemá žádné krajní body) nemůže funkce $f(x, y)$ nabývat globálních extrémů ve vlastních bodech, její funkční hodnoty mohou být libovolně velké či naopak libovolně malé.

Zpět

Příklad 7.1.3

Určete maximální a minimální hodnotu funkce $f(x,y) = x^2 + 2xy - 4x - 2y + 8$.

Maple:

```
>   with(linalg):
>   f:=(x,y)->x^2+2*x*y-4*x-2*y+8;
```

$$f := (x,\ y) \to x^2 + 2\,x\,y - 4\,x - 2\,y + 8$$

```
>   fx:=diff(f(x,y),x);
```

$$fx := 2\,x + 2\,y - 4$$

```
>   fy:=diff(f(x,y),y);
```

$$fy := 2\,x - 2$$

```
>   solve({fx,fy});
```

$$\{x = 1,\ y = 1\}$$

```
>   f(1,1);
```

$$5$$

Nalezli jsme jediný stacionární bod [1,1], funkční hodnota v tomto bodě je 5. Nyní prověříme postačující podmínku pro lokální extrémy:

```
>   fxx:=diff(f(x,y),x,x);
```

$$fxx := 2$$

```
>   fxy:=diff(f(x,y),x,y);
```

$$fxy := 2$$

```
>   fyy:=diff(f(x,y),y,y);
```

$$fyy := 0$$

Další

Příklad 7.1.3

Určete maximální a minimální hodnotu funkce $f(x,y) = x^2 + 2xy - 4x - 2y + 8$.

Maple:

```
> H_f:=matrix(2,2,[fxx,fxy,fxy,fyy]);
```

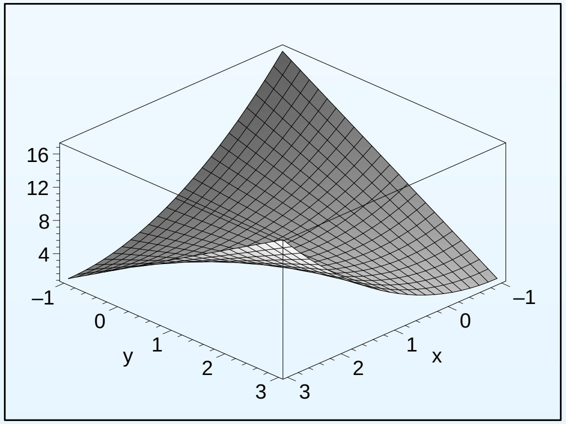
$$H\_f := \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> det(H_f);
```

$$-4$$

Je zřejmé, že podezřelý bod byl bodem sedlovým, nikoli bodem lokálního extrému (viz obrázek).

```
> plot3d(f(x,y),x=-1..3,y=-1..3,axes=boxed,orientation=[45,45]);
```



Zpět

Příklad 7.1.3

Určete maximální a minimální hodnotu funkce $f(x, y) = x^2 + 2xy - 4x - 2y + 8$.

Mathematica:

$\boldsymbol{f[\mathrm{x\_}, \mathrm{y\_}] = x\hat{\ }2 + 2xy - 4x - 2y + 8}$

$8 - 4x + x^2 - 2y + 2xy$

Nejprve najdeme stacionární body:

$\boldsymbol{\mathrm{df} = \{D[f[x, y], x], D[f[x, y], y]\}}$

$\{-4 + 2x + 2y, -2 + 2x\}$

$\boldsymbol{\mathrm{Solve}[\mathrm{df} == \{0, 0\}, \{x, y\}]}$

$\{\{x \to 1, y \to 1\}\}$

Vypočteme funkční hodnotu ve stacionárním bodě:

$\boldsymbol{f[1, 1]}$

5

Nalezli jsme jediný stacionární bod [1,1], funkční hodnota v tomto bodě je 5. Nyní prověříme postačující podmínku pro lokální extrémy:

$\boldsymbol{\mathrm{Hf} = D[f[x, y], \{\{x, y\}, 2\}]}$

$\{\{2, 2\}, \{2, 0\}\}$

$\boldsymbol{\mathrm{Det}[\mathrm{Hf}/.\{x \to 1, y \to 1\}]}$

-4

Další

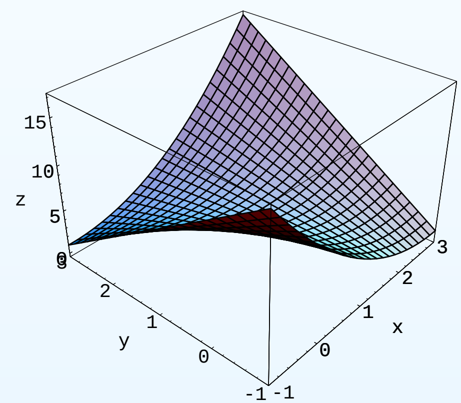
Příklad 7.1.3

Určete maximální a minimální hodnotu funkce $f(x,y) = x^2 + 2xy - 4x - 2y + 8$.

Mathematica:

Je zřejmé, že podezřelý bod byl bodem sedlovým, nikoli bodem lokálního extrému (viz obrázek).

**Plot3D[$f[x,y]$, {x, −1, 3}, {y, −1, 3}, BoxRatios → {1, 1, 0.7},
ViewPoint->{−1.942, −1.705, 1.639}, AxesLabel → {x, y, z}];**



Zpět

Příklad 7.1.4

Zjistěte, zda má funkce $f(x, y) = x^y - x$ v bodě $B = [1, 1]$ lokální extrém.

?

Zpět

Příklad 7.1.4

Zjistěte, zda má funkce $f(x, y) = x^y - x$ v bodě $B = [1, 1]$ lokální extrém.

Výsledek:

Funkce $f(x, y)$ nemá v bodě B lokální extrém.

Zpět

Příklad 7.1.4

Zjistěte, zda má funkce $f(x,y) = x^y - x$ v bodě $B = [1,1]$ lokální extrém.

Návod:

Ověříme splnění nutné podmínky pro existenci lokálního extrému a vypočteme Hessián $\det H_f(1,1)$.

Zpět

Příklad 7.1.4

Zjistěte, zda má funkce $f(x,y) = x^y - x$ v bodě $B = [1,1]$ lokální extrém.

Řešení:

Nejprve ověříme splnění nutné podmínky pro existenci lokálního extrému:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = yx^{y-1} - 1\,, \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 1 - 1 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^y \ln x\,, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = 1 \cdot \ln 1 = 0\,.$$

Bod $[1,1]$ je tedy skutečně bodem stacionárním. Dále platí:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = y(y-1)x^{y-2}\,,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = x^{y-1} + yx^{y-1}\ln x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = x^y \ln^2 x\,.$$

Další

Příklad 7.1.4

Zjistěte, zda má funkce $f(x,y) = x^y - x$ v bodě $B = [1,1]$ lokální extrém.

Řešení:

V bodě $[1,1]$ dostaneme po dosazení:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1) = 0\,, \\ &\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,1) = 1 \\ &\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,1) = 0 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad H_f(1,1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \det H_f(1,1) = -1 < 0\,.$$

Bod $[1,1]$ je bodem sedlovým, nikoli lokálním extrémem.

Zpět

Příklad 7.1.4

Zjistěte, zda má funkce $f(x,y) = x^y - x$ v bodě $B = [1,1]$ lokální extrém.

Maple:

```
> with(linalg):
> f:=(x,y)->x^y-x;
```

$$f := (x,\ y) \to x^y - x$$

Ověříme, že daný bod splňuje nutnou podmínku pro lokální extrém:

```
> fx:=diff(f(x,y),x);fy:=diff(f(x,y),y);
```

$$fx := \frac{x^y\,y}{x} - 1$$

$$fy := x^y \ln(x)$$

```
> solve({fx,fy});
```

$$\{fx = 1,\ fy = 1\}$$

Bod [1,1] je tedy bodem stacionárním. Nyní vypočítejme Hessovu matici a Hessián:

```
> fxx:=diff(f(x,y),x,x);
```

$$fxx := \frac{x^y\,y^2}{x^2} - \frac{x^y\,y}{x^2}$$

```
> fxy:=diff(f(x,y),x,y);
```

$$fxy := \frac{x^y \ln(x)\,y}{x} + \frac{x^y}{x}$$

```
> fyy:=diff(f(x,y),y,y);
```

$$fyy := x^y \ln(x)^2$$

Další

Příklad 7.1.4

Zjistěte, zda má funkce $f(x,y) = x^y - x$ v bodě $B = [1,1]$ lokální extrém.

Maple:

```
> H_f:=matrix(2,2,[fxx,fxy,fxy,fyy]);
```

$$H\_f := \begin{bmatrix} \frac{x^y\,y^2}{x^2} - \frac{x^y\,y}{x^2} & \frac{x^y\ln(x)\,y}{x} + \frac{x^y}{x} \\ \frac{x^y\ln(x)\,y}{x} + \frac{x^y}{x} & x^y\ln(x)^2 \end{bmatrix}$$

```
> det(H_f);
```

$$-\frac{(x^y)^2\,(y\ln(x)^2 + 2\ln(x)\,y + 1)}{x^2}$$

```
> x:=1:y:=1:det(H_f);
```

$$-1$$

Hessián v daném bodě je záporný, nejde tedy o lokální extrém, ale o sedlový bod.

Zpět

Příklad 7.1.4

Zjistěte, zda má funkce $f(x,y) = x^y - x$ v bodě $B = [1,1]$ lokální extrém.

Mathematica:

$\boldsymbol{f[\mathrm{x\_}, \mathrm{y\_}] = x\hat{\ }y - x}$

$-x + x^y$

Ověříme, že daný bod splňuje nutnou podmínku pro lokální extrém:

$\mathbf{df = Simplify[\{\boldsymbol{D[f[x,y],x], D[f[x,y],y]}\}]}$

$\{-1 + x^{-1+y}y, x^y\mathrm{Log}[x]\}$

$\mathbf{Reduce[df == \{0,0\}]}$

$y == 1\&\&x == 1$

Bod [1,1] je tedy bodem stacionárním. Nyní vypočítejme Hessovu matici a Hessián:

$\mathbf{Hf = Simplify[\boldsymbol{D[f[x,y], \{\{x,y\},2\}]}]}$

$\{\{x^{-2+y}(-1+y)y, x^{-1+y}(1+y\mathrm{Log}[x])\}, \{x^{-1+y}(1+y\mathrm{Log}[x]), x^y\mathrm{Log}[x]^2\}\}$

$\mathbf{Det[Hf/.\{\boldsymbol{x \to 1, y \to 1}\}]}$

-1

Hessián v daném bodě je záporný, nejde tedy o lokální extrém, ale o sedlový bod.

Zpět

Příklad 7.1.5

Číslo 24 rozložte na součet tří kladných čísel tak, aby jejich součin byl co největší.

? Zpět

Příklad 7.1.5

Číslo 24 rozložte na součet tří kladných čísel tak, aby jejich součin byl co největší.

Výsledek:

$24 = 8 + 8 + 8\,.$

Zpět

Příklad 7.1.5

Číslo 24 rozložte na součet tří kladných čísel tak, aby jejich součin byl co největší.

Návod:

Hledáme maximum funkce $f(x, y) = xy(24 - x - y)$.

Zpět

Příklad 7.1.5

Číslo 24 rozložte na součet tří kladných čísel tak, aby jejich součin byl co největší.

Řešení:

Označme si uvažovaná čísla x, y, z. Hledáme maximum součinu xyz za předpokladu, že platí rovnost $x + y + z = 24$. Dosazením $z = 24 - x - y$ se ze součinu xyz stane funkce dvou proměnných

$$f(x, y) = xy(24 - x - y)\,.$$

Nyní najdeme stacionární body této funkce

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 24y - 2xy - y^2 \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 24x - 2xy - x^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \;\Leftrightarrow\; y(24 - 2x - y) = 0 \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \;\Leftrightarrow\; x(24 - 2y - x) = 0\,.$$

Ze zadání plyne omezení $0 < x, y, z < 24$, takže stacionární bod musí vyhovovat soustavě

$$\begin{array}{ccccccc} 24 & - & 2x & - & y & = & 0 \\ 24 & - & 2y & - & x & = & 0\,, \end{array}$$

která má jediné řešení $x = 8$, $y = 8$. Dále ověříme, že bod $[8, 8]$ je lokálním maximem funkce $f(x, y)$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = -2y\,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 24 - 2x - 2y\,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = -2x$$

Další

Příklad 7.1.5

Číslo 24 rozložte na součet tří kladných čísel tak, aby jejich součin byl co největší.

Řešení:

Hessián v bodě $[8, 8]$:

$$\det H_f(8,8) = \begin{vmatrix} -16 & -8 \\ -8 & -16 \end{vmatrix} = 16^2 - 64 > 0\,,$$

navíc $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(8,8) = -16 < 0$, jde tedy skutečně o ostré lokální maximum. Jednoduše lze dopočítat $z = 24 - 8 - 8 = 8$. Hledaný optimální rozklad je $24 = 8 + 8 + 8$.
Maximalní součin je $f(8,8) = 8^3 = 512$.

Zpět

Příklad 7.1.5

Číslo 24 rozložte na součet tří kladných čísel tak, aby jejich součin byl co největší.

Maple:

Úlohu převedeme na problém hledání lokálních extrémů funkce f :

```
> f:=(x,y)->x*y*(24-x-y);
```

$$f := (x, y) \to x\,y\,(24 - x - y)$$

Nejprve najdeme stacionární body:

```
> fx:=diff(f(x,y),x);
```

$$fx := y\,(24 - x - y) - x\,y$$

```
> fy:=diff(f(x,y),y);
```

$$fy := x\,(24 - x - y) - x\,y$$

```
> solve({fx,fy});
```

$$\{y = 0,\ x = 0\},\ \{y = 0,\ x = 24\},\ \{y = 24,\ x = 0\},\ \{y = 8,\ x = 8\}$$

Vzhledem k zadání úlohy x, y, z představují kladná čísla menší než 24 bereme v úvahu pouze poslední bod - [8,8]:

```
> f(8,8);
```

$$512$$

Zda má funkce v tomto bodě maximum, ověříme pomocí Hessiánu:

```
> fxx:=diff(f(x,y),x,x);
```

$$fxx := -2\,y$$

```
> fxy:=diff(f(x,y),x,y);
```

$$fxy := 24 - 2\,x - 2\,y$$

Další

Příklad 7.1.5

Číslo 24 rozložte na součet tří kladných čísel tak, aby jejich součin byl co největší.

Maple:

```
> fyy:=diff(f(x,y),y,y);
```

$$fyy := -2\,x$$

```
> x:=8:y:=8:fx:fy:fxx:fxy:fyy:
> H_f:=matrix(2,2,[fxx,fxy,fxy,fyy]);
```

$$H\_f := \begin{bmatrix} -16 & -8 \\ -8 & -16 \end{bmatrix}$$

```
> det(H_f);
```

$$192$$

Zjistili jsme, že $\det H_f(8,8) > 0$ a $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(8,8) < 0$, jde tedy o lokální maximum, odpovídající hodnota z je

```
> z:=24-x-y;
```

$$z := 8$$

Zpět

Příklad 7.1.5

Číslo 24 rozložte na součet tří kladných čísel tak, aby jejich součin byl co největší.

Mathematica:

Úlohu převedeme na problém hledání lokálních extrémů funkce f :

$\boldsymbol{f[\mathrm{x\_}, \mathrm{y\_}] = xy(24 - x - y)}$

$x(24 - x - y)y$

Nejprve najdeme stacionární body:

$\mathbf{df} = \boldsymbol{\{D[f[x, y], x], D[f[x, y], y]\}}$

$\{-xy + (24 - x - y)y, x(24 - x - y) - xy\}$

$\mathbf{Solve}[\mathbf{df} == \boldsymbol{\{0, 0\}, \{x, y\}}]$

$\{\{x \to 0, y \to 0\}, \{x \to 0, y \to 24\}, \{x \to 8, y \to 8\}, \{x \to 24, y \to 0\}\}$

Vzhledem k zadání úlohy x, y, z představují kladná čísla menší než 24 bereme v úvahu pouze bod - [8,8]:

$\boldsymbol{f[8, 8]}$

512

Zda má funkce v tomto bodě maximum, ověříme pomocí Hessiánu:

$\mathbf{Hf} = \boldsymbol{D[f[x, y], \{\{x, y\}, 2\}]}$

$\{\{-2y, 24 - 2x - 2y\}, \{24 - 2x - 2y, -2x\}\}$

Další

Příklad 7.1.5

Číslo 24 rozložte na součet tří kladných čísel tak, aby jejich součin byl co největší.

Mathematica:

$\mathbf{MatrixForm[Hf]/.\{\boldsymbol{x} \to 8, \boldsymbol{y} \to 8\}}$

$$\begin{pmatrix} -16 & -8 \\ -8 & -16 \end{pmatrix}$$

Det[%]

192

$\mathbf{Hf[[1, 1]]/.\{\boldsymbol{x} \to 8, \boldsymbol{y} \to 8\}}$

-16

Zjistili jsme, že det $H_f(8,8) > 0$ a $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(8,8) < 0$, jde tedy o lokální maximum, odpovídající hodnota z je

$\boldsymbol{z = 24 - x - y}/.\{x \to 8, y \to 8\}$

8

Zpět

Příklad 7.1.6

Určete rozměry pravoúhlé vodní nádrže tvaru kvádru o objemu $32\mathrm{m}^3$ tak, aby dno a stěny měly dohromady co nejmenší povrch.

Zpět

Příklad 7.1.6

Určete rozměry pravoúhlé vodní nádrže tvaru kvádru o objemu $32\mathrm{m}^3$ tak, aby dno a stěny měly dohromady co nejmenší povrch.

Výsledek:

$a = 4\mathrm{m},\ b = 4\mathrm{m},\ c = 2\mathrm{m}\,.$

Zpět

Příklad 7.1.6

Určete rozměry pravoúhlé vodní nádrže tvaru kvádru o objemu 32m^3 tak, aby dno a stěny měly dohromady co nejmenší povrch.

Návod:

Hledáme minimum funkce $S(a,b) = ab + \frac{64}{b} + \frac{64}{a}$.

Zpět

Příklad 7.1.6

Určete rozměry pravoúhlé vodní nádrže tvaru kvádru o objemu $32\mathrm{m}^3$ tak, aby dno a stěny měly dohromady co nejmenší povrch.

Řešení:

Označme si rozměry dna nádrže a, b, výšku nádrže c. Ze vztahu pro objem kvádru dostáváme podmínku $32 = abc$. Dno a stěny nádoby mají povrch $ab + 2c(a+b)$, dosadíme-li $c = \frac{32}{ab}$, získáváme funkci dvou proměnných

$$S(a,b) = ab + \frac{64}{ab}(a+b) = ab + \frac{64}{b} + \frac{64}{a}\,,$$

pro kterou hledáme minimum:

$$\frac{\partial S}{\partial a}(a,b) = b - \frac{64}{a^2}\,, \qquad \frac{\partial S}{\partial b}(a,b) = b - \frac{64}{b^2}\,,$$

$$\frac{\partial S}{\partial a} = \frac{\partial S}{\partial b} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a^2 b = 64, ab^2 = 64 \;\Leftrightarrow\; a = b = 4$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial a^2} = \frac{128}{a^3}\,, \quad \frac{\partial^2 S}{\partial a \partial b} = 1\,, \quad \frac{\partial^2 S}{\partial b^2} = \frac{128}{b^3}$$

Další

Příklad 7.1.6

Určete rozměry pravoúhlé vodní nádrže tvaru kvádru o objemu $32\mathrm{m}^3$ tak, aby dno a stěny měly dohromady co nejmenší povrch.

Řešení:

Hessián v bodě $[4,4]$:

$$\det H_S(4,4) = \begin{vmatrix} \frac{128}{64} & 1 \\ 1 & \frac{128}{64} \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 > 0\,,$$

dále $\dfrac{\partial^2 S}{\partial a^2}(4,4) = 2 > 0$, při rozměrech $a = 4\mathrm{m}$, $b = 4\mathrm{m}$ bude skutečně funkce $S(a,b)$ nabývat minimální hodnoty. Z podmínky $c = \frac{32}{a\,b}$ určíme zbývající rozměr nádrže $c = 2\mathrm{m}$. Hledaný minimální povrch je $S(4,4) = 48\mathrm{m}^2$.

Zpět

Příklad 7.1.6

Určete rozměry pravoúhlé vodní nádrže tvaru kvádru o objemu $32\mathrm{m}^3$ tak, aby dno a stěny měly dohromady co nejmenší povrch.

Maple:

```
> S:=(a,b)->a*b+64/b+64/a;
```

$$S := (a,\ b) \to a\,b + \frac{64}{b} + \frac{64}{a}$$

Hledáme stacionární body:

```
> Sa:=diff(S(a,b),a);
```

$$Sa := b - \frac{64}{a^2}$$

```
> Sb:=diff(S(a,b),b);
```

$$Sb := a - \frac{64}{b^2}$$

```
> evalf(solve({Sa,Sb}));
```

$$\{b = 4.,\ a = 4.\},$$
$$\{b = -2.000000000 + 3.464101615\,I,\ a = -2.000000000 + 3.464101615\,I\}$$

Soustava má jediné reálné řešení - bod [4,4]

```
> f(4,4);
```

$$48$$

Další

Příklad 7.1.6

Určete rozměry pravoúhlé vodní nádrže tvaru kvádru o objemu 32m^3 tak, aby dno a stěny měly dohromady co nejmenší povrch.

Maple:

Nyní ověříme, že jde o lokální minimum:

```
> Saa:=diff(S(a,b),a,a);Sab:=diff(S(a,b),a,b);Sbb:=diff(S(a,b),b,b);
```

$$Saa := \frac{128}{a^3}$$

$$Sab := 1$$

$$Sbb := \frac{128}{b^3}$$

```
> H_S:=matrix(2,2,[Saa,Sab,Sab,Sbb]);
```

$$H\_S := \begin{bmatrix} \frac{128}{a^3} & 1 \\ 1 & \frac{128}{b^3} \end{bmatrix}$$

```
> a:=4:b:=4:with(linalg):det(H_S);
```

$$3$$

Zjistili jsme, že $\det H_S(4,4) > 0$ a $\frac{\partial^2 S}{\partial a^2}(4,4) > 0$, jde tedy o lokální minimum, zbývající hodnota c je

```
> c:=32/a/b;
```

$$c := 2$$

Rozměry nádrže musí být 4m, 4m a 2m.

Zpět

Příklad 7.1.6

Určete rozměry pravoúhlé vodní nádrže tvaru kvádru o objemu $32\mathrm{m}^3$ tak, aby dno a stěny měly dohromady co nejmenší povrch.

Mathematica:

$\boldsymbol{S[\mathrm{a\_}, \mathrm{b\_}] = a * b + 64/b + 64/a}$

$\frac{64}{a} + \frac{64}{b} + ab$

Hledáme stacionární body:

$\boldsymbol{\mathrm{dS} = \{D[S[a,b],a], D[S[a,b],b]\}}$

$\left\{-\frac{64}{a^2} + b, a - \frac{64}{b^2}\right\}$

$\boldsymbol{\mathrm{Solve}[\mathrm{dS} == \{0,0\}, \{a,b\}]}$

$\left\{\{a \to 4, b \to 4\}, \left\{a \to -4(-1)^{1/3}, b \to -4(-1)^{1/3}\right\}, \left\{a \to 4(-1)^{2/3}, b \to 4(-1)^{2/3}\right\}\right\}$

$\boldsymbol{S[4,4]}$

48

Nyní ověříme, že jde o lokální minimum:

$\boldsymbol{\mathrm{HS} = D[S[a,b], \{\{a,b\},2\}]}$

$\left\{\left\{\frac{128}{a^3}, 1\right\}, \left\{1, \frac{128}{b^3}\right\}\right\}$

Další

Příklad 7.1.6

Určete rozměry pravoúhlé vodní nádrže tvaru kvádru o objemu 32m^3 tak, aby dno a stěny měly dohromady co nejmenší povrch.

Mathematica:

$\mathbf{MatrixForm[HS]/.\{\boldsymbol{a} \to 4, \boldsymbol{b} \to 4\}}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Det[%]

3

$\mathbf{HS[[1,1]]/.\{\boldsymbol{a} \to 4, \boldsymbol{b} \to 4\}}$

2

Zjistili jsme, že $\det H_S(4,4) > 0$ a $\frac{\partial^2 S}{\partial a^2}(4,4) > 0$, jde tedy o lokální minimum, zbývající hodnota c je

$\boldsymbol{c = 32/(ab)/.\{a \to 4, b \to 4\}}$

2

Rozměry nádrže musí být 4m, 4m a 2m.

Zpět

- **Příklad 7.2.1** V následující tabulce jsou dány hodnoty (x_i, y_i), $i = 1, \ldots, 6$.

x_i	1	2	3	4	5	6
y_i	8	10	15	18	23	28

  Závislost y na x aproximujte polynomem $y = ax + b$, kde koeficienty a, b hledejte metodou nejmenších čtverců.

- **Příklad 7.2.2** Při měření závislosti výchylky magnetometru na proudu protékajícím cívkou byla naměřena tato data:

Číslo měření i	1	2	3	4	5	6	7	8
$I[A]$	$0,50$	$1,00$	$1,50$	$2,00$	$2,50$	$3,00$	$3,50$	$4,00$
α[rad]	$0,004$	$0,01$	0.0162	$0,0212$	$0,0274$	$0,0346$	$0,0398$	$0,0456$

  I - proud protékající cívkou v ampérech (A), α - výchylka magnetometru v radiánech (rad). Předpokládejme lineární zavislost α na I.

- **Příklad 7.2.3** Při měření indexu lomu n glycerinového roztoku v závislosti na jeho objemové koncentraci $c_\odot$ v rozmezí od 0% (destilovaná voda) do 100% (čistý glycerin) byla naměřena tato data:

Měření číslo i	1	2	3	4	5	6
$c_\odot$[%]	0	10	20	30	40	50
n	$1,3340$	$1,3460$	$1,3600$	$1,3690$	$1,3795$	$1,3855$
Měření číslo i	7	8	9	10	11	
$c_\odot$[%]	60	70	80	90	100	
n	$1,3905$	$1,4100$	$1,4250$	$1,4315$	$1,4445$	

  Graf naměřených hodnot aproximujte pomocí přímky o rovnici $n = a \cdot c_\odot + b$.

Zpět

Příklad 7.2.1

V následující tabulce jsou dány hodnoty (x_i, y_i), $i = 1, \ldots, 6$.

x_i	1	2	3	4	5	6
y_i	8	10	15	18	23	28

Závislost y na x aproximujte polynomem $y = ax + b$, kde koeficienty a, b hledejte metodou nejmenších čtverců.

? Zpět

Příklad 7.2.1

V následující tabulce jsou dány hodnoty (x_i, y_i) , $i = 1, \ldots, 6$.

x_i	1	2	3	4	5	6
y_i	8	10	15	18	23	28

Závislost y na x aproximujte polynomem $y = ax + b$, kde koeficienty a, b hledejte metodou nejmenších čtverců.

Výsledek:

$$y = \frac{142}{35}x + \frac{14}{5} \ .$$

Zpět

Příklad 7.2.1

V následující tabulce jsou dány hodnoty (x_i, y_i) , $i = 1, \ldots, 6$.

x_i	1	2	3	4	5	6
y_i	8	10	15	18	23	28

Závislost y na x aproximujte polynomem $y = ax + b$, kde koeficienty a, b hledejte metodou nejmenších čtverců.

Návod:

Koeficienty a, b při lineární regresi určíme řešením soustavy rovnic:

$$a \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right) + b \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right) = \sum_{i=1}^{n} (x_i y_i)$$

$$a \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right) + b \cdot n = \sum_{i=1}^{n} y_i \, , \quad n = 6 \, .$$

Zpět

Příklad 7.2.1

V následující tabulce jsou dány hodnoty (x_i, y_i), $i = 1, \ldots, 6$.

x_i	1	2	3	4	5	6
y_i	8	10	15	18	23	28

Závislost y na x aproximujte polynomem $y = ax + b$, kde koeficienty a, b hledejte metodou nejmenších čtverců.

Řešení:

Pro hodnoty z tabulky si nejprve vypočítáme potřebné koeficienty:

$$\sum_{i=1}^{6} x_i = 21\,, \qquad \sum_{i=1}^{6} (x_i y_i) = 428\,,$$

$$\sum_{i=1}^{6} y_i = 102\,, \qquad \sum_{i=1}^{6} x_i^2 = 91\,.$$

Jejich dosazením dostaneme soustavu:

$$91a + 21b = 428$$

$$21a + 6b = 102\,,$$

která má jediné řešení

$$a = \frac{142}{35}\,,\ b = \frac{14}{5}\,.$$

Další

Příklad 7.2.1

V následující tabulce jsou dány hodnoty (x_i, y_i), $i = 1, \ldots, 6$.

x_i	1	2	3	4	5	6
y_i	8	10	15	18	23	28

Závislost y na x aproximujte polynomem $y = ax + b$, kde koeficienty a, b hledejte metodou nejmenších čtverců.

Řešení:

Hledanou aproximací je přímka o rovnici

$$y = \frac{142}{35}x + \frac{14}{5}\,.$$

Zpět

Příklad 7.2.1

V následující tabulce jsou dány hodnoty (x_i, y_i), $i = 1, \ldots, 6$.

x_i	1	2	3	4	5	6
y_i	8	10	15	18	23	28

Závislost y na x aproximujte polynomem $y = ax + b$, kde koeficienty a, b hledejte metodou nejmenších čtverců.

Maple:

Takto bychom postupovali analogicky našemu "ručnímu výpočtu":

```
> x1:=1:x2:=2:x3:=3:x4:=4:x5:=5:x6:=6:
> y1:=8:y2:=10:y3:=15:y4:=18:y5:=23:y6:=28:
> K1:=x1+x2+x3+x4+x5+x6;
```

$$K1 := 21$$

```
> K2:=y1+y2+y3+y4+y5+y6;
```

$$K2 := 102$$

```
> K3:=x1^2+x2^2+x3^2+x4^2+x5^2+x6^2;
```

$$K3 := 91$$

```
> K4:=x1*y1+x2*y2+x3*y3+x4*y4+x5*y5+x6*y6;
```

$$K4 := 428$$

```
> solve({a*K3+b*K1=K4,a*K1+6*b=K2});
```

$$\{a = \frac{142}{35},\ b = \frac{14}{5}\}$$

Další

Příklad 7.2.1

V následující tabulce jsou dány hodnoty (x_i, y_i), $i = 1, \ldots, 6$.

x_i	1	2	3	4	5	6
y_i	8	10	15	18	23	28

Závislost y na x aproximujte polynomem $y = ax + b$, kde koeficienty a, b hledejte metodou nejmenších čtverců.

Maple:

A nyní si ukážeme kratší způsob řešení pomocí hotové procedury v Maplu:

```
> with(stats):
> fit[leastsquare[[x,y],y=a*x+b,{a,b
}]]([[1,2,3,4,5,6],[8,10,15,18,23,28]]);
```

$$y = \frac{142\,x}{35} + \frac{14}{5}$$

Zpět

Příklad 7.2.1

V následující tabulce jsou dány hodnoty (x_i, y_i), $i = 1, \ldots, 6$.

x_i	1	2	3	4	5	6
y_i	8	10	15	18	23	28

Závislost y na x aproximujte polynomem $y = ax + b$, kde koeficienty a, b hledejte metodou nejmenších čtverců.

Mathematica:

Takto bychom postupovali analogicky našemu "ručnímu výpočtu":

datax = {1, 2, 3, 4, 5, 6};

datay = {8, 10, 15, 18, 23, 28};

K1 = Sum[datax[[*i*]], {*i*, 1, 6}]

21

K2 = Sum[datay[[*i*]], {*i*, 1, 6}]

102

K3 = Sum[datax[[*i*]]^2, {*i*, 1, 6}]

91

K4 = Sum[datax[[*i*]]datay[[*i*]], {*i*, 1, 6}]

428

Solve[{*a* ∗ K3 + *b* ∗ K1==K4, *a* ∗ K1 + 6 ∗ *b*==K2}, {*a*, *b*}]

$\{\{a \to \frac{142}{35}, b \to \frac{14}{5}\}\}$

Další

Příklad 7.2.1

V následující tabulce jsou dány hodnoty (x_i, y_i), $i = 1, \ldots, 6$.

x_i	1	2	3	4	5	6
y_i	8	10	15	18	23	28

Závislost y na x aproximujte polynomem $y = ax + b$, kde koeficienty a, b hledejte metodou nejmenších čtverců.

Mathematica:

A nyní si ukážeme kratší způsob řešení pomocí předdefinované procedury v programu Mathematica:

```
<< Statistics`LinearRegression`;
data = Table[{datax[[i]], datay[[i]]}, {i, 1, 6}]
{{1, 8}, {2, 10}, {3, 15}, {4, 18}, {5, 23}, {6, 28}}
rovnice = y == Fit[data, {1, x}, x]
y == 2.8 + 4.05714x
```

Zpět

Příklad 7.2.2

Při měření závislosti výchylky magnetometru na proudu protékajícím cívkou byla naměřena tato data:

Číslo měření i	1	2	3	4	5	6	7	8
$I[A]$	$0,50$	$1,00$	$1,50$	$2,00$	$2,50$	$3,00$	$3,50$	$4,00$
α[rad]	$0,004$	$0,01$	0.0162	$0,0212$	$0,0274$	$0,0346$	$0,0398$	$0,0456$

I - proud protékající cívkou v ampérech (A), α - výchylka magnetometru v radiánech (rad). Předpokládejme lineární zavislost α na I.

?

Zpět

Příklad 7.2.2

Při měření závislosti výchylky magnetometru na proudu protékajícím cívkou byla naměřena tato data:

Číslo měření i	1	2	3	4	5	6	7	8
$I[A]$	$0,50$	$1,00$	$1,50$	$2,00$	$2,50$	$3,00$	$3,50$	$4,00$
$\alpha[\mathrm{rad}]$	$0,004$	$0,01$	0.0162	$0,0212$	$0,0274$	$0,0346$	$0,0398$	$0,0456$

I - proud protékající cívkou v ampérech (A), α - výchylka magnetometru v radiánech (rad). Předpokládejme lineární zavislost α na I.

Výsledek:

$\alpha \doteq 0,01194 \cdot I - 0,00202\,.$

Zpět

Příklad 7.2.2

Při měření závislosti výchylky magnetometru na proudu protékajícím cívkou byla naměřena tato data:

Číslo měření i	1	2	3	4	5	6	7	8
$I[A]$	$0,50$	$1,00$	$1,50$	$2,00$	$2,50$	$3,00$	$3,50$	$4,00$
α[rad]	$0,004$	$0,01$	0.0162	$0,0212$	$0,0274$	$0,0346$	$0,0398$	$0,0456$

I - proud protékající cívkou v ampérech (A), α - výchylka magnetometru v radiánech (rad). Předpokládejme lineární zavislost α na I.

Návod:

Koeficienty a, b pro aproximaci $\alpha = aI + b$ určíme řešením soustavy rovnic:

$$a \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} I_i^2 \right) + b \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} I_i \right) = \sum_{i=1}^{n} (I_i \alpha_i)$$

$$a \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} I_i \right) + b \cdot n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \,, \quad n = 8 \,.$$

Zpět

Příklad 7.2.2

Při měření závislosti výchylky magnetometru na proudu protékajícím cívkou byla naměřena tato data:

Číslo měření i	1	2	3	4	5	6	7	8
$I[A]$	$0,50$	$1,00$	$1,50$	$2,00$	$2,50$	$3,00$	$3,50$	$4,00$
α[rad]	$0,004$	$0,01$	0.0162	$0,0212$	$0,0274$	$0,0346$	$0,0398$	$0,0456$

I - proud protékající cívkou v ampérech (A), α - výchylka magnetometru v radiánech (rad). Předpokládejme lineární zavislost α na I.

Řešení:

Označme hledanou aproximaci polynomem $\alpha = aI + b\,,$ koeficienty a, b najdeme metodou nejmenších čtverců. Vzhledem ke skutečnosti, že měřené veličiny jsou udány v základních jednotkách, provedeme výpočet, aniž bychom dále uvažovali fyzikální rozměr jednotlivých veličin. Pro naměřené hodnoty vypočteme příslušné koeficienty:

$$\sum_{i=1}^{8} I_i = 18 \qquad \sum_{i=1}^{8} (I_i \alpha_i) = 0,5727$$

$$\sum_{i=1}^{8} \alpha_i = 0,1988 \qquad \sum_{i=1}^{8} I_i^2 = 51\,.$$

Dosazením dostaneme soustavu:
$$\begin{aligned} 51a &+ 18b &= 0,5727 \\ 18a &+ 8b &= 0,1988\,, \end{aligned}$$
která má jediné řešení $a \doteq 0,01194\,,\ b \doteq -0,00202\,.$
Hledanou aproximací je přímka o rovnici $\alpha \doteq 0,01194 \cdot I - 0,00202\,.$

Zpět

Příklad 7.2.2

Při měření závislosti výchylky magnetometru na proudu protékajícím cívkou byla naměřena tato data:

Číslo měření i	1	2	3	4	5	6	7	8
$I[A]$	$0,50$	$1,00$	$1,50$	$2,00$	$2,50$	$3,00$	$3,50$	$4,00$
$\alpha[\text{rad}]$	$0,004$	$0,01$	0.0162	$0,0212$	$0,0274$	$0,0346$	$0,0398$	$0,0456$

I - proud protékající cívkou v ampérech (A), α - výchylka magnetometru v radiánech (rad). Předpokládejme lineární zavislost α na I.

Maple:

Takto bychom počítali pomocí soustavy lineárních rovnic:

```
> I1:=0.5:I2:=1:I3:=1.5:I4:=2:I5:=2.5:I6:=3:I7:=3.5:I8:=4:
> a1:=0.4*10^{-2}:a2:=1*10^{-2}:a3:=1.62*10^{-2}:a4:=2.12*10^{-2
}:a5:=2.74*10^{-2}:a6:=3.46*10^{-2}:a7:=3.98*10^{-2 }:a8:=4.56*10^{-2}:
> K1:=I1+I2+I3+I4+I5+I6+I7+I8;
```

$$K1 := 18.0$$

```
> K2:=a1+a2+a3+a4+a5+a6+a7+a8;
```

$$K2 := 19.88\,10^{\{-2\}}$$

```
> K3:=I1^2+I2^2+I3^2+I4^2+I5^2+I6^2+I7^2+I8^2;
```

$$K3 := 51.00$$

```
> K4:=I1*a1+I2*a2+I3*a3+I4*a4+I5*a5+I6*a6+I7*a7+I8*a8;
```

$$K4 := 57.270\,10^{\{-2\}}$$

Další

Příklad 7.2.2

Při měření závislosti výchylky magnetometru na proudu protékajícím cívkou byla naměřena tato data:

Číslo měření i	1	2	3	4	5	6	7	8
$I[A]$	$0,50$	$1,00$	$1,50$	$2,00$	$2,50$	$3,00$	$3,50$	$4,00$
α[rad]	$0,004$	$0,01$	0.0162	$0,0212$	$0,0274$	$0,0346$	$0,0398$	$0,0456$

I - proud protékající cívkou v ampérech (A), α - výchylka magnetometru v radiánech (rad). Předpokládejme lineární zavislost α na I.

Maple:

```
> solve({a*K3+b*K1=K4,a*K1+8*b=K2});
```

$$\{b = -0.2021428571\,10.^{\{-2.\}},\ a = 1.194285714\,10.^{\{-2.\}}\}$$

Hledaná regresní přímka má rovnici:

```
> alpha:=1.194285714*10.^{-2.}*I-.2021428571*10.^{-2.};
```

$$\alpha := 1.194285714\,I\,10.^{\{-2.\}} - 0.2021428571\,10.^{\{-2.\}}$$

Nyní budeme počítat přímo s využitím balíku **stats**:

```
> restart:with(stats):
> fit[leastsquare[[x,y],y=a*x+b,{a,b
}]]([[0.5,1,1.5,2,2.5,3,3.5,4],[0.004,0.01,0.0162,0.0212,0.0274,0.034
6,0.0398,0.0456]]);
```

$$y = 0.01194285714\,x - 0.002021428571$$

V obou případech jsme získali tentýž výsledek.

Další

Příklad 7.2.2

Při měření závislosti výchylky magnetometru na proudu protékajícím cívkou byla naměřena tato data:

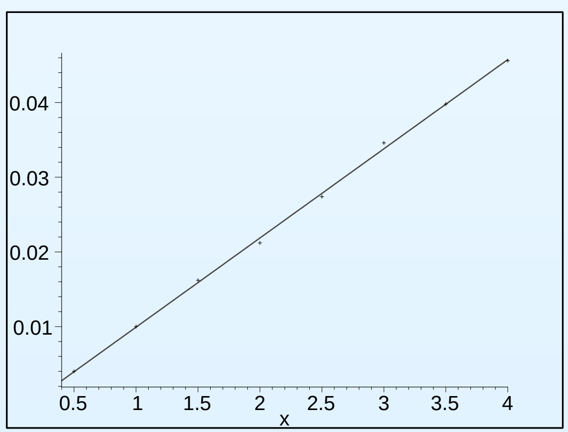
Číslo měření i	1	2	3	4	5	6	7	8
$I[A]$	$0,50$	$1,00$	$1,50$	$2,00$	$2,50$	$3,00$	$3,50$	$4,00$
$\alpha[\mathrm{rad}]$	$0,004$	$0,01$	0.0162	$0,0212$	$0,0274$	$0,0346$	$0,0398$	$0,0456$

I - proud protékající cívkou v ampérech (A), α - výchylka magnetometru v radiánech (rad). Předpokládejme lineární zavislost α na I.

Maple:

Podívejme se nyní na obrázek celé situace:

```
> proud:=[0.5,1,1.5,2,2.5,3,3.5,4]:
> uhel:=[0.004,0.01,0.0162,0.0212,0.0274,0.0346,0.0398,0.0456]:
> body:=convert(linalg[transpose]([proud,uhel]),listlist):
> with(plots):obr:=listplot(body,style=POINT,symbolsize=14):
> primka:=plot(.1194285714e-1*x-.2021428571e-2, x=0.4 ..
4,thickness=3):
> display({obr,primka});
```



Zpět

Příklad 7.2.2

Při měření závislosti výchylky magnetometru na proudu protékajícím cívkou byla naměřena tato data:

Číslo měření i	1	2	3	4	5	6	7	8
$I[A]$	$0,50$	$1,00$	$1,50$	$2,00$	$2,50$	$3,00$	$3,50$	$4,00$
$\alpha[\mathrm{rad}]$	$0,004$	$0,01$	0.0162	$0,0212$	$0,0274$	$0,0346$	$0,0398$	$0,0456$

I - proud protékající cívkou v ampérech (A), α - výchylka magnetometru v radiánech (rad). Předpokládejme lineární zavislost α na I.

Mathematica:

Takto bychom počítali pomocí soustavy lineárních rovnic:

```
dataI = {0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 2.5, 3.0, 3.5, 4.0};
dataalfa = {0.4, 1.0, 1.62, 2.12, 2.74, 3.46, 3.98, 4.56}10^(-2);
K1 = Sum[dataI[[i]], {i, 1, 8}]
18.
K2 = Sum[dataalfa[[i]], {i, 1, 8}]
0.1988
K3 = Sum[dataI[[i]]^2, {i, 1, 8}]
51.
K4 = Sum[dataI[[i]]dataalfa[[i]], {i, 1, 8}]
0.5727
Solve[{a * K3 + b * K1==K4, a * K1 + 8 * b==K2}, {a, b}]
{{a → 0.0119429, b → −0.00202143}}
```

Další

Příklad 7.2.2

Při měření závislosti výchylky magnetometru na proudu protékajícím cívkou byla naměřena tato data:

Číslo měření i	1	2	3	4	5	6	7	8
$I[A]$	$0,50$	$1,00$	$1,50$	$2,00$	$2,50$	$3,00$	$3,50$	$4,00$
α[rad]	$0,004$	$0,01$	0.0162	$0,0212$	$0,0274$	$0,0346$	$0,0398$	$0,0456$

I - proud protékající cívkou v ampérech (A), α - výchylka magnetometru v radiánech (rad). Předpokládejme lineární zavislost α na I.

Mathematica:

Hledaná regresní přímka má rovnici:

rovnice = $\boldsymbol{\alpha == ai + b}$/.%

$\{\alpha == -0.00202143 + 0.0119429i\}$

Nyní budeme počítat přímo s využitím balíku **Statistics:**

<< Statistics`LinearRegression`;

data = Table[{dataI[[i]], dataalfa[[i]]}, {i, 1, 8}]

$\{\{0.5, 0.004\}, \{1., 0.01\}, \{1.5, 0.0162\}, \{2., 0.0212\},$
$\{2.5, 0.0274\}, \{3., 0.0346\}, \{3.5, 0.0398\}, \{4., 0.0456\}\}$

rovnice = $\boldsymbol{\alpha}$ == Fit[data, {1, i}, i]

$\alpha == -0.00202143 + 0.0119429i$

V obou případech jsme získali tentýž výsledek.

Další

Příklad 7.2.2

Při měření závislosti výchylky magnetometru na proudu protékajícím cívkou byla naměřena tato data:

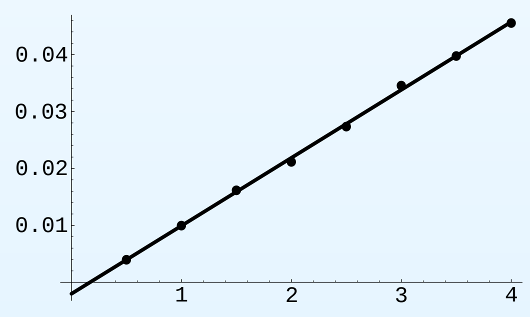
Číslo měření i	1	2	3	4	5	6	7	8
$I[A]$	$0,50$	$1,00$	$1,50$	$2,00$	$2,50$	$3,00$	$3,50$	$4,00$
α[rad]	$0,004$	$0,01$	0.0162	$0,0212$	$0,0274$	$0,0346$	$0,0398$	$0,0456$

I - proud protékající cívkou v ampérech (A), α - výchylka magnetometru v radiánech (rad). Předpokládejme lineární zavislost α na I.

Mathematica:

Podívejme se nyní na obrázek celé situace:

g1 = ListPlot[data, PlotStyle → {PointSize[0.02]}, DisplayFunction → Identity];
g2 = Plot[rovnice[[2]], {*i*, 0, 4}, PlotStyle → {Thickness[0.008]}, DisplayFunction → Identity];
Show[{g1, g2}, DisplayFunction → $DisplayFunction];



Zpět

Příklad 7.2.3

Při měření indexu lomu n glycerinového roztoku v závislosti na jeho objemové koncentraci $c_\odot$ v rozmezí od 0% (destilovaná voda) do 100% (čistý glycerin) byla naměřena tato data:

Měření číslo i	1	2	3	4	5	6
$c_\odot$ [%]	0	10	20	30	40	50
n	1,3340	1,3460	1,3600	1,3690	1,3795	1,3855
Měření číslo i	7	8	9	10	11	
$c_\odot$ [%]	60	70	80	90	100	
n	1,3905	1,4100	1,4250	1,4315	1,4445	

Graf naměřených hodnot aproximujte pomocí přímky o rovnici $n = a \cdot c_\odot + b$.

Příklad 7.2.3

Při měření indexu lomu n glycerinového roztoku v závislosti na jeho objemové koncentraci $c_\odot$ v rozmezí od 0% (destilovaná voda) do 100% (čistý glycerin) byla naměřena tato data:

Měření číslo i	1	2	3	4	5	6
$c_\odot\,[\%]$	0	10	20	30	40	50
n	$1,3340$	$1,3460$	$1,3600$	$1,3690$	$1,3795$	$1,3855$
Měření číslo i	7	8	9	10	11	
$c_\odot\,[\%]$	60	70	80	90	100	
n	$1,3905$	$1,4100$	$1,4250$	$1,4315$	$1,4445$	

Graf naměřených hodnot aproximujte pomocí přímky o rovnici $n = a \cdot c_\odot + b\,.$

Výsledek:

$n = 0,1075 \cdot c_\odot + 1,3349\,.$ Zpět

Příklad 7.2.3

Při měření indexu lomu n glycerinového roztoku v závislosti na jeho objemové koncentraci $c_\odot$ v rozmezí od 0% (destilovaná voda) do 100% (čistý glycerin) byla naměřena tato data:

Měření číslo i	1	2	3	4	5	6
$c_\odot$ [%]	0	10	20	30	40	50
n	1,3340	1,3460	1,3600	1,3690	1,3795	1,3855
Měření číslo i	7	8	9	10	11	
$c_\odot$ [%]	60	70	80	90	100	
n	1,3905	1,4100	1,4250	1,4315	1,4445	

Graf naměřených hodnot aproximujte pomocí přímky o rovnici $n = a \cdot c_\odot + b$.

Návod:

Koeficienty a, b pro aproximaci $n = ac_\odot + b$ určíme řešením soustavy rovnic:

$$a \cdot \left(\sum_{i=1}^{k} c_{\odot i}^2 \right) + b \cdot \left(\sum_{i=1}^{k} c_{\odot i} \right) = \sum_{i=1}^{k} (c_{\odot i} n_i)$$

$$a \cdot \left(\sum_{i=1}^{k} c_{\odot i} \right) + b \cdot k = \sum_{i=1}^{k} n_i \,, \quad k = 11 \,.$$

Zpět

Příklad 7.2.3

Při měření indexu lomu n glycerinového roztoku v závislosti na jeho objemové koncentraci $c_\odot$ v rozmezí od 0% (destilovaná voda) do 100% (čistý glycerin) byla naměřena tato data:

Měření číslo i	1	2	3	4	5	6
$c_\odot\,[\%]$	0	10	20	30	40	50
n	$1,3340$	$1,3460$	$1,3600$	$1,3690$	$1,3795$	$1,3855$
Měření číslo i	7	8	9	10	11	
$c_\odot\,[\%]$	60	70	80	90	100	
n	$1,3905$	$1,4100$	$1,4250$	$1,4315$	$1,4445$	

Graf naměřených hodnot aproximujte pomocí přímky o rovnici $n = a \cdot c_\odot + b$.

Řešení:

Pro naměřené hodnoty vypočteme příslušné koeficienty:

$$\sum_{i=1}^{11} c_{\odot i} = 5,5 \qquad \sum_{i=1}^{11} (c_{\odot i} n_i) = 7,756$$

$$\sum_{i=1}^{11} n_i = 15,2755 \qquad \sum_{i=1}^{11} c^2_{\odot i} = 3,85\,.$$

Dosazením dostaneme soustavu:
$$\begin{aligned} 3,85a &+ 5,5b &= 7,756 \\ 5,5a &+ 11b &= 15,2755\,, \end{aligned}$$
která má jediné řešení $a \doteq 0,1075\,,\ b \doteq 1,3349\,.$
Hledanou aproximací je přímka o rovnici $n = 0,1075 \cdot c_\odot + 1,3349\,.$

Zpět

Příklad 7.2.3

Při měření indexu lomu n glycerinového roztoku v závislosti na jeho objemové koncentraci $c_\odot$ v rozmezí od 0% (destilovaná voda) do 100% (čistý glycerin) byla naměřena tato data:

Měření číslo i	1	2	3	4	5	6
$c_\odot$ [%]	0	10	20	30	40	50
n	1,3340	1,3460	1,3600	1,3690	1,3795	1,3855
Měření číslo i	7	8	9	10	11	
$c_\odot$ [%]	60	70	80	90	100	
n	1,3905	1,4100	1,4250	1,4315	1,4445	

Graf naměřených hodnot aproximujte pomocí přímky o rovnici $n = a \cdot c_\odot + b$.

Maple:

Nejprve opět uvedeme podrobný výpočet:

```
> c1:=0:c2:=0.10:c3:=0.20:c4:=0.30:c5:=0.40:c6:=0.50:c7:=0.60:c8:=0.70:
c9:=0.80:c10:=0.90:c11:=1.00:
> n1:=1.334:n2:=1.346:n3:=1.36:n4:=1.369:n5:=1.3795:n6:=1.3855:n7:=1.39
05:n8:=1.41:n9:=1.425:n10:=1.4315:n11:=1.4445:
> K1:=c1+c2+c3+c4+c5+c6+c7+c8+c9+c10+c11;
```

$$K1 := 5.50$$

```
> K2:=n1+n2+n3+n4+n5+n6+n7+n8+n9+n10+n11;
```

$$K2 := 15.2755$$

```
> K3:=c1^2+c2^2+c3^2+c4^2+c5^2+c6^2+c7^2+c8^2+c9^2+c10^2+c11^2;
```

$$K3 := 3.8500$$

Další

Příklad 7.2.3

Při měření indexu lomu n glycerinového roztoku v závislosti na jeho objemové koncentraci $c_{\odot}$ v rozmezí od 0% (destilovaná voda) do 100% (čistý glycerin) byla naměřena tato data:

Měření číslo i	1	2	3	4	5	6
$c_{\odot}$ [%]	0	10	20	30	40	50
n	1,3340	1,3460	1,3600	1,3690	1,3795	1,3855
Měření číslo i	7	8	9	10	11	
$c_{\odot}$ [%]	60	70	80	90	100	
n	1,3905	1,4100	1,4250	1,4315	1,4445	

Graf naměřených hodnot aproximujte pomocí přímky o rovnici $n = a \cdot c_{\odot} + b$.

Maple:

```
> K4:=c1*n1+c2*n2+c3*n3+c4*n4+c5*n5+c6*n6+c7*n7+c8*n8+c9*n9+c10*n10+c11
*n11;
```

$$K4 := 7.756000$$

```
> solve({a*K3+b*K1=K4,a*K1+11*b=K2});
```

$$\{a = 0.1075000000,\ b = 1.334931818\}$$

Hledaná regresní přímka má rovnici:

```
> n:=.1075000000*c+1.334931818;
```

$$n := 0.1075000000\,c + 1.334931818$$

Další

Příklad 7.2.3

Při měření indexu lomu n glycerinového roztoku v závislosti na jeho objemové koncentraci $c_\odot$ v rozmezí od 0% (destilovaná voda) do 100% (čistý glycerin) byla naměřena tato data:

Měření číslo i	1	2	3	4	5	6
$c_\odot$ [%]	0	10	20	30	40	50
n	$1,3340$	$1,3460$	$1,3600$	$1,3690$	$1,3795$	$1,3855$
Měření číslo i	7	8	9	10	11	
$c_\odot$ [%]	60	70	80	90	100	
n	$1,3905$	$1,4100$	$1,4250$	$1,4315$	$1,4445$	

Graf naměřených hodnot aproximujte pomocí přímky o rovnici $n = a \cdot c_\odot + b$.

Maple:

A nyní si uvedeme rychlejší možnost výpočtu:

```
> with(stats):
> fit[leastsquare[[x,y],y=a*x+b,{a,b
}]]([[0,0.1,0.2,0.3,0.4,0.5,0.6,0.7,0.8,0.9,1.0],[1.334,1.346,1.36,1.
369,1.3795,1.3855,1.3905,1.41,1.425,1.4315,1.4445]]);
```

$$y = 0.1075000000\,x + 1.334931818$$

Oba způsoby výpočtu vedly ke stejnému výsledku.

Podívejme se nyní na obrázek provedené regrese:

```
> koncentrace:=[0,0.1,0.2,0.3,0.4,0.5,0.6,0.7,0.8,0.9,1.0]:
> indx:=[1.334,1.346,1.36,1.369,1.3795,1.3855,1.3905,1.41,1.425,1.4315,
1.4445]:
```

Další

Příklad 7.2.3

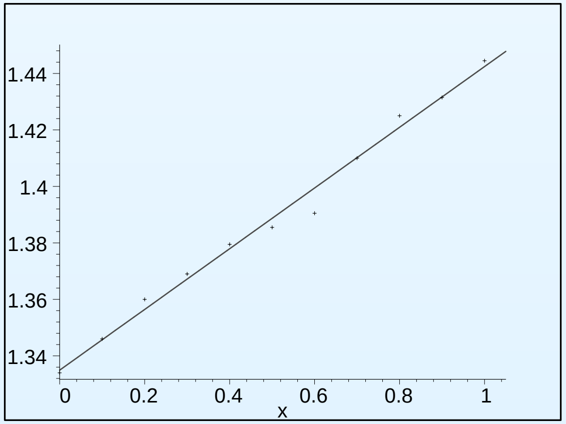
Při měření indexu lomu n glycerinového roztoku v závislosti na jeho objemové koncentraci $c_{\odot}$ v rozmezí od 0% (destilovaná voda) do 100% (čistý glycerin) byla naměřena tato data:

Měření číslo i	1	2	3	4	5	6
$c_{\odot}$ [%]	0	10	20	30	40	50
n	$1,3340$	$1,3460$	$1,3600$	$1,3690$	$1,3795$	$1,3855$
Měření číslo i	7	8	9	10	11	
$c_{\odot}$ [%]	60	70	80	90	100	
n	$1,3905$	$1,4100$	$1,4250$	$1,4315$	$1,4445$	

Graf naměřených hodnot aproximujte pomocí přímky o rovnici $n = a \cdot c_{\odot} + b$.

Maple:

```
> body:=convert(linalg[transpose]([koncentrace,indx]),listlist):
> with(plots):obr:=listplot(body,style=POINT,symbolsize=14):
> primka:=plot(0.1075000000*x+1.334931818, x=0 .. 1.05,thickness=3):
> display({obr,primka});
```



Zpět

Příklad 7.2.3

Při měření indexu lomu n glycerinového roztoku v závislosti na jeho objemové koncentraci $c_{\odot}$ v rozmezí od 0% (destilovaná voda) do 100% (čistý glycerin) byla naměřena tato data:

Měření číslo i	1	2	3	4	5	6
$c_{\odot}$ [%]	0	10	20	30	40	50
n	$1,3340$	$1,3460$	$1,3600$	$1,3690$	$1,3795$	$1,3855$
Měření číslo i	7	8	9	10	11	
$c_{\odot}$ [%]	60	70	80	90	100	
n	$1,3905$	$1,4100$	$1,4250$	$1,4315$	$1,4445$	

Graf naměřených hodnot aproximujte pomocí přímky o rovnici $n = a \cdot c_{\odot} + b$.

Mathematica:

Nejprve opět uvedeme podrobný výpočet:

datac = {0.0, 0.10, 0.20, 0.30, 0.40, 0.50, 0.60, 0.70, 0.80, 0.90, 1.00};

datan = {1.3340, 1.3460, 1.3600, 1.3690, 1.3795, 1.3855, 1.3905, 1.4100, 1.4250, 1.4315, 1.4445};

K1 = Sum[datac[[*i*]], {*i*, 1, 11}]

5.5

K2 = Sum[datan[[*i*]], {*i*, 1, 11}]

15.2755

K3 = Sum[datac[[*i*]]^2, {*i*, 1, 11}]

3.85

Další

Příklad 7.2.3

Při měření indexu lomu n glycerinového roztoku v závislosti na jeho objemové koncentraci $c_{\odot}$ v rozmezí od 0% (destilovaná voda) do 100% (čistý glycerin) byla naměřena tato data:

Měření číslo i	1	2	3	4	5	6
$c_{\odot}[\%]$	0	10	20	30	40	50
n	1,3340	1,3460	1,3600	1,3690	1,3795	1,3855
Měření číslo i	7	8	9	10	11	
$c_{\odot}[\%]$	60	70	80	90	100	
n	1,3905	1,4100	1,4250	1,4315	1,4445	

Graf naměřených hodnot aproximujte pomocí přímky o rovnici $n = a \cdot c_{\odot} + b$.

Mathematica:

K4 = Sum[datac[[i]]datan[[i]], {i, 1, 11}]

7.756

Solve[{a ∗ K3 + b ∗ K1==K4, a ∗ K1 + 11 ∗ b==K2}, {a, b}]

$\{\{a \to 0.1075, b \to 1.33493\}\}$

Hledaná regresní přímka má rovnici:

rovnice = n == $ac + b$/.%

$\{n == 1.33493 + 0.1075c\}$

Další

Příklad 7.2.3

Při měření indexu lomu n glycerinového roztoku v závislosti na jeho objemové koncentraci $c_{\odot}$ v rozmezí od 0% (destilovaná voda) do 100% (čistý glycerin) byla naměřena tato data:

Měření číslo i	1	2	3	4	5	6
$c_{\odot}$ [%]	0	10	20	30	40	50
n	1,3340	1,3460	1,3600	1,3690	1,3795	1,3855
Měření číslo i	7	8	9	10	11	
$c_{\odot}$ [%]	60	70	80	90	100	
n	1,3905	1,4100	1,4250	1,4315	1,4445	

Graf naměřených hodnot aproximujte pomocí přímky o rovnici $n = a \cdot c_{\odot} + b$.

Mathematica:

A nyní si uvedeme rychlejší možnost výpočtu:

<< Statistics`LinearRegression`;

data = Table[{datac[[*i*]], datan[[*i*]]}, {*i*, 1, 11}]

{{0., 1.334}, {0.1, 1.346}, {0.2, 1.36}, {0.3, 1.369}, {0.4, 1.3795},
{0.5, 1.3855}, {0.6, 1.3905}, {0.7, 1.41}, {0.8, 1.425}, {0.9, 1.4315}, {1., 1.4445}}

rovnice = *n* == Fit[data, {1, *c*}, *c*]

$n == 1.33493 + 0.1075c$

Oba způsoby výpočtu vedly ke stejnému výsledku.
Podívejme se nyní na obrázek provedené regrese:

Další

Příklad 7.2.3

Při měření indexu lomu n glycerinového roztoku v závislosti na jeho objemové koncentraci $c_\odot$ v rozmezí od 0% (destilovaná voda) do 100% (čistý glycerin) byla naměřena tato data:

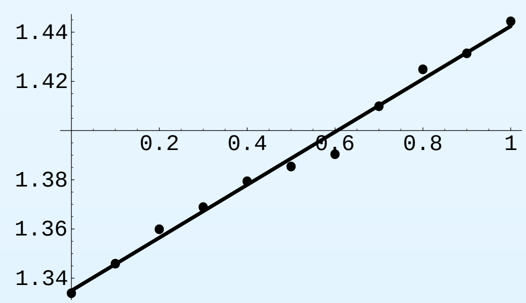
Měření číslo i	1	2	3	4	5	6
$c_\odot$ [%]	0	10	20	30	40	50
n	1,3340	1,3460	1,3600	1,3690	1,3795	1,3855
Měření číslo i	7	8	9	10	11	
$c_\odot$ [%]	60	70	80	90	100	
n	1,3905	1,4100	1,4250	1,4315	1,4445	

Graf naměřených hodnot aproximujte pomocí přímky o rovnici $n = a \cdot c_\odot + b$.

Mathematica:

g1 = ListPlot[data, PlotStyle → {PointSize[0.02]}, DisplayFunction → Identity];
g2 = Plot[rovnice[[2]], {c, 0, 1.00}, PlotStyle → {Thickness[0.008]},
DisplayFunction → Identity];

Show[{g1, g2}, DisplayFunction → $DisplayFunction];



Zpět