Kapitola 9: Aplikace integrálů funkcí jedné proměnné

Chcete-li ukončit prohlížení stiskněte klávesu **Esc**.
Chcete-li pokračovat stiskněte klávesu **Enter**.

- Plošný obsah obrazce
- Délka rovinné křivky
- Objem rotačního tělesa
- Fyzikální aplikace

Zpět

Plošný obsah obrazce

- Příklad 9.1.1 Určete plošný obsah P rovinného obrazce ohraničeného grafem funkce $y = \sin x,\ x \in \langle 0, \pi \rangle$ a osou x.
- Příklad 9.1.2 Určete plošný obsah P rovinného obrazce ohraničeného grafem funkce $y = \frac{1}{x},\ x \in \langle 1, 3 \rangle$ a osou x.
- Příklad 9.1.3 Určete plošný obsah P rovinného obrazce ohraničeného grafem funkce $y = \frac{1}{x},\ x \in \langle 1, \infty)$ a osou x.
- Příklad 9.1.4 Určete plošný obsah P rovinného obrazce ohraničeného grafem funkce $y = \frac{1}{x^2},\ x \in \langle 1, \infty)$ a osou x.
- Příklad 9.1.5 Určete plošný obsah P rovinného obrazce ohraničeného grafem funkce $y = x^{\frac{3}{2}},\ x \in \langle 0, 4 \rangle$ a osou x.
- Příklad 9.1.6 Určete plošný obsah P rovinného obrazce ohraničeného grafy funkcí $y = \sin |x|$ a $y = (x - 2\pi)(x + 2\pi)/10,\ x \in \langle -2\pi, 2\pi \rangle$.
- Příklad 9.1.7 Určete plošný obsah P rovinného obrazce ohraničeného polární osou a jedním závitem Archimedovy spirály dané v polárních souřadnicích rovnicí $r = \varphi$.

Zpět

Příklad 9.1.1

Určete plošný obsah P rovinného obrazce ohraničeného grafem funkce $y = \sin x,\ x \in \langle 0, \pi \rangle$ a osou x.

Zpět

Příklad 9.1.1

Určete plošný obsah P rovinného obrazce ohraničeného grafem funkce
$y = \sin x,\ \ x \in \langle 0, \pi \rangle$ a osou x.

Výsledek:

Plošný obsah je $P = 2\,.$

Zpět

Příklad 9.1.1

Určete plošný obsah P rovinného obrazce ohraničeného grafem funkce $y = \sin x,\ x \in \langle 0, \pi \rangle$ a osou x.

Návod:

Použijte vztah

$$P = \int\limits_a^b |f(x)|\, dx.$$

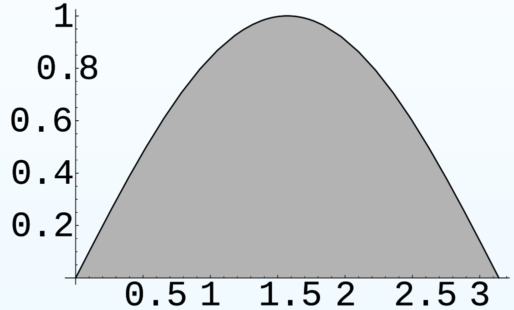
Zpět

Příklad 9.1.1

Určete plošný obsah P rovinného obrazce ohraničeného grafem funkce $y = \sin x,\ \ x \in \langle 0, \pi \rangle$ a osou x.

Řešení:

Nakreslíme obrázek plochy, jejíž obsah počítáme ($f(x) = \sin x$):



Nyní vypočteme obsah plochy:

$$P = \int_0^\pi |f(x)|\,dx = \int_0^\pi \sin x\,dx = \Big[-\cos x\Big]_0^\pi = -\cos\pi - (-\cos 0) = 2.$$

Zpět

Příklad 9.1.1

Určete plošný obsah P rovinného obrazce ohraničeného grafem funkce $y = \sin x, \;\; x \in \langle 0, \pi \rangle$ a osou x.

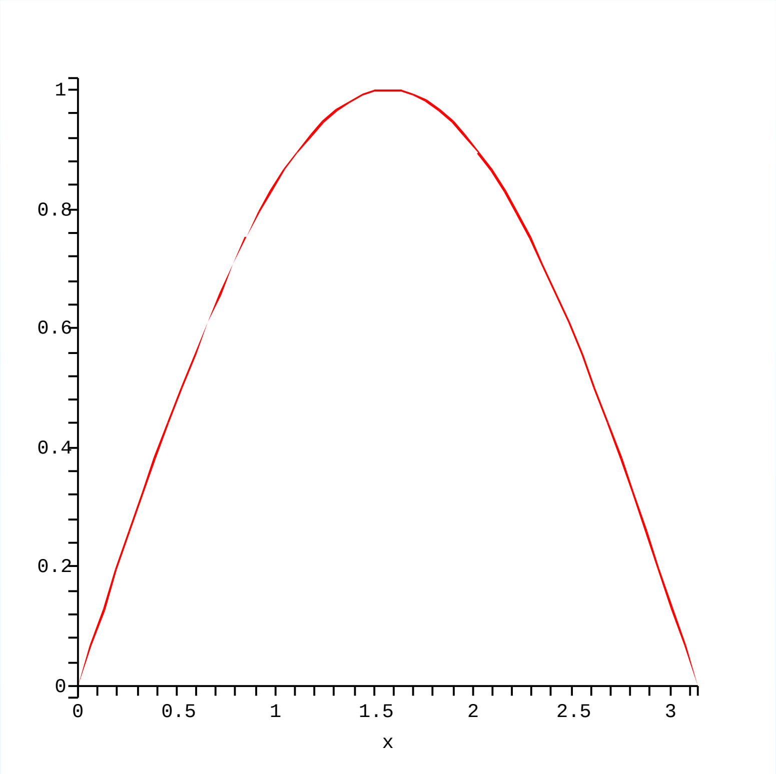
Maple:

Výpočet obsahu plochy a nakreslení plochy.

```
> int(sin(x),x=0..Pi);
```

$$2$$

```
> plot(sin(x),x=0..Pi);
```



Zpět

Příklad 9.1.1

Určete plošný obsah P rovinného obrazce ohraničeného grafem funkce $y = \sin x,\ \ x \in \langle 0, \pi \rangle$ a osou x.

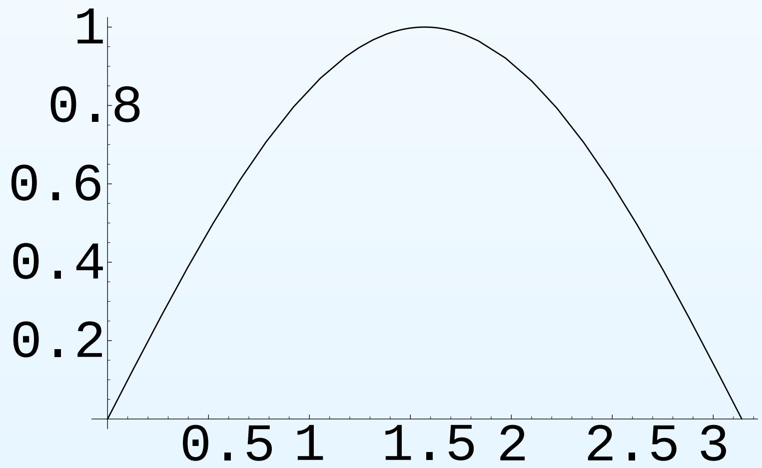
Mathematica:

Výpočet obsahu plochy a nakreslení plochy.

P = Integrate[Sin[x], {x, 0, Pi}]

2

Plot[Sin[x], {x, 0, Pi}];



Zpět

Příklad 9.1.2

Určete plošný obsah P rovinného obrazce ohraničeného grafem funkce $y = \frac{1}{x}$, $x \in \langle 1, 3 \rangle$ a osou x.

Zpět

Příklad 9.1.2

Určete plošný obsah P rovinného obrazce ohraničeného grafem funkce $y = \frac{1}{x}$, $x \in \langle 1, 3 \rangle$ a osou x.

Výsledek:

Plošný obsah je $P = \ln 3$.

Zpět

Příklad 9.1.2

Určete plošný obsah P rovinného obrazce ohraničeného grafem funkce $y = \frac{1}{x}$, $x \in \langle 1, 3 \rangle$ a osou x.

Návod:

Použijte vztah

$$P = \int_a^b |f(x)| \, dx.$$

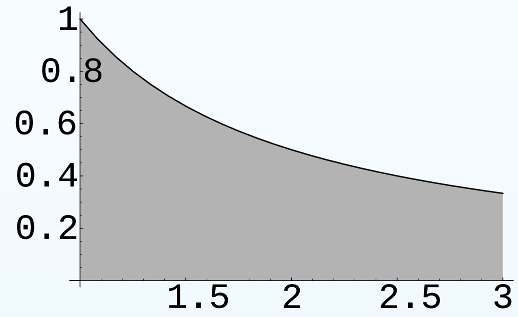
Zpět

Příklad 9.1.2

Určete plošný obsah P rovinného obrazce ohraničeného grafem funkce $y = \frac{1}{x},\ x \in \langle 1, 3\rangle$ a osou x.

Řešení:

Nakreslíme obrázek plochy, jejíž obsah počítáme ($f(x) = \frac{1}{x}$):



Nyní vypočteme obsah plochy:

$$P = \int_1^3 |f(x)|\,dx = \int_1^3 \frac{1}{x}\,dx = \Big[\ln x\Big]_1^3 = \ln 3 - \ln 1 = \ln 3.$$

Zpět

Příklad 9.1.2

Určete plošný obsah P rovinného obrazce ohraničeného grafem funkce $y = \frac{1}{x}$, $x \in \langle 1, 3 \rangle$ a osou x.

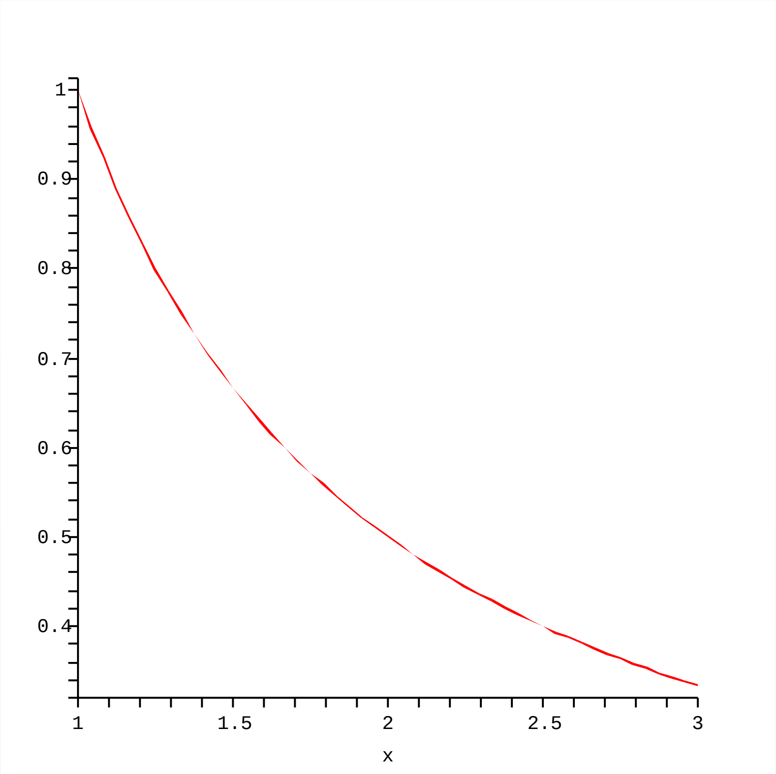
Maple:

Výpočet obsahu plochy a nakreslení plochy.

```
> int(1/x,x=1..3);
```

$$\ln(3)$$

```
> plot(1/x,x=1..3);
```



Zpět

Příklad 9.1.2

Určete plošný obsah P rovinného obrazce ohraničeného grafem funkce $y = \frac{1}{x}$, $x \in \langle 1, 3 \rangle$ a osou x.

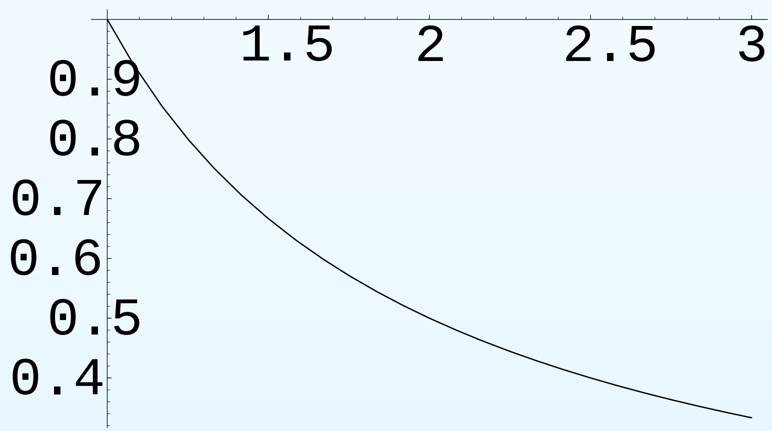
Mathematica:

Výpočet obsahu plochy a nakreslení plochy.

Integrate[1/x, {x, 1, 3}]

Log[3]

Plot[1/x, {x, 1, 3}];



Zpět

Příklad 9.1.3

Určete plošný obsah P rovinného obrazce ohraničeného grafem funkce $y = \frac{1}{x}$, $x \in \langle 1, \infty)$ a osou x.

Zpět

Příklad 9.1.3

Určete plošný obsah P rovinného obrazce ohraničeného grafem funkce $y = \frac{1}{x}, \; x \in \langle 1, \infty)$ a osou x.

Výsledek:

Plošný obsah je $P = \infty$.

Zpět

Příklad 9.1.3

Určete plošný obsah P rovinného obrazce ohraničeného grafem funkce $y = \frac{1}{x},\ x \in \langle 1, \infty)$ a osou x.

Návod:

Použijte vztah

$$P = \int_a^b |f(x)|\, dx.$$

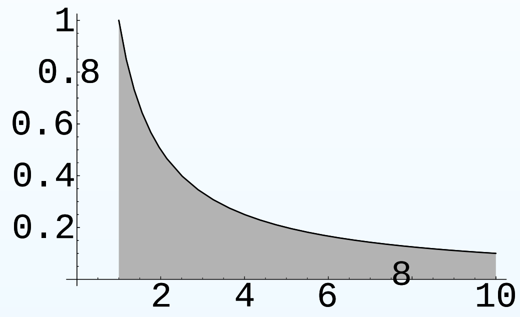
Zpět

Příklad 9.1.3

Určete plošný obsah P rovinného obrazce ohraničeného grafem funkce $y = \frac{1}{x}$, $x \in \langle 1, \infty)$ a osou x.

Řešení:

Nakreslíme obrázek plochy, jejíž obsah počítáme ($f(x) = \frac{1}{x}$):



Nyní vypočteme obsah plochy:

$$P = \int_1^\infty |f(x)|\, dx = \int_1^\infty \frac{1}{x}\, dx = \Big[\ln x \Big]_1^\infty = \lim_{x->\infty} \ln x - \ln 1 = \infty.$$

Zpět

Příklad 9.1.3

Určete plošný obsah P rovinného obrazce ohraničeného grafem funkce $y = \frac{1}{x}$, $x \in \langle 1, \infty)$ a osou x.

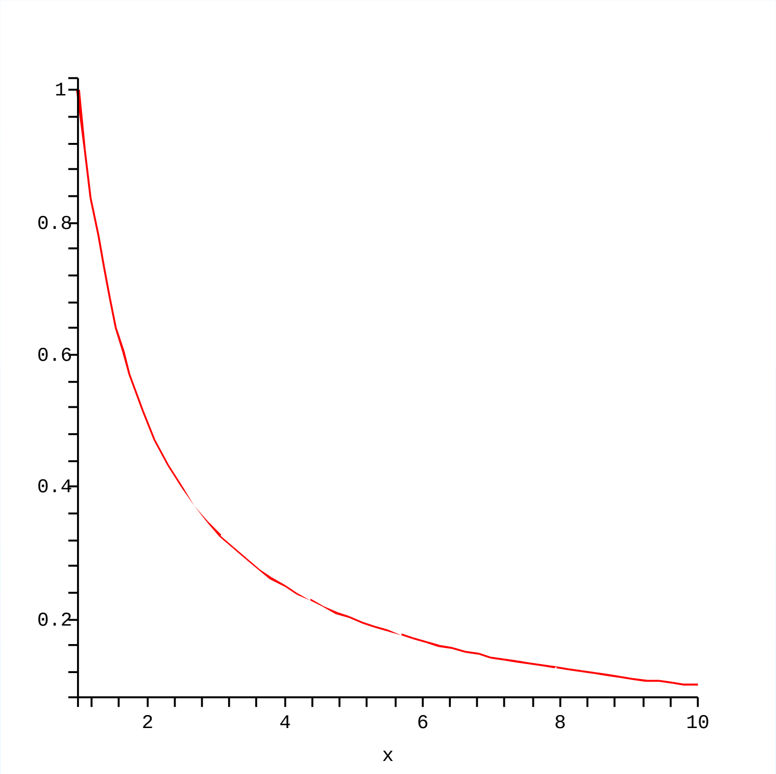
Maple:

Výpočet obsahu plochy a nakreslení plochy.

```
> int(1/x,x=1..infinity);
```

$$\infty$$

```
> plot(1/x,x=1..10);
```



Zpět

Příklad 9.1.3

Určete plošný obsah P rovinného obrazce ohraničeného grafem funkce $y = \frac{1}{x}$, $x \in \langle 1, \infty)$ a osou x.

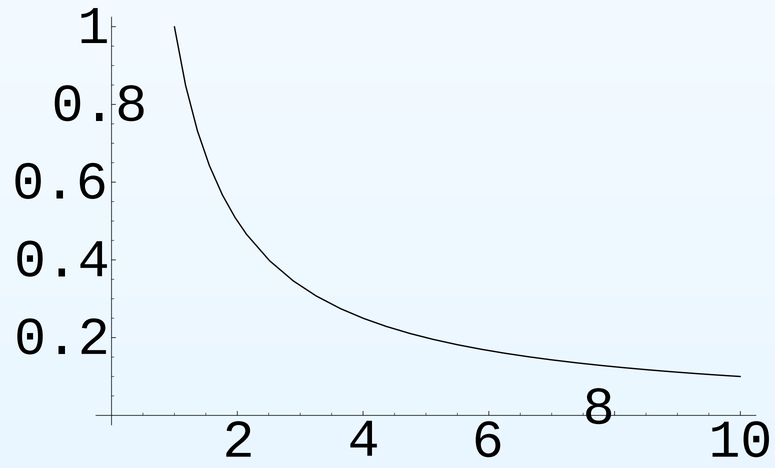
Mathematica:

Výpočet obsahu plochy a nakreslení plochy.

Limit[Integrate[1/x, {x, 1, b}], b → Infinity]

∞

Plot[1/x, {x, 1, 10}];



Zpět

Příklad 9.1.4

Určete plošný obsah P rovinného obrazce ohraničeného grafem funkce $y = \frac{1}{x^2}$, $x \in \langle 1, \infty)$ a osou x.

Zpět

Příklad 9.1.4

Určete plošný obsah P rovinného obrazce ohraničeného grafem funkce $y = \frac{1}{x^2}\,,\ x \in \langle 1, \infty)$ a osou x.

Výsledek:

Plošný obsah je $P = 1\,.$

Zpět

Příklad 9.1.4

Určete plošný obsah P rovinného obrazce ohraničeného grafem funkce $y = \frac{1}{x^2}$, $x \in \langle 1, \infty)$ a osou x.

Návod:

Použijte vztah

$$P = \int_a^b |f(x)|\, dx.$$

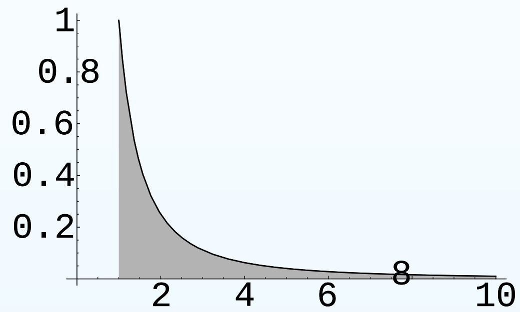
Zpět

Příklad 9.1.4

Určete plošný obsah P rovinného obrazce ohraničeného grafem funkce $y = \frac{1}{x^2}$, $x \in \langle 1, \infty)$ a osou x.

Řešení:

Nakreslíme obrázek plochy, jejíž obsah počítáme ($f(x) = \frac{1}{x^2}$):



Nyní vypočteme obsah plochy:

$$P = \int_1^\infty |f(x)|\, dx = \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\, dx = \left[-\frac{1}{x} \right]_1^\infty = 1.$$

Zpět

Příklad 9.1.4

Určete plošný obsah P rovinného obrazce ohraničeného grafem funkce $y = \frac{1}{x^2}$, $x \in \langle 1, \infty)$ a osou x.

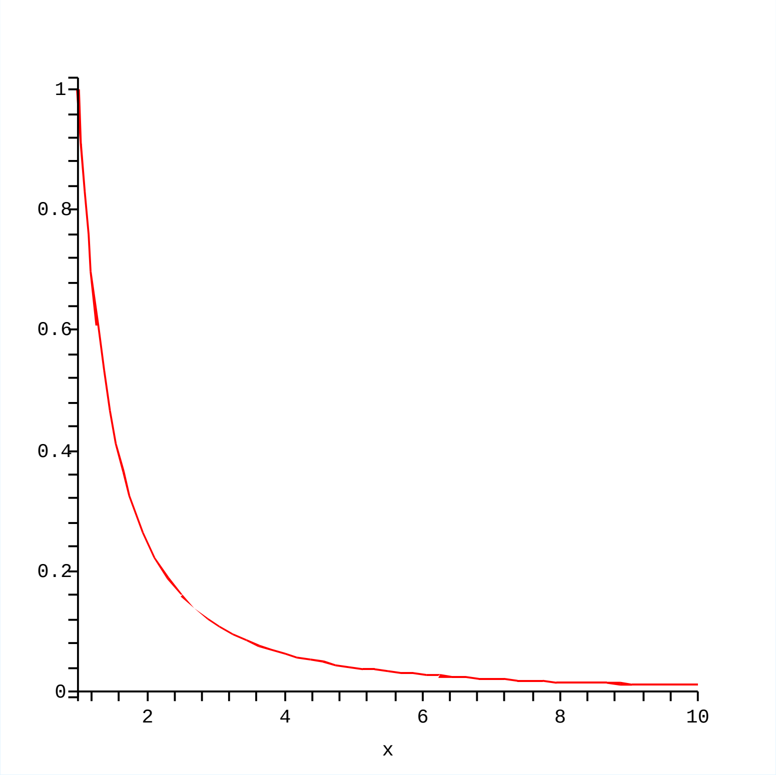
Maple:

Výpočet obsahu plochy a nakreslení plochy.

```
> int(1/x^2,x=1..infinity);
```

$$1$$

```
> plot(1/x^2,x=1..10);
```



Zpět

Příklad 9.1.4

Určete plošný obsah P rovinného obrazce ohraničeného grafem funkce $y = \frac{1}{x^2},\ x \in \langle 1, \infty)$ a osou x.

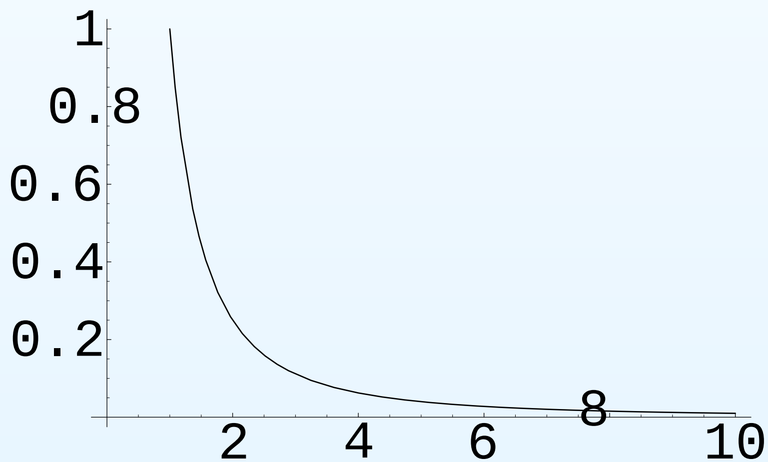
Mathematica:

Výpočet obsahu plochy a nakreslení plochy.

Integrate[1/x^2, {x, 1, Infinity}]

1

Plot[1/x^2, {x, 1, 10}];



Zpět

Příklad 9.1.5

Určete plošný obsah P rovinného obrazce ohraničeného grafem funkce $y = x^{\frac{3}{2}}, \ x \in \langle 0, 4\rangle$ a osou x.

Zpět

Příklad 9.1.5

Určete plošný obsah P rovinného obrazce ohraničeného grafem funkce $y = x^{\frac{3}{2}}$, $x \in \langle 0, 4 \rangle$ a osou x.

Výsledek:

Plošný obsah je $P = \frac{64}{5}$.

Zpět

Příklad 9.1.5

Určete plošný obsah P rovinného obrazce ohraničeného grafem funkce $y = x^{\frac{3}{2}}$, $x \in \langle 0, 4 \rangle$ a osou x.

Návod:

Použijte vztah

$$P = \int_a^b |f(x)|\, dx.$$

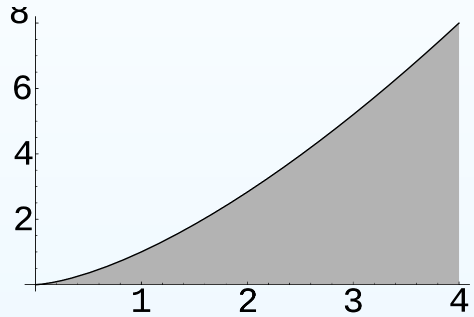
Zpět

Příklad 9.1.5

Určete plošný obsah P rovinného obrazce ohraničeného grafem funkce $y = x^{\frac{3}{2}}$, $x \in \langle 0, 4 \rangle$ a osou x.

Řešení:

Nakreslíme obrázek plochy, jejíž obsah počítáme ($f(x) = x^{\frac{3}{2}}$):



Nyní vypočteme obsah plochy:

$$P = \int_0^4 |f(x)|\,dx = \int_0^4 x^{\frac{3}{2}}\,dx = \left[\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\right]_0^4 = \frac{2}{5} \cdot 32 = \frac{64}{5}.$$

Zpět

Příklad 9.1.5

Určete plošný obsah P rovinného obrazce ohraničeného grafem funkce $y = x^{\frac{3}{2}}$, $x \in \langle 0, 4 \rangle$ a osou x.

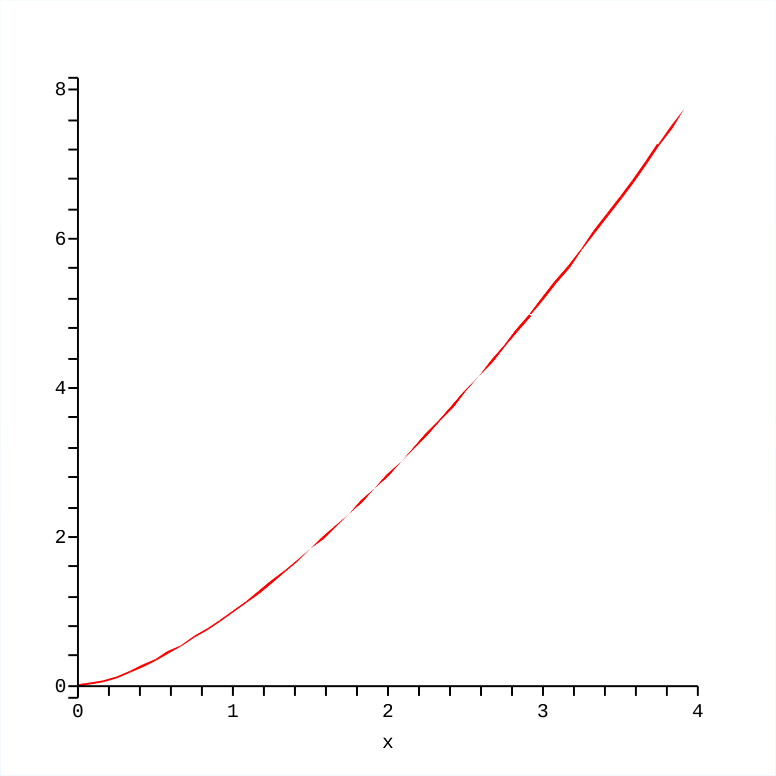
Maple:

Výpočet obsahu plochy a nakreslení plochy.

```
> int(x^(3/2),x=0..4);
```

$$\frac{64}{5}$$

```
> plot(x^(3/2),x=0..4);
```



Zpět

Příklad 9.1.5

Určete plošný obsah P rovinného obrazce ohraničeného grafem funkce $y = x^{\frac{3}{2}}$, $x \in \langle 0, 4 \rangle$ a osou x.

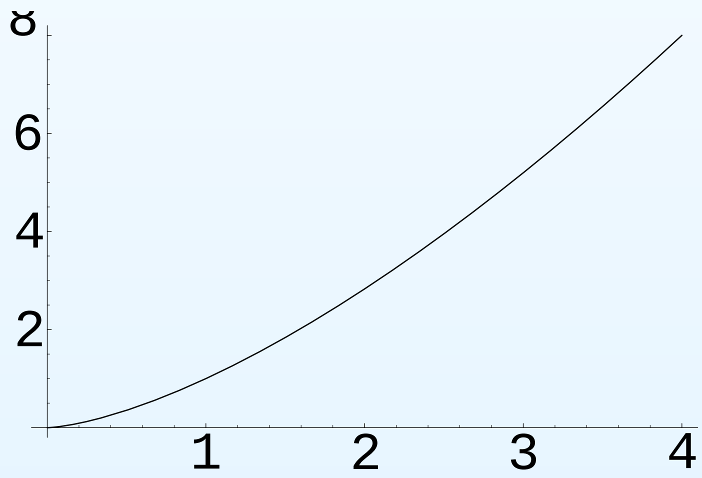
Mathematica:

Výpočet obsahu plochy a nakreslení plochy.

Integrate[x^(3/2), {x, 0, 4}]

$\frac{64}{5}$

Plot[x^(3/2), {x, 0, 4}];



Zpět

Příklad 9.1.6

Určete plošný obsah P rovinného obrazce ohraničeného grafy funkcí $y = \sin|x|$ a $y = (x - 2\pi)(x + 2\pi)/10,\ x \in \langle -2\pi, 2\pi \rangle$.

Zpět

Příklad 9.1.6

Určete plošný obsah P rovinného obrazce ohraničeného grafy funkcí $y = \sin|x|$ a $y = (x - 2\pi)(x + 2\pi)/10,\ x \in \langle -2\pi, 2\pi \rangle$.

Výsledek:

Plošný obsah je $P = \frac{16}{15}\pi^3$.

Zpět

Příklad 9.1.6

Určete plošný obsah P rovinného obrazce ohraničeného grafy funkcí $y = \sin|x|$ a $y = (x - 2\pi)(x + 2\pi)/10,\ x \in \langle -2\pi, 2\pi \rangle$.

Návod:

Použijte vztah

$$P = \int_a^b |f_1(x) - f_2(x)|\, dx\,,$$

kde $f_1(x) = \sin|x|$ a $f_2(x) = (x - 2\pi)(x + 2\pi)/10\,.$

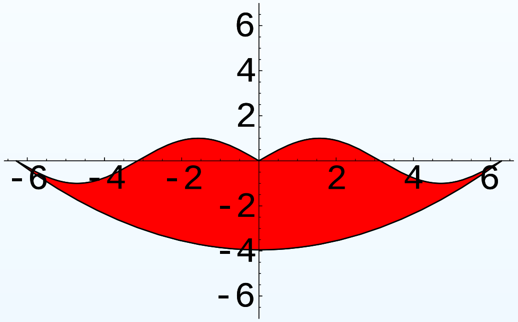
Zpět

Příklad 9.1.6

Určete plošný obsah P rovinného obrazce ohraničeného grafy funkcí $y = \sin|x|$ a $y = (x-2\pi)(x+2\pi)/10,\ x \in \langle -2\pi, 2\pi \rangle$.

Řešení:

Nakreslíme obrázek plochy, jejíž obsah počítáme ($f_1(x) = \sin|x|$, $f_2(x) = (x-2\pi)(x+2\pi)/10$):



Postup: Obě funkce jsou sudé (ověřte!), proto můžeme integrovat pouze od nuly do 2π a výsledek vynásobit dvěma. Na tomto intervalu je x nezáporné, lze tedy odstranit absolutní hodnotu ve funkci f_1. Protože na tomto intervalu platí $f_1 \geq f_2$, můžeme odstranit i absolutní hodnotu u rozdílu funkcí. Tím dostáváme

$$P = \int_{-2\pi}^{2\pi} |f_1(x) - f_2(x)|\,dx = 2\int_0^{2\pi} (f_1(x) - f_2(x))\,dx = 2\int_0^{2\pi} (\sin x - (x-2\pi)(x+2\pi)/10)\,dx =$$

$$= 2\Big[-\cos x - (\frac{x^3}{3} - 4\pi^2 x)/10 \Big]_0^{2\pi} = \frac{16}{15}\pi^3.$$

Zpět

Příklad 9.1.6

Určete plošný obsah P rovinného obrazce ohraničeného grafy funkcí $y = \sin|x|$ a $y = (x-2\pi)(x+2\pi)/10,\ x \in \langle -2\pi, 2\pi \rangle$.

Maple:

Výpočet obsahu plochy a nakreslení plochy.

```
> y1:=sin(abs(x));
```

$$f1 := \sin(|x|)$$

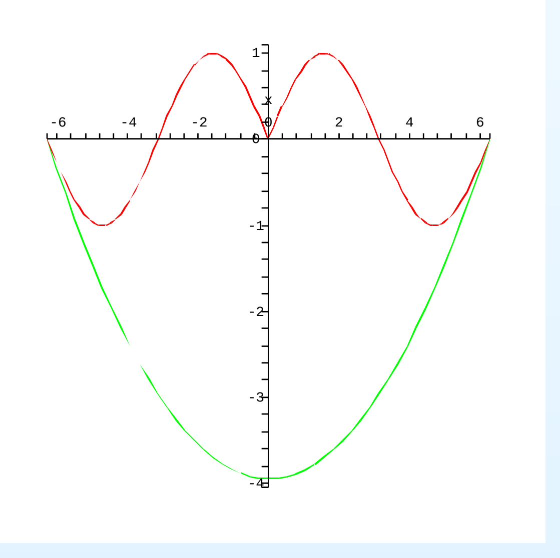
```
> f2:=(x-2*Pi)*(x+2*Pi)/10;
```

$$f2 := 1/10\ (x - 2\,\pi)\,(x + 2\,\pi)$$

```
> int(abs(f1-f2),x=-2*Pi..2*Pi);
```

$$\frac{16}{15}\,\pi^3$$

```
> plot([f1,f2],x=-2*Pi..2*Pi);
```



Zpět

Příklad 9.1.6

Určete plošný obsah P rovinného obrazce ohraničeného grafy funkcí $y = \sin|x|$ a $y = (x-2\pi)(x+2\pi)/10,\ x \in \langle -2\pi, 2\pi \rangle$.

Mathematica:

Výpočet obsahu plochy a nakreslení plochy.

f1 = Sin[Abs[x]]

Sin[Abs[x]]

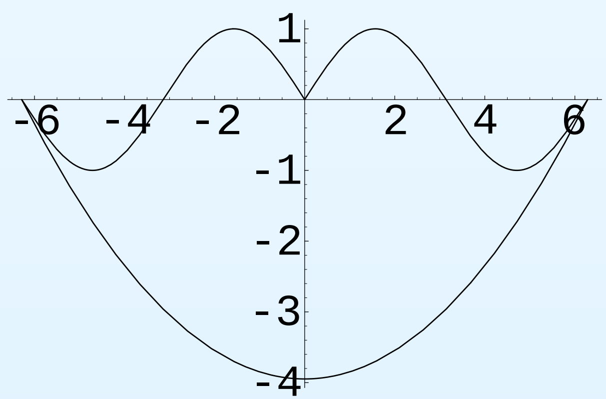
f2 = (x − 2 ∗ Pi) ∗ (x + 2 ∗ Pi)/10

$\frac{1}{10}(-2\pi + x)(2\pi + x)$

Integrate[Abs[f1 − f2], {x, −2 ∗ Pi, 2 ∗ Pi}]

$\frac{16\pi^3}{15}$

Plot[{f1, f2}, {x, −2 ∗ Pi, 2 ∗ Pi}];



Zpět

Příklad 9.1.7

Určete plošný obsah P rovinného obrazce ohraničeného polární osou a jedním závitem Archimedovy spirály dané v polárních souřadnicích rovnicí $r = \varphi$.

? Zpět

Příklad 9.1.7

Určete plošný obsah P rovinného obrazce ohraničeného polární osou a jedním závitem Archimedovy spirály dané v polárních souřadnicích rovnicí $r = \varphi$.

Výsledek:

Plošný obsah je $P = \frac{4}{3}\pi^3$.

Zpět

Příklad 9.1.7

Určete plošný obsah P rovinného obrazce ohraničeného polární osou a jedním závitem Archimedovy spirály dané v polárních souřadnicích rovnicí $r = \varphi$.

Návod:

Použijte vztah

$$P = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} r^2 \, \mathrm{d}\varphi.$$

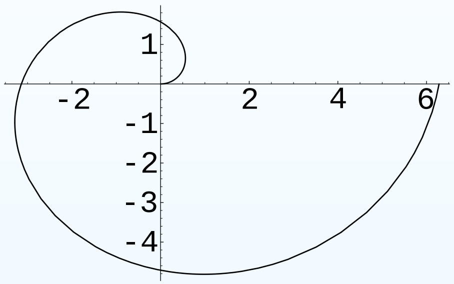
Zpět

Příklad 9.1.7

Určete plošný obsah P rovinného obrazce ohraničeného polární osou a jedním závitem Archimedovy spirály dané v polárních souřadnicích rovnicí $r = \varphi$.

Řešení:

Nakreslíme si plochu v polárních souřadnicích.



Nyní vypočteme plochu obrazce.

$$P = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} r^2 \, \mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \varphi^2 \, \mathrm{d}\varphi = \frac{1}{6} \left[\varphi^3 \right]_0^{2\pi} = \frac{1}{6} (2\pi)^3 = \frac{4}{3} \pi^3 .$$

Zpět

Příklad 9.1.7

Určete plošný obsah P rovinného obrazce ohraničeného polární osou a jedním závitem Archimedovy spirály dané v polárních souřadnicích rovnicí $r = \varphi$.

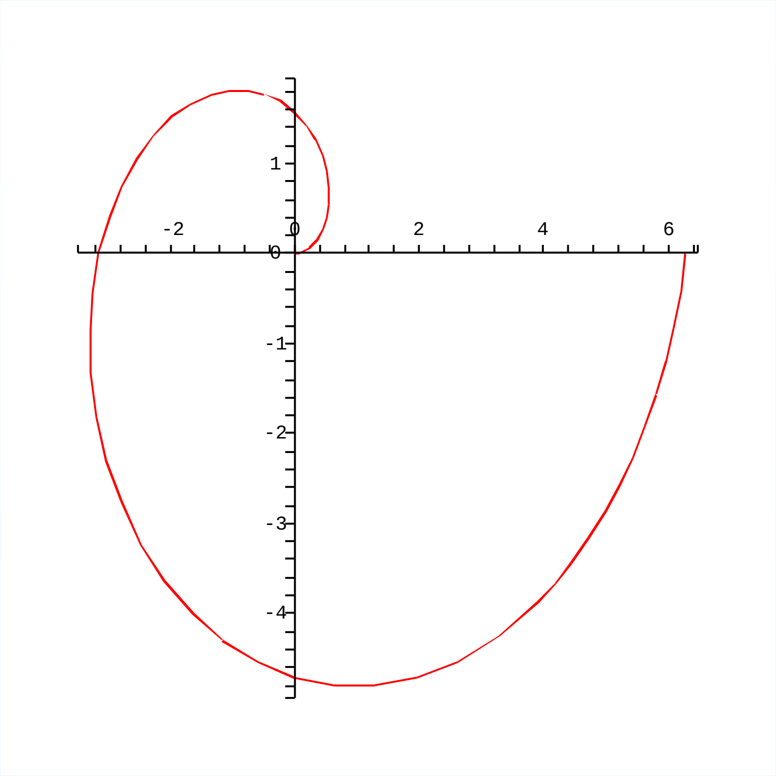
Maple:

Výpočet obsahu plochy a nakreslení plochy.

```
> r:=phi:
> int(r^2/2,phi=0..2*Pi);
```

$$\frac{4\,\pi^3}{3}$$

```
> plot([r,phi,phi=0..2*Pi],coords=polar);
```



Zpět

Příklad 9.1.7

Určete plošný obsah P rovinného obrazce ohraničeného polární osou a jedním závitem Archimedovy spirály dané v polárních souřadnicích rovnicí $r = \varphi$.

Mathematica:

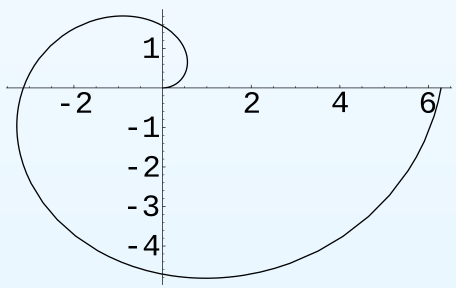
Výpočet obsahu plochy a nakreslení plochy.

r:=ϕ;

Integrate[r^2/2, {ϕ, 0, 2Pi}]

$\frac{4\pi^3}{3}$

ParametricPlot[{r ∗ Cos[ϕ], r ∗ Sin[ϕ]},{ϕ, 0, 2 ∗ Pi}];



Zpět

Délka rovinné křivky

- Příklad 9.2.1 Určete délku l grafu funkce $y = x^{\frac{3}{2}}, \ x \in \langle 0, 4 \rangle$.
- Příklad 9.2.2 Spočtěte délku l křivky dané parametrickými rovnicemi

$$\begin{aligned} x &= \cos t \\ y &= \sin t \\ t &\in \langle 0, 2\pi \rangle. \end{aligned}$$

- Příklad 9.2.3 Spočtěte délku l křivky dané parametrickými rovnicemi

$$\begin{aligned} x &= \cos^3 t \\ y &= \sin^3 t \\ t &\in \langle 0, 2\pi \rangle. \end{aligned}$$

Zpět

Příklad 9.2.1

Určete délku l grafu funkce $y = x^{\frac{3}{2}},\ x \in \langle 0, 4\rangle$.

= ?

Zpět

Příklad 9.2.1

Určete délku l grafu funkce $y = x^{\frac{3}{2}}$, $x \in \langle 0, 4 \rangle$.

Výsledek:

$l = \frac{8}{27}(10^{\frac{3}{2}} - 1) \doteq 9{,}07342$.

Zpět

Příklad 9.2.1

Určete délku l grafu funkce $y = x^{\frac{3}{2}}$, $x \in \langle 0, 4 \rangle$.

Návod:

Použijte vztah

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2}\,\mathrm{d}x.$$

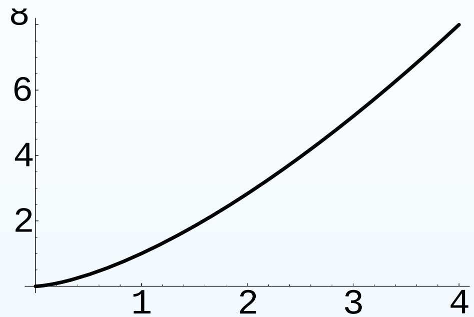
Zpět

Příklad 9.2.1

Určete délku l grafu funkce $y = x^{\frac{3}{2}}$, $x \in \langle 0, 4\rangle$.

Řešení:

Nakreslíme si křivku do kartézských souřadnic.



Nyní vypočteme délku křivky.

$$l = \int_0^4 \sqrt{1 + (y')^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^4 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\right)^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \left[\frac{8}{27}(1 + \frac{9}{4}x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^4 = \frac{8}{27}(10^{\frac{3}{2}} - 1) \doteq 9{,}07342.$$

Zpět

Příklad 9.2.1

Určete délku l grafu funkce $y = x^{\frac{3}{2}},\ x \in \langle 0, 4\rangle$.

Maple:

```
> y:=x^(3/2);
```

$$y := x^{3/2}$$

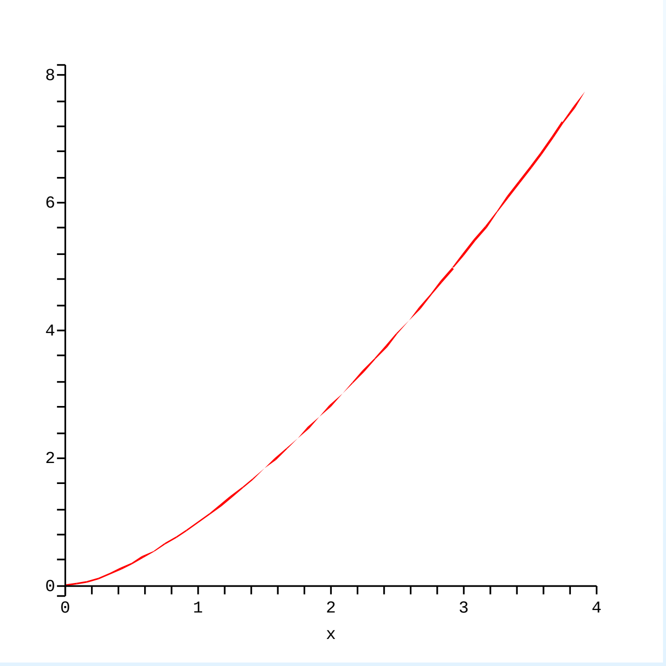
```
> l:=simplify(int(sqrt(1+(diff(y,x))^2), x=0..4));
```

$$l := \frac{80}{27}\sqrt{10} - \frac{8}{27}$$

```
> evalf(l);
```

$$9.073415289$$

```
> plot(x^(3/2),x=0..4);
```



Zpět

Příklad 9.2.1

Určete délku l grafu funkce $y = x^{\frac{3}{2}}$, $x \in \langle 0, 4 \rangle$.

Mathematica:

Vypočteme délku křivky a nakreslíme si křivku.

$\boldsymbol{y = x\hat{}(3/2);}$

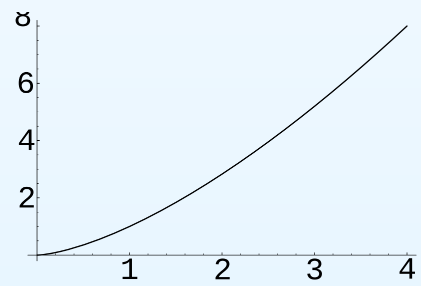
$\boldsymbol{l = \text{Integrate}[\text{Sqrt}[1 + D[y, x]\hat{}2], \{x, 0, 4\}]}$

$\frac{8}{27}\left(-1 + 10\sqrt{10}\right)$

$\boldsymbol{N[\%]}$

9.07342

$\boldsymbol{\text{Plot}[x\hat{}(3/2), \{x, 0, 4\}];}$



Zpět

Příklad 9.2.2

Spočtěte délku l křivky dané parametrickými rovnicemi

$$\begin{aligned} x &= \cos t \\ y &= \sin t \\ t &\in \langle 0, 2\pi \rangle. \end{aligned}$$

? Zpět

Příklad 9.2.2

Spočtěte délku l křivky dané parametrickými rovnicemi

$$\begin{aligned} x &= \cos t \\ y &= \sin t \\ t &\in \langle 0, 2\pi \rangle. \end{aligned}$$

Výsledek:

Délka je $l = 2\pi$, je to jednotková kružnice.

Zpět

Příklad 9.2.2

Spočtěte délku l křivky dané parametrickými rovnicemi

$$\begin{aligned} x &= \cos t \\ y &= \sin t \\ t &\in \langle 0, 2\pi\rangle. \end{aligned}$$

Návod:

Použijte vztah

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x')^2 + (y')^2}\ \mathrm{d}t.$$

Zpět

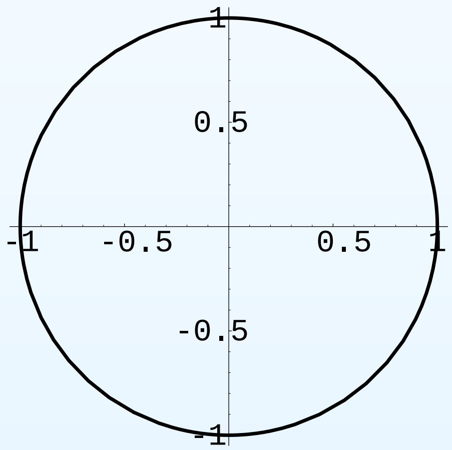
Příklad 9.2.2

Spočtěte délku l křivky dané parametrickými rovnicemi

$$\begin{aligned} x &= \cos t \\ y &= \sin t \\ t &\in \langle 0, 2\pi \rangle. \end{aligned}$$

Řešení:

Nejdříve si křivku nakreslíme, je to jednotková kružnice.



Nyní vypočteme délku křivky.

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{(x')^2 + (y')^2}\ \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t}\ \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} 1\, dt = 2\pi.$$

Zpět

Příklad 9.2.2

Spočtěte délku l křivky dané parametrickými rovnicemi

$$\begin{aligned} x &= \cos t \\ y &= \sin t \\ t &\in \langle 0, 2\pi \rangle . \end{aligned}$$

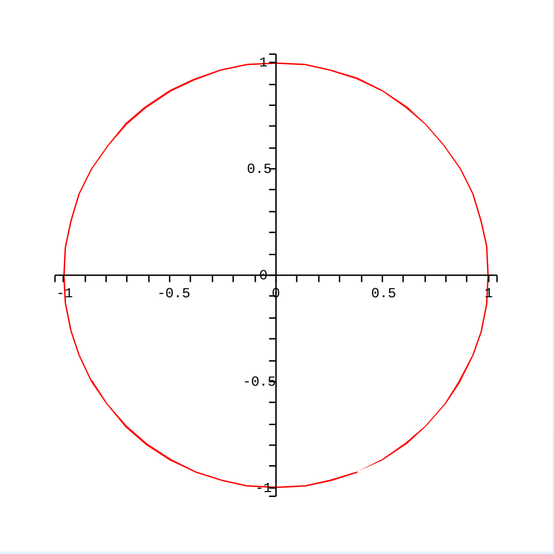
Maple:

Vypočteme délku křivky a nakreslíme si křivku.

```
> x:=sin(t): y:=cos(t):
> l:=int(sqrt(diff(x,t)^2+diff(y,t)^2),t=0..2*Pi);
```

$$l := 2\pi$$

```
> plot([sin(t), cos(t), t=0..2*Pi]);
```



Zpět

Příklad 9.2.2

Spočtěte délku l křivky dané parametrickými rovnicemi

$$\begin{aligned} x &= \cos t \\ y &= \sin t \\ t &\in \langle 0, 2\pi \rangle . \end{aligned}$$

Mathematica:

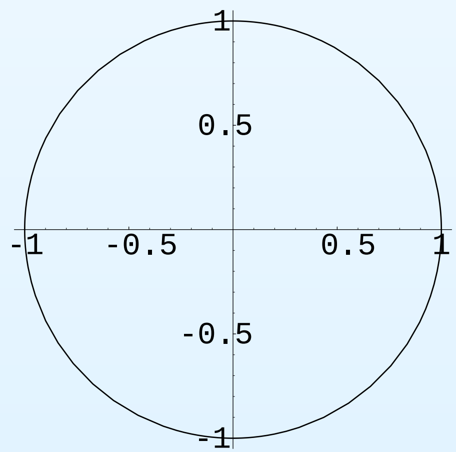
Vypočteme délku křivky a nakreslíme si křivku.

$\boldsymbol{x = \mathrm{Cos}[t]; y = \mathrm{Sin}[t];}$

$\boldsymbol{l = \mathrm{Integrate}[\mathrm{Sqrt}[D[x, t]\hat{}2 + D[y, t]\hat{}2], \{t, 0, 2\mathrm{Pi}\}]}$

2π

$\boldsymbol{\mathrm{ParametricPlot}[\{x, y\}, \{t, 0, 2 * \mathrm{Pi}\}, \mathrm{AspectRatio} \to 1];}$



Zpět

Příklad 9.2.3

Spočtěte délku l křivky dané parametrickými rovnicemi

$$\begin{aligned} x &= \cos^3 t \\ y &= \sin^3 t \\ t &\in \langle 0, 2\pi \rangle. \end{aligned}$$

Zpět

Příklad 9.2.3

Spočtěte délku l křivky dané parametrickými rovnicemi

$$\begin{aligned} x &= \cos^3 t \\ y &= \sin^3 t \\ t &\in \langle 0, 2\pi \rangle. \end{aligned}$$

Výsledek:

Délka je $l = 6$, tato křivka se nazývá asteroida.

Zpět

Příklad 9.2.3

Spočtěte délku l křivky dané parametrickými rovnicemi

$$\begin{aligned} x &= \cos^3 t \\ y &= \sin^3 t \\ t &\in \langle 0, 2\pi \rangle . \end{aligned}$$

Návod:

Použijte vztah

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x')^2 + (y')^2}\, \mathrm{d}t.$$

Zpět

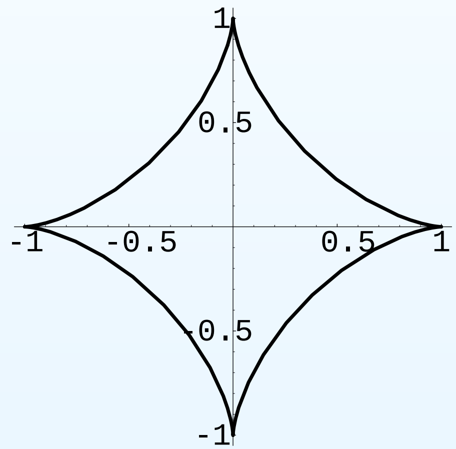
Příklad 9.2.3

Spočtěte délku l křivky dané parametrickými rovnicemi

$$\begin{aligned} x &= \cos^3 t \\ y &= \sin^3 t \\ t &\in \langle 0, 2\pi \rangle . \end{aligned}$$

Řešení:

Nejdříve si křivku nakreslíme.



$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{(x')^2 + (y')^2}\ \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-3\cos^2 t \sin t)^2 + (3\sin^2 t \cos t)^2}\ \mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{9\cos^4 t \sin^2 t + 9\sin^4 t \cos^2 t}\ \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \sqrt{9\cos^2 t \sin^2 t\ (\cos^2 t + \sin^2 t)}\ \mathrm{d}t =$$

Další

Příklad 9.2.3

Spočtěte délku l křivky dané parametrickými rovnicemi

$$\begin{aligned} x &= \cos^3 t \\ y &= \sin^3 t \\ t &\in \langle 0, 2\pi\rangle. \end{aligned}$$

Řešení:

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{9\cos^2 t \sin^2 t}\ \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} |3\cos t \sin t|\ dt = \frac{3}{2}\int_0^{2\pi} |2\cos t \sin t|\ \mathrm{d}t =$$

$$= \frac{3}{2}\int_0^{2\pi} |\sin 2t|\ \mathrm{d}t = 6.$$

Zpět

Příklad 9.2.3

Spočtěte délku l křivky dané parametrickými rovnicemi

$$\begin{aligned} x &= \cos^3 t \\ y &= \sin^3 t \\ t &\in \langle 0, 2\pi \rangle. \end{aligned}$$

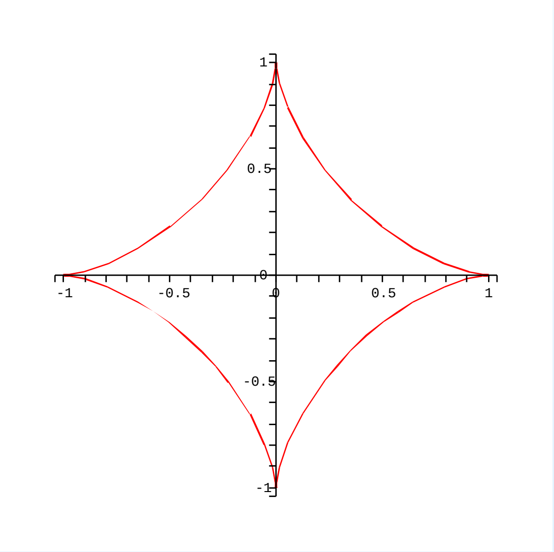
Maple:

Vypočteme délku křivky a nakreslíme si křivku.

```
> x:=sin(t)^3: y:=cos(t)^3:
> l:=int(sqrt(diff(x,t)^2+diff(y,t)^2),t=0..2*Pi);
```

$$l := 6$$

```
> plot([sin(t)^3, cos(t)^3, t=0..2*Pi]);
```



Zpět

Příklad 9.2.3

Spočtěte délku l křivky dané parametrickými rovnicemi

$$\begin{aligned} x &= \cos^3 t \\ y &= \sin^3 t \\ t &\in \langle 0, 2\pi \rangle . \end{aligned}$$

Mathematica:

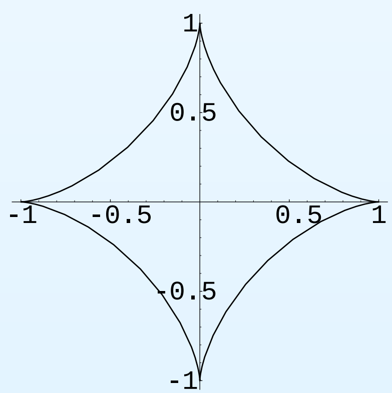
Vypočteme délku křivky a nakreslíme si křivku.

$\boldsymbol{x = \mathrm{Cos}[t]\hat{}3; y = \mathrm{Sin}[t]\hat{}3;}$

$\boldsymbol{l = \mathrm{Integrate}[\mathrm{Sqrt}[D[x, t]\hat{}2 + D[y, t]\hat{}2], \{t, 0, 2\mathrm{Pi}\}]}$

6

$\boldsymbol{\mathrm{ParametricPlot}[\{x, y\}, \{t, 0, 2 * \mathrm{Pi}\}, \mathrm{AspectRatio} \to 1];}$



Zpět

Objem rotačního tělesa

- Příklad 9.3.1 Určete objem V rotačního tělesa vzniklého rotací plochy ohraničené grafem funkce $y = x^{\frac{3}{2}},\ x \in \langle 0, 4 \rangle$ okolo osy x.
- Příklad 9.3.2 Určete objem V rotačního tělesa vzniklého rotací plochy, která je ohraničená grafy funkcí $y = \sqrt{1 - x^2},\ y = 1 - x$ okolo osy x.

Zpět

Příklad 9.3.1

Určete objem V rotačního tělesa vzniklého rotací plochy ohraničené grafem funkce $y = x^{\frac{3}{2}},\ x \in \langle 0, 4 \rangle$ okolo osy x.

Zpět

Příklad 9.3.1

Určete objem V rotačního tělesa vzniklého rotací plochy ohraničené grafem funkce $y = x^{\frac{3}{2}}$, $x \in \langle 0, 4 \rangle$ okolo osy x.

Výsledek:

Objem je $V = 64\pi$.

Zpět

Příklad 9.3.1

Určete objem V rotačního tělesa vzniklého rotací plochy ohraničené grafem funkce $y = x^{\frac{3}{2}},\ x \in \langle 0, 4\rangle$ okolo osy x.

Návod:

Použijte vztah

$$V = \pi \int_a^b y^2 \, \mathrm{d}x.$$

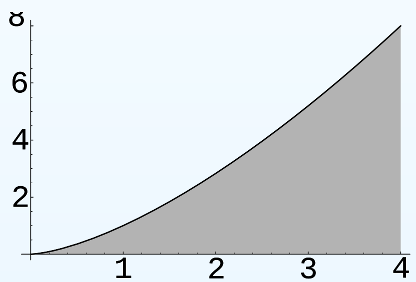
Zpět

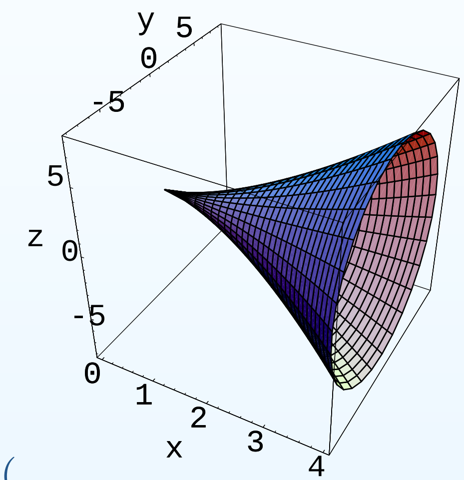
Příklad 9.3.1

Určete objem V rotačního tělesa vzniklého rotací plochy ohraničené grafem funkce $y = x^{\frac{3}{2}}$, $x \in \langle 0, 4 \rangle$ okolo osy x.

Řešení:

Nakreslíme si plochu, která rotuje a rotační těleso jehož objem počítáme.





(

Nyní vypočteme objem rotačního tělesa.

$$V = \pi \int_0^4 y^2 \, \mathrm{d}x = \pi \int_0^4 x^3 \, \mathrm{d}x = \pi \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^4 = 64\pi \, .$$

Zpět

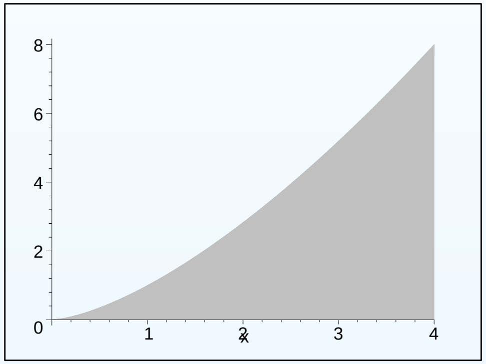
Příklad 9.3.1

Určete objem V rotačního tělesa vzniklého rotací plochy ohraničené grafem funkce $y = x^{\frac{3}{2}}$, $x \in \langle 0, 4 \rangle$ okolo osy x.

Maple:

Nejdříve nakreslíme plochu, která rotuje.

```
> plot([0,x^(3/2)],x=0..4,filled=true,color=[white,grey]);
```



Nyní vypočteme objem tělesa.

```
> y:=x^(3/2):
> v:=int(Pi*y^2,x=0..4);
```

$$v := 64\,\pi$$

Zpět

Příklad 9.3.1

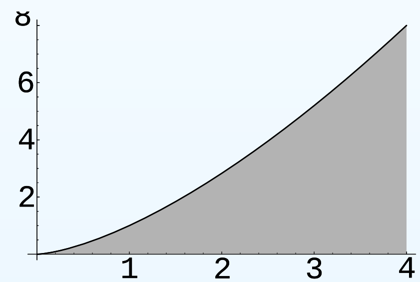
Určete objem V rotačního tělesa vzniklého rotací plochy ohraničené grafem funkce $y = x^{\frac{3}{2}}$, $x \in \langle 0, 4 \rangle$ okolo osy x.

Mathematica:

Nejdříve nakreslíme plochu, která rotuje.

<< Graphics`FilledPlot`

FilledPlot[x^(3/2), {x, 0, 4},Fills → {{{Axis, 1}, GrayLevel[.7]}}];



Nyní vypočteme objem tělesa.

y = x^(3/2);

v = Integrate[Pi y^2, {x, 0, 4}]

64π

Zpět

Příklad 9.3.2

Určete objem V rotačního tělesa vzniklého rotací plochy, která je ohraničená grafy funkcí $y = \sqrt{1-x^2}$, $y = 1 - x$ okolo osy x.

Zpět

Příklad 9.3.2

Určete objem V rotačního tělesa vzniklého rotací plochy, která je ohraničená grafy funkcí $y = \sqrt{1-x^2},\ y = 1-x$ okolo osy x.

Výsledek:

$\frac{\pi}{3}\,.$

Zpět

Příklad 9.3.2

Určete objem V rotačního tělesa vzniklého rotací plochy, která je ohraničená grafy funkcí $y = \sqrt{1-x^2}$, $y = 1-x$ okolo osy x.

Návod:

Objem se v daném případě vypočte podle vzorce:

$$V = \pi \int_0^1 1 - x^2 \, \mathrm{d}x - \pi \int_0^1 (1-x)^2 \, \mathrm{d}x \,.$$

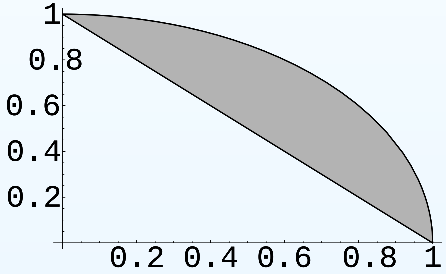
Zpět

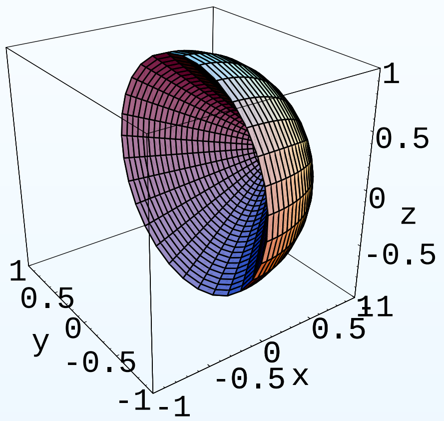
Příklad 9.3.2

Určete objem V rotačního tělesa vzniklého rotací plochy, která je ohraničená grafy funkcí $y = \sqrt{1-x^2}$, $y = 1 - x$ okolo osy x.

Řešení:

Nakreslíme si plochu, která rotuje a rotační těleso jehož objem počítáme.





Nyní vypočteme objem rotačního tělesa.

$$V = \pi \int_0^1 1 - x^2 \, dx - \pi \int_0^1 (1-x)^2 \, dx = \pi \left(\left[x - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 - \left[x - x^2 + \frac{x^3}{3} \right]_0^1 \right)$$

$$= \pi \left(1 - \frac{1}{3} - (1 - 1 + \frac{1}{3} \right) = \frac{\pi}{3} \, .$$

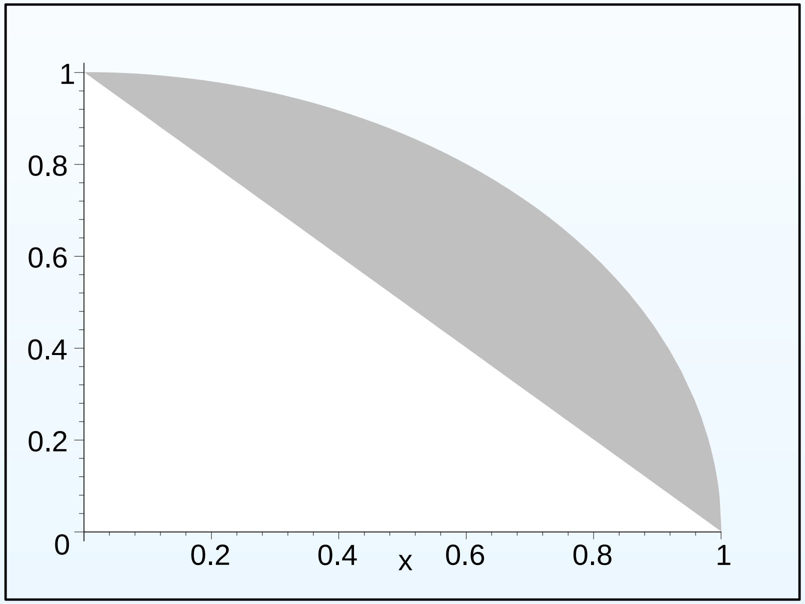
Zpět

Příklad 9.3.2

Určete objem V rotačního tělesa vzniklého rotací plochy, která je ohraničená grafy funkcí $y = \sqrt{1 - x^2}$, $y = 1 - x$ okolo osy x.

Maple:

```
> plot([1-x,sqrt(1-x^2)],x=0..1,filled=true,color=[white,grey]);
```




```
> V:=Pi*int(1-x^2,x=0..1)-Pi*int((1-x)^2,x=0..1);
```

$$V := \frac{\pi}{3}$$

Zpět

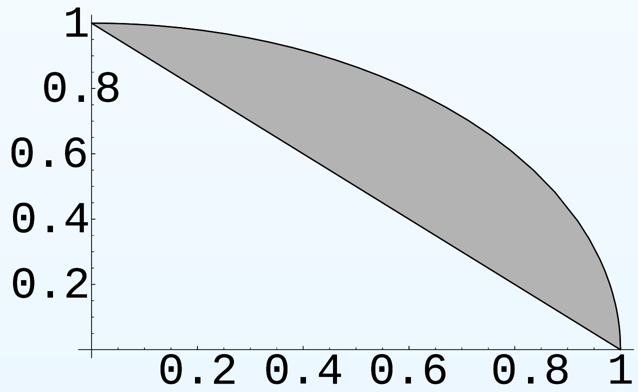
Příklad 9.3.2

Určete objem V rotačního tělesa vzniklého rotací plochy, která je ohraničená grafy funkcí $y = \sqrt{1-x^2}$, $y = 1 - x$ okolo osy x.

Mathematica:

<< Graphics\`FilledPlot\`

FilledPlot[{Sqrt[1 − x^2], 1 − x}, {x, 0, 1},
Fills → {{{1, 2}, GrayLevel[.7]}}];



V = Pi Integrate[1 − x^2, {x, 0, 1}]−
Pi Integrate[(1 − x)^2, {x, 0, 1}]

$\frac{\pi}{3}$

Zpět

Fyzikální aplikace

- **Příklad 9.4.1** Určete práci, kterou je třeba vykonat pro přenesení vaší milé (vašeho milého) z povrchu Země do nekonečna, uvažujeme-li pouze gravitační pole Země.

Zpět

Příklad 9.4.1

Určete práci, kterou je třeba vykonat pro přenesení vaší milé (vašeho milého) z povrchu Země do nekonečna, uvažujeme-li pouze gravitační pole Země.

? Zpět

Příklad 9.4.1

Určete práci, kterou je třeba vykonat pro přenesení vaší milé (vašeho milého) z povrchu Země do nekonečna, uvažujeme-li pouze gravitační pole Země.

Výsledek:

Označíme-li si hmotnost Země $M \doteq 6{,}0 \times 10^{24}$ kg, hmotnost přenášené osoby $m = 60$ kg, poloměr Země $R \doteq 6{,}4 \times 10^{6}$ m a Newtonovu gravitační konstantu $\kappa \doteq 6{,}7 \times 10^{-11}$ m^{2}Nkg^{-2}, je práce

$$W = \frac{\kappa M m}{R} \doteq 3{,}8 \times 10^{9} \text{ J}.$$

Zpět

Příklad 9.4.1

Určete práci, kterou je třeba vykonat pro přenesení vaší milé (vašeho milého) z povrchu Země do nekonečna, uvažujeme-li pouze gravitační pole Země.

Návod:

Označíme-li si hmotnost Země $M \doteq 6{,}0 \times 10^{24}$ kg, hmotnost přenášené osoby $m = 60$ kg, poloměr Země $R \doteq 6{,}4 \times 10^{6}$ m a Newtonovu gravitační konstantu $\kappa \doteq 6{,}7 \times 10^{-11}$ $\mathrm{m^2Nkg^{-2}}$, je podle Newtonova gravitačního zákona přitažlivá gravitační síla F, kterou musíme překonávat, rovna

$$F = \frac{\kappa M m}{x^2},$$

kde x je vzdálenost od středu Země. Mechanická práce W je pak integrál této síly .

Zpět

Příklad 9.4.1

Určete práci, kterou je třeba vykonat pro přenesení vaší milé (vašeho milého) z povrchu Země do nekonečna, uvažujeme-li pouze gravitační pole Země.

Řešení:

Označíme-li si hmotnost Země $M \doteq 6{,}0 \times 10^{24}$ kg, hmotnost přenášené osoby $m = 60$ kg, poloměr Země $R \doteq 6{,}4 \times 10^{6}$ m a Newtonovu gravitační konstantu $\kappa \doteq 6{,}7 \times 10^{-11}$ m^{2}Nkg^{-2}, je podle Newtonova gravitačního zákona přitažlivá gravitační síla F, kterou musíme překonávat, rovna

$$F = \frac{\kappa M m}{x^2},$$

kde x je vzdálenost od středu Země. Mechanická práce W je pak integrál této síly

$$W = \int_R^\infty F\,dx = \int_R^\infty \frac{\kappa M m}{x^2}\,dx = \kappa M m \left[-\frac{1}{x} \right]_R^\infty = \frac{\kappa M m}{R} \doteq 3{,}8 \times 10^{9}.$$

Zpět

Příklad 9.4.1

Určete práci, kterou je třeba vykonat pro přenesení vaší milé (vašeho milého) z povrchu Země do nekonečna, uvažujeme-li pouze gravitační pole Země.

Maple:

Nejdříve vypočteme vzorec pro práci.

```
> unassign('r','x','k','M','m');
> f:=k*M*m/x^2;
```

$$f := \frac{k\,M\,m}{x^2}$$

```
> w:=int(f,x=r..infinity) assuming r>0;
```

$$w := \frac{k\,M\,m}{r}$$

Nyní dosadíme konstanty.

```
> k:=6.7e-11: M:=6e24: m:=60: r:=6.4e6:
> w;
```

$$3768750000.0$$

Zpět

Příklad 9.4.1

Určete práci, kterou je třeba vykonat pro přenesení vaší milé (vašeho milého) z povrchu Země do nekonečna, uvažujeme-li pouze gravitační pole Země.

Mathematica:

Nejdříve vypočteme vzorec pro práci.

$\boldsymbol{f = k * M * m/x\hat{}2;}$

$\boldsymbol{w = \textbf{Integrate}[f, \{x, r, \textbf{Infinity}\}]}$

$\frac{k m M}{r}$

Nyní dosadíme konstanty.

$\boldsymbol{k = 6.7 * 10\hat{} - 11; M = 6 * 10\hat{}24; m = 60; r = 6.4 * 10\hat{}6;}$

$\boldsymbol{w}$

3.76875×10^9

Zpět