Sbírka příkladů
Matematika I pro strukturované studium

Kolektiv autorů

Ústav matematiky VŠCHT, Praha

Chcete-li ukončit prohlížení stiskněte klávesu Esc.

Chcete-li pokračovat stiskněte klávesu Enter.

Obsah

Základní vlastnosti funkcí jedné a dvou reálných proměnných

- Elementární funkce
- Operace s funkcemi

Zpět

Elementární funkce

- **Příklad 1.1.1** Je-li funkce $f(x) = \sin(x)$, načrtněte graf funkcí

$$f_1(x) = f(2x) \qquad f_2(x) = f(x/2) \qquad f_3(x) = 2f(x)$$
$$f_4(x) = f(x-2) \qquad f_5(x) = |f(x)| \qquad f_6(x) = f(|x|)$$

Zpět

Příklad 1.1.1

Je-li funkce $f(x) = \sin(x)$, načrtněte graf funkcí

$$f_1(x) = f(2x) \qquad f_2(x) = f(x/2) \qquad f_3(x) = 2f(x)$$
$$f_4(x) = f(x-2) \qquad f_5(x) = |f(x)| \qquad f_6(x) = f(|x|)$$

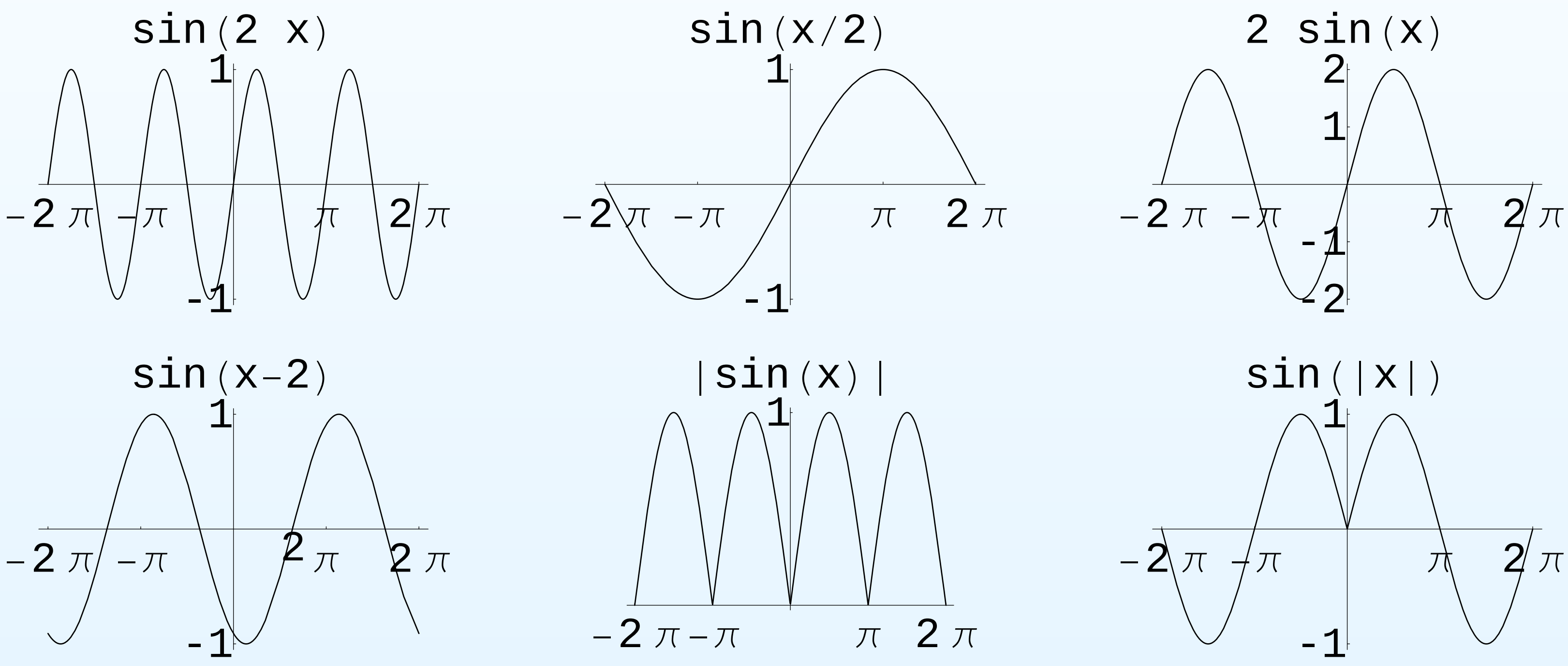
? Zpět

Příklad 1.1.1

Je-li funkce $f(x) = \sin(x)$, načrtněte graf funkcí

$$f_1(x) = f(2x) \qquad f_2(x) = f(x/2) \qquad f_3(x) = 2f(x)$$
$$f_4(x) = f(x-2) \qquad f_5(x) = |f(x)| \qquad f_6(x) = f(|x|)$$

Výsledek:



Zpět

Příklad 1.1.1

Je-li funkce $f(x) = \sin(x)$, načrtněte graf funkcí

$$f_1(x) = f(2x) \qquad f_2(x) = f(x/2) \qquad f_3(x) = 2f(x)$$
$$f_4(x) = f(x-2) \qquad f_5(x) = |f(x)| \qquad f_6(x) = f(|x|)$$

Návod:

Perioda funkce $f_1(x)$ je π.
Perioda funkce $f_2(x)$ je 4π.
$H(f)$ funkce $f_3(x)$ je $\langle -2, 2\rangle$.
Graf funkce $f_4(x)$ je posunutý o 2 doprava.
Graf funkce $f_5(x)$ vznikne převrácením zaporné části grafu funkce $f(x)$ do kladné části podle osy x.
Graf funkce $f_6(x)$ vznikne převrácením části grafu funkce $f(x)$ pro $x > 0$ podle osy y.

Zpět

Příklad 1.1.1

Je-li funkce $f(x) = \sin(x)$, načrtněte graf funkcí

$$f_1(x) = f(2x) \qquad f_2(x) = f(x/2) \qquad f_3(x) = 2f(x)$$
$$f_4(x) = f(x-2) \qquad f_5(x) = |f(x)| \qquad f_6(x) = f(|x|)$$

Řešení:

Viz návod a výsledek.

Zpět

Příklad 1.1.1

Je-li funkce $f(x) = \sin(x)$, načrtněte graf funkcí

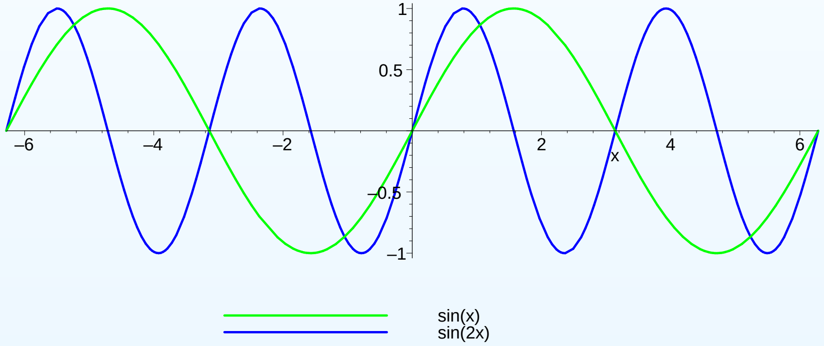
$$f_1(x) = f(2x) \qquad f_2(x) = f(x/2) \qquad f_3(x) = 2f(x)$$
$$f_4(x) = f(x-2) \qquad f_5(x) = |f(x)| \qquad f_6(x) = f(|x|)$$

Maple:

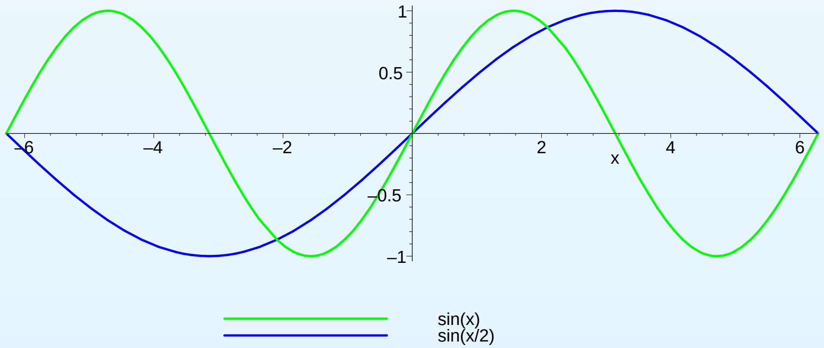
```
> f:=x->sin(x);
```

$$f := x \to \sin(x)$$

```
> plot([f(x),f(2*x)],x=-2*Pi..2*Pi,legend=["sin(x)","sin(2 x)"]);
```




```
> plot([f(x),f(x/2)],x=-2*Pi..2*Pi,legend=["sin(x)","sin(x/2)"]);
```



Další

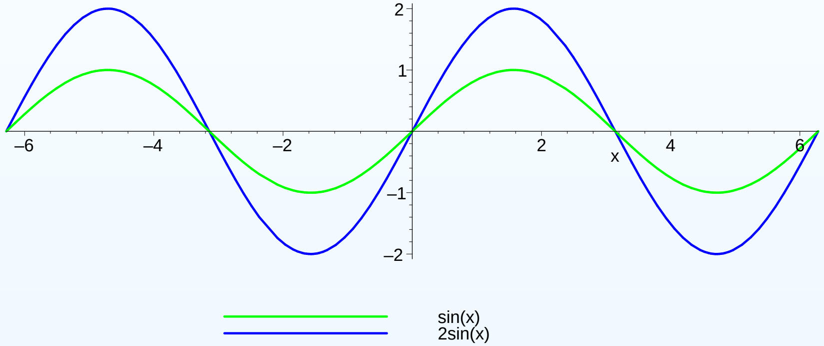
Příklad 1.1.1

Je-li funkce $f(x) = \sin(x)$, načrtněte graf funkcí

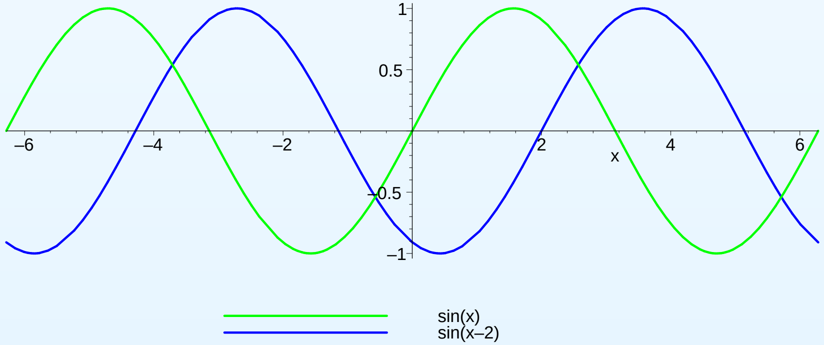
$$f_1(x) = f(2x) \qquad f_2(x) = f(x/2) \qquad f_3(x) = 2f(x)$$
$$f_4(x) = f(x-2) \qquad f_5(x) = |f(x)| \qquad f_6(x) = f(|x|)$$

Maple:

```
> plot([f(x),2*f(x)],x=-2*Pi..2*Pi,legend=["sin(x)","2sin(x)"]);
```




```
> plot([f(x),f(x-2)],x=-2*Pi..2*Pi,legend=["sin(x)","sin(x-2)"]);
```



Další

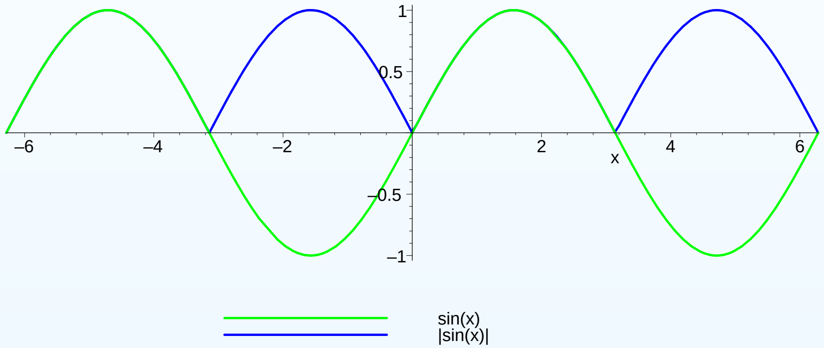
Příklad 1.1.1

Je-li funkce $f(x) = \sin(x)$, načrtněte graf funkcí

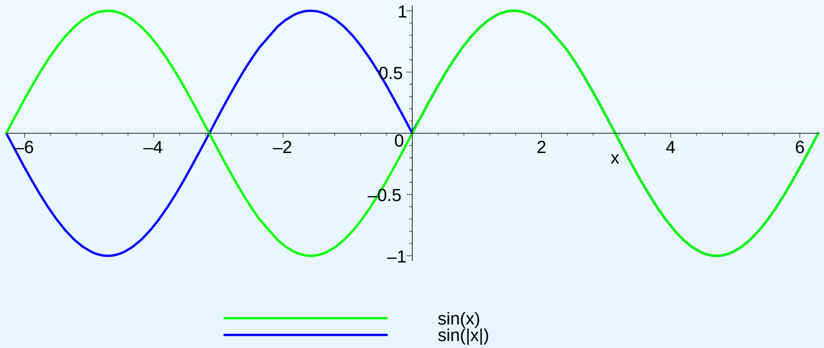
$$f_1(x) = f(2x) \qquad f_2(x) = f(x/2) \qquad f_3(x) = 2f(x)$$
$$f_4(x) = f(x-2) \qquad f_5(x) = |f(x)| \qquad f_6(x) = f(|x|)$$

Maple:

```
> plot([f(x),abs(f(x))],x=-2*Pi..2*Pi,legend=["sin(x)","|sin(x)|"]);
```




```
> plot([f(x),f(abs(x))],x=-2*Pi..2*Pi,legend=["sin(x)","sin(|x|)"]);
```



Zpět

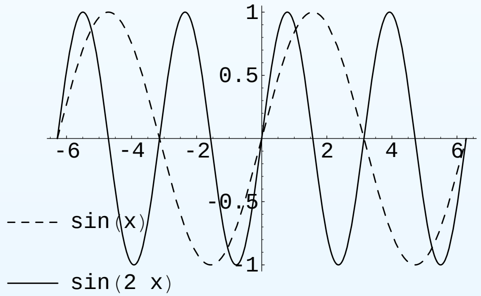
Příklad 1.1.1

Je-li funkce $f(x) = \sin(x)$, načrtněte graf funkcí

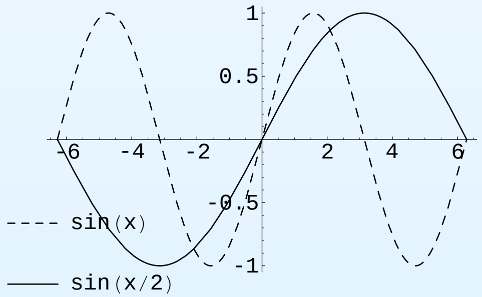
$$f_1(x) = f(2x) \qquad f_2(x) = f(x/2) \qquad f_3(x) = 2f(x)$$
$$f_4(x) = f(x-2) \qquad f_5(x) = |f(x)| \qquad f_6(x) = f(|x|)$$

Mathematica:

```
<< Graphics`Legend`
f[x_] = Sin[x]
Sin[x]
Plot[{f[x], f[2x]}, {x, −2Pi, 2Pi},PlotStyle → {{Dashing[{0.02, 0.02, 0.02}]}, {}},
PlotLegend → {"sin(x)", "sin(2 x)"}, LegendShadow → None]
```




```
Plot[{f[x], f[x/2]}, {x, −2Pi, 2Pi},PlotStyle → {{Dashing[{0.02, 0.02, 0.02}]}, {}},
PlotLegend → {"sin(x)", "sin(x/2)"}, LegendShadow → None]
```



Další

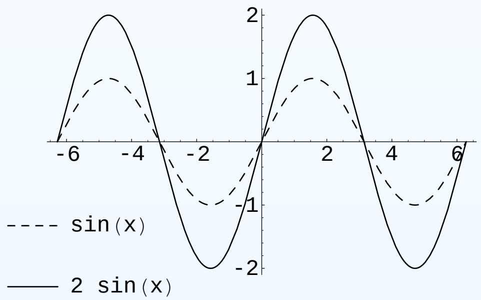
Příklad 1.1.1

Je-li funkce $f(x) = \sin(x)$, načrtněte graf funkcí

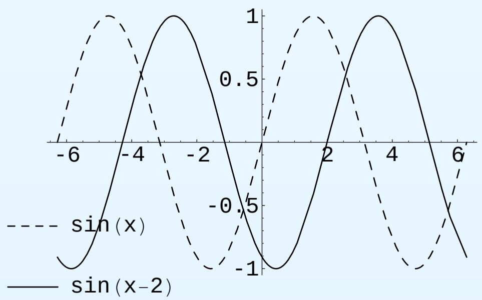
$$f_1(x) = f(2x) \qquad f_2(x) = f(x/2) \qquad f_3(x) = 2f(x)$$
$$f_4(x) = f(x-2) \qquad f_5(x) = |f(x)| \qquad f_6(x) = f(|x|)$$

Mathematica:

Plot[{$f[x]$, 2 $f[x]$}, {x, −2Pi, 2Pi},PlotStyle → {{Dashing[{0.02, 0.02, 0.02}]}, {}}, PlotLegend → {"sin(x)", "2 sin(x)"}, LegendShadow → None]



Plot[{$f[x]$, $f[x-2]$}, {x, −2Pi, 2Pi},PlotStyle → {{Dashing[{0.02, 0.02, 0.02}]}, {}}, PlotLegend → {"sin(x)", "sin(x-2)"}, LegendShadow → None]



Další

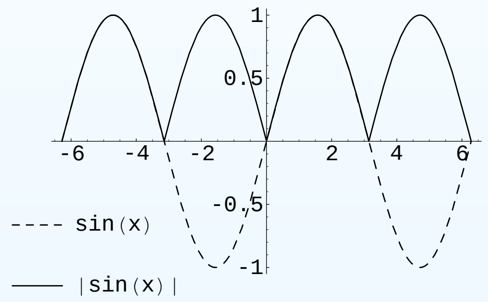
Příklad 1.1.1

Je-li funkce $f(x) = \sin(x)$, načrtněte graf funkcí

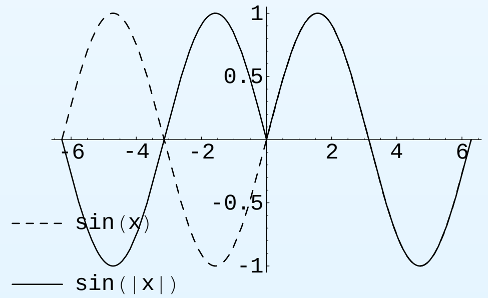
$$f_1(x) = f(2x) \qquad f_2(x) = f(x/2) \qquad f_3(x) = 2f(x)$$
$$f_4(x) = f(x-2) \qquad f_5(x) = |f(x)| \qquad f_6(x) = f(|x|)$$

Mathematica:

Plot[{f[x], Abs[f[x]]}, {x, −2Pi, 2Pi},PlotStyle → {{Dashing[{0.02, 0.02, 0.02}]}, {}}, PlotLegend → {"sin(x)", "|sin(x)|"}, LegendShadow → None]



Plot[{f[x], f[Abs[x]]}, {x, −2Pi, 2Pi},PlotStyle → {{Dashing[{0.02, 0.02, 0.02}]}, {}}, PlotLegend → {"sin(x)", "sin(|x|)"}, LegendShadow → None]



Zpět

Operace s funkcemi

- **Příklad 1.2.1** Pro funkce $f(x) = x^2$ a $g(x) = \mathrm{e}^x$ najděte funkce

$$\begin{aligned} f_1 &= f+g & f_3 &= f*g & f_5 &= f\circ g \\ f_2 &= f-g & f_4 &= f/g & f_6 &= g\circ f \end{aligned}$$

  a spočtěte jejich hodnotu v bodě $x = 3$.

- **Příklad 1.2.2** Pro vektorové funkce dvou proměnných $f(x, y) = (x + y, x\,y)$ a $g(x, y) = (-y, x)$ najděte $f_1 = f \circ g$ a $f_2 = g \circ f$.

- **Příklad 1.2.3** Rozhodněte, která z funkcí

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \mathrm{e}^x + \cos x + \mathrm{e}^{-x} \\ f_2(x) &= \mathrm{e}^x + \cos x + \mathrm{e}^{2x} \\ f_3(x) &= \mathrm{e}^x + x\cos x - \mathrm{e}^{-x} \\ f_4(x) &= 0 \end{aligned}$$

  je sudá a která je lichá.

Zpět

Příklad 1.2.1

Pro funkce $f(x) = x^2$ a $g(x) = \mathrm{e}^x$ najděte funkce

$$\begin{array}{lllllllll} f_1 & = & f + g & f_3 & = & f * g & f_5 & = & f \circ g \\ f_2 & = & f - g & f_4 & = & f/g & f_6 & = & g \circ f \end{array}$$

a spočtěte jejich hodnotu v bodě $x = 3$.

? Zpět

Příklad 1.2.1

Pro funkce $f(x) = x^2$ a $g(x) = \mathrm{e}^x$ najděte funkce

$$\begin{array}{lllllllll} f_1 & = & f + g & f_3 & = & f * g & f_5 & = & f \circ g \\ f_2 & = & f - g & f_4 & = & f/g & f_6 & = & g \circ f \end{array}$$

a spočtěte jejich hodnotu v bodě $x = 3$.

Výsledek:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= x^2 + \mathrm{e}^x \\ f_2(x) &= x^2 - \mathrm{e}^x \\ f_3(x) &= x^2 * \mathrm{e}^x \\ f_4(x) &= x^2/\mathrm{e}^x \\ f_5(x) &= \mathrm{e}^{2x} \\ f_6(x) &= \mathrm{e}^{x^2} \\ f_1(3) &= 9 + \mathrm{e}^3 \\ f_2(3) &= 9 - \mathrm{e}^3 \\ f_3(3) &= 9 * \mathrm{e}^3 \\ f_4(3) &= 9/\mathrm{e}^3 \\ f_5(3) &= \mathrm{e}^6 \\ f_6(3) &= \mathrm{e}^9. \end{aligned}$$

Zpět

Příklad 1.2.1

Pro funkce $f(x) = x^2$ a $g(x) = \mathrm{e}^x$ najděte funkce

$$\begin{array}{lllllllll} f_1 & = & f+g & f_3 & = & f*g & f_5 & = & f\circ g \\ f_2 & = & f-g & f_4 & = & f/g & f_6 & = & g\circ f \end{array}$$

a spočtěte jejich hodnotu v bodě $x = 3$.

Návod:

Nejdříve definujeme funkce f a g a potom pomocí nich definujeme funkce f_1 až f_6.

Zpět

Příklad 1.2.1

Pro funkce $f(x) = x^2$ a $g(x) = \mathrm{e}^x$ najděte funkce

$$\begin{array}{ccccccccc} f_1 & = & f+g & f_3 & = & f*g & f_5 & = & f\circ g \\ f_2 & = & f-g & f_4 & = & f/g & f_6 & = & g\circ f \end{array}$$

a spočtěte jejich hodnotu v bodě $x = 3$.

Řešení:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= f(x)+g(x) = x^2+\mathrm{e}^x \\ f_2(x) &= f(x)-g(x) = x^2-\mathrm{e}^x \\ f_3(x) &= f(x)*g(x) = x^2*\mathrm{e}^x \\ f_4(x) &= f(x)/g(x) = x^2/\mathrm{e}^x \\ f_5(x) &= f(g(x)) = f(y) = y^2 = (g(x))^2 = (\mathrm{e}^x)^2 = \mathrm{e}^{2x} \\ f_6(x) &= g(f(x)) = g(y) = \mathrm{e}^y = \mathrm{e}^{x^2} \\ f_1(3) &= 9+\mathrm{e}^3 \\ f_2(3) &= 9-\mathrm{e}^3 \\ f_3(3) &= 9*\mathrm{e}^3 \\ f_4(3) &= 9/\mathrm{e}^3 \\ f_5(3) &= \mathrm{e}^6 \\ f_6(3) &= \mathrm{e}^9. \end{aligned}$$

Zpět

Příklad 1.2.1

Pro funkce $f(x) = x^2$ a $g(x) = \mathrm{e}^x$ najděte funkce

$$\begin{array}{lllllllll} f_1 & = & f+g & f_3 & = & f*g & f_5 & = & f\circ g \\ f_2 & = & f-g & f_4 & = & f/g & f_6 & = & g\circ f \end{array}$$

a spočtěte jejich hodnotu v bodě $x = 3$.

Maple:

```
> f := x -> x^2;
```

$$f := x \to x^2$$

```
> g := x -> exp(x);
```

$$g := x \to e^x$$

```
> f1 := x -> f(x)+g(x);
```

$$f1 := x \to \mathrm{f}(x) + \mathrm{g}(x)$$

```
> f2 := x -> f(x)-g(x);
```

$$f2 := x \to \mathrm{f}(x) - \mathrm{g}(x)$$

```
> f3 := x -> f(x)*g(x);
```

$$f3 := x \to \mathrm{f}(x)\,\mathrm{g}(x)$$

```
> f4 := x -> f(x)/g(x);
```

$$f4 := x \to \frac{\mathrm{f}(x)}{\mathrm{g}(x)}$$

Další

Příklad 1.2.1

Pro funkce $f(x) = x^2$ a $g(x) = \mathrm{e}^x$ najděte funkce

$$\begin{array}{ccccccccc} f_1 & = & f+g & f_3 & = & f*g & f_5 & = & f\circ g \\ f_2 & = & f-g & f_4 & = & f/g & f_6 & = & g\circ f \end{array}$$

a spočtěte jejich hodnotu v bodě $x = 3$.

Maple:

```
> f5 := x -> f(g(x));
```

$$f5 := x \to \mathrm{f}(\mathrm{g}(x))$$

```
> f6 := x -> g(f(x));
```

$$f6 := x \to \mathrm{g}(\mathrm{f}(x))$$

```
> f1(x);
```

$$x^2 + e^x$$

```
> f2(x);
```

$$x^2 - e^x$$

```
> f3(x);
```

$$x^2\, e^x$$

```
> f4(x);
```

$$\frac{x^2}{e^x}$$

Další

Příklad 1.2.1

Pro funkce $f(x) = x^2$ a $g(x) = \mathrm{e}^x$ najděte funkce

$$\begin{array}{ccccccccc} f_1 & = & f+g & f_3 & = & f*g & f_5 & = & f\circ g \\ f_2 & = & f-g & f_4 & = & f/g & f_6 & = & g\circ f \end{array}$$

a spočtěte jejich hodnotu v bodě $x = 3$.

Maple:

```
> f5(x);
```

$$(e^x)^2$$

```
> f6(x);
```

$$e^{(x^2)}$$

```
> f1(3);
```

$$9 + e^3$$

```
> f2(3);
```

$$9 - e^3$$

```
> f3(3);
```

$$9\,e^3$$

```
> f4(3);
```

$$\frac{9}{e^3}$$

Další

Příklad 1.2.1

Pro funkce $f(x) = x^2$ a $g(x) = \mathrm{e}^x$ najděte funkce

$$\begin{array}{lclclclclcl} f_1 & = & f+g & \quad & f_3 & = & f*g & \quad & f_5 & = & f\circ g \\ f_2 & = & f-g & \quad & f_4 & = & f/g & \quad & f_6 & = & g\circ f \end{array}$$

a spočtěte jejich hodnotu v bodě $x = 3$.

Maple:

```
> f5(3);
```

$$(e^3)^2$$

```
> simplify(%);
```

$$e^6$$

```
> f6(3);
```

$$e^9$$

Zpět

Příklad 1.2.1

Pro funkce $f(x) = x^2$ a $g(x) = \mathrm{e}^x$ najděte funkce

$$\begin{array}{lllllllll} f_1 & = & f+g & f_3 & = & f*g & f_5 & = & f\circ g \\ f_2 & = & f-g & f_4 & = & f/g & f_6 & = & g\circ f \end{array}$$

a spočtěte jejich hodnotu v bodě $x = 3$.

Mathematica:

f[x_] = x^2

x^2

g[x_] = Exp[x]

e^x

f1[x_] = f[x] + g[x]

$e^x + x^2$

f2[x_] = f[x] − g[x]

$-e^x + x^2$

f3[x_] = f[x]g[x]

$e^x x^2$

f4[x_] = f[x]/g[x]

$e^{-x} x^2$

Další

Příklad 1.2.1

Pro funkce $f(x) = x^2$ a $g(x) = \mathrm{e}^x$ najděte funkce

$$\begin{array}{lll} f_1 = f + g & f_3 = f * g & f_5 = f \circ g \\ f_2 = f - g & f_4 = f/g & f_6 = g \circ f \end{array}$$

a spočtěte jejich hodnotu v bodě $x = 3$.

Mathematica:

f5[x_] = f[g[x]]

e^{2x}

f6[x_] = g[f[x]]

e^{x^2}

f1[3]

$9 + e^3$

f2[3]

$9 - e^3$

f3[3]

$9e^3$

f4[3]

$\frac{9}{e^3}$

Další

Příklad 1.2.1

Pro funkce $f(x) = x^2$ a $g(x) = \mathrm{e}^x$ najděte funkce

$$\begin{array}{lllllllll} f_1 & = & f+g & f_3 & = & f*g & f_5 & = & f\circ g \\ f_2 & = & f-g & f_4 & = & f/g & f_6 & = & g\circ f \end{array}$$

a spočtěte jejich hodnotu v bodě $x = 3$.

Mathematica:

f5[3]

e^6

f6[3]

e^9

Zpět

Příklad 1.2.2

Pro vektorové funkce dvou proměnných $f(x, y) = (x + y, x\,y)$ a $g(x, y) = (-y, x)$ najděte $f_1 = f \circ g$ a $f_2 = g \circ f$.

? Zpět

Příklad 1.2.2

Pro vektorové funkce dvou proměnných $f(x, y) = (x + y, x\,y)$ a $g(x, y) = (-y, x)$ najděte $f_1 = f \circ g$ a $f_2 = g \circ f$.

Výsledek:

$f_1(x, y) = (x - y, -xy)\,, \quad f_2(x, y) = (-xy, x + y)\,.$ Zpět

Příklad 1.2.2

Pro vektorové funkce dvou proměnných $f(x, y) = (x + y, x\,y)$ a $g(x, y) = (-y, x)$ najděte $f_1 = f \circ g$ a $f_2 = g \circ f$.

Návod:

Nejdříve definujeme funkce f a g a potom pomocí nich definujeme funkce f_1 a f_2.

Zpět

Příklad 1.2.2

Pro vektorové funkce dvou proměnných $f(x, y) = (x + y, x\,y)$ a $g(x, y) = (-y, x)$ najděte $f_1 = f \circ g$ a $f_2 = g \circ f$.

Řešení:

Označme $u = -y$ a $v = x$, potom

$$f_1(x, y) = f(u, v) = (u + v, u\,v) = (-y + x, -y\,x)\,.$$

Označme $a = x + y$ a $b = x\,y$, potom

$$f_2(x, y) = g(a, b) = (-b, a) = (-x\,y, x + y)\,.$$

Zpět

Příklad 1.2.2

Pro vektorové funkce dvou proměnných $f(x,y) = (x+y, x\,y)$ a $g(x,y) = (-y, x)$ najděte $f_1 = f \circ g$ a $f_2 = g \circ f$.

Maple:

```
> f := (x,y) -> (x+y, x*y);
```

$$f := (x,\ y) \to (x+y,\ x\,y)$$

```
> g := (x,y) -> (-y, x);
```

$$g := (x,\ y) \to (-y,\ x)$$

```
> f1 := (x,y) -> f(g(x,y));
```

$$f1 := (x,\ y) \to \mathrm{f}(\mathrm{g}(x,\ y))$$

```
> f2 := (x,y) -> g(f(x,y));
```

$$f2 := (x,\ y) \to \mathrm{g}(\mathrm{f}(x,\ y))$$

```
> f1(x,y);
```

$$-y+x,\ -y\,x$$

```
> f2(x,y);
```

$$-y\,x,\ x+y$$

Zpět

Příklad 1.2.2

Pro vektorové funkce dvou proměnných $f(x,y) = (x+y, x\,y)$ a $g(x,y) = (-y, x)$ najděte $f_1 = f \circ g$ a $f_2 = g \circ f$.

Mathematica:

```
f[{x_, y_}]:={x + y, x * y}
g[{x_, y_}]:={−y, x}
f1[z_]:=f[g[z]]
f2[z_]:=g[f[z]]
f1[{x, y}]
```

$\{x - y, -xy\}$

```
f2[{x, y}]
```

$\{-xy, x + y\}$

Zpět

Příklad 1.2.3

Rozhodněte, která z funkcí

$$
\begin{aligned}
f_1(x) &= \mathrm{e}^x + \cos x + \mathrm{e}^{-x} \\
f_2(x) &= \mathrm{e}^x + \cos x + \mathrm{e}^{2x} \\
f_3(x) &= \mathrm{e}^x + x\cos x - \mathrm{e}^{-x} \\
f_4(x) &= 0
\end{aligned}
$$

je sudá a která je lichá.

? Zpět

Příklad 1.2.3

Rozhodněte, která z funkcí

$$
\begin{aligned}
f_1(x) &= \mathrm{e}^x + \cos x + \mathrm{e}^{-x} \\
f_2(x) &= \mathrm{e}^x + \cos x + \mathrm{e}^{2x} \\
f_3(x) &= \mathrm{e}^x + x\cos x - \mathrm{e}^{-x} \\
f_4(x) &= 0
\end{aligned}
$$

je sudá a která je lichá.

Výsledek:

Funkce f_1 je sudá, není lichá.
Funkce f_2 není sudá, není lichá.
Funkce f_3 není sudá, je lichá.
Funkce f_4 je sudá, je lichá .

Zpět

Příklad 1.2.3

Rozhodněte, která z funkcí

$$\begin{aligned} f_1(x) &= e^x + \cos x + e^{-x} \\ f_2(x) &= e^x + \cos x + e^{2x} \\ f_3(x) &= e^x + x\cos x - e^{-x} \\ f_4(x) &= 0 \end{aligned}$$

je sudá a která je lichá.

Návod:

Pro všechny funkce platí, $D(f) = \mathbb{R}$, tj. definiční obor funkce je souměrný podle počátku.
Stačí vyšetřit následující podmínky:
Funkce $f(x)$ je sudá, jestliže pro všechna x z definičního oboru platí

$$f(x) = f(-x).$$

Funkce $f(x)$ je lichá, jestliže pro všechna x z definičního oboru platí

$$f(x) = -f(-x).$$

Zpět

Příklad 1.2.3

Rozhodněte, která z funkcí

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \mathrm{e}^x + \cos x + \mathrm{e}^{-x} \\ f_2(x) &= \mathrm{e}^x + \cos x + \mathrm{e}^{2x} \\ f_3(x) &= \mathrm{e}^x + x\cos x - \mathrm{e}^{-x} \\ f_4(x) &= 0 \end{aligned}$$

je sudá a která je lichá.

Řešení:

$\mathrm{D}(f_1) = \mathrm{D}(f_2) = \mathrm{D}(f_3) = \mathrm{D}(f_4) = \mathbb{R}$, tj. definiční obor funkce je souměrný podle počátku.

$f_1(-x) = \mathrm{e}^{-x} + \cos(-x) + \mathrm{e}^{-(-x)} = \mathrm{e}^{-x} + \cos x + \mathrm{e}^{x} = f_1(x)$ ($\cos x$ je funkce sudá)

Funkce $f_1(x)$ je sudá a není lichá.

$f_2(-x) = \mathrm{e}^{-x} + \cos(-x) + \mathrm{e}^{2(-x)} = \mathrm{e}^{-x} + \cos x + \mathrm{e}^{-2x} \neq f_2(x)$ ani $f_2(-x) \neq -f_2(x)$

Funkce $f_2(x)$ není sudá a není lichá.

$f_3(-x) = \mathrm{e}^{-x} + (-x)\cos(-x) - \mathrm{e}^{-(-x)} = \mathrm{e}^{-x} - x\cos x - \mathrm{e}^{x} = -f_3(-x)$

Funkce $f_3(x)$ není sudá a je lichá.

$f_4(x) = -f_4(-x)$ i $f_4(x) = f_4(-x)$.

Funkce $f_4(x)$ je sudá i lichá.

Zpět

Příklad 1.2.3

Rozhodněte, která z funkcí

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \mathrm{e}^x + \cos x + \mathrm{e}^{-x} \\ f_2(x) &= \mathrm{e}^x + \cos x + \mathrm{e}^{2x} \\ f_3(x) &= \mathrm{e}^x + x\cos x - \mathrm{e}^{-x} \\ f_4(x) &= 0 \end{aligned}$$

je sudá a která je lichá.

Maple:

```
> f1 := x -> exp(x) + cos(x) + exp(-x);
```

$$f1 := x \to e^x + \cos(x) + e^{(-x)}$$

```
> evalb (f1(x) = f1(-x));
```

$$true$$

```
> evalb (f1(x) = -f1(-x));
```

$$false$$

```
> f2 := x -> exp(x) + cos(x) + exp(2*x);
```

$$f2 := x \to e^x + \cos(x) + e^{(2\,x)}$$

```
> evalb (f2(x) = f2(-x));
```

$$false$$

```
> evalb (f2(x) = -f2(-x));
```

$$false$$

Další

Příklad 1.2.3

Rozhodněte, která z funkcí

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \mathrm{e}^x + \cos x + \mathrm{e}^{-x} \\ f_2(x) &= \mathrm{e}^x + \cos x + \mathrm{e}^{2x} \\ f_3(x) &= \mathrm{e}^x + x\cos x - \mathrm{e}^{-x} \\ f_4(x) &= 0 \end{aligned}$$

je sudá a která je lichá.

Maple:

```
> f3 := x -> exp(x) + x * cos(x) - exp(-x);
```

$$f3 := x \to e^x + x\cos(x) - e^{(-x)}$$

```
> evalb (f3(x) = f3(-x));
```

$$\mathit{false}$$

```
> evalb (f3(x) = -f3(-x));
```

$$\mathit{true}$$

```
> f4 := x -> 0;
```

$$f4 := x \to 0$$

```
> evalb (f4(x) = f4(-x));
```

$$\mathit{true}$$

```
> evalb (f4(x) = -f4(-x));
```

$$\mathit{true}$$

Zpět

Příklad 1.2.3

Rozhodněte, která z funkcí

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \mathrm{e}^x + \cos x + \mathrm{e}^{-x} \\ f_2(x) &= \mathrm{e}^x + \cos x + \mathrm{e}^{2x} \\ f_3(x) &= \mathrm{e}^x + x\cos x - \mathrm{e}^{-x} \\ f_4(x) &= 0 \end{aligned}$$

je sudá a která je lichá.

Mathematica:

f1[x_]:=Exp[x] + Cos[x] + Exp[−x]

f1[x]===f1[−x]

True

f1[x]=== − f1[−x]

False
(Funkce f_1 je sudá, není lichá.)

f2[x_]:=Exp[x] + Cos[x] + Exp[2 ∗ x]

f2[x]===f2[−x]

False

f2[x]=== − f2[−x]

False
(Funkce f_2 není sudá, není lichá.)

Další

Příklad 1.2.3

Rozhodněte, která z funkcí

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \mathrm{e}^x + \cos x + \mathrm{e}^{-x} \\ f_2(x) &= \mathrm{e}^x + \cos x + \mathrm{e}^{2x} \\ f_3(x) &= \mathrm{e}^x + x\cos x - \mathrm{e}^{-x} \\ f_4(x) &= 0 \end{aligned}$$

je sudá a která je lichá.

Mathematica:

f3[x_]:=Exp[x] + x ∗ Cos[x] − Exp[−x]

f3[x]===f3[−x]

False

f3[x]=== − f3[−x]

True
(Funkce f_3 není sudá, je lichá.)

f4[x_] = 0

0

f4[x]===f4[−x]

True

f4[x]=== − f4[−x]

True
(Funkce f_4 je sudá, je lichá.)

Zpět

Spojitost a limita funkce, limita posloupnosti

Zpět

Spojitost funkce

- **Příklad 2.1.1** Vyšetřete spojitost funkce

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x} & \text{pro} \quad x \neq 0, \\ 1 & \text{pro} \quad x = 0. \end{cases}$$

- **Příklad 2.1.2** Určete číslo a tak, aby funkce f byla spojitá v bodě $x = 1$,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x^3 - 1} & \text{pro} \quad x \neq 1, \\ a & \text{pro} \quad x = 1. \end{cases}$$

- **Příklad 2.1.3** Vyšetřete spojitost funkce f na jejím definičním oboru,

$$f(x) = \begin{cases} 2 + x^2 & \text{pro} \quad x \in (-\infty, 0\rangle, \\ \dfrac{\sin(2x)}{x} & \text{pro} \quad x \in (0, 5\rangle. \end{cases}$$

Zpět

Příklad 2.1.1

Vyšetřete spojitost funkce

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x} & \text{pro} \quad x \neq 0, \\ 1 & \text{pro} \quad x = 0. \end{cases}$$

? Zpět

Příklad 2.1.1

Vyšetřete spojitost funkce

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x} & \text{pro} \quad x \neq 0, \\ 1 & \text{pro} \quad x = 0. \end{cases}$$

Výsledek:

Funkce f je spojitá $\forall x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

Zpět

Příklad 2.1.1

Vyšetřete spojitost funkce

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x} & \text{pro} \quad x \neq 0, \\ 1 & \text{pro} \quad x = 0. \end{cases}$$

Návod:

V bodech $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ využijte vlastností elementárních funkcí. Nespojitost v bodě 0 plyne z toho, že $\lim\limits_{x \to 0} f(x) \neq f(0)$.

Zpět

Příklad 2.1.1

Vyšetřete spojitost funkce

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x} & \text{pro} \quad x \neq 0, \\ 1 & \text{pro} \quad x = 0. \end{cases}$$

Řešení:

Funkce $\dfrac{1}{x}$ je spojitá na svém definičním oboru, tedy spojitá ve všech bodech $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, její obor hodnot je $\mathbb{R}\backslash\{0\}$. Funkce $\sin t$ je spojitá $\forall t \in \mathbb{R}$, tedy i složená funkce $\sin \dfrac{1}{x}$ je spojitá na $\mathbb{R}\backslash\{0\}$. Funkce x je spojitá na $\mathbb{R}$ a součin dvou spojitých funkcí je funkce spojitá. Tedy funkce f je spojitá pro všechna $x \neq 0$. Zbývá vyšetřit spojitost v bodě $x = 0$. Vypočteme $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$. Protože funkce sin t je omezená na svém definičním oboru, je

$$\lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0 \quad \neq \quad f(0) = 1.$$

Tedy v bodě $x = 0$ není funkce f spojitá.

Zpět

Příklad 2.1.1

Vyšetřete spojitost funkce

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x} & \text{pro} \quad x \neq 0, \\ 1 & \text{pro} \quad x = 0. \end{cases}$$

Maple:

```
> discont(x*sin(1/x),x);
```

$$\{0\}$$

```
> L:=limit(x*sin(1/x), x=0);
```

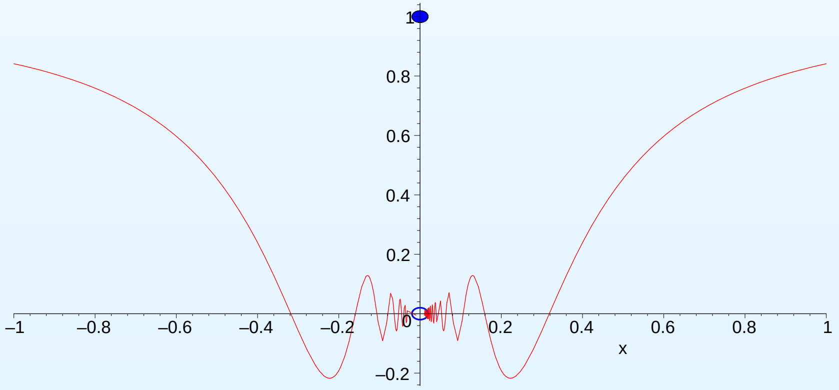
$$L := 0$$

```
> f(0):=1;
```

$$\mathrm{f}(0) := 1$$

Funkce není spojitá v bodě x=0.

```
> p1:=plot(x*sin(1/x),x=-1..0): p2:=plot(x*sin(1/x),x=0..1): p3:=
point([0,1],color=blue): plots[display](p1,p2,p3);
```



Zpět

Příklad 2.1.1

Vyšetřete spojitost funkce

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x} & \text{pro} \quad x \neq 0, \\ 1 & \text{pro} \quad x = 0. \end{cases}$$

Mathematica:

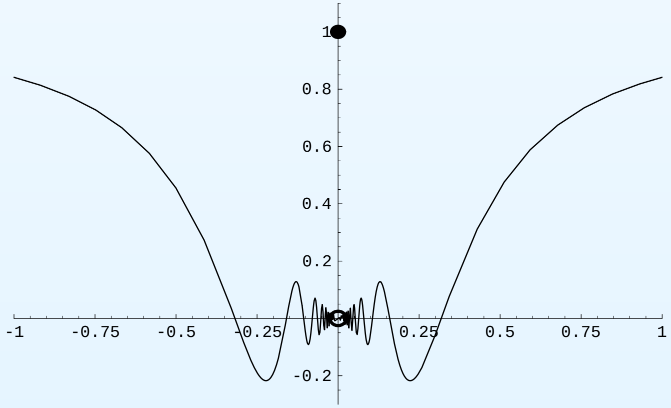
f[x_]:=Piecewise[{{xSin[1/x], $x \neq 0$}, {1, x == 0}}]

Limit[f[x], $x \to 0$]

0

Funkce není spojitá v bodě $x = 0$.

g = Plot[f[x], {x, −1, 1}, PlotRange → {{−1, 1}, {−0.3, 1.1}},
Epilog → {{Disk[{0, 1}, {0.025, 0.025}]},
{Thickness[0.005], Circle[{0, 0}, {0.025, 0.025}]}}]



Zpět

Příklad 2.1.2

Určete číslo a tak, aby funkce f byla spojitá v bodě $x = 1$,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x^3 - 1} & \text{pro} \quad x \neq 1, \\ a & \text{pro} \quad x = 1. \end{cases}$$

? Zpět

Příklad 2.1.2

Určete číslo a tak, aby funkce f byla spojitá v bodě $x = 1$,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x^3 - 1} & \text{pro} \quad x \neq 1, \\ a & \text{pro} \quad x = 1. \end{cases}$$

Výsledek:

$a = 2/3\,.$

Zpět

Příklad 2.1.2

Určete číslo a tak, aby funkce f byla spojitá v bodě $x = 1$,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x^3 - 1} & \text{pro} \quad x \neq 1, \\ a & \text{pro} \quad x = 1. \end{cases}$$

Návod:

Využijte větu, že funkce je spojitá v bodě $x = 1$ právě když $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1) = a$.

Zpět

Příklad 2.1.2

Určete číslo a tak, aby funkce f byla spojitá v bodě $x = 1$,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x^3 - 1} & \text{pro} \quad x \neq 1, \\ a & \text{pro} \quad x = 1. \end{cases}$$

Řešení:

Protože $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$ a $x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)$, je

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x^3-1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)} = \lim_{x \to 1} \frac{x+1}{x^2+x+1} = \frac{1+1}{1+1+1} = \frac{2}{3}.$$

Tedy položíme-li $a := 2/3$, bude funkce $f(x)$ spojitá v bodě $x = 1$.

Zpět

Příklad 2.1.2

Určete číslo a tak, aby funkce f byla spojitá v bodě $x = 1$,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x^3 - 1} & \text{pro} \quad x \neq 1, \\ a & \text{pro} \quad x = 1. \end{cases}$$

Maple:

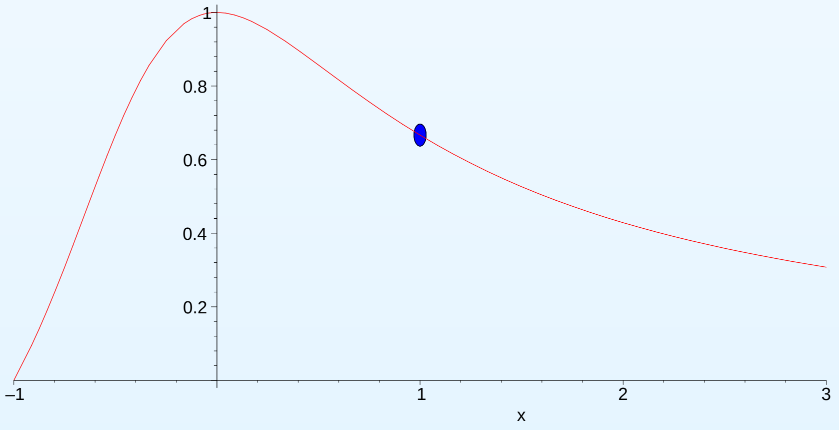
```
> discont((x^2-1)/(x^3-1),x);
```

$$\{1\}$$

```
> a:=limit((x^2-1)/(x^3-1), x=1);
```

$$a := \frac{2}{3}$$

```
> p1:=plot((x^2-1)/(x^3-1),x=-1..5): p2:=point([1,a], color=blue):
display(p1,p2,axes=normal);
```



Zpět

Příklad 2.1.2

Určete číslo a tak, aby funkce f byla spojitá v bodě $x = 1$,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x^3 - 1} & \text{pro} \quad x \neq 1, \\ a & \text{pro} \quad x = 1. \end{cases}$$

Mathematica:

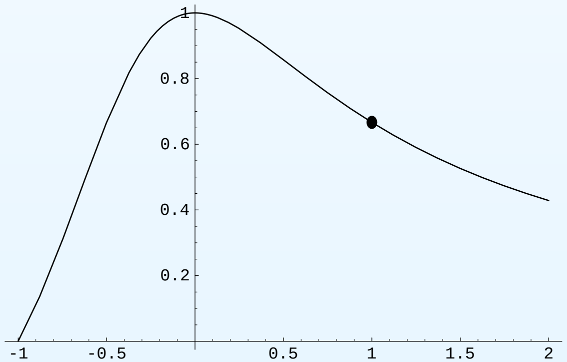
Limit[$(x$^2 − 1)/$(x$^3 − 1), $x \to 1$]

$\frac{2}{3}$

Dodefinujeme funkci v bod2 $x = 1$ hodnotou $f(1) = 2/3$.

f[x_]:=Piecewise[{{$(x$^2 − 1)/$(x$^3 − 1), $x \neq 1$}, {2/3, x == 0}}]

g = Plot[$f[x]$, {x, −1, 2}, Epilog → {{Disk[{1, 2/3}, {0.03, 0.02}]}}]



Zpět

Příklad 2.1.3

Vyšetřete spojitost funkce f na jejím definičním oboru,

$$f(x) = \begin{cases} 2 + x^2 & \text{pro} \quad x \in (-\infty, 0\rangle, \\ \dfrac{\sin(2x)}{x} & \text{pro} \quad x \in (0, 5\rangle. \end{cases}$$

? Zpět

Příklad 2.1.3

Vyšetřete spojitost funkce f na jejím definičním oboru,

$$f(x) = \begin{cases} 2 + x^2 & \text{pro} \quad x \in (-\infty, 0\rangle, \\ \dfrac{\sin(2x)}{x} & \text{pro} \quad x \in (0, 5\rangle. \end{cases}$$

Výsledek:

f je spojitá v každém bodě $x \in (-\infty, 5)$ a f je spojitá zleva v bodě $x = 5$.

Zpět

Příklad 2.1.3

Vyšetřete spojitost funkce f na jejím definičním oboru,

$$f(x) = \begin{cases} 2 + x^2 & \text{pro} \quad x \in (-\infty, 0\rangle, \\ \dfrac{\sin(2x)}{x} & \text{pro} \quad x \in (0, 5\rangle. \end{cases}$$

Návod:

Pro $x \in (-\infty, 0)$ a pro $x \in (0, 5\rangle$ využijte věty o spojitosti elementárních funkcí a o spojitosti podílu dvou funkcí. V bodě $x = 0$ vypočtěte $\lim\limits_{x \to 0+} f(x)$ a a porovnejte s $f(0)$.

Zpět

Příklad 2.1.3

Vyšetřete spojitost funkce f na jejím definičním oboru,

$$f(x) = \begin{cases} 2 + x^2 & \text{pro} \quad x \in (-\infty, 0\rangle, \\ \dfrac{\sin(2x)}{x} & \text{pro} \quad x \in (0, 5\rangle. \end{cases}$$

Řešení:

Definiční obor funkce f je $\mathcal{D}(f) = (-\infty, 5\rangle$. Je-li $x \in (-\infty, 0\rangle$ je $f(x) = 2 + x^2$, a f je spojitá pro $x \in (-\infty, 0)$. 0 je pravým krajním bodem intervalu, funkce f je v bodě $x = 0$ spojitá zleva a $f(0) = 2 + 0 = 2$. Funkce $\sin(2x)$ a funkce x jsou spojité na $(0, 5)$, $x \neq 0$ na $(0, 5)$, tedy i jejich podíl je funkce spojitá na $(0, 5)$. Bod $x = 5$ je pravým krajním bodem intervalu $(0, 5\rangle$, funkce f je v bodě $x = 5$ spojitá zleva. Zbývá vyšetřit spojitost v bodě $x = 0$. Protože $\lim\limits_{t \to 0+} \dfrac{\sin\ t}{t} = 1$, dostaneme

$$\lim_{x \to 0+} \frac{\sin(2x)}{x} = \lim_{x \to 0+} \frac{2\sin(2x)}{2x} = 2 \lim_{x \to 0+} \frac{\sin(2x)}{2x} = 2 \ = \ f(0).$$

Funkce f je tedy spojitá na celém svém definičním oboru $(-\infty, 5\rangle$ (v bodě $x = 5$ spojitá zleva).

Zpět

Příklad 2.1.3

Vyšetřete spojitost funkce f na jejím definičním oboru,

$$f(x) = \begin{cases} 2 + x^2 & \text{pro} \quad x \in (-\infty, 0\rangle, \\ \dfrac{\sin(2x)}{x} & \text{pro} \quad x \in (0, 5\rangle. \end{cases}$$

Maple:

```
> discont(2+x^2,x);
```

$$\{\}$$

```
> discont(sin(2*x)/x,x);
```

$$\{0\}$$

```
> f(0):=2;
```

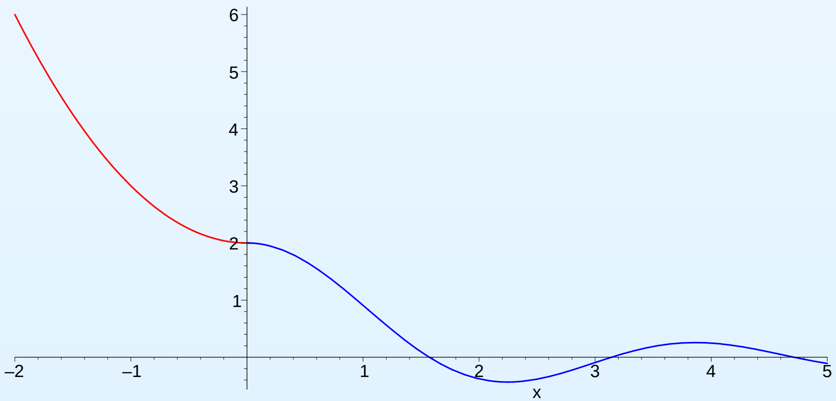
$$\mathrm{f}(0) := 2$$

```
> L:=limit(sin(2*x)/x,x=0);
```

$$L := 2$$

Funkce je spojitá i v bodě x=0.

```
> p1:=plot(2+x^2,x=-2..0, color=red):
p2:=plot(sin(2*x)/x,x=0..5,color=blue): display(p1,p2);
```



Zpět

Příklad 2.1.3

Vyšetřete spojitost funkce f na jejím definičním oboru,

$$f(x) = \begin{cases} 2 + x^2 & \text{pro} \quad x \in (-\infty, 0\rangle, \\ \dfrac{\sin(2x)}{x} & \text{pro} \quad x \in (0, 5\rangle. \end{cases}$$

Mathematica:

f[x_]:=Piecewise[{{2 + x^2, $x \leq 0$}, {Sin[2x]/x, $x > 0$}}]

Limit[f[x], $x \to 0$]

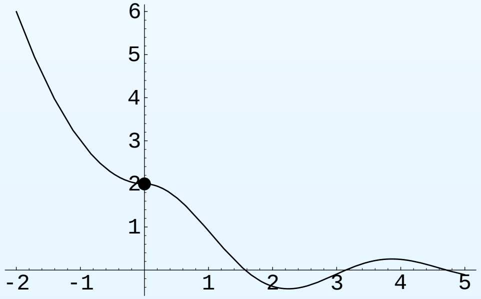
2

f[0]

2

Funkce je spojitá v bodě $x = 0$, je tedy spojitá v celém intervalu $(\infty, 5\rangle$.

g = Plot[f[x], {x, −2, 5}, Epilog → {{Disk[{0, 2}, {0.1, .15}]}}]



Zpět

Limity

- Příklad 2.2.1 Vypočtěte limitu
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\, x + x}{\operatorname{arccotg}\, x}.$$
- Příklad 2.2.2 Vypočtěte následující limitu:
$$\lim_{x\to 1-} \frac{x^2}{\arccos\, x}\ .$$
- Příklad 2.2.3 Vypočtěte limitu
$$\lim_{x\to 1-} \frac{x^2}{\arcsin\, x}\ .$$
- Příklad 2.2.4 Vypočtěte limitu
$$\lim_{x\to -3} \frac{\sqrt{6-x}+x}{3-2x-x^2}.$$
- Příklad 2.2.5 Vypočtěte limity
$$\text{a)}\quad \lim_{x\to 0+} \frac{\ln\, x^2}{x^2} \qquad \text{b)}\quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\, x^2}{x^2}.$$

Zpět

Příklad 2.2.1

Vypočtěte limitu

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x + x}{\operatorname{arccotg} x}.$$

? Zpět

Příklad 2.2.1

Vypočtěte limitu

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\, x + x}{\operatorname{arccotg}\, x}.$$

Výsledek:

$+\infty$.

Zpět

Příklad 2.2.1

Vypočtěte limitu

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x + x}{\operatorname{arccotg} x}.$$

Návod:

Aplikujeme větu o limitě součtu, o limitě podílu a o limitě součinu.

Zpět

Příklad 2.2.1

Vypočtěte limitu
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\, x + x}{\operatorname{arccotg}\, x}.$$

Řešení:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\, x + x}{\operatorname{arccotg}\, x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\operatorname{arccotg}\, x}(\ln\, x + x).$$

Protože $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\, x = +\infty$, je i $\lim\limits_{x\to+\infty} (\ln\, x + x) = +\infty$.
Protože $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{arccotg}\, x = 0+$ (funkce arccotg x je kladná na svém definičním oboru), je $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\operatorname{arccotg}\, x} = +\infty$.

Výsledná limita je tedy "$(+\infty)\cdot(+\infty)$" $= +\infty$.

Zpět

Příklad 2.2.1

Vypočtěte limitu

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x + x}{\operatorname{arccotg} x}.$$

Maple:

```
> limit((ln(x)+x)/arccot(x), x=infinity);
```

$$\infty$$

Zpět

Příklad 2.2.1

Vypočtěte limitu

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x + x}{\operatorname{arccotg} x}.$$

Mathematica:

Limit[(Log[x] + x)/ArcCot[x], $x \to$ Infinity]

∞

Zpět

Příklad 2.2.2

Vypočtěte následující limitu:

$$\lim_{x\to 1-} \frac{x^2}{\arccos x} \ .$$

? Zpět

Příklad 2.2.2

Vypočtěte následující limitu:

$$\lim_{x \to 1-} \frac{x^2}{\arccos x} \,.$$

Výsledek:

$+\infty$.

Zpět

Příklad 2.2.2

Vypočtěte následující limitu:

$$\lim_{x\to 1-} \frac{x^2}{\arccos x} \ .$$

Návod:

Využijte spojitost funkce $y = x^2$ v bodě $x = 1$ a větu o limitě podílu, je-li jmenovatel kladný a limita jmenovatele je 0.

Zpět

Příklad 2.2.2

Vypočtěte následující limitu:

$$\lim_{x\to 1-} \frac{x^2}{\arccos x} \ .$$

Řešení:

Protože funkce $y = x^2$ je spojitá v bodě $x = 1$, je limita funkce rovna v tomto bodě funkční hodnotě: $\lim\limits_{x\to 1-} x^2 = 1$. Funkce $\arccos x$ je nezáporná na svém definičním oboru a $\arccos 1 = 0$, tedy $\lim\limits_{x\to 1-} \arccos x = 0+$. Limita podílu je "$1/(0+)$" $= +\infty$.

Zpět

Příklad 2.2.2

Vypočtěte následující limitu:

$$\lim_{x \to 1-} \frac{x^2}{\arccos x} \; .$$

Maple:

```
> limit(x^2/arccos(x), x=1,left);
```

$$\infty$$

Zpět

Příklad 2.2.2

Vypočtěte následující limitu:

$$\lim_{x \to 1-} \frac{x^2}{\arccos x} \ .$$

Mathematica:

Limit[x^2/ArcCos[x], x → 1, Direction → 1]

∞

Zpět

Příklad 2.2.3

Vypočtěte limitu

$$\lim_{x \to 1-} \frac{x^2}{\arcsin x} \, .$$

? Zpět

Příklad 2.2.3

Vypočtěte limitu

$$\lim_{x \to 1-} \frac{x^2}{\arcsin x} \,.$$

Výsledek:

$2/\pi$.

Zpět

Příklad 2.2.3

Vypočtěte limitu

$$\lim_{x\to 1-} \frac{x^2}{\arcsin x} \,.$$

Návod:

Využijte spojitost obou funkcí a větu o limitě podílu.

Zpět

Příklad 2.2.3

Vypočtěte limitu

$$\lim_{x\to 1-} \frac{x^2}{\arcsin x}\ .$$

Řešení:

Protože funkce $y = x^2$ je spojitá v bodě $x = 1$, je limita funkce rovna v tomto bodě funkční hodnotě: $\lim\limits_{x\to 1-} x^2 = 1$. Protože funkce $y = \arcsin x$ je spojitá zleva v bodě $x = 1$, je $\lim\limits_{x\to 1-} \arcsin x = \pi/2$. Limita podílu je "$1/(\pi/2)$" $= 2/\pi$.

Zpět

Příklad 2.2.3

Vypočtěte limitu
$$\lim_{x\to 1-} \frac{x^2}{\arcsin\, x} \ .$$

Maple:

```
> limit(x^2/arcsin(x), x=1,left);
```

$$\frac{2}{\pi}$$

Zpět

Příklad 2.2.3

Vypočtěte limitu

$$\lim_{x \to 1-} \frac{x^2}{\arcsin x} \ .$$

Mathematica:

Limit[x^2/ArcSin[x], x → 1, Direction → 1]

$\frac{2}{\pi}$

Zpět

Příklad 2.2.4

Vypočtěte limitu

$$\lim_{x\to -3} \frac{\sqrt{6-x}+x}{3-2x-x^2}.$$

? Zpět

Příklad 2.2.4

Vypočtěte limitu

$$\lim_{x\to -3} \frac{\sqrt{6-x}+x}{3-2x-x^2}.$$

Výsledek:

$5/24$.

Zpět

Příklad 2.2.4

Vypočtěte limitu

$$\lim_{x\to -3} \frac{\sqrt{6-x}+x}{3-2x-x^2}.$$

Návod:

Zlomek rozšíříme výrazem $\sqrt{6-x}-x$, vzniklé kvadratické trojčleny rozložíme na kořenové činitele. Zkrátíme-li členy $x+3$, dostaneme funkci, která se na prstencovém okolí bodu -3 rovná funkci, jejíž limitu počítáme, a tedy obě limity se sobě rovnají.

Zpět

Příklad 2.2.4

Vypočtěte limitu

$$\lim_{x\to -3} \frac{\sqrt{6-x}+x}{3-2x-x^2}.$$

Řešení:

$$\lim_{x\to -3} \frac{\sqrt{6-x}+x}{3-2x-x^2} = \lim_{x\to -3} \frac{\sqrt{6-x}+x}{3-2x-x^2}\,\frac{\sqrt{6-x}-x}{\sqrt{6-x}-x} =$$

$$= \lim_{x\to -3} \frac{6-x-x^2}{(3-2x-x^2)(\sqrt{6-x}-x)} = \lim_{x\to -3} \frac{(x+3)(2-x)}{(x+3)(1-x)(\sqrt{6-x}-x)} =$$

$$\lim_{x\to -3} \frac{(2-x)}{(1-x)(\sqrt{6-x}-x)} = \frac{(2-(-3))}{(1-(-3))(\sqrt{6-(-3)}-(-3))} = \frac{5}{4\cdot 6} = \frac{5}{24},$$

kde jsme využili spojitosti funkcí $2-x,\ 1-x$ a $\sqrt{6-x}-x$ v bodě $x=-3$ a faktu, že

$$\frac{\sqrt{6-x}+x}{3-2x-x^2} = \frac{(2-x)}{(1-x)(\sqrt{6-x}-x)} \quad \forall x \in P_\delta(-3),\ \delta>0,$$

a tedy limity obou funkcí pro $x\to -3$ se sobě rovnají.

Zpět

Příklad 2.2.4

Vypočtěte limitu

$$\lim_{x\to -3} \frac{\sqrt{6-x}+x}{3-2x-x^2}.$$

Maple:

```
>  limit((\sqrt(6-x)+x)/(3-2*x-x^2), x=-3);
```

$$\frac{5}{24}$$

Zpět

Příklad 2.2.4

Vypočtěte limitu

$$\lim_{x\to -3} \frac{\sqrt{6-x}+x}{3-2x-x^2}.$$

Mathematica:

$\mathbf{Limit[(Sqrt[(6-x)]+x)/(3-2x-x\string^2), x \rightarrow -3]}$

$\frac{5}{24}$

Zpět

Příklad 2.2.5

Vypočtěte limity

$$\text{a)} \quad \lim_{x\to 0+} \frac{\ln x^2}{x^2} \qquad \text{b)} \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x^2}{x^2}.$$

? Zpět

Příklad 2.2.5

Vypočtěte limity

$$\text{a)}\quad \lim_{x\to 0+} \frac{\ln\, x^2}{x^2} \qquad \text{b)}\quad \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln\, x^2}{x^2}\,.$$

Výsledek:

a) $-\infty$, b) 0 .

Zpět

Příklad 2.2.5

Vypočtěte limity

$$\text{a)} \quad \lim_{x \to 0+} \frac{\ln x^2}{x^2} \qquad \text{b)} \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x^2}{x^2}.$$

Návod:

a) Převeďte na součin "$(+\infty) \cdot (-\infty)$". b) Na výraz "$\dfrac{+\infty}{+\infty}$" aplikujte L'Hospitalovo pravidlo.

Zpět

Příklad 2.2.5

Vypočtěte limity

$$\text{a)} \quad \lim_{x\to 0+} \frac{\ln x^2}{x^2} \qquad \text{b)} \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x^2}{x^2}.$$

Řešení:

a)

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\ln x^2}{x^2} = \lim_{x\to 0+} \frac{1}{x^2} \ln x^2 = \text{"}(+\infty)\cdot(-\infty)\text{"} = -\infty.$$

Protože $\lim\limits_{x\to 0+} x^2 = 0+$ (funkce je kladná na prstencovém okolí bodu 0), je $\lim\limits_{x\to 0+} \frac{1}{x^2} = +\infty$ a $\lim\limits_{x\to 0+} \ln x^2 = -\infty$.

b) Protože $\lim\limits_{x\to +\infty} x^2 = +\infty$ a $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln x^2 = +\infty$, počítáme limitu neurčitého výrazu "$\frac{+\infty}{+\infty}$". Aplikujeme L'Hospitalovo pravidlo a pokud existuje limita podílu derivací, obě limity se rovnají:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x^2}{x^2} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{1}{x^2}\, 2x}{2x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0.$$

Zpět

Příklad 2.2.5

Vypočtěte limity

$$\text{a)}\quad \lim_{x\to 0+} \frac{\ln\, x^2}{x^2} \qquad \text{b)}\quad \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln\, x^2}{x^2}.$$

Maple:

a)

```
>   limit(ln(x^2)/x^2, x=0,right);
```

$$-\infty$$

b)

```
>   limit(ln(x^2)/x^2, x=infinity);
```

$$0$$

Zpět

Příklad 2.2.5

Vypočtěte limity

$$\text{a)} \quad \lim_{x\to 0+} \frac{\ln\, x^2}{x^2} \qquad \text{b)} \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln\, x^2}{x^2}.$$

Mathematica:

a)

Limit[Log[*x*^2]/*x*^2, *x* → 0, Direction → 1]

$-\infty$

b)

Limit[Log[*x*^2]/*x*^2, *x* → Infinity]

0

Zpět

Limita posloupností

- **Příklad 2.3.1** Vypočtěte limitu posloupnosti:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n - 1}{2^n + 1}.$$

- **Příklad 2.3.2** Vypočtěte limitu posloupnosti:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{3n}\right)^{6n+5}.$$

Zpět

Příklad 2.3.1

Vypočtěte limitu posloupnosti:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n - 1}{2^n + 1}.$$

? Zpět

Příklad 2.3.1

Vypočtěte limitu posloupnosti:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n - 1}{2^n + 1}.$$

Výsledek:

1 .

Zpět

Příklad 2.3.1

Vypočtěte limitu posloupnosti:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n - 1}{2^n + 1}.$$

Návod:

Vytkneme v čitateli i ve jmenovateli 2^n.

Zpět

Příklad 2.3.1

Vypočtěte limitu posloupnosti:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n - 1}{2^n + 1}.$$

Řešení:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n - 1}{2^n + 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n(1 - \frac{1}{2^n})}{2^n(1 + \frac{1}{2^n})} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 + \frac{1}{2^n}} = \frac{1-0}{1+0} = 1.$$

Využili jsme toho, že $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$.

Zpět

Příklad 2.3.1

Vypočtěte limitu posloupnosti:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n - 1}{2^n + 1}.$$

Maple:

```
> limit((2^n-1)/(2^n+1), n=infinity);
```

$$1$$

Zpět

Příklad 2.3.1

Vypočtěte limitu posloupnosti:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n - 1}{2^n + 1}.$$

Mathematica:

Limit[(2^$\boldsymbol{n}$ − 1)/(2^$\boldsymbol{n}$ + 1), $\boldsymbol{n}$ → Infinity]

1

Zpět

Příklad 2.3.2

Vypočtěte limitu posloupnosti:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{3n}\right)^{6n+5}.$$

? Zpět

Příklad 2.3.2

Vypočtěte limitu posloupnosti:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{3n}\right)^{6n+5}.$$

Výsledek:

e^2 .

Zpět

Příklad 2.3.2

Vypočtěte limitu posloupnosti:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3n}\right)^{6n+5}.$$

Návod:

Využijte toho, že $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=\mathrm{e}.$

Zpět

Příklad 2.3.2

Vypočtěte limitu posloupnosti:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{3n}\right)^{6n+5}.$$

Řešení:

Protože $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = \mathrm{e}$, dostaneme

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{3n}\right)^{6n+5} = \lim_{m\to\infty} \left(1+\frac{1}{m}\right)^{2m+5} =$$

(substituce $m := 3n,\ n \to +\infty \ \Rightarrow\ m \to +\infty$)

$$\lim_{m\to\infty} \left(1+\frac{1}{m}\right)^{2m} \left(1+\frac{1}{m}\right)^{5} = \lim_{m\to\infty} \left(\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}\right)^{2} \left(1+\frac{1}{m}\right)^{5} =$$

$$= \mathrm{e}^2(1+0)^5 = \mathrm{e}^2.$$

Zpět

Příklad 2.3.2

Vypočtěte limitu posloupnosti:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3n}\right)^{6n+5}.$$

Maple:

```
> limit((1+(1/(3*n)))^(6*n+5), n=infinity);
```

$$e^2$$

Zpět

Příklad 2.3.2

Vypočtěte limitu posloupnosti:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{3n}\right)^{6n+5}.$$

Mathematica:

Limit[(1 + (1/(3 * n)))^(6 * n + 5), n → Infinity]

e^2

Zpět

Derivace funkce a parciální derivace

- Derivace funkce jedné proměnné
- Derivace vyšších řádů
- L'Hospitalovo pravidlo
- Parciální derivace

Zpět

Derivace funkce jedné proměnné

- Příklad 3.1.1 Vypočtěte z definice derivaci funkce $f(x) = x^2$ v bodě $x_0 = 3$.
- Příklad 3.1.2 Vypočtěte z definice derivaci funkce $f(x) = \frac{1}{x^2}$ v bodě $x_0 = 1$.
- Příklad 3.1.3 Vypočtěte z definice derivaci funkce $f(x) = \sin x$ v bodě $x_0 = \pi$.

Zpět

Příklad 3.1.1

Vypočtěte z definice derivaci funkce $f(x) = x^2$ v bodě $x_0 = 3$.

? Zpět

Příklad 3.1.1

Vypočtěte z definice derivaci funkce $f(x) = x^2$ v bodě $x_0 = 3$.

Výsledek:

$f'(3) = 6$.

Zpět

Příklad 3.1.1

Vypočtěte z definice derivaci funkce $f(x) = x^2$ v bodě $x_0 = 3$.

Návod:

Využijete definice derivace

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Zpět

Příklad 3.1.1

Vypočtěte z definice derivaci funkce $f(x) = x^2$ v bodě $x_0 = 3$.

Řešení:

K výpočtu využijeme definice derivace

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Podle této definice můžeme psát

$$f'(3) = \lim_{x \to 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{(x-3)(x+3)}{x - 3} = \lim_{x \to 3} (x + 3) = 6.$$

Zpět

Příklad 3.1.1

Vypočtěte z definice derivaci funkce $f(x) = x^2$ v bodě $x_0 = 3$.

Maple:

```
> f:=x->x^2;
```

$$f := x \to x^2$$

```
> derf3:=limit((f(x)-f(3))/(x-3),x=3);
```

$$derf3 := 6$$

Zpět

Příklad 3.1.1

Vypočtěte z definice derivaci funkce $f(x) = x^2$ v bodě $x_0 = 3$.

Mathematica:

f[x_] = x^2

x^2

derf3 = Limit[(f[x] − f[3])/(x − 3), $x \to$ 3]

6

Zpět

Příklad 3.1.2

Vypočtěte z definice derivaci funkce $f(x) = \frac{1}{x^2}$ v bodě $x_0 = 1$.

?

Zpět

Příklad 3.1.2

Vypočtěte z definice derivaci funkce $f(x) = \frac{1}{x^2}$ v bodě $x_0 = 1$.

Výsledek:

$f'(1) = -2$.

Zpět

Příklad 3.1.2

Vypočtěte z definice derivaci funkce $f(x) = \frac{1}{x^2}$ v bodě $x_0 = 1$.

Návod:

Využijete definice derivace

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \, .$$

Zpět

Příklad 3.1.2

Vypočtěte z definice derivaci funkce $f(x) = \frac{1}{x^2}$ v bodě $x_0 = 1$.

Řešení:

K výpočtu využijeme definice derivace

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Podle této definice můžeme psát

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{\frac{1}{x^2} - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{\frac{1-x^2}{x^2}}{x - 1} = \\ &= \lim_{x \to 1} \frac{1 - x^2}{x^2 (x - 1)} = \lim_{x \to 1} \frac{(1 - x)(1 + x)}{x^2 (x - 1)} = \lim_{x \to 1} \frac{-(1 + x)}{x^2} = -2. \end{aligned}$$

Zpět

Příklad 3.1.2

Vypočtěte z definice derivaci funkce $f(x) = \frac{1}{x^2}$ v bodě $x_0 = 1$.

Maple:

```
> f:=x->1/x^2;
```

$$f := x \rightarrow \frac{1}{x^2}$$

```
> derf1:=limit((f(x)-f(1))/(x-1),x=1);
```

$$\mathit{derf1} := -2$$

Zpět

Příklad 3.1.2

Vypočtěte z definice derivaci funkce $f(x) = \frac{1}{x^2}$ v bodě $x_0 = 1$.

Mathematica:

f[x_] = 1/x^2

$\frac{1}{x^2}$

derf1 = Limit[(f[x] − f[1])/(x − 1), x → 1]

-2

Zpět

Příklad 3.1.3

Vypočtěte z definice derivaci funkce $f(x) = \sin x$ v bodě $x_0 = \pi$.

? Zpět

Příklad 3.1.3

Vypočtěte z definice derivaci funkce $f(x) = \sin x$ v bodě $x_0 = \pi$.

Výsledek:

$f'(\pi) - 1$.

Zpět

Příklad 3.1.3

Vypočtěte z definice derivaci funkce $f(x) = \sin x$ v bodě $x_0 = \pi$.

Návod:

Využijte definici derivace

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

a vzorec

$$\sin(x) - \sin(y) = 2\, \sin(\frac{x-y}{2})\, \cos(\frac{x+y}{2})\, .$$

Zpět

Příklad 3.1.3

Vypočtěte z definice derivaci funkce $f(x) = \sin x$ v bodě $x_0 = \pi$.

Řešení:

K výpočtu využijeme definice derivace

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} .$$

Podle této definice můžeme psát

$$\begin{aligned} f'(\pi) &= \lim_{x \to \pi} \frac{f(x) - f(\pi)}{x - \pi} = \lim_{x \to \pi} \frac{\sin(x) - \sin(\pi)}{x - \pi} = \lim_{x \to \pi} \frac{2\cos(\frac{x+\pi}{2})\ \sin(\frac{x-\pi}{2})}{x - \pi} = \\ &= \lim_{x \to \pi} \cos(\frac{x+\pi}{2})\ \frac{\sin(\frac{x-\pi}{2})}{\frac{x-\pi}{2}} = \cos(\pi) = -1 . \end{aligned}$$

Použili jsme vzorec

$$\sin(x) - \sin(y) = 2\ \sin(\frac{x-y}{2})\ \cos(\frac{x+y}{2})$$

Zpět

Příklad 3.1.3

Vypočtěte z definice derivaci funkce $f(x) = \sin x$ v bodě $x_0 = \pi$.

Maple:

```
> f:=x->sin(x);
```

$$f := x \to \sin(x)$$

```
> derf1:=limit((f(x)-f(Pi))/(x-Pi),x=Pi);
```

$$\mathit{derf1} := -1$$

Zpět

Příklad 3.1.3

Vypočtěte z definice derivaci funkce $f(x) = \sin x$ v bodě $x_0 = \pi$.

Mathematica:

f[x_] = Sin[x]

Sin[x]

derf1 = Limit[(f[x] − f[Pi])/(x − Pi), x → Pi]

−1

Zpět

Derivace vyšších řádů

- Příklad 3.2.1 Vypočtěte druhou derivaci funkce $f(x) = x^2 \sin(x)$.
- Příklad 3.2.2 Vypočtěte druhou derivaci funkce $f(x) = \dfrac{x^2}{\ln(x)}$.
- Příklad 3.2.3 Vypočtěte třetí derivaci funkce $f(x) = \frac{3}{x^2+1}$ v bodě $x_0 = 1$.

Zpět

Příklad 3.2.1

Vypočtěte druhou derivaci funkce $f(x) = x^2 \sin(x)$.

? Zpět

Příklad 3.2.1

Vypočtěte druhou derivaci funkce $f(x) = x^2 \sin(x)$.

Výsledek:

$f''(x) = -\sin(x)x^2 + 4\cos(x)x + 2\sin(x)$.

Zpět

Příklad 3.2.1

Vypočtěte druhou derivaci funkce $f(x) = x^2 \sin(x)$.

Návod:

$$f''(x) = \Big(f'(x)\Big)'.$$

Zpět

Příklad 3.2.1

Vypočtěte druhou derivaci funkce $f(x) = x^2 \sin(x)$.

Řešení:

$$
\begin{aligned}
f''(x) &= \left((x^2 \sin(x))'\right)' = \left(2x \sin(x) + x^2 \cos(x)\right)' = \\
&= 2 \sin(x) + 2x \cos(x) + 2x \cos(x) - x^2 \sin(x) = \\
&= -x^2 \sin(x) + 4x \cos(x) + 2 \sin(x) .
\end{aligned}
$$

Zpět

Příklad 3.2.1

Vypočtěte druhou derivaci funkce $f(x) = x^2 \sin(x)$.

Maple:

Definice funkce

```
> f:=x->x^2*sin(x);
```

$$f := x \to x^2 \sin(x)$$

První derivace:

```
> f1:=unapply(diff(f(x),x),x);
```

$$f1 := x \to 2\,x \sin(x) + x^2 \cos(x)$$

Druhá derivace:

```
> f2:=unapply(diff(f1(x),x),x);
```

$$f2 := x \to 2 \sin(x) + 4\,x \cos(x) - x^2 \sin(x)$$

Zpět

Příklad 3.2.1

Vypočtěte druhou derivaci funkce $f(x) = x^2 \sin(x)$.

Mathematica:

$\boldsymbol{f[\mathbf{x\_}] = x\hat{\ }2\mathbf{Sin}[x]}$

$x^2\mathrm{Sin}[x]$

$\boldsymbol{D[f[x], x]}$

$x^2\mathrm{Cos}[x] + 2x\mathrm{Sin}[x]$

$\boldsymbol{D[D[f[x], x], x]}$

$4x\mathrm{Cos}[x] + 2\mathrm{Sin}[x] - x^2\mathrm{Sin}[x]$

Zpět

Příklad 3.2.2

Vypočtěte druhou derivaci funkce $f(x) = \dfrac{x^2}{\ln(x)}$.

? Zpět

Příklad 3.2.2

Vypočtěte druhou derivaci funkce $f(x) = \dfrac{x^2}{\ln(x)}$.

Výsledek:

$$f''(x) = \frac{2}{\ln(x)} - \frac{3}{\ln^2(x)} + \frac{2}{\ln^3(x)} \,.$$

Zpět

Příklad 3.2.2

Vypočtěte druhou derivaci funkce $f(x) = \dfrac{x^2}{\ln(x)}$.

Návod:

$f''(x) = \Big(f'(x)\Big)'$.

Zpět

Příklad 3.2.2

Vypočtěte druhou derivaci funkce $f(x) = \dfrac{x^2}{\ln(x)}$.

Řešení:

$$
\begin{aligned}
f''(x) &= \left(\left(\frac{x^2}{\ln(x)}\right)'\right)' = \left(\frac{2x\ln(x) - x^2\,\frac{1}{x}}{\ln^2(x)}\right)' = \left(\frac{2x}{\ln(x)} - \frac{x}{\ln^2(x)}\right)' = \\
&= \frac{2\ln(x) - 2x\,\frac{1}{x}}{\ln^2(x)} - \frac{\ln^2(x) - x\,2\,\ln(x)\,\frac{1}{x}}{\ln^4(x)} = \frac{2}{\ln(x)} - \frac{3}{\ln^2(x)} + \frac{2}{\ln^3(x)} .
\end{aligned}
$$

Zpět

Příklad 3.2.2

Vypočtěte druhou derivaci funkce $f(x) = \dfrac{x^2}{\ln(x)}$.

Maple:

Definice funkce

```
> f:=x->x^2/ln(x);
```

$$f := x \to \frac{x^2}{\ln(x)}$$

První derivace:

```
> f1:=unapply(diff(f(x),x),x);
```

$$f1 := x \to \frac{2\,x}{\ln(x)} - \frac{x}{\ln(x)^2}$$

Druhá derivace:

```
> f2:=unapply(diff(f1(x),x),x);
```

$$f2 := x \to \frac{2}{\ln(x)} - \frac{3}{\ln(x)^2} + \frac{2}{\ln(x)^3}$$

Zpět

Příklad 3.2.2

Vypočtěte druhou derivaci funkce $f(x) = \dfrac{x^2}{\ln(x)}$.

Mathematica:

f[x_] = x^2/Log[x]

$\frac{x^2}{\text{Log}[x]}$

D[f[x], x]

$-\frac{x}{\text{Log}[x]^2} + \frac{2x}{\text{Log}[x]}$

D[D[f[x], x], x]

$\frac{2}{\text{Log}[x]^3} - \frac{3}{\text{Log}[x]^2} + \frac{2}{\text{Log}[x]}$

Zpět

Příklad 3.2.3

Vypočtěte třetí derivaci funkce $f(x) = \frac{3}{x^2+1}$ v bodě $x_0 = 1$.

? Zpět

Příklad 3.2.3

Vypočtěte třetí derivaci funkce $f(x) = \frac{3}{x^2+1}$ v bodě $x_0 = 1$.

Výsledek:

$$f'''(x) = -\frac{72\,x\,(x^2-1)}{(x^2+1)^4}\,,\ f'''(1) = 0\,.$$

Zpět

Příklad 3.2.3

Vypočtěte třetí derivaci funkce $f(x) = \frac{3}{x^2+1}$ v bodě $x_0 = 1$.

Návod:

$f'''(x) = (((f'(x))')'$, do vypočtené třetí derivace dosadíme $x = 1$.

Zpět

Příklad 3.2.3

Vypočtěte třetí derivaci funkce $f(x) = \frac{3}{x^2+1}$ v bodě $x_0 = 1$.

Řešení:

Nejdříve vypočteme první, druhou a třetí derivaci:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= -\frac{6x}{(x^2+1)^2} \\
f''(x) &= -\left(\frac{6x}{(x^2+1)^2}\right)' = -\frac{6(x^2+1)^2 - 6x2(x^2+1)2x}{(x^2+1)^4} = -\frac{6(x^2+1) - 24x^2}{(x^2+1)^3} = \\
&= \frac{6\,(3\,x^2-1)}{(x^2+1)^3} \\
f'''(x) &= \left(\frac{6\,(3\,x^2-1)}{(x^2+1)^3}\right)' = \frac{36x(x^2+1)^3 - (6(3x^2-1)3(x^2+1)^2 2x}{(x^2+1)^6} = \\
&= \frac{36x(x^2+1) - 36(3x^2-1)x}{(x^2+1)^4} = -\frac{72\,x\,(x^2-1)}{(x^2+1)^4}
\end{aligned}
$$

Nyní dosadíme do třetí derivace za x jedničku:
$f'''(1) = 0$.

Zpět

Příklad 3.2.3

Vypočtěte třetí derivaci funkce $f(x) = \frac{3}{x^2+1}$ v bodě $x_0 = 1$.

Maple:

```
> f:=x->3/(x^2+1);
```

$$f := x \to \frac{3}{x^2+1}$$

První derivace:

```
> fd1:=diff(f(x),x);
```

$$fd1 := -\frac{6\,x}{(x^2+1)^2}$$

Druhá derivace:

```
> fd2:=simplify(diff(f(x),x$2));
```

$$fd2 := \frac{6\,(3\,x^2-1)}{(x^2+1)^3}$$

Třetí derivace:

```
> fd3:=unapply(simplify(diff(f(x),x$3)),x);
```

$$fd3 := x \to -\frac{72\,x\,(x^2-1)}{(x^2+1)^4}$$

Dosazení hodnoty:

```
> fd3(1);
```

$$0$$

Zpět

Příklad 3.2.3

Vypočtěte třetí derivaci funkce $f(x) = \frac{3}{x^2+1}$ v bodě $x_0 = 1$.

Mathematica:

$\boldsymbol{f[\mathrm{x\_}] = 3/(x\hat{\ }2 + 1)}$

$\frac{3}{1+x^2}$

První derivace:
$\boldsymbol{\mathrm{fd1[x\_]} = D[f[x], x]}$

$-\frac{6x}{\left(1+x^2\right)^2}$

Druhá derivace:
$\boldsymbol{\mathrm{fd2[x\_]} = \mathrm{Simplify}[D[f[x], \{x, 2\}]]}$

$\frac{6\left(-1+3x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^3}$

Třetí derivace:
$\boldsymbol{\mathrm{fd3[x\_]} = \mathrm{Simplify}[D[f[x], \{x, 3\}]]}$

$-\frac{72x\left(-1+x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^4}$

Dosazení hodnoty do třetí derivace:
fd3[1]

0

Zpět

L'Hospitalovo pravidlo

- Příklad 3.3.1 Vypočtěte limitu $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^4+2x^3-21x^2-22x+40}{x^4-5x^2+4}$.
- Příklad 3.3.2 Vypočtěte limitu $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{\arcsin x}$.
- Příklad 3.3.3 Vypočtěte limitu $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\sqrt[3]{x^2}-1}{x-1}$.
- Příklad 3.3.4 Vypočtěte limitu $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\ln x}{x^2-1}$.
- Příklad 3.3.5 Vypočtěte limitu $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\ln(x^2+1)}{x^2-2x+4}$.

Zpět

Příklad 3.3.1

Vypočtěte limitu $\lim_{x \to 1} \frac{x^4+2x^3-21x^2-22x+40}{x^4-5x^2+4}$.

? Zpět

Příklad 3.3.1

Vypočtěte limitu $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^4+2x^3-21x^2-22x+40}{x^4-5x^2+4}$.

Výsledek:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^4+2x^3-21x^2-22x+40}{x^4-5x^2+4} = 9\,.$$

Zpět

Příklad 3.3.1

Vypočtěte limitu $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^4+2x^3-21x^2-22x+40}{x^4-5x^2+4}$.

Návod:

Limita je typu "$\frac{0}{0}$", použijeme l'Hospitalovo pravidlo

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

Zpět

Příklad 3.3.1

Vypočtěte limitu $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^4+2x^3-21x^2-22x+40}{x^4-5x^2+4}$.

Řešení:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^4+2x^3-21x^2-22x+40}{x^4-5x^2+4} = „\frac{0}{0}" = \lim_{x\to 1} \frac{(x^4+2x^3-21x^2-22x+40)'}{(x^4-5x^2+4)'} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{4x^3+6x^2-42x-22}{4x^3-10x} = \frac{-54}{-6} = 9\,.$$

Zpět

Příklad 3.3.1

Vypočtěte limitu $\lim_{x\to 1} \frac{x^4+2x^3-21x^2-22x+40}{x^4-5x^2+4}$.

Maple:

Nejdříve si definujeme funkci, z které počítame limitu

```
> f:=x->(x^4 + 2*x^3 - 21*x^2 - 22*x + 40)/(x^4 - 5*x^2 + 4);
```

$$f := x \to \frac{x^4 + 2\,x^3 - 21\,x^2 - 22\,x + 40}{x^4 - 5\,x^2 + 4}$$

Maple nám samozřejmě vypočte limitu přímo

```
> limit(f(x),x=1);
```

$$9$$

Chceme-li použít l'Hospitalovo pravidlo, definujeme si následující funkci

```
> g:=unapply(diff((x^4 + 2*x^3 - 21*x^2 - 22*x + 40),x)/diff((x^4 -
5*x^2 + 4),x),x);
```

$$g := x \to \frac{4\,x^3 + 6\,x^2 - 42\,x - 22}{4\,x^3 - 10\,x}$$

Nyní vypočteme limitu z funkce, která vznikla derivací čitatele a derivací jmenovatele

```
> limit(g(x),x=1);
```

$$9$$

Zpět

Příklad 3.3.1

Vypočtěte limitu $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^4+2x^3-21x^2-22x+40}{x^4-5x^2+4}$.

Mathematica:

Nejdříve si definujeme funkci, z které počítame limitu

$\boldsymbol{f[\mathrm{x\_}] = (x\verb|^|4 + 2x\verb|^|3 - 21x\verb|^|2 - 22x + 40)/(x\verb|^|4 - 5x\verb|^|2 + 4);}$

Mathematica nám samozřejmě vypočte limitu přímo

$\mathbf{Limit}[\boldsymbol{f[x], x \to 1}]$

9

Chceme-li použít l'Hospitalovo pravidlo, definujeme si následující funkci

$\boldsymbol{g[\mathrm{x\_}] = D[x\verb|^|4 + 2x\verb|^|3 - 21x\verb|^|2 - 22x + 40, x]/D[x\verb|^|4 - 5x\verb|^|2 + 4, x]}$

$\frac{-22-42x+6x^2+4x^3}{-10x+4x^3}$

Nyní vypočteme limitu z funkce, která vznikla derivací čitatele a derivací jmenovatele

$\mathbf{Limit}[\boldsymbol{g[x], x \to 1}]$

9

Zpět

Příklad 3.3.2

Vypočtěte limitu $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{\arcsin x}$.

? Zpět

Příklad 3.3.2

Vypočtěte limitu $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{\arcsin x}$.

Výsledek:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{\arcsin x} = 1 \, .$$

Zpět

Příklad 3.3.2

Vypočtěte limitu $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{\arcsin x}$.

Návod:

Limita je typu "$\frac{0}{0}$", použijeme l'Hospitalovo pravidlo

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} ,$$

Zpět

Příklad 3.3.2

Vypočtěte limitu $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{\arcsin x}$.

Řešení:

Protože platí $\lim\limits_{x\to 0} \sin x = 0$ a $\lim\limits_{x\to 0} \arcsin x = 0$, můžeme použít l'Hospitalovo pravidlo.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\arcsin x} \overset{\mathrm{l'Hospital}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{(\sin x)'}{(\arcsin x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} = \frac{1}{\frac{1}{1}} = 1\,.$$

Zpět

Příklad 3.3.2

Vypočtěte limitu $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{\arcsin x}$.

Maple:

Nejdříve si definujeme funkci, z které počítame limitu

```
> f:=x->sin(x)/arcsin(x);
```

$$f := x \to \frac{\sin(x)}{\arcsin(x)}$$

Maple nám samozřejmě vypočte limitu přímo

```
> limit(f(x),x=0);
```

$$1$$

Chceme-li použít l'Hospitalovo pravidlo, definujeme si následující funkci

```
> g:=unapply(diff(sin(x),x)/diff(arcsin(x),x),x);
```

$$g := x \to \cos(x)\sqrt{1 - x^2}$$

Nyní vypočteme limitu z funkce, která vznikla derivací čitatele a derivací jmenovatele

```
> limit(g(x),x=0);
```

$$1$$

Zpět

Příklad 3.3.2

Vypočtěte limitu $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{\arcsin x}$.

Mathematica:

Nejdříve si definujeme funkci, z které počítame limitu
f[x_] = Sin[x]/ArcSin[x];

Mathematica nám samozřejmě vypočte limitu přímo
Limit[f[x], $x \to$ 0]

1

Chceme-li použít l'Hospitalovo pravidlo, definujeme si následující funkci
g[x_] = D[Sin[x], x]/D[ArcSin[x], x]

$\sqrt{1-x^2}\mathrm{Cos}[x]$

Nyní vypočteme limitu z funkce, která vznikla derivací čitatele a derivací jmenovatele
Limit[g[x], $x \to$ 0]

1

Zpět

Příklad 3.3.3

Vypočtěte limitu $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x^2}-1}{x-1}$.

?

Zpět

Příklad 3.3.3

Vypočtěte limitu $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x^2}-1}{x-1}$.

Výsledek:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x^2}-1}{x-1} = \frac{2}{3}\,.$$

Zpět

Příklad 3.3.3

Vypočtěte limitu $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x^2}-1}{x-1}$.

Návod:

Limita je typu "$\frac{0}{0}$", použijeme l'Hospitalovo pravidlo

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \; ,$$

Zpět

Příklad 3.3.3

Vypočtěte limitu $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x^2}-1}{x-1}$.

Řešení:

Protože platí $\lim\limits_{x\to 1} \sqrt[3]{x^2} - 1 = 0$ a $\lim\limits_{x\to 1} x - 1 = 0$, můžeme použít l'Hospitalovo pravidlo.

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x^2} - 1}{x - 1} \overset{\text{l}'\text{Hospital}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{(\sqrt[3]{x^2} - 1)'}{(x-1)'} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{2}{3}\frac{1}{x^{(1/3)}}}{1} = \frac{\frac{2}{3}\frac{1}{1}}{1} = \frac{2}{3} .$$

Zpět

Příklad 3.3.3

Vypočtěte limitu $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x^2}-1}{x-1}$.

Maple:

Nejdříve si definujeme funkci, z které počítame limitu

```
>   f:=x->((x^2)^(1/3) - 1)/(x - 1);
```

$$f := x \to \frac{(x^2)^{(1/3)} - 1}{x-1}$$

Maple nám samozřejmě vypočte limitu přímo

```
>   limit(f(x),x=1);
```

$$\frac{2}{3}$$

Chceme-li použít l'Hospitalovo pravidlo, definujeme si následující funkci

```
>   g:=unapply(diff(((x)^(2/3) - 1),x)/diff((x - 1),x),x);
```

$$g := x \to \frac{2}{3}\,\frac{1}{x^{(1/3)}}$$

Nyní vypočteme limitu z funkce, která vznikla derivací čitatele a derivací jmenovatele

```
>   limit(g(x),x=1);
```

$$\frac{2}{3}$$

Zpět

Příklad 3.3.3

Vypočtěte limitu $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x^2}-1}{x-1}$.

Mathematica:

Nejdříve si definujeme funkci, z které počítame limitu
f[x_] = ((x^2)^(1/3) − 1)/(x − 1);

Mathematica nám samozřejmě vypočte limitu přímo
Limit[f[x], $x \to$ 1]
$\frac{2}{3}$

Chceme-li použít l'Hospitalovo pravidlo, definujeme si následující funkci
g[x_] = Simplify[D[((x^2)^(1/3) − 1), x]/D[(x − 1), x]]
$\frac{2x}{3\left(x^2\right)^{2/3}}$

Nyní vypočteme limitu z funkce, která vznikla derivací čitatele a derivací jmenovatele
Limit[g[x], $x \to$ 1]
$\frac{2}{3}$

Zpět

Příklad 3.3.4

Vypočtěte limitu $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\ln x}{x^2 - 1}$.

? Zpět

Příklad 3.3.4

Vypočtěte limitu $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln x}{x^2-1}$.

Výsledek:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x^2-1} = \frac{1}{2}\ .$$

Zpět

Příklad 3.3.4

Vypočtěte limitu $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln x}{x^2-1}$.

Návod:

Limita je typu "$\frac{0}{0}$", použijeme l'Hospitalovo pravidlo

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} ,$$

Zpět

Příklad 3.3.4

Vypočtěte limitu $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln x}{x^2-1}$.

Řešení:

Protože platí $\lim\limits_{x\to 1} \ln x = 0$ a $\lim\limits_{x\to 1} x^2 - 1 = 0$, můžeme použít l'Hospitalovo pravidlo.

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x^2-1} \overset{\text{l}'\text{Hospital}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{(\ln x)'}{(x^2-1)'} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x}}{2x} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{2x^2} = \frac{1}{2} \, .$$

Zpět

Příklad 3.3.4

Vypočtěte limitu $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln x}{x^2-1}$.

Maple:

Nejdříve si definujeme funkci, z které počítame limitu

```
> f:=x->(ln(x))/(x^2 - 1);
```

$$f := x \to \frac{\ln(x)}{x^2-1}$$

Maple nám samozřejmě vypočte limitu přímo

```
> limit(f(x),x=1);
```

$$\frac{1}{2}$$

Chceme-li použít l'Hospitalovo pravidlo, definujeme si následující funkci

```
> g:=unapply(diff(ln(x),x)/diff((x^2 - 1),x),x);
```

$$g := x \to \frac{1}{2}\,\frac{1}{x^2}$$

Nyní vypočteme limitu z funkce, která vznikla derivací čitatele a derivací jmenovatele

```
> limit(g(x),x=1);
```

$$\frac{1}{2}$$

Zpět

Příklad 3.3.4

Vypočtěte limitu $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\ln x}{x^2 - 1}$.

Mathematica:

Nejdříve si definujeme funkci, z které počítame limitu

$\boldsymbol{f[\mathrm{x\_}] = \mathrm{Log}[x]/(x\hat{}2 - 1)}$

$\frac{\mathrm{Log}[x]}{-1+x^2}$

Mathematica nám samozřejmě vypočte limitu přímo

$\boldsymbol{\mathrm{Limit}[f[x], x \to 1]}$

$\frac{1}{2}$

Chceme-li použít l'Hospitalovo pravidlo, definujeme si následující funkci

$\boldsymbol{g[\mathrm{x\_}] = \mathrm{Simplify}[D[\mathrm{Log}[x], x]/D[(x\hat{}2 - 1), x]]}$

$\frac{1}{2x^2}$

Nyní vypočteme limitu z funkce, která vznikla derivací čitatele a derivací jmenovatele

$\boldsymbol{\mathrm{Limit}[g[x], x \to 1]}$

$\frac{1}{2}$

Zpět

Příklad 3.3.5

Vypočtěte limitu $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{x^2-2x+4}$.

?

Zpět

Příklad 3.3.5

Vypočtěte limitu $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{x^2-2x+4}$.

Výsledek:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{x^2-2x+4} = 0\,.$$

Zpět

Příklad 3.3.5

Vypočtěte limitu $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{x^2-2x+4}$.

Návod:

Limita je typu "$\frac{\infty}{\infty}$", použijeme l'Hospitalovo pravidlo

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \,,$$

Zpět

Příklad 3.3.5

Vypočtěte limitu $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{x^2-2x+4}$.

Řešení:

Protože platí $\lim\limits_{x\to\infty} \ln(x^2+1) = \infty$ a $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 - 2x + 4 = \infty$, můžeme použít l'Hospitalovo pravidlo.

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{x^2-2x+4} &\overset{\text{l}'\text{Hospital}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{(\ln(x^2+1))'}{(x^2-2x+4)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x}{x^2+1}}{2x-2} = \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{x}{(x^2+1)(x-1)} = \text{„}\frac{\infty}{\infty}\text{"} = \\
&\overset{\text{l}'\text{Hospital}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{(x)'}{(x^3-x^2+x-1)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{3x^2-2x+1} = 0\,.
\end{aligned}
$$

Zpět

Příklad 3.3.5

Vypočtěte limitu $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{x^2-2x+4}$.

Maple:

Nejdříve si definujeme funkci, z které počítame limitu

```
> f:=x->(ln(x^2+1))/(x^2 -2*x + 4);
```

$$f := x \to \frac{\ln(x^2+1)}{x^2 - 2\,x + 1}$$

Maple nám samozřejmě vypočte limitu přímo

```
> limit(f(x),x=infty);
```

$$0$$

Chceme-li použít l'Hospitalovo pravidlo, definujeme si následující funkci

```
> g:=unapply(diff(ln(x^2+1),x)/diff(x^2 -2*x + 4,x),x);
```

$$g := x \to \frac{2\,x}{(x^2+1)\,(2\,x-2)}$$

Na tuto funkci musíme opět použít l'Hospitalovo pravidlo

```
> g:=unapply(diff(2*x,x)/expand(diff((x^2+1)*(2*x-2),x)),x);
```

$$g := x \to \frac{2}{6\,x^2 - 4\,x + 2}$$

Nyní vypočteme limitu z funkce, která vznikla dvakrát derivací čitatele a dvakrát derivací jmenovatele

```
> limit(g(x),x=infty);
```

$$0$$

Zpět

Příklad 3.3.5

Vypočtěte limitu $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{x^2-2x+4}$.

Mathematica:

Nejdříve si definujeme funkci, z které počítame limitu
$\boldsymbol{f[\mathrm{x\_}] = \mathrm{Log}[x\char`^2 + 1]/(x\char`^2 - 2x + 1)}$

$\frac{\mathrm{Log}\left[1+x^2\right]}{1-2x+x^2}$

Mathematica nám samozřejmě vypočte limitu přímo
Limit[*f*[*x*], *x* → Infinity]
0

Chceme-li použít l'Hospitalovo pravidlo, definujeme si následující funkci
g[x_] = Simplify[D[Log[x^2 + 1], x]/D[(x^2 − 2x + 1), x]]

$\frac{x}{-1+x-x^2+x^3}$

g[x_] = Simplify[D[x, x]/D[(x^3 − x^2 + x − 1), x]]

$\frac{1}{1-2x+3x^2}$

Nyní vypočteme limitu z funkce, která vznikla druhou derivací čitatele a druhou derivací jmenovatele
Limit[g[x], x → Infinity]
0

Zpět

Parciální derivace

- Příklad 3.4.1 Vypočtěte parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ pro funkci $f(x, y) = x^2\, y^3$.
- Příklad 3.4.2 Vypočtěte parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ pro funkci $f(x, y) = x\, \ln(1 + x^2 + y^2)$.

Zpět

Příklad 3.4.1

Vypočtěte parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ pro funkci $f(x, y) = x^2\, y^3$.

? Zpět

Příklad 3.4.1

Vypočtěte parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ pro funkci $f(x, y) = x^2\, y^3$.

Výsledek:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2\, x\, y^3\,, \; \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3\, x^2\, y^2\,.$$

Zpět

Příklad 3.4.1

Vypočtěte parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ pro funkci $f(x, y) = x^2\, y^3$.

Návod:

Derivujeme funkci $f(x, y) = F(x)$, na y se díváme jako na parametr. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = F'(x)$.

Derivujeme funkci $f(x, y) = G(y)$, na x se díváme jako na parametr. $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = G'(y)$.

Zpět

Příklad 3.4.1

Vypočtěte parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ pro funkci $f(x,y) = x^2\,y^3$.

Řešení:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (x^2)'\,y^3 = 2\,x\,y^3\,,\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2\,(y^3)' = x^2\,3\,y^2 = 3\,x^2\,y^2\,.$$

Zpět

Příklad 3.4.1

Vypočtěte parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ pro funkci $f(x,y) = x^2\,y^3$.

Maple:

```
> f:=(x,y)->x^2*y^3;
```

$$f := (x,\,y) \to x^2\,y^3$$

```
> Diff(f(x,y),x)=diff(f(x,y),x);
```

$$\frac{\partial}{\partial x}\,(x^2\,y^3) = 2\,x\,y^3$$

```
> Diff(f(x,y),y)=diff(f(x,y),y);
```

$$\frac{\partial}{\partial y}\,(x^2\,y^3) = 3\,x^2\,y^2$$

Zpět

Příklad 3.4.1

Vypočtěte parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ pro funkci $f(x, y) = x^2\, y^3$.

Mathematica:

Nejdříve si definujeme funkci

f[x_, y_] = x^2y^3

x^2y^3

Nyní vypočteme parciální derivaci $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$

D[f[x, y], x]

$2xy^3$

a parciální derivaci $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$

D[f[x, y], y]

$3x^2y^2$

Zpět

Příklad 3.4.2

Vypočtěte parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ pro funkci $f(x, y) = x\,\ln(1 + x^2 + y^2)$.

? Zpět

Příklad 3.4.2

Vypočtěte parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ pro funkci $f(x,y) = x\ \ln(1+x^2+y^2)$.

Výsledek:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \ln(1+x^2+y^2) + \frac{2\,x^2}{1+x^2+y^2}\ ,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2\,x\,y}{1+x^2+y^2}\ .$$

Zpět

Příklad 3.4.2

Vypočtěte parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ pro funkci $f(x,y) = x\ \ln(1+x^2+y^2)$.

Návod:

Derivujeme funkci $f(x,y) = F(x)$, na y se díváme jako na parametr. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = F'(x)$.

Derivujeme funkci $f(x,y) = G(y)$, na x se díváme jako na parametr. $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = G'(y)$.

Zpět

Příklad 3.4.2

Vypočtěte parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ pro funkci $f(x,y) = x\ \ln(1+x^2+y^2)$.

Řešení:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= (x)'\ln(1+x^2+y^2) + x\,\frac{\partial}{\partial x}\ln(1+x^2+y^2) = \\
&= 1\ \ln(1+x^2+y^2) + x\,\frac{1}{1+x^2+y^2}\,\frac{\partial}{\partial x}(1+x^2+y^2) \\
&= \ln(1+x^2+y^2) + \frac{x}{1+x^2+y^2}\,2\,x = \ln(1+x^2+y^2) + \frac{2\,x^2}{1+x^2+y^2}\,, \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= x\,\frac{\partial}{\partial y}\ln(1+x^2+y^2) = x\,\frac{1}{1+x^2+y^2}\,\frac{\partial}{\partial y}(1+x^2+y^2) = x\,\frac{1}{1+x^2+y^2}\,2\,y = \\
&= \frac{2\,x\,y}{1+x^2+y^2}\,.
\end{aligned}
$$

Zpět

Příklad 3.4.2

Vypočtěte parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ pro funkci $f(x,y) = x\ \ln(1+x^2+y^2)$.

Maple:

```
>   f:=(x,y)->x*ln(1+x^2+y^2);
```

$$f := (x,\ y) \to x\ln(1+x^2+y^2)$$

```
>   Diff(f(x,y),x)=diff(f(x,y),x);
```

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(x\ln(1+x^2+y^2)\right) = \ln(1+x^2+y^2) + \frac{2\,x^2}{1+x^2+y^2}$$

```
>   Diff(f(x,y),y)=diff(f(x,y),y);
```

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(x\ln(1+x^2+y^2)\right) = \frac{2\,x\,y}{1+x^2+y^2}$$

Zpět

Příklad 3.4.2

Vypočtěte parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ pro funkci $f(x,y) = x\ \ln(1+x^2+y^2)$.

Mathematica:

Nejdříve si definujeme funkci

f[x_, y_] = xLog[1 + x^2 + y^2]

$x\mathrm{Log}\left[1+x^2+y^2\right]$

Nyní vypočteme parciální derivaci $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$

D[f[x, y], x]

$\frac{2x^2}{1+x^2+y^2} + \mathrm{Log}\left[1+x^2+y^2\right]$

a parciální derivaci $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$

D[f[x, y], y]

$\frac{2xy}{1+x^2+y^2}$

Zpět

Průběh funkce jedné proměnné

- Průběh funkce
- Newtonova metoda

Zpět

Průběh funkce

- Příklad 4.1.1 Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \ln^3 x$.
- Příklad 4.1.2 Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$.
- Příklad 4.1.3 Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2}$.

Zpět

Příklad 4.1.1

Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \ln^3 x$.

? Zpět

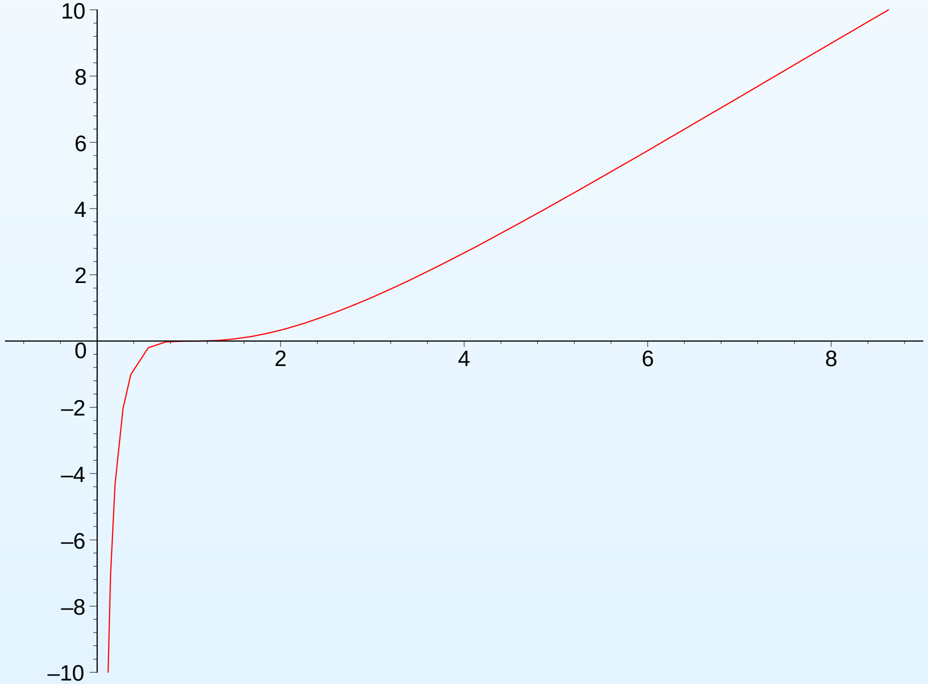
Příklad 4.1.1

Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \ln^3 x$.

Výsledek:

Funkce $f(x) = \ln^3 x$.

x	0	$(0,1)$	1	$(1,e^2)$	e^2	(e^2,∞)	∞
$f(x)$	$-\infty$	-	0	$+$	8	$+$	∞
$f'(x)$		$+$	0	$+$	$+$	$+$	
$f''(x)$		-	0	$+$	0	-	
f		$/ \frown$	infl.	$/ \smile$	infl.	$/ \frown$	
as.	$x = 0$						



Zpět

Příklad 4.1.1

Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \ln^3 x$.

Návod:

Průběh funkce se vyšetřuje v následujících bodech:

1. $D(f)$, sudost, lichost, periodicita, průsečíky se souřadnicovými osami,
2. limity v krajních bodech intervalů, které tvoří D(f), spojitost,
3. monotonnost, extrémy,
4. intervaly konkavity a konvexity, inflexní body,
5. asymptoty,
6. graf funkce.

Zpět

Příklad 4.1.1

Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \ln^3 x$.

Řešení:

1. Definiční obor: Jelikož je funkce y^3 definována pro všechna $y \in \mathbb{R}$ a vnitřní funkce $\ln x$ je definována pouze pro $x \in (0, \infty)$, je $\boxed{D(f) = (0, \infty)}$.

Množina $D(f)$ není symetrická podle počátku a tedy vyšetřovaná funkce není ani sudá ani lichá. Funkce není ani periodická.

Průsečík se souřadnicovou osou x :

$\ln^3 x = 0 \quad \Rightarrow \quad \ln x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1 \quad \Rightarrow \quad$ bod $\boxed{[1, 0]}$.

Zřejmě je funkce záporná v intervalu $(0, 1)$ a kladná v $(1, \infty)$.

2. Funkce je spojitá na $D(f)$.

Limity v krajních bodech $D(f)$: $\boxed{\lim_{x \to 0+} \ln^3 x = -\infty}$, $\boxed{\lim_{x \to \infty} \ln^3 x = \infty}$.

3. Vypočteme první derivaci f' a pro určení monotonnosti funkce stanovíme, kdy je f' rovna 0, kladná a záporná (přičemž se omezíme pouze na $D(f)$):

$$f'(x) = \frac{3 \ln^2 x}{x} ,$$

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1 ,$$

$$f'(x) > 0 , \text{ pro } \forall x \in (0, \infty) \setminus \{1\} .$$

Funkce je tedy na celém definičním oboru rostoucí a nenabývá lokálních ani globálních extrémů. Tečnou ke grafu funkce v bodě $[1, 0]$ je osa x $(f'(x) = 0)$.

Další

Příklad 4.1.1

Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \ln^3 x$.

Řešení:

4. Vypočteme druhou derivaci f'' a upravíme ji na tvar vhodný pro určení intervalů konvexity, konkavity funkce a pro stanovení inflexních bodů (omezíme se znovu pouze na $D(f)$):

$$f''(x) = \frac{3\ln x\,(2-\ln x)}{x^2}\,,$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow\ x = 1 \vee x = \mathrm{e}^2\,.$$

Snadno zjistíme, že

$$f''(x) < 0 \text{ pro } x \in (0,1) \cup (\mathrm{e}^2,\infty) \ \Rightarrow\ f \text{ je konkávní na } (0,1) \text{ a na } (\mathrm{e}^2,\infty)\,,$$

$$f''(x) > 0 \text{ pro } x \in (1,\mathrm{e}^2) \ \Rightarrow\ f \text{ je konvexní na } (1,\mathrm{e}^2)\,.$$

Funkce má v bodech $x = 1$ a $x = \mathrm{e}^2$ inflexi. Body $\boxed{[1,0]}$ a $\boxed{[\mathrm{e}^2,8]}$ jsou tedy inflexními body funkce.

5. Svislou asymptotou funkce f je přímka $x = 0$ (to plyne z limity zjištěné v bodě 2.). Hledejme šikmou asymptotu pro $x \to +\infty$ ve tvaru $y = kx + q$:

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln^3 x}{x} = 0\ , \quad q = \lim_{x\to\infty}(f(x) - kx) = \lim_{x\to\infty}\ln^3 x = \infty$$

Při výpočtu limity pro výpočet konstanty k jsme použili 3x l'Hospitalova pravidla. Poslední limita pro q je nevlastní (viz 2.), tedy šikmá asymptota neexistuje.

Další

Příklad 4.1.1

Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \ln^3 x$.

Řešení:

6. Výsledky shrnuté do tabulky :

Funkce $f(x) = \ln^3 x$.

x	0	$(0,1)$	1	$(1,e^2)$	e^2	(e^2,∞)	∞
$f(x)$	$-\infty$	-	0	$+$	8	$+$	∞
$f'(x)$		$+$	0	$+$	$+$	$+$	
$f''(x)$		-	0	$+$	0	-	
f		$/ \frown$	infl.	$/ \smile$	infl.	$/ \frown$	
as.	$x = 0$						

Graf funkce: viz řešeni v systému Maple.

Zpět

Příklad 4.1.1

Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \ln^3 x$.

Maple:

```
> with(plots):
> f1:=x->(ln(x))^3;
```

$$f1 := x \to \ln(x)^3$$

1. Definiční obor:

```
> solve(x>0,x);
```

$$\mathrm{RealRange}(\mathrm{Open}(0),\ \infty)$$

Nebylo potřeba řešit, ihned patrné, že D(f1) = $(0, \infty)$. Průsečíky s osami:
Našel se průsečík s osou y, y =0.

```
> {solve(f1(x)=0,x)};
```

$$\{1\}$$

Našel se průsečík s osou x, x =1.
2. Limity v krajních bodech intervalů, které tvoří D(f):
$\lim_{x\to 0}$ f$(x) = -\infty$, $\lim_{x\to\infty}$ f$(x) = \infty$

```
> limit(f1(x), x = 0);
```

$$-\infty$$

```
> limit(f1(x), x = infinity);
```

$$\infty$$

Fce je spojitá v D(f1) = $(0, \infty)$.

Další

Příklad 4.1.1

Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \ln^3 x$.

Maple:

3. Stacionární body, intervaly monotonie, extrémy:

```
> df1:=D(f1);
```

$$df1 := x \to \frac{3\ln(x)^2}{x}$$

```
> solve(df1(x)>0,x);
```

$$\mathrm{RealRange}(\mathrm{Open}(0), \mathrm{Open}(1)), \mathrm{RealRange}(\mathrm{Open}(1), \infty)$$

```
> solve(df1(x)=0,x);
```

$$1$$

Bod "1" je tzv. stacionární bod, muže v něm být extrém. Není v něm lokální extrém funkce. První derivace funkce je kromě bodu "1" kladná, funkce je všude v definičním oboru rostoucí.

4. Intervaly konvexnosti resp. konkávnosti, inflexní body .

$$0$$

```
> ddf1:=D(df1);
```

$$ddf1 := x \to \frac{6\ln(x)}{x^2} - \frac{3\ln(x)^2}{x^2}$$

```
> solve(ddf1(x)<0,x);
```

$$\mathrm{RealRange}(\mathrm{Open}(0), \mathrm{Open}(1)), \mathrm{RealRange}(\mathrm{Open}(e^2), \infty)$$

Další

Příklad 4.1.1

Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \ln^3 x$.

Maple:

Zřejmě v uvedených intervalech je funkce konkávní , jinde konvexní. Druhá derivace funkce f1 v bodě "1" a " e^2" je rovna 0 a funkce zde má inflexní body.

```
> solve(ddf1(x)=0,x);
```

$$1,\ e^2$$

```
> f1(1);
```

$$0$$

```
> f1(exp(2));
```

$$8$$

V bodech [1 , 0], [e^2 , 8] se nacházejí inflexní body grafu funkce f1. 5. Asymptoty:

Funkce má svislou asymptotu x=0 , nebot funkce má v "0" nevlastní jednostrannou limitu. Šikmé asymptoty nemá, neboť

```
> k:=limit((ln(x))/x,x=infinity); q:=limit(f1(x)-k*x,x=infinity);
```

$$k := 0$$
$$q := \infty$$

Další

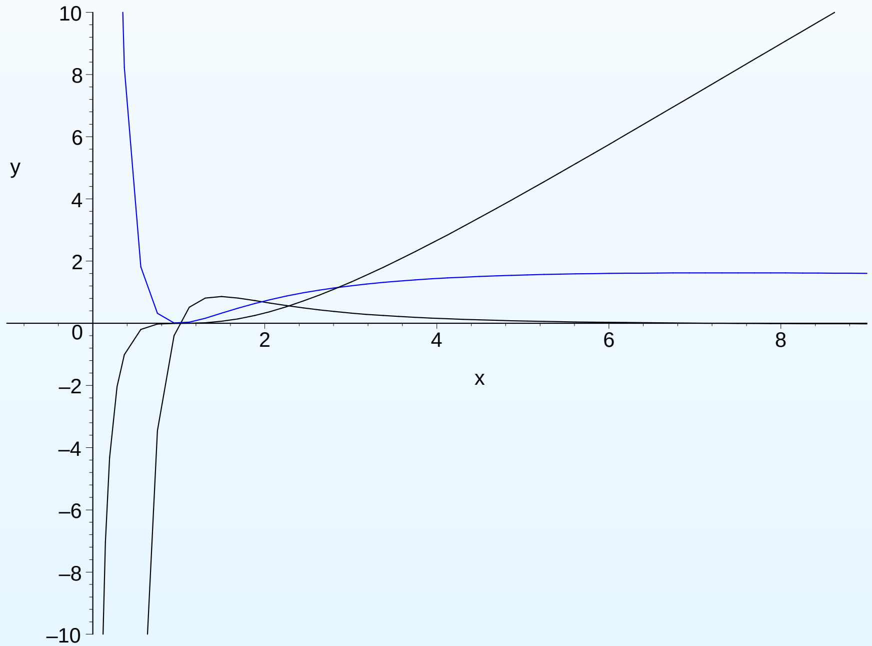
Příklad 4.1.1

Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \ln^3 x$.

Maple:

6) Graf funkce, H(f): Zobrazíme graf (červená barva.) spolu s grafem první (modrá barva) a druhé derivace funkce (zelená barva):

```
> plot([f1(x),df1(x),ddf1(x)],x = -1..15,y = -10..15, discont =
true,color=[red,blue,green]);
```



Zřejmě H(f)=(- ∞,∞).

Zpět

Příklad 4.1.1

Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \ln^3 x$.

Mathematica:

f[x_] = Log[x]^3

$\mathrm{Log}[x]^3$

1. Definiční obor:
Není potřeba řešit, ihned patrné, že D(f) = (0, ∞).
Průsečíky s osami:

Solve[f[x] == 0, x]
$\{\{x \to 1\}\}$
Našel se průsečík s osou x, x =1.

2. Limity v krajních bodech intervalů, které tvoří D(f):

Limit[f[x], x → 0, Direction → −1]
$-\infty$
Limit[f[x], x → Infinity]
∞

3. Stacionární body, intervaly monotonie, extrémy:

f1[x_] = D[f[x], x]
$\frac{3\mathrm{Log}[x]^2}{x}$
Solve[f1[x] == 0, x]
$\{\{x \to 1\}\}$

Další

Příklad 4.1.1

Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \ln^3 x$.

Mathematica:

Simplify[f1[x] > 0]

$\frac{\mathrm{Log}[x]^2}{x} > 0$

Bod "1" je tzv. stacionární bod, muže v něm být extrém. Není v něm lokální extrém funkce. První derivace funkce je kromě bodu "1" kladná, funkce je všude v definičním oboru rostoucí.

4. Intervaly konvexnosti resp. konkávnosti, inflexní body .

f2[x] = D[f1[x], x]

$\frac{6\mathrm{Log}[x]}{x^2} - \frac{3\mathrm{Log}[x]^2}{x^2}$

Solve[f2[x] == 0, x]

$\{\{x \to 1\}, \{x \to e^2\}\}$

Simplify[f2[x] > 0]

$\frac{(-2+\mathrm{Log}[x])\mathrm{Log}[x]}{x^2} < 0$

Simplify[−2 + Log[x] < 0&&Log[x] > 0||
−2 + Log[x] > 0&&Log[x] < 0]

$0 < \mathrm{Log}[x] < 2$

Simplify[f2[x] < 0]

$\frac{(-2+\mathrm{Log}[x])\mathrm{Log}[x]}{x^2} > 0$

Simplify[−2 + Log[x] < 0&&Log[x] < 0||
−2 + Log[x] > 0&&Log[x] > 0]

$\mathrm{Log}[x] > 2 \| \mathrm{Log}[x] < 0$

Další

Příklad 4.1.1

Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \ln^3 x$.

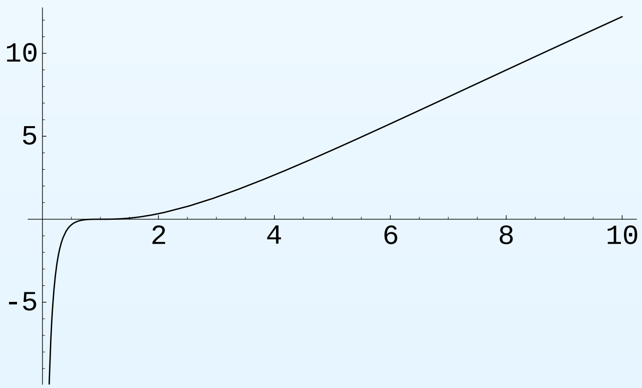
Mathematica:

Zřejmě v intervalech $(0, 1)$ a (e^2, ∞) je funkce konkávní , jinde konvexní. V bodech [1 , 0], [e^2 , 8] se nacházejí inflexní body grafu funkce f.

5. Asymptoty: Funkce má svislou asymptotu x=0 , nebot funkce má v "0" nevlastní jednostrannou limitu. Šikmé asymptoty nemá, neboť

$\boldsymbol{k = \mathrm{Limit}[f[x]/x, x \to \mathrm{Infinity}]}$
0
$\boldsymbol{q = \mathrm{Limit}[f[x] - kx, x \to \mathrm{Infinity}]}$
∞

6) Graf funkce, H(f):
$\boldsymbol{\mathrm{Plot}[f[x], \{x, 0, 10\}]}$



;

Zřejmě H(f)=(- ∞,∞).

Zpět

Příklad 4.1.2

Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$.

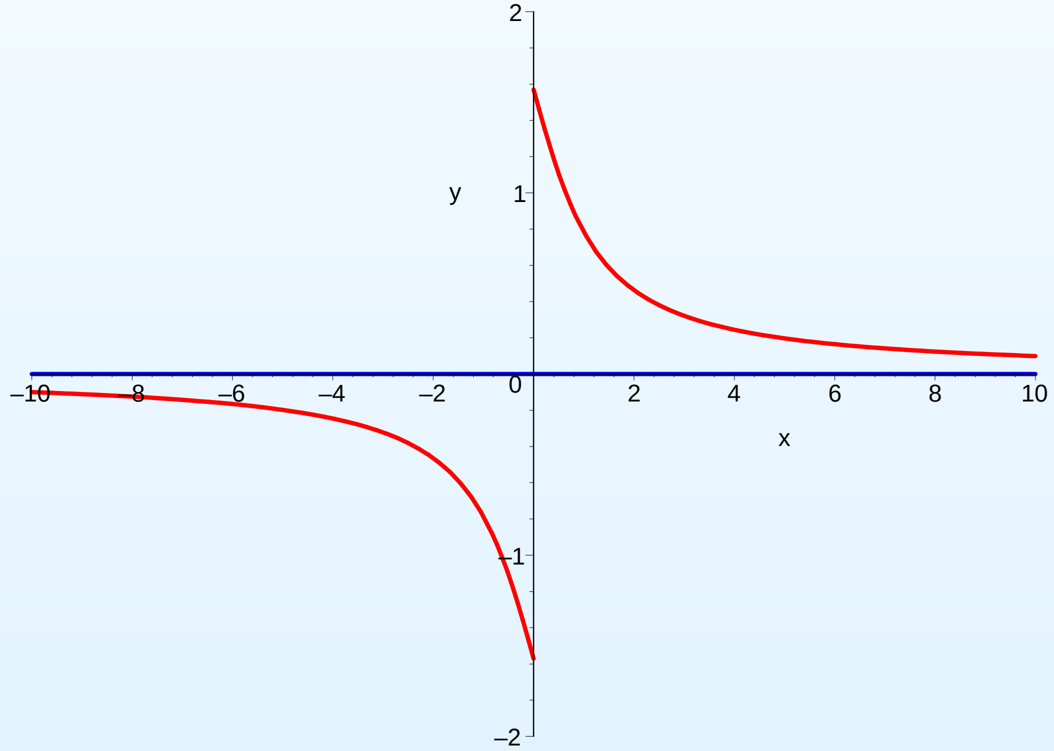
? Zpět

Příklad 4.1.2

Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$.

Výsledek:

x	$-\infty$	$(-\infty, 0)$	0_-	0_+	$(0, \infty)$	∞
$f(x)$	0	-	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$+$	0
$f'(x)$		-			-	
$f''(x)$		-			$+$	
f		$\searrow \frown$			$\searrow \smile$	
as.	$y = 0$					$y = 0$



Zpět

Příklad 4.1.2

Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$.

Návod:

Průběh funkce se vyšetřuje v následujících bodech:

1. $D(f)$, sudost, lichost, periodicita, průsečíky se souřadnicovými osami,
2. limity v krajních bodech intervalů, které tvoří D(f), spojitost,
3. monotonnost, extrémy,
4. intervaly konkavity a konvexity, inflexní body,
5. asymptoty,
6. graf funkce.

Zpět

Příklad 4.1.2

Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \operatorname{arctg}\frac{1}{x}$.

Řešení:

1. Definiční obor: Funkce $\operatorname{arctg} y$ je definována pro všechna $y \in \mathbb{R}$. Vnitřní funkce $y = \frac{1}{x}$ je definována pouze pro $x \neq 0$. Tedy

$$\boxed{D(f) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)}.$$

Množina $D(f)$ je symetrická podle počátku, vyšetříme tedy, zda je funkce sudá, případně lichá. Platí

$$f(-x) = \operatorname{arctg}\frac{1}{-x} = \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{x}\right) = -\operatorname{arctg}\frac{1}{x} = -f(x)\,,$$

tedy funkce je lichá a stačí vyšetřovat její průběh na intervalu $(0, \infty)$. Funkce není zřejmě periodická.
Průsečík se souřadnicovou osou y neexistuje, neboť v bodě $x = 0$ není funkce definována. Průsečíky se souřadnicovou osou x nejsou dosud zjistitelné.
2. Funkce je spojitá na $D(f)$.

Limity v krajních bodech $D(f)$: $\boxed{\lim\limits_{x\to 0+} \operatorname{arctg}\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}}$, $\boxed{\lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{arctg}\frac{1}{x} = 0}$.

Jelikož je funkce lichá je $\boxed{\lim\limits_{x\to 0-} \operatorname{arctg}\frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}}$, $\boxed{\lim\limits_{x\to -\infty} \operatorname{arctg}\frac{1}{x} = 0}$.

3. Vypočteme první derivaci f' a pro určení monotonnosti funkce stanovíme, kdy je f' rovna 0, kladná a záporná (přičemž se omezíme pouze na $D(f)$):

Další

Příklad 4.1.2

Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$.

Řešení:

$$f'(x) = \frac{-\frac{1}{x^2}}{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2} = \frac{-1}{x^2+1}\,, \quad f'(x) < 0\,, \ \text{pro } \forall x \in (0, \infty)\ .$$

Funkce je tedy na intervalu $(0, \infty)$ klesající a nenabývá zde lokálních extrémů. (Např. z lichosti funkce usoudíme, že je klesající i na intervalu $(-\infty, 0)$) .

Funkce nenabývá na svém definičním oboru lokálních ani globálních extrémů.

4. Vypočteme druhou derivaci f'' a určíme intervaly konvexity, konkavity funkce (přičemž se omezíme pouze na $D(f) = D(f')$):

$$f''(x) = \frac{2x}{(x^2+1)^2}\ .$$

Snadno zjistíme, že

$$f''(x) > 0 \ \text{ pro } x \in (0, \infty) \ \Rightarrow \ f \text{ je konvexní na } (0, \infty)$$

$$(f''(x) < 0 \ \text{ pro } x \in (-\infty, 0) \ \Rightarrow \ f \text{ je konkávní na } (-\infty, 0)\,).$$

Bod $x = 0$ není inflexe funkce!

5. Svislou asymptotu funkce f nemá, neboť neexistuje bod z $D(f)$, kde by funkce měla nevlastní limitu.

Není třeba hledat šikmou asymptotu pro $x \to +\infty$ ve tvaru $y = kx + q$, neboť v 2. jsme již zjistili, že existuje vlastní limita $\lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = 0$. Tedy funkce má vodorovnou (horizontální) asymptotu $y = 0$ pro $x \to +\infty$. Z limity pro $x \to -\infty$ nebo z toho, že je funkce lichá, zjistíme, že přímka $y = 0$ je vodorovná asymptota funkce i pro $x \to -\infty$.

Další

Příklad 4.1.2

Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$.

Řešení:

6. Výsledky shrnuté do tabulky:

x	$-\infty$	$(-\infty, 0)$	0_-	0_+	$(0, \infty)$	∞
$f(x)$	0	-	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$+$	0
$f'(x)$		-			-	
$f''(x)$		-			$+$	
f		$\searrow \frown$			$\searrow \smile$	
as.	$y = 0$					$y = 0$

Graf funkce: viz řešeni v systému Maple. Zpět

Příklad 4.1.2

Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$.

Maple:

```
> with(plots):
> f2:= x ->arctan(1/x);
```

$$f2 := x \to \arctan(\frac{1}{x})$$

1. Definiční obor: D(f) = R -{0}.
Lichost:

```
> f2(-x);
```

$$-\arctan(\frac{1}{x})$$

tedy f2 je lichá funkce.
Průsečík s osami:

```
> {solve(f2(x)=0,x)};
```

$$\{\}$$

Maple hledá řešení , ale nenachází..
2. Limity v krajních bodech intervalů, které tvoří D(f):
$\lim_{x\to\infty}$ f(x) = $-(\lim_{x\to(-\infty)}$ f(x)), nebot¡ funkce je lichá.

```
> limit(f2(x), x = infinity);
```

$$0$$

Totéž pro limitu v ”0” zleva, zprava.

Další

Příklad 4.1.2

Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$.

Maple:

```
> limit(f2(x), x = 0,left);
```

$$-\frac{\pi}{2}$$

```
> limit(f2(x), x = 0,right);
```

$$\frac{\pi}{2}$$

3. Stacionární body, intervaly monotonie, extrémy:

```
> df2:=D(f2);
```

$$df2 := x \to -\frac{1}{x^2\,(\frac{1}{x^2}+1)}$$

```
> {solve(df2(x)=0,x)};
```

$$\{\}$$

f´<0 v (0, ∞) tj. funkce je zde klesající. Funkce rovněž klesá v intervalu (- ∞,0) (to plyne také z lichosti funkce). 4. Intervaly konvexnosti resp. konkávnosti, inflexní body:

```
> dff2:=D(df2);
```

$$dff2 := x \to \frac{2}{x^3\,(\frac{1}{x^2}+1)} - \frac{2}{x^5\,(\frac{1}{x^2}+1)^2}$$

Další

Příklad 4.1.2

Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$.

Maple:

```
> {solve(dff2(x)=0,x)};
```

$$\{0\}$$

```
> {solve(dff2(x)>0,x)};
```

$$\{\mathrm{RealRange}(\mathrm{Open}(0),\ \infty)\}$$

```
> {solve(dff2(x)<0,x)};
```

$$\{\mathrm{RealRange}(-\infty,\ \mathrm{Open}(0))\}$$

5. Asymptoty: Svislé asymptoty funkce nemá. To plyne z neexistence bodů na ose x, kde by funkce měla nevlastní jednostranné limity.

```
> k1:=limit(f2(x)/x,x=-infinity); q1:=limit(f2(x)-k1*x,x=-infinity);
```

$$k1 := 0$$

$$q1 := 0$$

```
> k2:=limit(f2(x)/x,x=infinity); q2:=limit(f2(x)-k2*x,x=infinity);
```

$$k2 := 0$$

$$q2 := 0$$

Šikmé asymptoty jsou :

```
> y1:= x -> 0*x - 0;
```

$$y1 := 0$$

Další

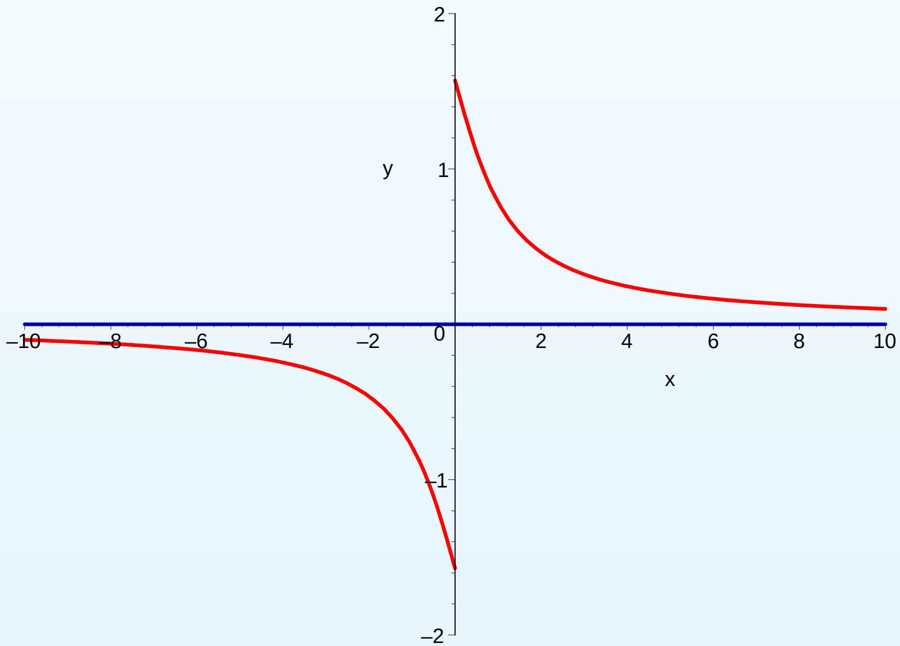
Příklad 4.1.2

Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$.

Maple:

Jelikož je funkce lichá, stačilo vyšetřit pouze $x \to \infty$. Dokonce nebylo třeba složitě počítat šikmé asymptoty. (Proč??)
6) Graf funkce, H(f): Zobrazíme graf (červená barva) spolu s grafem horizontální asymptoty (modrá barva):

```
> plot([f2(x),y1(x)], x = -10..10,y = -2..2,discont =
true,color=[red,blue],thickness=[2,2]);
```



Zřejmě H(f) = < - $\pi/2$, $\pi/2$ >-{0}, pokud funkci dodefinujeme v bodě "0" limitami zprava a zleva, jinak H(f) = (- $\pi/2$,$\pi/2$) -{0}.

Zpět

Příklad 4.1.2

Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \operatorname{arctg}\frac{1}{x}$.

Mathematica:

1. Definiční obor: D(f) = $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$\boldsymbol{f[\mathrm{x\_}] = \mathbf{ArcTan}[1/x]}$
$\mathrm{ArcTan}\left[\frac{1}{x}\right]$

Lichost:

$\boldsymbol{f[x] == f[-x]}$
$\mathrm{ArcTan}\left[\frac{1}{x}\right] == -\mathrm{ArcTan}\left[\frac{1}{x}\right]$
$\boldsymbol{f[x] == -f[-x]}$
True

Funkce je lichá.

Průsečík s osami:

$\mathbf{Solve}[\boldsymbol{f[x] == 0, x}]$
$\{\{x \to \mathrm{ComplexInfinity}\}\}$

Funkce nemá průsečíky s osami.

2. Limity v krajních bodech intervalů, které tvoří D(f):

$\mathbf{Limit}[\boldsymbol{f[x], x \to 0}, \mathbf{Direction} \to \mathbf{-1}]$
$\frac{\pi}{2}$
$\mathbf{Limit}[\boldsymbol{f[x], x \to 0}, \mathbf{Direction} \to \mathbf{1}]$
$-\frac{\pi}{2}$

Další

Příklad 4.1.2

Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$.

Mathematica:

Limit[f[x], x → Infinity]
0

$\lim_{x\to\infty}$ f(x) = $-(\lim_{x\to(-\infty)}$ f$(x))$, neboť funkce je lichá.

3. Stacionární body, intervaly monotonie, extrémy:

f1[x_] = Simplify[D[f[x], x]]
$-\frac{1}{1+x^2}$
Solve[f1[x] == 0, x]
{}
Simplify[f1[x] < 0]
True

f' < 0 v (0, ∞) tj. funkce je zde klesající. Funkce rovněž klesá v intervalu (- ∞,0) (to plyne také z lichosti funkce).

4. Intervaly konvexnosti resp. konkávnosti, inflexní body:

f2[x] = Simplify[D[f1[x], x]]
$\frac{2x}{(1+x^2)^2}$
Solve[f2[x] == 0, x]
$\{\{x \to 0\}\}$

Další

Příklad 4.1.2

Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$.

Mathematica:

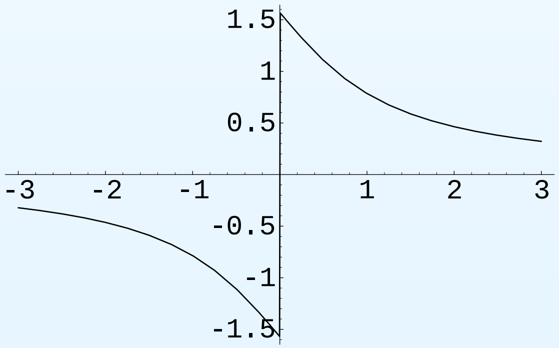
5. Asymptoty:

$\boldsymbol{k = \text{Limit}[f[x]/x, x \to \text{Infinity}]}$
0
$\boldsymbol{q = \text{Limit}[f[x] - kx, x \to \text{Infinity}]}$
0

Svislé asymptoty funkce nemá. To plyne z neexistence bodů na ose x, kde by funkce měla nevlastní jednostranné limity. Jelikož je funkce lichá, stačilo vyšetřit pouze $x \to \infty$. Funkce má asymptotu $y = 0$.

6) Graf funkce, H(f): Zobrazíme graf spolu s grafem horizontální asymptoty:

$\boldsymbol{g = \text{Plot}[f[x], \{x, -3, 3\}]}$



Zřejmě $\mathrm{H}(f) = (-\pi/2, \pi/2) \setminus \{0\}$.

Zpět

Příklad 4.1.3

Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2}$.

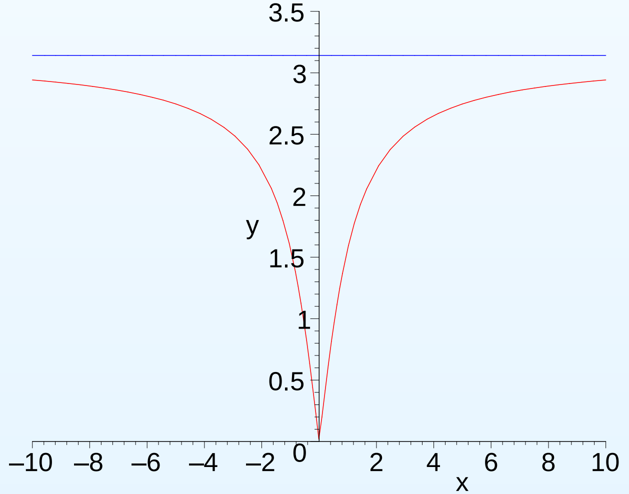
? Zpět

Příklad 4.1.3

Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2}$.

Výsledek:

x	$-\infty$	$(-\infty, 0)$	0	$(0, \infty)$	∞
$f(x)$	π		0		π
$f'(x)$		-	není def.	$+$	
$f''(x)$		-	není def.	-	
f		$\searrow \frown$	lok.min.	$\nearrow \frown$	
as.	$y = \pi$				$y = \pi$



Zpět

Příklad 4.1.3

Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2}$.

Návod:

Průběh funkce se vyšetřuje v následujících bodech:

1. $D(f)$, sudost, lichost, periodicita, průsečíky se souřadnicovými osami,
2. limity v krajních bodech intervalů, které tvoří D(f), spojitost,
3. monotonnost, extrémy,
4. intervaly konkavity a konvexity, inflexní body,
5. asymptoty,
6. graf funkce.

Zpět

Příklad 4.1.3

Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2}$.

Řešení:

1. Definiční obor: Funkce $\arccos y$ je definována pro $-1 \leq y \leq 1$. Pro vnitřní funkci musí platit $-1 \leq \dfrac{1-x^2}{1+x^2} \leq 1$, což je splněno pro $\forall x \in \mathbb{R}$. Tedy

$$\boxed{D(f) = (-\infty, \infty)}.$$

Množina $D(f)$ je symetrická podle počátku. Platí

$$f(-x) = \arccos \frac{1-(-x)^2}{1+(-x)^2} = \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2} = f(x) \,,$$

Funkce je zřejmě sudá, stačí vyšetřovat její průběh na intervalu $(0, \infty)$.
Funkce není zřejmě periodická.
Průsečík se souřadnicovou osou y je v bodě $\boxed{[0,0]}$ neboť $f(0) = 0$. Jelikož je vždy $\arccos y \geq 0$, jedná se o dotykový bod.
Zatím nezjistíme jiné dotykové body grafu funkce a osy x .
2. Funkce je spojitá na $D(f)$.
Limity v krajních bodech $D(f)$: $\lim\limits_{x\to\infty} \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2} = \arccos(-1) = \pi$.
Jelikož je funkce sudá je

$$\boxed{\lim_{x\to\pm\infty} \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2} = \pi}.$$

Další

Příklad 4.1.3

Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2}$.

Řešení:

3. Vypočteme první derivaci f' a pro určení monotonnosti funkce stanovíme, kdy je f' rovna 0, kladná a záporná:

$$f'(x) = -\frac{\frac{-2x(1+x^2)-2x(1-x^2)}{(1+x^2)^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}} = \frac{4x}{(1+x^2)\sqrt{4x^2}} = \frac{4x}{(1+x^2)\ |x|} = \frac{2\operatorname{sgn} x}{1+x^2}\,, \qquad \text{pro} \quad x \neq 0\,,$$

$$\text{přičemž} \qquad f'(0_+) = \lim_{x\to 0_+} \frac{2\operatorname{sgn} x}{1+x^2} = 2 \qquad \text{a} \qquad f'(0_-) = -2\,.$$

Derivace $f'(x)$ není tedy v bodě "0" spojitá a nebudeme ji tudíž dodefinovávat v tomto bodě nějakou hodnotou.

Platí: $f'(x) > 0\,,$ pro $\forall x \in (0,\infty)$,
funkce je tedy na intervalu $(0,\infty)$ rostoucí.
(Ze sudosti funkce plyne, že je klesající na intervalu $(-\infty,0)$) .
Funkce je v bodě "0" spojitá, ale nemá v tomto bodě derivaci. Tedy vzhledem k monotonnosti funkce, má funkce v bodě $\boxed{x = 0}$ lokální minimum, které je zároveň globálním minimem funkce. Jiné lokální ani globální extrémy funkce nemá.

4. Vypočteme druhou derivaci f'' a určíme intervaly konvexity, konkavity funkce (přičemž se omezíme pouze na $D(f') = (-\infty,0)\cup(0,\infty)$):

$$f''(x) = \left(\frac{2\operatorname{sgn} x}{1+x^2}\right)' = \frac{-2\operatorname{sgn} x\, 2\,x}{(1+x^2)^2} = \frac{-4|x|}{(1+x^2)^2}\,.$$

Další

Příklad 4.1.3

Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2}$.

Řešení:

Snadno zjistíme, že

$$f''(x) < 0 \text{ pro } x \in (0, \infty) \ \Rightarrow \ f \text{ je konkávní na } (0, \infty)$$

$$(f''(x) < 0 \text{ pro } x \in (-\infty, 0) \ \Rightarrow \ f \text{ je konkávní na } (-\infty, 0)\,).$$

Bod $x = 0$ není inflexním bodem funkce, jelikož $f'(x)$ není v bodě "0" definována.
5. Svislou asymptotu funkce f nemá, neboť neexistuje bod z $D(f)$, kde by funkce měla nevlastní limitu.
Není třeba hledat šikmou asymptotu pro $x \to +\infty$ ve tvaru $y = kx + q$, neboť v 2. jsme již zjistili, že existuje vlastní limita $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \pi$. Tedy funkce má vodorovnou (horizontální) asymptotu $y = \pi$ pro $x \to +\infty$. Z limity pro $x \to -\infty$ nebo z toho, že je funkce sudá, zjistíme, že přímka $y = \pi$ je vodorovná asymptota funkce i pro $x \to -\infty$.
6. Výsledky shrnuté do tabulky:

x	$-\infty$	$(-\infty, 0)$	0	$(0, \infty)$	∞
$f(x)$	π		0		π
$f'(x)$		-	není def.	$+$	
$f''(x)$		-	není def.	-	
f		$\setminus \frown$	lok.min.	$/ \frown$	
as.	$y = \pi$				$y = \pi$

Graf funkce: viz řešeni v systému Maple.

Zpět

Příklad 4.1.3

Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2}$.

Maple:

```
> with(plots):
> f3:=x->arccos((1-x^2)/(1+x^2));
```

$$f3 := x \rightarrow \arccos(\frac{1-x^2}{1+x^2})$$

1. Definiční obor:

```
> solve(((1-x^2)/(1+x^2))>=-1 and (1-x^2)/(1+x^2)<=1,x);
```

$$x$$

Tímto příkazem jsme nenalezli hodnoty, ve kterých není funkce definována, tedy $D(f) = \mathbb{R}$. Sudost:

```
> f3(-x);
```

$$\arccos(\frac{1-x^2}{1+x^2})$$

tedy f2 je sudá funkce.
Průsečíky s osami:

```
> f3(0);
```

$$0$$

Našel se průsečík s osou y, y =0.

```
> {solve(f3(x)=0,x)};
```

$$\{0\}$$

Nenašel se jiný průsečík s osou x než $x = 0$.

Další

Příklad 4.1.3

Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2}$.

Maple:

2. Funkce je spojitá v D(f) .
Limity v krajních bodech intervalů, které tvoří D(f):
$\lim_{x\to\infty}$ f(x) = $\lim_{x\to(-\infty)}$ f(x), neboť funkce je sudá, stačí vyšetřit tuto limitu .

```
> limit(f3(x), x = infinity);
```

$$\pi$$

a spočítat hodnotu

```
> f3(0);
```

$$0$$

3. Stacionární body, intervaly monotonie, extrémy:

```
> df3:=diff(f3(x),x);
```

$$df3 := -\frac{-\dfrac{2\,x}{1+x^2} - \dfrac{2\,(1-x^2)\,x}{(1+x^2)^2}}{\sqrt{1-\dfrac{(1-x^2)^2}{(1+x^2)^2}}}$$

```
> df3:=normal(%);
```

$$df3 := \frac{2\,x}{(1+x^2)^2\sqrt{\dfrac{x^2}{(1+x^2)^2}}}$$

Další

Příklad 4.1.3

Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2}$.

Maple:

```
> df3:=simplify(%,assume=real);
```

$$df3 := \frac{2\,\mathrm{signum}(x)}{1+x^2}$$

První derivace funkce f3 není spojitá v bodě "0". Je kladná (f3 je rostoucí) pro kladná x a záporná (f3 je klesající) pro záporná x. Tedy f3 nabývá lokálního extrému v "0". Funkce nabývá lokálního i globálního minima v "0".

```
> solve(df3<0);
```

$$\mathrm{RealRange}(-\infty,\ \mathrm{Open}(0))$$

```
> solve(df3>0);
```

$$\mathrm{RealRange}(\mathrm{Open}(0),\ \infty)$$

4. Intervaly konvexnosti resp. konkavnosti, inflexní body. Ačkoliv první derivace funkce f3 není spojitá v bodě "0", zkusíme derivovat v systému Maple .

```
> dff3:=normal(diff(f3(x),x,x));
```

$$dff3 := -\frac{4\,x^4}{(1+x^2)^5\,(\frac{x^2}{(1+x^2)^2})^{(3/2)}}$$

```
> df33:=simplify(%,assume=real);
```

$$df33 := -\frac{4\ |x|}{(1+x^2)^2}$$

Funkce je všude konkávní. Bod [0,0] však není inflexním bodem funkce, nebot první derivace v "0" neexistuje.

Příklad 4.1.3

Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2}$.

Maple:

5. Asymptoty: Svislé asymptoty funkce nemá. To plyne z vyšetřování limit v bodě 2.
Horizontální asymptoty: funkce $y = \pi$ pro $x \to -\infty$ i pro $x \to \infty$

```
> k:=limit(f3(x)/x,x=infinity); q:=limit(f3(x)-k*x,x=infinity);
```

$$k := 0 \quad q := \pi$$

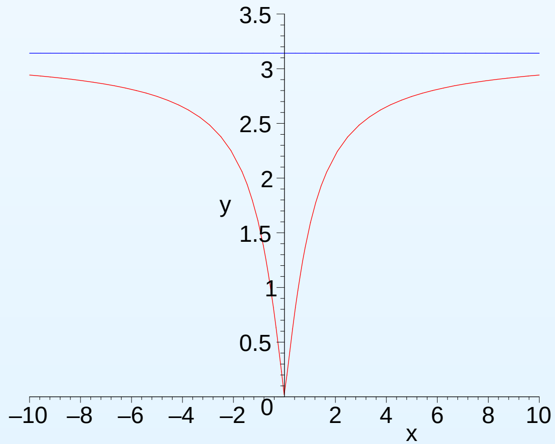
To již plyne z vyšetřování limit v bodě 2.

```
> y1:= x -> 0*x +Pi;
```

$$y1 := x \to 0\,x + \pi$$

6) Graf funkce, H(f):

```
> plot([f3(x),y1(x)], x = -10..10,y = 0..3.5,discont =
true,color=[red,blue],thickness=[2,2]);
```



Zřejmě H(f)= $< 0, \pi$).

Zpět

Příklad 4.1.3

Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2}$.

Mathematica:

f[x_] = ArcCos[(1 − x^2)/(1 + x^2)]
$\text{ArcCos}\left[\frac{1-x^2}{1+x^2}\right]$

1. Definiční obor:

Simplify[−1 < (1 − x^2)/(1 + x^2) < 1]
$0 < \frac{x^2}{1+x^2} < 1$

Tímto příkazem jsme zjistili, že funkce je definována všude, tedy $D(f) = \mathbb{R}$.

Sudost, lichost:

f[x] == f[−x]
True
f[x] == −f[−x]
$\text{ArcCos}\left[\frac{1-x^2}{1+x^2}\right] == -\text{ArcCos}\left[\frac{1-x^2}{1+x^2}\right]$

Funkce je sudá

Solve[f[x] == 0, x]
$\{\{x \to 0\}\}$

Nenašel se jiný průsečík s osou x než $x = 0$.

Další

Příklad 4.1.3

Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2}$.

Mathematica:

2. Funkce je spojitá v D(f) .
Limity v krajních bodech intervalů, které tvoří D(f):

Limit[$f[x]$, $x \to$ Infinity]
π

$\lim_{x\to\infty}$ f(x) = $\lim_{x\to(-\infty)}$ f(x), neboť funkce je sudá, stačí vyšetřit tuto limitu .
3. Stacionární body, intervaly monotonie, extrémy:

f1[x_] = Simplify[$D[f[x], x]$]
$$\frac{2\sqrt{\frac{x^2}{(1+x^2)^2}}}{x}$$
Assuming[$x > 0$, Simplify[f1[x]]]
$$\frac{2}{1+x^2}$$
Assuming[$x < 0$, Simplify[f1[x]]]
$$-\frac{2}{1+x^2}$$

První derivace funkce f není spojitá v bodě "0". Je kladná (f je rostoucí) pro kladná x a záporná (f je klesající) pro záporná x. Tedy f nabývá lokálního extrému v "0". Funkce nabývá lokálního i globálního minima v "0".

4. Intervaly konvexnosti resp. konkavnosti, inflexní body.
Ačkoliv první derivace funkce f není spojitá v bodě "0", zkusíme derivovat v systému Mathematica .

Další

Příklad 4.1.3

Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2}$.

Mathematica:

$\mathbf{f2}[x] = \mathbf{Simplify}[D[\mathbf{f1}[x], x]]$

$$-\frac{4\sqrt{\frac{x^2}{(1+x^2)^2}}}{1+x^2}$$

$\mathbf{Solve}[\mathbf{f2}[x] == 0, x]$

$\{\{x \to 0\}\}$

$\mathbf{Assuming}[x > 0, \mathbf{Simplify}[\mathbf{f2}[x]]]$

$$-\frac{4x}{(1+x^2)^2}$$

$\mathbf{Assuming}[x < 0, \mathbf{Simplify}[\mathbf{f2}[x]]]$

$$\frac{4x}{(1+x^2)^2}$$

Funkce je všude konkávní. Bod [0,0] však není inflexním bodem funkce, nebot první derivace v "0" neexistuje.

5. Asymptoty:

$k = \mathbf{Limit}[f[x]/x, x \to \mathbf{Infinity}]$

0

$q = \mathbf{Limit}[f[x] - kx, x \to \mathbf{Infinity}]$

π

Svislé asymptoty funkce nemá. To plyne z vyšetřování limit. Horizontální asymptoty: $y = \pi$ pro $x \to \pm\infty$.

Další

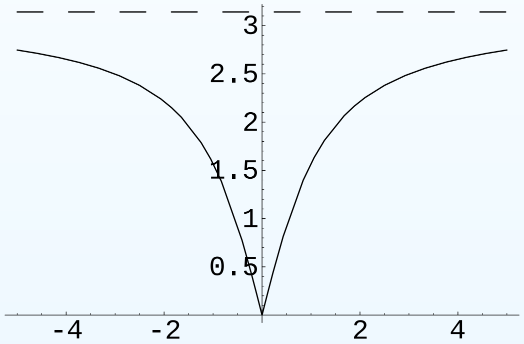
Příklad 4.1.3

Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2}$.

Mathematica:

6) Graf funkce, H(f):

$\boldsymbol{g = \text{Plot}[\{f[x], \text{Pi}\}, \{x, -5, 5\},}$
$\boldsymbol{\text{PlotStyle} \to \{\{\}, \{\text{Dashing}[\{0.05, 0.05, 0.05\}]\}\}]}$



−Graphics−

Zřejmě $\mathrm{H}(f) = \langle 0,\ \pi)$.

Zpět

Newtonova metoda

- **Příklad 4.2.1** Určete počet kořenů rovnice

$$\ln x + \sin x = 0\,.$$

  Zvolte vhodný separační interval a Newtonovou metodou spočítejte přibližně alespoň jeden kořen.

- **Příklad 4.2.2** Určete počet kořenů rovnice

$$2x - \ln x - 4\,.$$

  Zvolte vhodný separační interval a Newtonovou metodou spočítejte přibližně alespoň jeden kořen.

Zpět

Příklad 4.2.1

Určete počet kořenů rovnice

$$\ln x + \sin x = 0\,.$$

Zvolte vhodný separační interval a Newtonovou metodou spočítejte přibližně alespoň jeden kořen.

? Zpět

Příklad 4.2.1

Určete počet kořenů rovnice

$$\ln x + \sin x = 0\,.$$

Zvolte vhodný separační interval a Newtonovou metodou spočítejte přibližně alespoň jeden kořen.

Výsledek:

Funkce $\boxed{f(x) = \ln x + \sin x}$ nabývá v $D(f) = (0, \infty)$ jak kladných tak záporných hodnot. Rovnice má v $D(f)$ $\boxed{\text{právě jedno}}$ řešení. Vhodným separačním intervalem je např. $\boxed{\langle 0,1; 1\rangle}$ a volba počáteční aproximace $\boxed{x_0 = 0,1}$. Hodnota $\boxed{x = 0.57871}$ je přibližné řešení rovnice.

Výpočet čtyř iterací Newtonovou metodou

x_0	$0,1$
x_1	$0,30034$
x_2	$0,51202$
x_3	$0,57555$
x_4	$0,57871$

Zpět

Příklad 4.2.1

Určete počet kořenů rovnice

$$\ln x + \sin x = 0\,.$$

Zvolte vhodný separační interval a Newtonovou metodou spočítejte přibližně alespoň jeden kořen.

Návod:

Graficky určíme (pokud to lze) počet kořenů rovnice.
Hledáme-li kořen funkce $f(x) = 0$ Newtonovou metodou, je podstatné stanovit separační interval $\langle a, b\rangle$, kde existuje pouze jeden kořen, a v něm vhodně zvolit počáteční aproximaci x_0. V intervalu $\langle a, b\rangle$ ověříme:

(i) $f(a) \cdot f(b) < 0$,
(ii) $f'(x) \neq 0$ v (a, b),
(iii) $f''(x) \neq 0$ v $\langle a, b\rangle$.
(iv) Za x_0 volíme ten z krajních bodů $\langle a, b\rangle$, kde $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$.

Postupné aproximace kořene vypočteme z rekurentního vzorce

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \qquad n = 0, 1, \ldots$$

Zpět

Příklad 4.2.1

Určete počet kořenů rovnice

$$\ln x + \sin x = 0\,.$$

Zvolte vhodný separační interval a Newtonovou metodou spočítejte přibližně alespoň jeden kořen.

Řešení:

Grafické znázornění pro určení počtu kořenů:
Rovnici přepíšeme do tvaru

$$\ln x = -\sin x\,.$$

V tomto případě jsme ihned schopni nakreslit obě funkce vlevo i vpravo od rovnítka.
Je patrné, že existuje pouze jeden průsečík grafů funkcí, tedy původní rovnice má pouze jeden kořen a to v intervalu $(0, 1\rangle$.
Označíme

$$f(x) = \ln x + \sin x$$

funkci, pro kterou hledáme bod, kde se funkce anuluje. $D(f) = (0, \infty)$. Funkce nabývá jak kladných tak záporných hodnot.
Nalezneme separační interval. Vyjdeme při tom z předchozího grafického znázornění.
Zvolíme například interval $\langle 0,1; 1\rangle$ a ověříme, zda je to skutečně separační interval:
(i) $f(0,1) \cdot f(1) =$
$= (\ln(0,1) + \sin(0,1)) \cdot (\ln 1 + \sin 1) = (-2,20275) \cdot (0,84147) < 0$
(ii) $f'(x) = \dfrac{1}{x} + \cos x > 0$ pro $\forall x \in (0,1; 1)$,
(iii) $f''(x) = -\dfrac{1}{x^2} - \sin x < 0$ pro $\forall x \in \langle 0,1; 1\rangle$.

Další

Příklad 4.2.1

Určete počet kořenů rovnice

$$\ln x + \sin x = 0\,.$$

Zvolte vhodný separační interval a Newtonovou metodou spočítejte přibližně alespoň jeden kořen.

Řešení:

(iv) Za x_0 volíme ten z krajních bodů $0,1$ nebo 1, kde $f(x_0)\cdot f''(x_0) > 0$. To je splněno pro $x_0 = 0,1$, neboť $f(0,1)\cdot f''(0,1) = (-2,20275)\cdot f''(0,1) > 0$

První aproximaci kořene vypočteme pomocí počáteční aproximace x_0 z rekurentního vzorce

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 0,1 - \frac{-2,20275}{\frac{1}{0,1} + \cos(0,1)} = 0,30034$$

Další aproximace kořene dostaneme opět dosazením do rekurentního vzorce

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \qquad n = 0,1,\ldots$$

Tedy

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 0,51202\,,$$

atd.

Zpět

Příklad 4.2.1

Určete počet kořenů rovnice

$$\ln x + \sin x = 0 \, .$$

Zvolte vhodný separační interval a Newtonovou metodou spočítejte přibližně alespoň jeden kořen.

Maple:

Grafické znázornění pro určení počtu kořenů:
Rovnici přepíšeme do tvaru ln x = -sin x. Obě funkce vlevo i vpravo od rovnítka nakreslime.

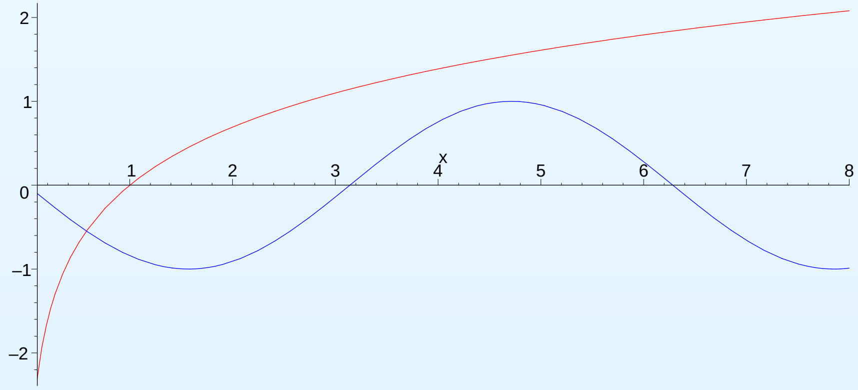
```
> f1:=x->-sin(x);
```

$$f1 := x \rightarrow -\sin(x)$$

```
> f2:=x->ln(x);
```

$$f2 := x \rightarrow \ln(x)$$

```
> plot([f1(x),f2(x)],x=0..8,discont=true,color=[blue,red]);
```



Další

Příklad 4.2.1

Určete počet kořenů rovnice

$$\ln x + \sin x = 0\,.$$

Zvolte vhodný separační interval a Newtonovou metodou spočítejte přibližně alespoň jeden kořen.

Maple:

Je patrné, že existuje pouze jeden průsečík grafů funkcí, tedy původní rovnice má pouze jeden kořen a to v intervalu $<0{,}1\,;1>$. Cyklus pro výpočet Newtonovou metodou:

```
> f:=x->ln(x) +sin(x);
```

$$f := x \to \ln(x) + \sin(x)$$

Nejdříve jeden krok Newtonovy metody.

```
> g:=x->x-f(x)/D(f)(x);
```

$$g := x \to x - \frac{\mathrm{f}(x)}{\mathrm{D}(f)(x)}$$

```
> nmax:=5;
```

$$nmax := 5$$

Nyní napíšeme cyklus

```
> x[0]:=0.1;
```

$$x_0 := 0.1$$

```
> for n from 0 to nmax do x[n+1]:=evalf(g(x[n])) end do;
```

Další

Příklad 4.2.1

Určete počet kořenů rovnice

$$\ln x + \sin x = 0\,.$$

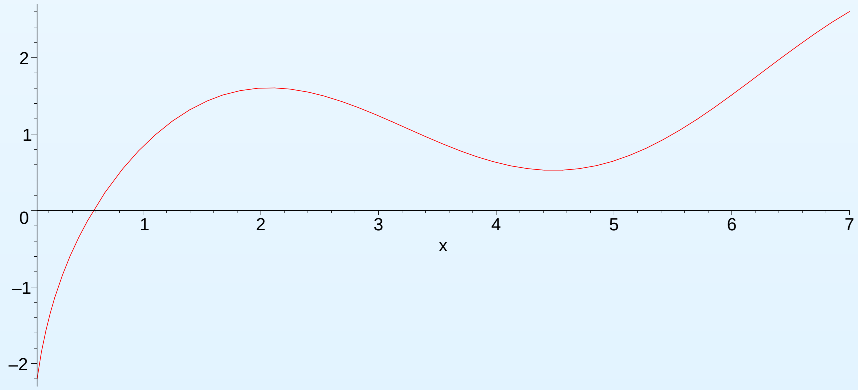
Zvolte vhodný separační interval a Newtonovou metodou spočítejte přibližně alespoň jeden kořen.

Maple:

$$x_1 := 0.3003411406$$
$$x_2 := 0.5120181992$$
$$x_3 := 0.5755471765$$
$$x_4 := 0.5787067299$$
$$x_5 := 0.5787136435$$
$$x_6 := 0.5787136435$$

Poslední aproximaci budeme považovat za přibližné řešení rovnice.
Ověření systémem Maple:
Na závěr z grafu funkce f(x) na intervalu (0,7) ověříme, že průsečíku fce s osou x skutečně odpovídá jediná hodnota, přibližně x=0,57871.

```
> plot([f(x)],x = 0..7, discont = true);
```



Zpět

Příklad 4.2.1

Určete počet kořenů rovnice

$$\ln x + \sin x = 0\,.$$

Zvolte vhodný separační interval a Newtonovou metodou spočítejte přibližně alespoň jeden kořen.

Mathematica:

Grafické znázornění pro určení počtu kořenů:
Rovnici přepíšeme do tvaru $\ln x = -\sin x$. Obě funkce vlevo i vpravo od rovnítka nakreslime.

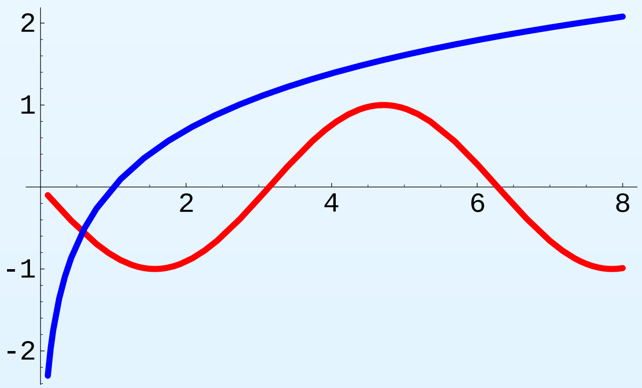
f1[x_] = −Sin[x]

−Sin[x]

f2[x_] = Log[x]

Log[x]

Plot[{f1[x], f2[x]}, {x, 0.1, 8},
PlotStyle → {{Thickness[0.01], RGBColor[1, 0, 0]},
{Thickness[0.01], RGBColor[0, 0, 1]}}]



Další

Příklad 4.2.1

Určete počet kořenů rovnice

$$\ln x + \sin x = 0\,.$$

Zvolte vhodný separační interval a Newtonovou metodou spočítejte přibližně alespoň jeden kořen.

Mathematica:

Je patrné, že existuje pouze jeden průsečík grafů funkcí, tedy původní rovnice má pouze jeden kořen a to v intervalu $\langle 0,1; 1\rangle$.

Cyklus pro výpočet Newtonovou metodou:

$\boldsymbol{f[\mathrm{x\_}] = \mathrm{Log}[x] + \mathrm{Sin}[x]}$

$\mathrm{Log}[x] + \mathrm{Sin}[x]$

$\boldsymbol{g[\mathrm{x\_}] = x - f[x]/D[f[x], x]}$

$x - \frac{\mathrm{Log}[x]+\mathrm{Sin}[x]}{\frac{1}{x}+\mathrm{Cos}[x]}$

nmax = 5;
x0 = 0.1;
xn = Table[0, {*i*, 1, nmax}];

xn[[1]] = x0;

For[*i* = 1, *i* < nmax, xn[[*i* + 1]] = *N*[*g*[xn[[*i*]]]]; *i*++]

Další

Příklad 4.2.1

Určete počet kořenů rovnice

$$\ln x + \sin x = 0\,.$$

Zvolte vhodný separační interval a Newtonovou metodou spočítejte přibližně alespoň jeden kořen.

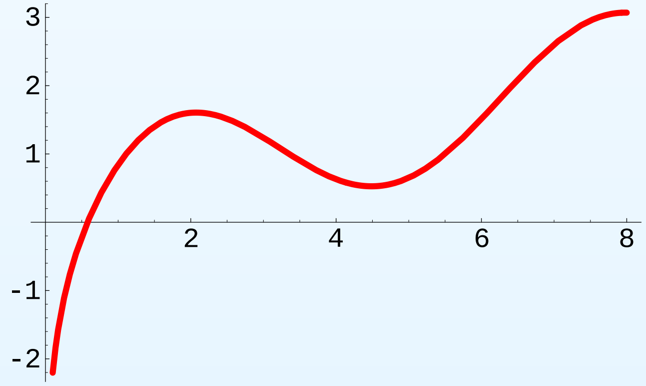
Mathematica:

xn

$\{0.1, 0.300341, 0.512018, 0.575547, 0.578707\}$

Poslední aproximaci budeme považovat za přibližné řešení rovnice.
Ověření systémem Mathematica (nakreslíme graf funkce):

Plot[$f[x]$, {x, 0.1, 8},
PlotStyle → {Thickness[0.01], RGBColor[1, 0, 0]}]



Zpět

Příklad 4.2.2

Určete počet kořenů rovnice

$$2x - \ln x - 4\,.$$

Zvolte vhodný separační interval a Newtonovou metodou spočítejte přibližně alespoň jeden kořen.

? Zpět

Příklad 4.2.2

Určete počet kořenů rovnice

$$2x - \ln x - 4\,.$$

Zvolte vhodný separační interval a Newtonovou metodou spočítejte přibližně alespoň jeden kořen.

Výsledek:

Funkce $\boxed{f(x) = 2x - \ln x - 4}$ nabývá v $D(f) = (0, \infty)$ jak kladných, tak záporných hodnot. Rovnice má v $D(f)$ $\boxed{\text{právě dvě}}$ řešení. Vhodným separačním intervalem pro větší kořen je např. $\boxed{\langle 2, 3\rangle}$ a volba počáteční aproximace $\boxed{x_0 = 3}$. Hodnota $\boxed{x = 2,44754}$ je přibližné řešení rovnice v intervalu $\langle 2, 3\rangle$.

Výpočet čtyř iterací Newtonovou metodou

x_0	3
x_1	2, 45917
x_2	2, 44755
x_3	2.44754
x_4	2.44754

Zpět

Příklad 4.2.2

Určete počet kořenů rovnice

$$2x - \ln x - 4\,.$$

Zvolte vhodný separační interval a Newtonovou metodou spočítejte přibližně alespoň jeden kořen.

Návod:

Graficky určíme (pokud to lze) počet kořenů rovnice.
Hledáme-li kořen funkce $f(x) = 0$ Newtonovou metodou, je podstatné stanovit separační interval $\langle a, b\rangle$, kde existuje pouze jeden kořen, a v něm vhodně zvolit počáteční aproximaci x_0. V intervalu $\langle a, b\rangle$ ověříme:
(i) $f(a) \cdot f(b) < 0$,
(ii) $f'(x) \neq 0$ v (a, b),
(iii) $f''(x) \neq 0$ v $\langle a, b\rangle$.
(iv) Za x_0 volíme ten z krajních bodů $\langle a, b\rangle$, kde $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$.

Postupné aproximace kořene vypočteme z rekurentního vzorce

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \qquad n = 0, 1, \ldots$$

Zpět

Příklad 4.2.2

Určete počet kořenů rovnice

$$2x - \ln x - 4\,.$$

Zvolte vhodný separační interval a Newtonovou metodou spočítejte přibližně alespoň jeden kořen.

Řešení:

Grafické znázornění pro určení počtu kořenů:
Rovnici přepíšeme do tvaru

$$\ln x = 2x - 4\,.$$

V tomto případě jsme ihned schopni nakreslit obě funkce vlevo i vpravo od rovnítka. Není ihned patrné, že existují dva průsečíky grafů funkcí, systémem Maple (zmenšováním intervalů) lze však oba kořeny velmi dobře separovat. Tedy původní rovnice má právě dva kořeny a to v intervalu $(0,1\rangle$ a $\langle 2,3\rangle$.
Označíme

$$f(x) = 2x - \ln x - 4$$

funkci, pro kterou hledáme body, kde se tato funkce anuluje. $D(f) = (0,\infty)$. Funkce nabývá jak kladných tak záporných hodnot.
Nalezneme separační interval pro větší ze dvou kořenů. Vyjdeme při tom z předchozího grafického znázornění. Ověříme, zda je $\langle 2,3\rangle$ skutečně separační interval:
(i) $\quad f(2)\cdot f(3) =$
$= (2\cdot 2 - \ln(2) - 4)\cdot(2\cdot 3 - \ln(3) - 4) = (-0,693147)\cdot(0,901388) < 0$

(ii) $\quad f'(x) = 2 - \dfrac{1}{x} > 0$ pro $\forall x \in (2,3)$,

Další

Příklad 4.2.2

Určete počet kořenů rovnice

$$2x - \ln x - 4\,.$$

Zvolte vhodný separační interval a Newtonovou metodou spočítejte přibližně alespoň jeden kořen.

Řešení:

(iii) $f''(x) = \dfrac{1}{x^2} > 0$ pro $\forall x \in \langle 2, 3\rangle$.

(iv) Za x_0 volíme ten z krajních bodů 2 nebo 3, kde $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$. To je splněno pro $x_0 = 3$, neboť $f(3) \cdot f''(3) = 0,901388 \cdot \dfrac{1}{9} > 0$

První aproximaci kořene vypočteme pomocí počáteční aproximace x_0 z rekurentního vzorce

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 3 - \frac{0,901388}{2 - \frac{1}{3}} = 2,45917$$

Další aproximace kořene dostaneme opět dosazením do rekurentního vzorce

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \qquad n = 0, 1, \ldots$$

Tedy

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 2,44755\,,$$

atd.

Zpět

Příklad 4.2.2

Určete počet kořenů rovnice

$$2x - \ln x - 4\,.$$

Zvolte vhodný separační interval a Newtonovou metodou spočítejte přibližně alespoň jeden kořen.

Maple:

Grafické znázornění pro určení počtu kořenů:
Rovnici přepíšeme do tvaru ln x = 2x - 4. Obě funkce vlevo i vpravo od rovnítka nakreslime.

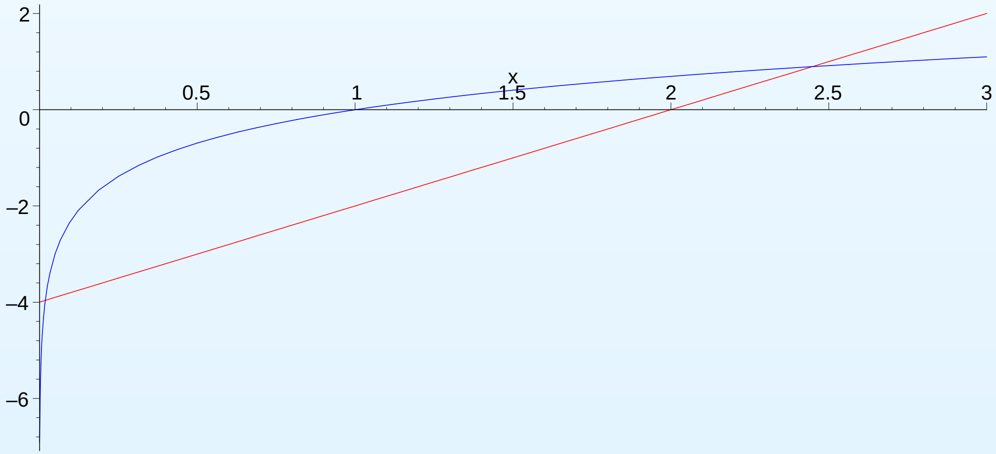
```
> f1:=x->ln(x);
```

$$f1 := x \rightarrow \ln(x)$$

```
> f2:=x->2*x-4;
```

$$f2 := x \rightarrow 2\,x - 4$$

```
> plot([f1(x),f2(x)],x=0..3,discont=true,color=[blue,red]);
```



Další

Příklad 4.2.2

Určete počet kořenů rovnice

$$2x - \ln x - 4\,.$$

Zvolte vhodný separační interval a Newtonovou metodou spočítejte přibližně alespoň jeden kořen.

Maple:

Je patrné, že existují právě dva průsečíky grafů funkcí, tedy původní rovnice má dva kořeny a to v intervalu (0,3 >. V intervalu <2,,3 > existuje právě jeden kořen rovnice. Druhý kořen, který se nalézá v intervalu (0 ; 0,3 > zde hledat nebudeme. (Pro tento kořen doporučujeme systémem Maple graficky odhadnout separační interval a Newtonovu metodu na něm použít samostatně.)
Cyklus pro výpočet Newtonovou metodou:

```
> f:=x->2*x-ln(x) -4;
```

$$f := x \to 2\,x - \ln(x) - 4$$

Nejdříve jeden krok Newtonovy metody.

```
> g:=x->x-f(x)/D(f)(x);
```

$$g := x \to x - \frac{\mathrm{f}(x)}{\mathrm{D}(f)(x)}$$

```
> nmax:=5;
```

$$nmax := 5$$

Nyní napíšeme cyklus

```
> x[0]:=3;
```

$$x_0 := 3$$

```
> for n from 0 to nmax do x[n+1]:=evalf(g(x[n])) end do;
```

Další

Příklad 4.2.2

Určete počet kořenů rovnice

$$2x - \ln x - 4\,.$$

Zvolte vhodný separační interval a Newtonovou metodou spočítejte přibližně alespoň jeden kořen.

Maple:

$$x_1 := 2.459167373$$

$$x_2 := 2.447549195$$

$$x_3 := 2.447542160$$

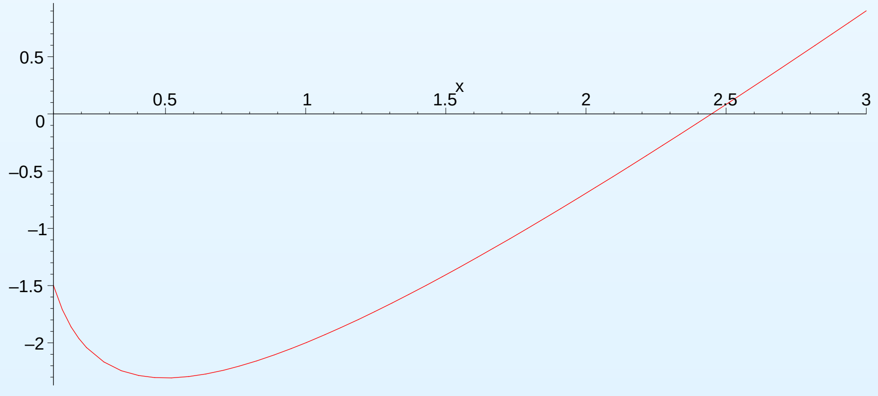
$$x_4 := 2.447542161$$

$$x_5 := 2.447542160$$

$$x_6 := 2.447542161$$

Poslední aproximaci budeme považovat za přibližné řešení rovnice.
Ověření systémem Maple:
Na závěr z grafu funkce $f(x)$ ověříme, že průsečíku fce s osou x na intervalu $\langle 2, 3\rangle$ skutečně odpovídá jediná hodnota, přibližně $x = 2,44754$.

```
> plot([f(x)],x = 0..3, discont = true);
```



Zpět

Příklad 4.2.2

Určete počet kořenů rovnice

$$2x - \ln x - 4\,.$$

Zvolte vhodný separační interval a Newtonovou metodou spočítejte přibližně alespoň jeden kořen.

Mathematica:

Grafické znázornění pro určení počtu kořenů:
Rovnici přepíšeme do tvaru $\ln x = 2x - 4$. Obě funkce vlevo i vpravo od rovnítka nakreslíme.

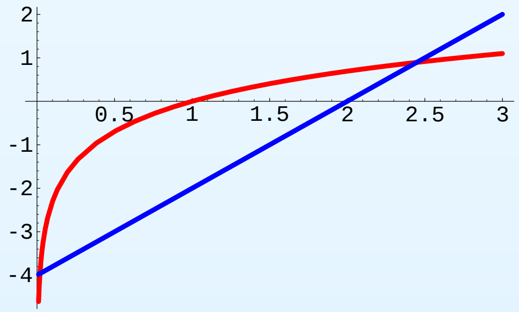
f1[x_] = Log[x]

Log[x]

f2[x_] = 2x − 4

$-4 + 2x$

Plot[{f1[x], f2[x]}, {x, 0.01, 3},
PlotStyle → {{Thickness[0.01], RGBColor[1, 0, 0]},
{Thickness[0.01], RGBColor[0, 0, 1]}}]



Další

Příklad 4.2.2

Určete počet kořenů rovnice

$$2x - \ln x - 4\,.$$

Zvolte vhodný separační interval a Newtonovou metodou spočítejte přibližně alespoň jeden kořen.

Mathematica:

Je patrné, že existují právě dva průsečíky grafů funkcí, tedy původní rovnice má dva kořeny a to v intervalu $(0, 3\rangle$. V intervalu $\langle 2, 3\rangle$ existuje právě jeden kořen rovnice. Druhý kořen, který se nalézá v intervalu $(0; 0,3\rangle$ zde hledat nebudeme. (Pro tento kořen doporučujeme systémem Maple graficky odhadnout separační interval a Newtonovu metodu na něm použít samostatně.)

Cyklus pro výpočet Newtonovou metodou:

f[x_] = 2x − Log[x] − 4

$-4 + 2x - \mathrm{Log}[x]$

g[x_] = x − f[x]/D[f[x], x]

$x - \frac{-4+2x-\mathrm{Log}[x]}{2-\frac{1}{x}}$

nmax = 5;
x0 = 3;
xn = Table[0, {i, 1, nmax}];

xn[[1]] = x0;

For[i = 1, i < nmax, xn[[i + 1]] = N[g[xn[[i]]]]; i++]

Další

Příklad 4.2.2

Určete počet kořenů rovnice

$$2x - \ln x - 4\,.$$

Zvolte vhodný separační interval a Newtonovou metodou spočítejte přibližně alespoň jeden kořen.

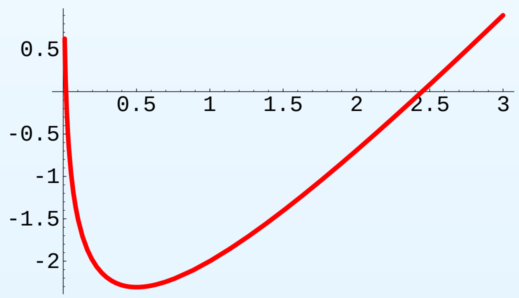
Mathematica:

xn

$\{3, 2.45917, 2.44755, 2.44754, 2.44754\}$

Poslední aproximaci budeme považovat za přibližné řešení rovnice.
Ověření systémem Mathematica:
Na závěr z grafu funkce $f(x)$ ověříme, že průsečíku fce s osou x na intervalu $\langle 2, 3\rangle$ skutečně odpovídá jediná hodnota, přibližně $x = 2,44754$.

Plot[$f[x]$, {x, 0.01, 3},
PlotStyle → {Thickness[0.01], RGBColor[1, 0, 0]}]



Zpět

Taylorova formule

- Taylorova formule

Zpět

Taylorova formule

- Příklad 5.1.1 Najděte Taylorův polynom třetího stupně funkce $f(x) = \ln(2x-1)$, který aproximuje funkci f v okolí bodu $x_0 = 1$.
- Příklad 5.1.2 Napište Taylorův polynom 4. stupně pro funkci $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$ v bodě $x_0 = 0$ a pomocí něho vypočtěte přibližně hodnotu $f(0,1)$.
- Příklad 5.1.3 Spočtěte přibližně hodnotu $\sqrt[3]{30}$ pomocí Taylorova polynomu 2. stupně. Odhadněte shora absolutní hodnotu chyby, které se při výpočtu dopustíte.

Zpět

Příklad 5.1.1

Najděte Taylorův polynom třetího stupně funkce $f(x) = \ln(2x-1)$, který aproximuje funkci f v okolí bodu $x_0 = 1$.

? Zpět

Příklad 5.1.1

Najděte Taylorův polynom třetího stupně funkce $f(x) = \ln(2x - 1)$, který aproximuje funkci f v okolí bodu $x_0 = 1$.

Výsledek:

$$T_3(x) = 2(x-1) - 2(x-1)^2 + \frac{8}{3}(x-1)^3.$$

Zpět

Příklad 5.1.1

Najděte Taylorův polynom třetího stupně funkce $f(x) = \ln(2x-1)$, který aproximuje funkci f v okolí bodu $x_0 = 1$.

Návod:

Taylorův polynom n-tého stupně T_n v okolí bodu x_0 je definovaný vztahem

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n\,.$$

Zpět

Příklad 5.1.1

Najděte Taylorův polynom třetího stupně funkce $f(x) = \ln(2x-1)$, který aproximuje funkci f v okolí bodu $x_0 = 1$.

Řešení:

Do vzorce pro $T_3(x)$ dosadíme funkční hodnotu $f(x_0)$ a hodnoty první, druhé a třetí derivace funkce f v bodě $x_0 = 1$:

$f(1) = 0$,

$$f'(x) = \frac{2}{2x-1} \quad \Rightarrow \quad f'(1) = 2\,,$$

$$f''(x) = -\frac{4}{(2x-1)^2} \quad \Rightarrow \quad f''(1) = -4\,,$$

$$f^{(3)}(x) = \frac{16}{(2x-1)^3} \quad \Rightarrow \quad f^{(3)}(1) = 16\,.$$

Taylorův polynom

$$T_3(x) = 0 + \frac{2}{1!}(x-1) + \frac{-4}{2!}(x-1)^2 + \frac{16}{3!}(x-1)^3 = 2(x-1) - 2(x-1)^2 + \frac{8}{3}(x-1)^3$$

bude dobře aproximovat funkci f na nějakém okolí I bodu $x_0 = 1$. (Toto okolí I musí nutně splňovat podmínku $I \subset D(f) = (\frac{1}{2}, \infty)$.)

Zpět

Příklad 5.1.1

Najděte Taylorův polynom třetího stupně funkce $f(x) = \ln(2x-1)$, který aproximuje funkci f v okolí bodu $x_0 = 1$.

Maple:

```
> f1 := x->ln(2*x-1);
```

$$f1 := x \rightarrow \ln(2\,x-1)$$

V Maplu existuje příkaz taylor(expr, eq, n) , který vytvoří Taylorův rozvoj ((n-1)-ního) stupně funkce expr v bodě, který je zadán rovností eq.

```
> T3 := taylor(f1(x),x=1,3+1);
```

$$T3 := 2\,(x-1) - 2\,(x-1)^2 + \frac{8}{3}\,(x-1)^3 + \mathrm{O}((x-1)^4)$$

Pokud chceme spočítat Taylorův polynom (n-1)ního stupně funkce expr v bodě eq/nm použijeme příkaz, který převádí rozvoj na polynom:.

```
> T3 := convert(taylor(f1(x),x=1,3+1),polynom);
```

$$T3 := 2\,x - 2 - 2\,(x-1)^2 + \frac{8\,(x-1)^3}{3}$$

Zpět

Příklad 5.1.1

Najděte Taylorův polynom třetího stupně funkce $f(x) = \ln(2x-1)$, který aproximuje funkci f v okolí bodu $x_0 = 1$.

Mathematica:

f1[x_] = Log[2*x* − 1]

Log$[-1+2x]$

***R* = Series[f1[*x*], {*x*, 1, 3}]**

$2(x-1) - 2(x-1)^2 + \frac{8}{3}(x-1)^3 + O[x-1]^4$

T3 = Normal[*R*]

$2(-1+x) - 2(-1+x)^2 + \frac{8}{3}(-1+x)^3$

Zpět

Příklad 5.1.2

Napište Taylorův polynom 4. stupně pro funkci $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$ v bodě $x_0 = 0$ a pomocí něho vypočtěte přibližně hodnotu $f(0,1)$.

? Zpět

Příklad 5.1.2

Napište Taylorův polynom 4. stupně pro funkci $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$ v bodě $x_0 = 0$ a pomocí něho vypočtěte přibližně hodnotu $f(0,1)$.

Výsledek:

$T_4(x) = 1 - x^2 + \frac{1}{2}x^4$, $f(0,1) \doteq T_4(0,1) = 0,99005$.

Zpět

Příklad 5.1.2

Napište Taylorův polynom 4. stupně pro funkci $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$ v bodě $x_0 = 0$ a pomocí něho vypočtěte přibližně hodnotu $f(0,1)$.

Návod:

Buď lze klasicky spočítat hodnoty funkce $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$ a dalších čtyř derivací v bodě $x_0 = 0$ a získané hodnoty dosadit do vzorce (viz předchozí příklad):

$$T_4(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f^{(3)}(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \frac{f^{(4)}(x_0)}{4!}(x - x_0)^4 .$$

Přibližnou hodnotu funkce dostaneme ze vztahu

$$f(0,1) \doteq T_4(0,1) .$$

Zpět

Příklad 5.1.2

Napište Taylorův polynom 4. stupně pro funkci $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$ v bodě $x_0 = 0$ a pomocí něho vypočtěte přibližně hodnotu $f(0,1)$.

Řešení:

Taylorův polynom 2. stupně pro funkci $f(y) = \mathrm{e}^y$ v bodě $y_0 = 0$ (snadno zapamatovatelný) je roven

$$T_2(y) = 1 + \frac{1}{1!}\,y + \frac{1}{2!}\,y^2 = 1 + y + \frac{1}{2}\,y^2.$$

Položíme-li $y = -x^2$, dostáváme Taylorův polynom 4. stupně pro funkci $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$ v bodě $x_0 = 0$:

$$T_4(x) = 1 + (-x^2) + \frac{1}{2}(-x^2)^2 = 1 - x^2 + \frac{1}{2}\,x^4\,.$$

Pro přibližný výpočet hodnoty funkce $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$ v bodě $x = 0,1$ stačí položit

$$f(0,1) \doteq T_4(0,1) = 1 - 0,1^2 + \frac{0,1^4}{2} = 0,99005\,.$$

Tedy $\mathrm{e}^{-0,1^2} \doteq 0,99005$.

Zpět

Příklad 5.1.2

Napište Taylorův polynom 4. stupně pro funkci $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$ v bodě $x_0 = 0$ a pomocí něho vypočtěte přibližně hodnotu $f(0,1)$.

Maple:

```
> fe2:=x->exp(-x^2);
```

$$fe2 := x \to e^{(-x^2)}$$

```
> T4 := convert(taylor(fe2(x),x=0,4+1),polynom);
```

$$T4 := 1 - x^2 + \frac{1}{2}x^4$$

Do získaného polynomu 4. stupně T4 dosadíme zadaný bod a dostaneme přibližnou hodnotu funkce fe2 v tomto bodě.

```
> subs(x=0.1,T4);
```

$$0.9900500000$$

Pro porovnání spočítáme přesnou hodnotu zadané funkce fe2 v zadaném bodě.

```
> evalf(fe2(0.1));
```

$$0.9900498337$$

Zpět

Příklad 5.1.2

Napište Taylorův polynom 4. stupně pro funkci $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$ v bodě $x_0 = 0$ a pomocí něho vypočtěte přibližně hodnotu $f(0,1)$.

Mathematica:

f2[x_] = Exp[−*x*^2]

e^{-x^2}

Taylorův vzorec:
***R* = Series[f2[*x*], {*x*, 0, 4}]**

$1 - x^2 + \frac{x^4}{2} + O[x]^5$

Taylorův polynom:
T4 = Normal[*R*]

$1 - x^2 + \frac{x^4}{2}$

hodpriplizna = InputForm[T4/.{*x* → 0.1}]

0.99005

hodpresna = InputForm[fe2[0.1]]

0.9900498337491681

Zpět

Příklad 5.1.3

Spočtěte přibližně hodnotu $\sqrt[3]{30}$ pomocí Taylorova polynomu 2. stupně. Odhadněte shora absolutní hodnotu chyby, které se při výpočtu dopustíte.

? Zpět

Příklad 5.1.3

Spočtěte přibližně hodnotu $\sqrt[3]{30}$ pomocí Taylorova polynomu 2. stupně. Odhadněte shora absolutní hodnotu chyby, které se při výpočtu dopustíte.

Výsledek:

$\sqrt[3]{30} \doteq 3,106996\,,\ |R_2(30)| \leq 0,000254\,.$

Zpět

Příklad 5.1.3

Spočtěte přibližně hodnotu $\sqrt[3]{30}$ pomocí Taylorova polynomu 2. stupně. Odhadněte shora absolutní hodnotu chyby, které se při výpočtu dopustíte.

Návod:

Zvolíme vhodně bod x_0. Taylorův polynom druhého stupně T_2 v okolí bodu x_0 je definovaný vztahem

$$T_2(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 .$$

Chybu aproximace, které se dopustíme, lze vyjádřit pomocí vzorce:

$$R_2(x) = \frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}(x - x_0)^3 , \quad \text{kde } \xi \in (x_0, x) \text{ (nebo } \xi \in (x, x_0)\text{)} .$$

Zpět

Příklad 5.1.3

Spočtěte přibližně hodnotu $\sqrt[3]{30}$ pomocí Taylorova polynomu 2. stupně. Odhadněte shora absolutní hodnotu chyby, které se při výpočtu dopustíte.

Řešení:

Zvolíme bod $x_0 = 27$ (leží "blízko" bodu $x = 30$), neboť funkční hodnotu $f(27) = \sqrt[3]{27} = 3$ a hodnoty prvních dvou derivací funkce f v bodě $x_0 = 27$ dokážeme snadno spočítat:

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} \quad \Rightarrow \quad f'(27) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{9} \doteq 0,037037\,,$$

$$f''(x) = -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}} \quad \Rightarrow \quad f''(27) = -\frac{2}{9} \cdot \frac{1}{243} \doteq -0,000457\,.$$

Dostáváme Taylorův polynom a hledanou přibližnou funkční hodnotu:

$$T_2(x) = 3 + \tfrac{1}{27}(x-27) - \tfrac{1}{2187}(x-27)^2\,,$$

$$\sqrt[3]{30} \doteq T_2(30) \doteq 3 + 0,037037(30-27) - 0,0009144(30-27)^2 \doteq 3,1069963\,.$$

K vyjádření chyby aproximace potřebujeme třetí derivaci funkce:

$$f^{(3)}(x) = \frac{10}{27}\,x^{-\frac{8}{3}}\,.$$

Další

Příklad 5.1.3

Spočtěte přibližně hodnotu $\sqrt[3]{30}$ pomocí Taylorova polynomu 2. stupně. Odhadněte shora absolutní hodnotu chyby, které se při výpočtu dopustíte.

Řešení:

Chyba, které jsme se dopustili při aproximaci hodnoty $\sqrt[3]{30}$, je

$$R_2(30) = \frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}(30-27)^3 = \frac{10}{3!\,27\ \sqrt[3]{\xi^8}}\,(30-27)^3 = \frac{5}{3\ \sqrt[3]{\xi^8}}\,, \quad \text{kde } \xi \in (27\,,30)\ .$$

Provedeme horní odhad velikosti chyby. Můžeme využít toho, že funkce $x^{-\frac{8}{3}}$ je na intervalu $\langle 27\,,30\rangle$ klesající (zjistíme záporné znaménko čtvrté derivace). Nebo lze použít úvahy, že z nerovnosti $\xi^8 \geq (27)^8$, plyne $\frac{1}{\xi^8} \leq (\frac{1}{27})^8$. Odhad chyby, které jsme se dopustili, tedy je:

$$|R_2(30)| \leq \frac{5}{3\ \sqrt[3]{27^8}} \doteq 0,000254\,.$$

Zpět

Příklad 5.1.3

Spočtěte přibližně hodnotu $\sqrt[3]{30}$ pomocí Taylorova polynomu 2. stupně. Odhadněte shora absolutní hodnotu chyby, které se při výpočtu dopustíte.

Maple:

```
> fs := x -> surd(x, 3); fce třetí odmocnina z x
```

$$fs := x \to \mathrm{surd}(x, 3)$$

```
> T2 := convert(taylor(fs(x),x=27,2+1),polynom);
```

$$T2 := 27^{(1/3)} + \frac{27^{(1/3)}\,(x-27)}{81} - \frac{27^{(1/3)}\,(x-27)^2}{6561}$$

```
> T2 := evalf(convert(taylor(fs(x),x=27,2+1),polynom));
```

$$T2 := 2.000000000 + 0.03703703703\,x - 0.0004572473709\,(x-27.)^2$$

```
> subs(x=30,T2);
```

$$3.106995885$$

následuje vypočet třetí derivace funkce fs v bodě 27:

```
> treti_d:= (D@@3)(fs);
```

$$treti\_d := x \to \frac{10}{27}\,\frac{\mathrm{surd}(x, 3)}{x^3}$$

```
> odhad_chyby=abs(evalf(treti_d(27))/3! *(30-27)^3);
```

$$odhad\_chyby = 0.0002540263171$$

V systému Maple samozřejmě dokážeme vypočítat přímo třetí odmocninu z čísla 30.

```
> evalf(fs(30));
```

$$3.107232506$$

Zpět

Příklad 5.1.3

Spočtěte přibližně hodnotu $\sqrt[3]{30}$ pomocí Taylorova polynomu 2. stupně. Odhadněte shora absolutní hodnotu chyby, které se při výpočtu dopustíte.

Mathematica:

f3[x_] = x^{1/3}

$\left\{x^{1/3}\right\}$

R = Series[f3[x], {x, 27, 2}]

$$\left\{3+\frac{x-27}{27}-\frac{(x-27)^2}{2187}+O[x-27]^3\right\}$$

T2 = Normal[R]

$$\left\{3+\frac{1}{27}(-27+x)-\frac{(-27+x)^2}{2187}\right\}$$

hodpriblizna = N[InputForm[T4/.{$x \to$ 30}]]

{3.1069958847736627}

dddf3 = D[f3[x], {x, 3}][[1]]

$$\frac{10}{27x^{8/3}}$$

chyba = N[Abs[(dddf3/.{$x \to$ 27})(3^3)/3!]]

0.000254026

hodpresna = N[InputForm[f3[30]]]

{3.1072325059538586}

Zpět

Parametrické rovnice křivek

- Kreslení křivek a tečný vektor
- Parametrizace křivek, tečna ke křivce

Zpět

Kreslení křivek a tečný vektor

- **Příklad 6.1.1** Máme křivku $\mathcal{K}$ zadanou parametrickými rovnicemi

$$\mathcal{K}: \quad \begin{aligned} x &= 1+t \\ y &= 2-t\,, \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

a) Nakreslete tuto křivku.

b) Určete tečný vektor ke křivce $\mathcal{K}$ v každém jejím bodě.

- **Příklad 6.1.2** Máme dvě křivky $\mathcal{K}_1$, $\mathcal{K}_2$ zadané parametrickými rovnicemi

$$\mathcal{K}_1: \quad \begin{aligned} x &= -1+t \\ y &= 3-2t\,, \quad t \in \mathbb{R} \end{aligned} \qquad\qquad \mathcal{K}_2: \quad \begin{aligned} x &= -1-2s \\ y &= 3+4s\,, \quad s \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

a) Ukažte, že tyto dvě parametrizace zadávají tutéž křivku.

b) Určete, jakou rychlostí se pohybují body po obou křivkách, chápeme-li jejich parametrické rovnice jako pohybové rovnice hmotného bodu.

- **Příklad 6.1.3** Máme křivku $\mathcal{K}$ zadanou parametrickými rovnicemi

$$\mathcal{K}: \quad \begin{aligned} x &= \tfrac{1}{t} \\ y &= \tfrac{1}{t^2}\,, \quad t \in (0,\infty). \end{aligned}$$

a) Nakreslete křivku, určete a nakreslete tečný vektor v bodě křivky $\mathcal{K}$, který odpovídá hodnotě parametru $t = \frac{3}{2}$.

b) Určete bod na křivce $\mathcal{K}$, ve kterém je tečna ke křivce $\mathcal{K}$ rovnoběžná s přímkou $y = x$.

Zpět

Příklad 6.1.1

Máme křivku $\mathcal{K}$ zadanou parametrickými rovnicemi

$$\mathcal{K}: \quad \begin{aligned} x &= 1+t \\ y &= 2-t\,, \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

a) Nakreslete tuto křivku.

b) Určete tečný vektor ke křivce $\mathcal{K}$ v každém jejím bodě.

? Zpět

Příklad 6.1.1

Máme křivku $\mathcal{K}$ zadanou parametrickými rovnicemi

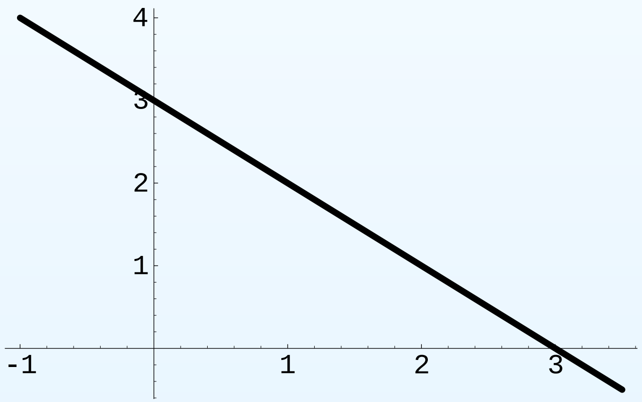
$$\mathcal{K}: \quad \begin{aligned} x &= 1 + t \\ y &= 2 - t\,, \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

a) Nakreslete tuto křivku.

b) Určete tečný vektor ke křivce $\mathcal{K}$ v každém jejím bodě.

Výsledek:

a)



b) $\vec{v} = (1, -1)$.

Zpět

Příklad 6.1.1

Máme křivku $\mathcal{K}$ zadanou parametrickými rovnicemi

$$\begin{aligned} \mathcal{K}: \quad x &= 1 + t \\ y &= 2 - t\,, \ \ t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

a) Nakreslete tuto křivku.

b) Určete tečný vektor ke křivce $\mathcal{K}$ v každém jejím bodě.

Návod:

a) Parametrickými rovnicemi je dána přímka se směrovým vektorem $(1, -1)$ procházející bodem $[1, 2]$.

b) Souřadnice tečného vektoru v libovolném bodě spočteme takto: $\vec{v}(t) = (x'(t), y'(t))$.

Zpět

Příklad 6.1.1

Máme křivku $\mathcal{K}$ zadanou parametrickými rovnicemi

$$\begin{aligned} \mathcal{K}: \quad x &= 1+t \\ y &= 2-t\,, \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

a) Nakreslete tuto křivku.

b) Určete tečný vektor ke křivce $\mathcal{K}$ v každém jejím bodě.

Řešení:

a) Musíme vědět, že parametrické rovnice zadávají přímku. Přímo z rovnic je vidět, že prochází bodem $[1,2]$ (bod odpovídá parametru $t=0$) a dále např. bodem $[2,1]$ $(t=1)$.

b) Souřadnice tečného vektoru v libovolném bodě $[x,y]$, který odpovídá parametru t, spočteme takto: $\vec{v}(t) = (x'(t), y'(t)) = (1,-1)$. V tomto případě má tečný vektor v každém bodě křivky stejné souřadnice.

Zpět

Příklad 6.1.1

Máme křivku $\mathcal{K}$ zadanou parametrickými rovnicemi

$$\mathcal{K}: \quad \begin{aligned} x &= 1+t \\ y &= 2-t\,, \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

a) Nakreslete tuto křivku.

b) Určete tečný vektor ke křivce $\mathcal{K}$ v každém jejím bodě.

Maple:

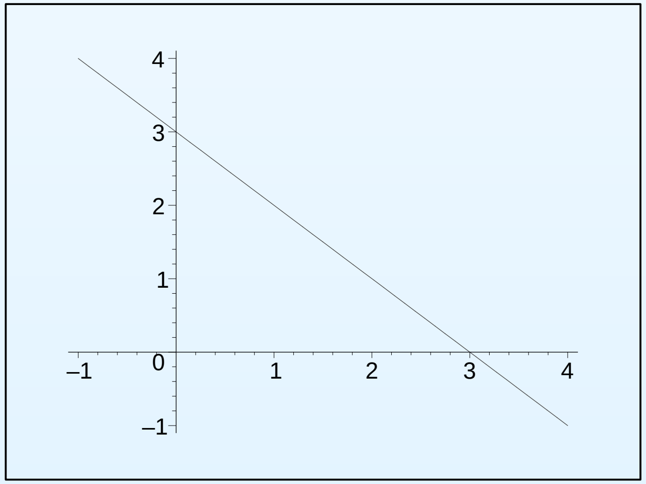
```
> x:=t->1+t;
```

$$x := t \to 1+t$$

```
> y:=t->2-t;
```

$$y := t \to 2-t$$

```
> plot([x(t),y(t),t=-2..3]);
```



Další

Příklad 6.1.1

Máme křivku $\mathcal{K}$ zadanou parametrickými rovnicemi

$$\mathcal{K}: \quad \begin{aligned} x &= 1+t \\ y &= 2-t\,, \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

a) Nakreslete tuto křivku.

b) Určete tečný vektor ke křivce $\mathcal{K}$ v každém jejím bodě.

Maple:

Tečný vektor:

```
> v:=[diff(x(t),t),diff(y(t),t)];
```

$$v := [1,\ -1]$$

Zpět

Příklad 6.1.1

Máme křivku $\mathcal{K}$ zadanou parametrickými rovnicemi

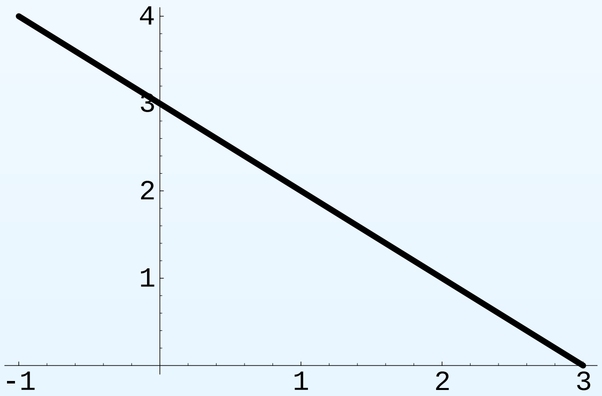
$$\mathcal{K}: \quad \begin{aligned} x &= 1+t \\ y &= 2-t\,, \;\; t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

a) Nakreslete tuto křivku.

b) Určete tečný vektor ke křivce $\mathcal{K}$ v každém jejím bodě.

Mathematica:

x[t_] $= 1 + t$;
y[t_] $= 2 - t$;
ParametricPlot[{$x[t], y[t]$}, {$t, -2, 2$}, PlotStyle → Thickness[0.01]]



Tečný vektor:

$v = \{D[x[t], t], D[y[t], t]\}$
$\{1, -1\}$

Zpět

Příklad 6.1.2

Máme dvě křivky $\mathcal{K}_1$, $\mathcal{K}_2$ zadané parametrickými rovnicemi

$$\mathcal{K}_1: \quad \begin{aligned} x &= -1 + t \\ y &= 3 - 2t\,, \quad t \in \mathbb{R} \end{aligned} \qquad\qquad \mathcal{K}_2: \quad \begin{aligned} x &= -1 - 2s \\ y &= 3 + 4s\,, \quad s \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

a) Ukažte, že tyto dvě parametrizace zadávají tutéž křivku.

b) Určete, jakou rychlostí se pohybují body po obou křivkách, chápeme-li jejich parametrické rovnice jako pohybové rovnice hmotného bodu.

?

Zpět

Příklad 6.1.2

Máme dvě křivky $\mathcal{K}_1$, $\mathcal{K}_2$ zadané parametrickými rovnicemi

$$\mathcal{K}_1: \quad \begin{aligned} x &= -1 + t \\ y &= 3 - 2t\,, \ t \in \mathbb{R} \end{aligned} \qquad\qquad \mathcal{K}_2: \quad \begin{aligned} x &= -1 - 2s \\ y &= 3 + 4s\,, \ s \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

a) Ukažte, že tyto dvě parametrizace zadávají tutéž křivku.

b) Určete, jakou rychlostí se pohybují body po obou křivkách, chápeme-li jejich parametrické rovnice jako pohybové rovnice hmotného bodu.

Výsledek:

a) Obě parametrizace dávají přímku se směrovým vektorem $(1, -2)$ procházející bodem $[-1, 3]$.

b) $|\vec{v}_1| = \sqrt{5}$, $|\vec{v}_2| = 2\sqrt{5}$.

Zpět

Příklad 6.1.2

Máme dvě křivky $\mathcal{K}_1$, $\mathcal{K}_2$ zadané parametrickými rovnicemi

$$\mathcal{K}_1: \quad \begin{aligned} x &= -1 + t \\ y &= 3 - 2t\,, \ \ t \in \mathbb{R} \end{aligned} \qquad\qquad \mathcal{K}_2: \quad \begin{aligned} x &= -1 - 2s \\ y &= 3 + 4s\,, \ \ s \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

a) Ukažte, že tyto dvě parametrizace zadávají tutéž křivku.

b) Určete, jakou rychlostí se pohybují body po obou křivkách, chápeme-li jejich parametrické rovnice jako pohybové rovnice hmotného bodu.

Návod:

a) Parametrické rovnice přímky lze převést na obecnou rovnici. Obecná rovnice přímky je jednoznačně dána až na její nenulový násobek.

b) Rychlost hmotného bodu vyčíslíme jako velikost tečného vektoru. Souřadnice tečného vektoru v libovolném bodě spočteme takto: $\vec{v}(t) = (x'(t), y'(t))$.

Zpět

Příklad 6.1.2

Máme dvě křivky $\mathcal{K}_1$, $\mathcal{K}_2$ zadané parametrickými rovnicemi

$$\mathcal{K}_1: \quad \begin{aligned} x &= -1 + t \\ y &= 3 - 2t\,,\ \ t \in \mathbb{R} \end{aligned} \qquad\qquad \mathcal{K}_2: \quad \begin{aligned} x &= -1 - 2s \\ y &= 3 + 4s\,,\ \ s \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

a) Ukažte, že tyto dvě parametrizace zadávají tutéž křivku.

b) Určete, jakou rychlostí se pohybují body po obou křivkách, chápeme-li jejich parametrické rovnice jako pohybové rovnice hmotného bodu.

Řešení:

a) Musíme vědět, že dané parametrické rovnice zadávají dvě přímky. Přímo z rovnic je vidět, že jak přímka $\mathcal{K}_1$, tak přímka $\mathcal{K}_2$ procházejí bodem $[-1, 3]$ a že jejich směrové vektory $(1, -2), (-2, 4)$ určují tentýž směr, neboť jeden je násobkem druhého.

b) Souřadnice tečného vektoru v libovolném bodě $[x, y]$, který odpovídá parametru t (resp. s), spočteme takto: $\vec{v}_1(t) = (x'(t), y'(t)) = (1, -2)$ a $\vec{v}_2(s) = (x'(s), y'(s)) = (-2, 4)$. Jejich velikost je: $|\vec{v}_1(t)| = \sqrt{(1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$ a $|\vec{v}_2(s)| = \sqrt{(-2)^2 + (4)^2} = 2\sqrt{5}$. Hmotný bod se po přímce $\mathcal{K}_1$ pohybuje rychlostí $\sqrt{5}$ a po přímce $\mathcal{K}_2$ rychlostí $2\sqrt{5}$.

Zpět

Příklad 6.1.2

Máme dvě křivky $\mathcal{K}_1$, $\mathcal{K}_2$ zadané parametrickými rovnicemi

$$\mathcal{K}_1: \quad \begin{aligned} x &= -1 + t \\ y &= 3 - 2t\,, \ \ t \in \mathbb{R} \end{aligned} \qquad\qquad \mathcal{K}_2: \quad \begin{aligned} x &= -1 - 2s \\ y &= 3 + 4s\,, \ \ s \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

a) Ukažte, že tyto dvě parametrizace zadávají tutéž křivku.

b) Určete, jakou rychlostí se pohybují body po obou křivkách, chápeme-li jejich parametrické rovnice jako pohybové rovnice hmotného bodu.

Maple:

```
> x1:=t->-1+t;
```

$$x1 := t \to -1 + t$$

```
> y1:=t->3-2*t;
```

$$y1 := t \to 3 - 2\,t$$

```
> x2:=t->-1-2*t;
```

$$x2 := t \to -1 - 2\,t$$

```
> y2:=t->3+4*t;
```

$$y2 := t \to 3 + 4\,t$$

```
> solve(x2(t)=-1);
```

$$0$$

Křivky jsou totožné.

```
> [x2(0),y2(0)],[x1(0),y1(0)];
```

$$[-1,\,3],\;[-1,\,3]$$

Další

Příklad 6.1.2

Máme dvě křivky $\mathcal{K}_1$, $\mathcal{K}_2$ zadané parametrickými rovnicemi

$$\mathcal{K}_1: \quad \begin{aligned} x &= -1 + t \\ y &= 3 - 2t\,, \ t \in \mathbb{R} \end{aligned} \qquad\qquad \mathcal{K}_2: \quad \begin{aligned} x &= -1 - 2s \\ y &= 3 + 4s\,, \ s \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

a) Ukažte, že tyto dvě parametrizace zadávají tutéž křivku.

b) Určete, jakou rychlostí se pohybují body po obou křivkách, chápeme-li jejich parametrické rovnice jako pohybové rovnice hmotného bodu.

Maple:

Rychlost křivky $\mathcal{K}_1$:

```
> v1:=linalg[norm]([diff(x1(t),t),diff(y1(t),t)],2);
```

$$v1 := \sqrt{5}$$

Rychlost křivky $\mathcal{K}_2$:

```
> v2:=linalg[norm]([diff(x2(t),t),diff(y2(t),t)],2);
```

$$v2 := 2\sqrt{5}$$

Zpět

Příklad 6.1.2

Máme dvě křivky $\mathcal{K}_1$, $\mathcal{K}_2$ zadané parametrickými rovnicemi

$$\mathcal{K}_1: \quad \begin{aligned} x &= -1 + t \\ y &= 3 - 2t\,, \ \ t \in \mathbb{R} \end{aligned} \qquad\qquad \mathcal{K}_2: \quad \begin{aligned} x &= -1 - 2s \\ y &= 3 + 4s\,, \ \ s \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

a) Ukažte, že tyto dvě parametrizace zadávají tutéž křivku.

b) Určete, jakou rychlostí se pohybují body po obou křivkách, chápeme-li jejich parametrické rovnice jako pohybové rovnice hmotného bodu.

Mathematica:

x1[t_] = −1 + *t*;
y1[t_] = 3 − 2*t*;
x2[t_] = −1 − 2*t*;
y2[t_] = 3 + 4*t*;

Přímky jsou stejné:

Solve[x1[*t*] == x2[*s*], *t*]
$\{\{t \to -2s\}\}$
Solve[y1[*t*] == y2[*s*], *t*]
$\{\{t \to -2s\}\}$

Tečné vektory:

v1 = {*D*[x1[*t*], *t*], *D*[y1[*t*], *t*]}
$\{1, -2\}$
v2 = {*D*[x2[*t*], *t*], *D*[y2[*t*], *t*]}
$\{-2, 4\}$

Další

Příklad 6.1.2

Máme dvě křivky $\mathcal{K}_1$, $\mathcal{K}_2$ zadané parametrickými rovnicemi

$$\mathcal{K}_1: \quad \begin{aligned} x &= -1 + t \\ y &= 3 - 2t\,, \ \ t \in \mathbb{R} \end{aligned} \qquad\qquad \mathcal{K}_2: \quad \begin{aligned} x &= -1 - 2s \\ y &= 3 + 4s\,, \ \ s \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

a) Ukažte, že tyto dvě parametrizace zadávají tutéž křivku.

b) Určete, jakou rychlostí se pohybují body po obou křivkách, chápeme-li jejich parametrické rovnice jako pohybové rovnice hmotného bodu.

Mathematica:

Rychlost křivky $\mathcal{K}_1$:

Norm[v1]
$\sqrt{5}$

Rychlost křivky $\mathcal{K}_2$:

Norm[v2]
$2\sqrt{5}$

Zpět

Příklad 6.1.3

Máme křivku $\mathcal{K}$ zadanou parametrickými rovnicemi

$$\mathcal{K}: \quad \begin{aligned} x &= \tfrac{1}{t} \\ y &= \tfrac{1}{t^2}, \quad t \in (0, \infty). \end{aligned}$$

a) Nakreslete křivku, určete a nakreslete tečný vektor v bodě křivky $\mathcal{K}$, který odpovídá hodnotě parametru $t = \frac{3}{2}$.

b) Určete bod na křivce $\mathcal{K}$, ve kterém je tečna ke křivce $\mathcal{K}$ rovnoběžná s přímkou $y = x$.

? Zpět

Příklad 6.1.3

Máme křivku $\mathcal{K}$ zadanou parametrickými rovnicemi

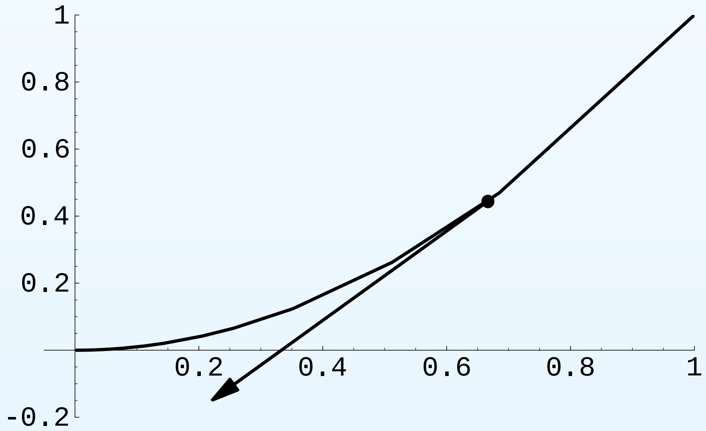
$$\mathcal{K}: \quad \begin{aligned} x &= \tfrac{1}{t} \\ y &= \tfrac{1}{t^2}, \quad t \in (0, \infty). \end{aligned}$$

a) Nakreslete křivku, určete a nakreslete tečný vektor v bodě křivky $\mathcal{K}$, který odpovídá hodnotě parametru $t = \frac{3}{2}$.

b) Určete bod na křivce $\mathcal{K}$, ve kterém je tečna ke křivce $\mathcal{K}$ rovnoběžná s přímkou $y = x$.

Výsledek:

a) $\vec{v} = (-\frac{4}{9}, -\frac{16}{27})$,



b) $[\frac{1}{2}, \frac{1}{4}]$

Zpět

Příklad 6.1.3

Máme křivku $\mathcal{K}$ zadanou parametrickými rovnicemi

$$\mathcal{K}: \quad \begin{aligned} x &= \tfrac{1}{t} \\ y &= \tfrac{1}{t^2}, \quad t \in (0, \infty). \end{aligned}$$

a) Nakreslete křivku, určete a nakreslete tečný vektor v bodě křivky $\mathcal{K}$, který odpovídá hodnotě parametru $t = \frac{3}{2}$.

b) Určete bod na křivce $\mathcal{K}$, ve kterém je tečna ke křivce $\mathcal{K}$ rovnoběžná s přímkou $y = x$.

Návod:

a) Parametrickými rovnicemi je dán graf funkce proměnné x. Souřadnice tečného vektoru v libovolném bodě spočteme takto: $\vec{v}(t) = (x'(t), y'(t))$. Tečný vektor umístíme do bodu křivky, který odpovídá danému parametru.

b) V daném bodě musí být tečný vektor násobkem směrového vektoru přímky $y = x$.

Zpět

Příklad 6.1.3

Máme křivku $\mathcal{K}$ zadanou parametrickými rovnicemi

$$\mathcal{K}: \quad \begin{array}{rcl} x &=& \frac{1}{t} \\ y &=& \frac{1}{t^2}, \quad t \in (0, \infty). \end{array}$$

a) Nakreslete křivku, určete a nakreslete tečný vektor v bodě křivky $\mathcal{K}$, který odpovídá hodnotě parametru $t = \frac{3}{2}$.

b) Určete bod na křivce $\mathcal{K}$, ve kterém je tečna ke křivce $\mathcal{K}$ rovnoběžná s přímkou $y = x$.

Řešení:

a) Funkce $x = \frac{1}{t},\ t > 0$ je prostá, existuje k ní inverzní $t = \frac{1}{x},\ x > 0$. Pak $y = \frac{1}{t^2} = x^2,\ x > 0$. Křivka je část paraboly. Souřadnice tečného vektoru v libovolném bodě $[x, y]$, který odpovídá parametru t, spočteme takto: $\vec{v}(t) = (x'(t), y'(t)) = (-\frac{1}{t^2}, -\frac{2}{t^3})$. Tedy $\vec{v}(\frac{3}{2}) = (-\frac{4}{9}, -\frac{16}{27})$. Tečný vektor umístíme do bodu $[\frac{2}{3}, \frac{4}{9}]$ (dosadíme do rovnic $t = \frac{3}{2}$) a pak jeho koncový bod je $[\frac{2}{3}, \frac{4}{9}] + (-\frac{4}{9}, -\frac{16}{27}) = [\frac{2}{9}, -\frac{4}{27}]$.

b) Tečný vektor musí být násobkem směrového vektoru přímky $y = x$, tj. vektoru $(1, 1)$. Tedy $\vec{v}(t) = (-\frac{1}{t^2}, -\frac{2}{t^3}) = (k, k)$. Odtud $-\frac{1}{t^2} = -\frac{2}{t^3} \Rightarrow t = 2$. Příslušný bod má souřadnice $[\frac{1}{2}, \frac{1}{4}]$.

Zpět

Příklad 6.1.3

Máme křivku $\mathcal{K}$ zadanou parametrickými rovnicemi

$$\mathcal{K}: \quad \begin{aligned} x &= \tfrac{1}{t} \\ y &= \tfrac{1}{t^2}, \quad t \in (0, \infty). \end{aligned}$$

a) Nakreslete křivku, určete a nakreslete tečný vektor v bodě křivky $\mathcal{K}$, který odpovídá hodnotě parametru $t = \frac{3}{2}$.

b) Určete bod na křivce $\mathcal{K}$, ve kterém je tečna ke křivce $\mathcal{K}$ rovnoběžná s přímkou $y = x$.

Maple:

```
> x:=t->1/t;
```

$$x := t \rightarrow \frac{1}{t}$$

```
> y:=t->1/t^2;
```

$$y := t \rightarrow \frac{1}{t^2}$$

Tečný vektor:

```
> v:=[diff(x(t),t),diff(y(t),t)];
```

$$v := [-\frac{1}{t^2}, -\frac{2}{t^3}]$$

Tečný vektor pro $t = 3/2$:

```
> v1:=subs(t=3/2,v);
```

$$v1 := [\frac{-4}{9}, \frac{-16}{27}]$$

Další

Příklad 6.1.3

Máme křivku $\mathcal{K}$ zadanou parametrickými rovnicemi

$$\mathcal{K}: \quad \begin{aligned} x &= \frac{1}{t} \\ y &= \frac{1}{t^2}, \quad t \in (0, \infty). \end{aligned}$$

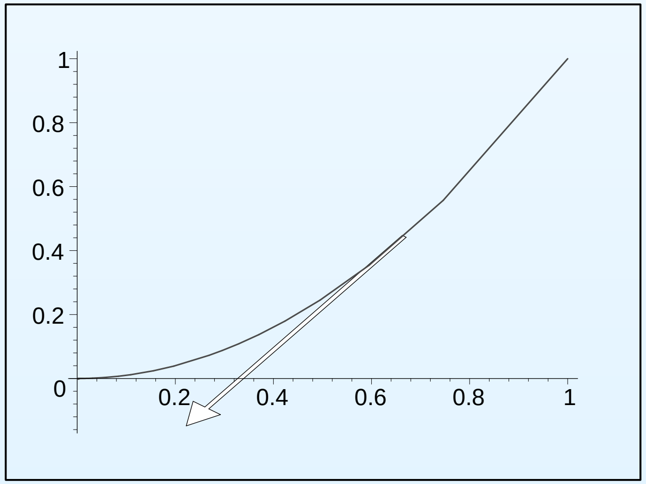
a) Nakreslete křivku, určete a nakreslete tečný vektor v bodě křivky $\mathcal{K}$, který odpovídá hodnotě parametru $t = \frac{3}{2}$.

b) Určete bod na křivce $\mathcal{K}$, ve kterém je tečna ke křivce $\mathcal{K}$ rovnoběžná s přímkou $y = x$.

Maple:

Graf křivky a zobrazení tečného vektoru:

```
> g1:=plot([x(t),y(t),t=1..500]):
> g2:=plots[arrow]([x(3/2),y(3/2)],[v1[1],v1[2]],width=0.005,head_width
=0.07,head_length=0.07):
> plots[display](g1,g2);
```



Další

Příklad 6.1.3

Máme křivku $\mathcal{K}$ zadanou parametrickými rovnicemi

$$\mathcal{K}: \quad \begin{aligned} x &= \tfrac{1}{t} \\ y &= \tfrac{1}{t^2}\,, \quad t \in (0, \infty). \end{aligned}$$

a) Nakreslete křivku, určete a nakreslete tečný vektor v bodě křivky $\mathcal{K}$, který odpovídá hodnotě parametru $t = \frac{3}{2}$.

b) Určete bod na křivce $\mathcal{K}$, ve kterém je tečna ke křivce $\mathcal{K}$ rovnoběžná s přímkou $y = x$.

Maple:

Bod A, ve kterém je tečný vektor rovnoběžný s přímkou $y = x$:

```
> solve({v[1]=k,v[2]=k});
```

$$\{t = 2,\ k = \frac{-1}{4}\}$$

```
> A:=[x(2),y(2)];
```

$$A := [\frac{1}{2},\ \frac{1}{4}]$$

Zpět

Příklad 6.1.3

Máme křivku $\mathcal{K}$ zadanou parametrickými rovnicemi

$$\mathcal{K}: \begin{array}{rcl} x &=& \frac{1}{t} \\ y &=& \frac{1}{t^2}, \quad t \in (0, \infty). \end{array}$$

a) Nakreslete křivku, určete a nakreslete tečný vektor v bodě křivky $\mathcal{K}$, který odpovídá hodnotě parametru $t = \frac{3}{2}$.

b) Určete bod na křivce $\mathcal{K}$, ve kterém je tečna ke křivce $\mathcal{K}$ rovnoběžná s přímkou $y = x$.

Mathematica:

x[t_] = 1/t;
y[t_] = 1/t^2;

Tečný vektor:

v = {D[x[t], t], D[y[t], t]}

$\left\{-\frac{1}{t^2}, -\frac{2}{t^3}\right\}$

Tečný vektor pro $t = 3/2$:

v1 = v/.t → 3/2

$\left\{-\frac{4}{9}, -\frac{16}{27}\right\}$

<< Graphics\`Arrow\`

Další

Příklad 6.1.3

Máme křivku $\mathcal{K}$ zadanou parametrickými rovnicemi

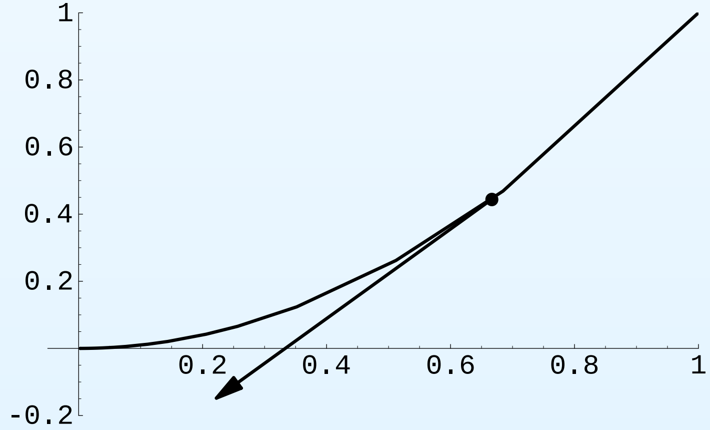
$$\mathcal{K}: \quad \begin{aligned} x &= \frac{1}{t} \\ y &= \frac{1}{t^2}, \quad t \in (0, \infty). \end{aligned}$$

a) Nakreslete křivku, určete a nakreslete tečný vektor v bodě křivky $\mathcal{K}$, který odpovídá hodnotě parametru $t = \frac{3}{2}$.

b) Určete bod na křivce $\mathcal{K}$, ve kterém je tečna ke křivce $\mathcal{K}$ rovnoběžná s přímkou $y = x$.

Mathematica:

**g1 = ParametricPlot[{*x*[*t*], *y*[*t*]}, {*t*, 1, 400}, PlotPoints → 50,
PlotRange → {{−0.05, 1.0}, {−0.2, 1.0}}, PlotStyle → Thickness[0.005],
Epilog → {Thickness[0.005],
Arrow[{*x*[3/2], *y*[3/2]}, {*x*[3/2] + v1[[1]], *y*[3/2] + v1[[2]]}, HeadLength → .05],
PointSize[0.02], Point[{*x*[3/2], *y*[3/2]}]}]**



Další

Příklad 6.1.3

Máme křivku $\mathcal{K}$ zadanou parametrickými rovnicemi

$$\mathcal{K}: \quad \begin{aligned} x &= \frac{1}{t} \\ y &= \frac{1}{t^2}, \quad t \in (0, \infty). \end{aligned}$$

a) Nakreslete křivku, určete a nakreslete tečný vektor v bodě křivky $\mathcal{K}$, který odpovídá hodnotě parametru $t = \frac{3}{2}$.

b) Určete bod na křivce $\mathcal{K}$, ve kterém je tečna ke křivce $\mathcal{K}$ rovnoběžná s přímkou $y = x$.

Mathematica:

Bod A, ve kterém je tečný vektor rovnoběžný s přímkou $y = x$:

Solve[{*v*[[1]] == *k*, *v*[[2]] == *k*}, {*t*, *k*}]

$\{\{k \to -\frac{1}{4}, t \to 2\}\}$

***A* = *v*/.*t* → 2**

$\{-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\}$

Zpět

Parametrizace křivek, tečna ke křivce

- Příklad 6.2.1 Parametrizujte křivku, která je průnikem kulové plochy $\mathcal{K}$
$$\mathcal{K} : (x-3)^2 + (y-4)^2 + (z-8)^2 = 20$$
a roviny $\varrho : z = 10$.
- Příklad 6.2.2 Napište rovnice tečen k elipse o rovnici $4x^2 + 9y^2 = 36$, jejichž směrnice je rovna 1.

Zpět

Příklad 6.2.1

Parametrizujte křivku, která je průnikem kulové plochy $\mathcal{K}$

$$\mathcal{K} : (x-3)^2 + (y-4)^2 + (z-8)^2 = 20$$

a roviny $\varrho : z = 10$.

? Zpět

Příklad 6.2.1

Parametrizujte křivku, která je průnikem kulové plochy $\mathcal{K}$

$$\mathcal{K} : (x-3)^2 + (y-4)^2 + (z-8)^2 = 20$$

a roviny $\varrho : z = 10$.

Výsledek:

Kružnice k: $x(t) = 3 + 4\cos t,\ y(t) = 4 + 4\sin t,\ z(t) = 10,\ t \in \langle 0, 2\pi \rangle$.

Zpět

Příklad 6.2.1

Parametrizujte křivku, která je průnikem kulové plochy $\mathcal{K}$

$$\mathcal{K} : (x-3)^2 + (y-4)^2 + (z-8)^2 = 20$$

a roviny $\varrho : z = 10$.

Návod:

Nejprve vypočteme průnik $\mathcal{K} \bigcap \varrho$, poté provedeme parametrizaci vzniklé křivky s využitím polárních (resp. válcových) souřadnic.

Zpět

Příklad 6.2.1

Parametrizujte křivku, která je průnikem kulové plochy $\mathcal{K}$

$$\mathcal{K} : (x-3)^2 + (y-4)^2 + (z-8)^2 = 20$$

a roviny $\varrho : z = 10$.

Řešení:

Průnik $\mathcal{K} \bigcap \varrho$ určíme dosazením $z = 10$ do rovnice kulové plochy:

$$(x-3)^2 + (y-4)^2 + (10-8)^2 = 20\,, \quad \text{tj.} \quad (x-3)^2 + (y-4)^2 = 16\,.$$

Je zřejmé, že se jedná o kružnici se středem v bodě $S = [3; 4]$ a poloměrem $r = 4$, která leží v rovině $z = 10$. Parametrické vyjádření kružnice se středem v bodě $S = [s_1, s_2]$ a poloměrem R, ležící v rovině $z = 0$ je

$$\left.\begin{array}{rcl} x(t) & = & s_1 + R\cos t \\ y(t) & = & s_2 + R\sin t \end{array}\right\} \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle\,.$$

V našem případě stačí dosadit a přidat třetí souřadnici $z = 10$. Hledaná parametrizace má tedy tvar

$$\left.\begin{array}{rcl} x(t) & = & 3 + 4\cos t \\ y(t) & = & 4 + 4\sin t \\ z(t) & = & 10 \end{array}\right\} \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle\,.$$

Zpět

Příklad 6.2.1

Parametrizujte křivku, která je průnikem kulové plochy $\mathcal{K}$

$$\mathcal{K} : (x-3)^2 + (y-4)^2 + (z-8)^2 = 20$$

a roviny $\varrho : z = 10$.

Maple:

```
> koule:=(x-3)^2+(y-4)^2+(z-8)^2=20;
```

$$koule := (x-3)^2 + (y-4)^2 + (z-8)^2 = 20$$

```
> kruznice:=subs(z=10,koule);
```

$$kruznice := (x-3)^2 + (y-4)^2 + 4 = 20$$

Parametrizaci kružnice musíme udělat sami. Můžeme se jen přesvědčit dosazením do rovnice kružnice, že jsme parametrizaci udělali správně.

```
> x:=t->3+4*cos(t);
```

$$x := t \to 3 + 4\cos(t)$$

```
> y:=t->4+4*sin(t);
```

$$y := t \to 4 + 4\sin(t)$$

```
> k:=subs(x=x(t),y=y(t),kruznice);
```

$$k := 16\cos(t)^2 + 16\sin(t)^2 + 4 = 20$$

```
> simplify(k);
```

$$20 = 20$$

Zpět

Příklad 6.2.1

Parametrizujte křivku, která je průnikem kulové plochy $\mathcal{K}$

$$\mathcal{K} : (x-3)^2 + (y-4)^2 + (z-8)^2 = 20$$

a roviny $\varrho : z = 10$.

Mathematica:

koule = (x − 3)^2 + (y − 4)^2 + (z − 8)^2==20

$(-3+x)^2 + (-4+y)^2 + (-8+z)^2 == 20$

kruznice = koule/.z → 10

$4 + (-3+x)^2 + (-4+y)^2 == 20$

Parametrizaci kružnice musíme udělat sami. Můžeme se jen přesvědčit dosazením do rovnice kružnice, že jsme parametrizaci udělali správně.

x[t_] = 3 + 4Cos[t]

3 + 4Cos[t]

y[t_] = 4 + 4Sin[t]

4 + 4Sin[t]

dosazeni = kruznice/.{x → x[t], y → y[t]}

$4 + 16\mathrm{Cos}[t]^2 + 16\mathrm{Sin}[t]^2 == 20$

Simplify[dosazeni]

True

Zpět

Příklad 6.2.2

Napište rovnice tečen k elipse o rovnici $4x^2 + 9y^2 = 36$, jejichž směrnice je rovna 1.

? Zpět

Příklad 6.2.2

Napište rovnice tečen k elipse o rovnici $4x^2 + 9y^2 = 36$, jejichž směrnice je rovna 1.

Výsledek:

Tečna $t_1 : y = x + \sqrt{13}$, $t_2 : y = x - \sqrt{13}$.

Zpět

Příklad 6.2.2

Napište rovnice tečen k elipse o rovnici $4x^2 + 9y^2 = 36$, jejichž směrnice je rovna 1.

Návod:

Rovnice hledané tečny bude $y = x + q$ ($q \in \mathbb{R}$), neboť její směrnice $k = 1$. Hledáme tedy společný bod této přímky a elipsy.

Zpět

Příklad 6.2.2

Napište rovnice tečen k elipse o rovnici $4x^2 + 9y^2 = 36$, jejichž směrnice je rovna 1.

Řešení:

Ze zadání plyne, že rovnice hledané tečny bude $y = x + q$ $(q \in \mathbb{R})$, neboť její směrnice $k = 1$. Řešíme tedy soustavu

$$\begin{aligned} 4x^2 + 9y^2 &= 36 \\ y &= x + q\,. \end{aligned}$$

za předpokladu, že má právě jedno řešení (průnik tečny a elipsy je jednobodový - bod dotyku). Dosazením y z druhé rovnice do první získáme kvadratickou rovnici

$$4x^2 + 9(x + q)^2 = 36\,,$$

po upravení

$$13x^2 + 18qx + 9q^2 - 36 = 0$$

s diskriminantem $D = (18q)^2 - 52(9q^2 - 36) = -144q^2 + 1872$. Podmínkou pro jeden dvojnásobný kořen je $D = 0$, tj. $q^2 = 13$. Zadání úlohy tedy splňují tečny $t_1 : y = x + \sqrt{13}$, $t_2 : y = x - \sqrt{13}$.

Zpět

Příklad 6.2.2

Napište rovnice tečen k elipse o rovnici $4x^2 + 9y^2 = 36$, jejichž směrnice je rovna 1.

Maple:

```
> elipsa:=4*x^2+9*y^2-36=0;
```

$$elipsa := 4\,x^2 + 9\,y^2 - 36 = 0$$

```
> rovnice:=subs(y=x+q,elipsa);
```

$$rovnice := 4\,x^2 + 9\,(x+q)^2 - 36 = 0$$

Nyní jsme provedli dosazení z rovnice tečny do rovnice elipsy a budeme hledat podmínku, kdy je diskriminant této kvadratické rovnice roven 0, tj. kdy daná přímka bude tečnou elipsy:

```
> expand(rovnice);
```

$$13\,x^2 + 18\,x\,q + 9\,q^2 - 36 = 0$$

```
> diskriminant:=discrim(lhs(rovnice),x);
```

$$diskriminant := 1872 - 144\,q^2$$

```
> q:=solve(diskriminant=0);
```

$$q := -\sqrt{13},\ \sqrt{13}$$

Vidíme, že jsme dostali dvě možnosti - zadání budou vyhovovat dvě tečny s požadovanou směrnicí k=1 a kvocientem q.

Další

Příklad 6.2.2

Napište rovnice tečen k elipse o rovnici $4x^2 + 9y^2 = 36$, jejichž směrnice je rovna 1.

Maple:

```
> q1:=q[1];
```

$$q1 := -\sqrt{13}$$

```
> q2:=q[2];
```

$$q2 := \sqrt{13}$$

Rovnice tečny t1 bude:

```
> t1:=y=x+q2;
```

$$t1 := y = x + \sqrt{13}$$

Rovnice tečny t2 bude:

```
> t2:=y=x+q1;
```

$$t2 := y = x - \sqrt{13}$$

Zpět

Příklad 6.2.2

Napište rovnice tečen k elipse o rovnici $4x^2 + 9y^2 = 36$, jejichž směrnice je rovna 1.

Mathematica:

$\mathbf{elipsa = 4 * \boldsymbol{x}\hat{}2 + 9 * \boldsymbol{y}\hat{}2 - 36 == 0}$

$-36 + 4x^2 + 9y^2 == 0$

$\mathbf{rovnice = elipsa/.\boldsymbol{y} \to \boldsymbol{x} + \boldsymbol{q}}$

$-36 + 4x^2 + 9(q + x)^2 == 0$

$\mathbf{\boldsymbol{r} = Solve[rovnice, \boldsymbol{x}]}$

$\left\{\left\{x \to \frac{3}{13}\left(-3q - 2\sqrt{13 - q^2}\right)\right\}, \left\{x \to \frac{3}{13}\left(-3q + 2\sqrt{13 - q^2}\right)\right\}\right\}$

Najdeme hodnotu q, pro kterou má elipsa a rovnice přímky $y = x + q$ právě jeden společný bod.

$\mathbf{lr = \boldsymbol{r}[[1, 1, 2]]}$

$\frac{3}{13}\left(-3q - 2\sqrt{13 - q^2}\right)$

$\mathbf{pr = \boldsymbol{r}[[2, 1, 2]]}$

$\frac{3}{13}\left(-3q + 2\sqrt{13 - q^2}\right)$

$\mathbf{qq = Solve[lr == pr, \boldsymbol{q}]}$

$\left\{\left\{q \to -\sqrt{13}\right\}, \left\{q \to \sqrt{13}\right\}\right\}$

Další

Příklad 6.2.2

Napište rovnice tečen k elipse o rovnici $4x^2 + 9y^2 = 36$, jejichž směrnice je rovna 1.

Mathematica:

$\mathbf{t1 = \boldsymbol{x} + qq[[1, 1, 2]]}$
$\mathbf{t2 = \boldsymbol{x} + qq[[2, 1, 2]]}$

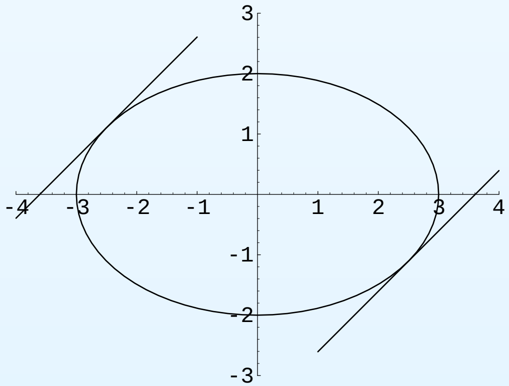
$-\sqrt{13} + x$

$\sqrt{13} + x$

Zobrazíme si elipsu a obě tečny graficky

<< Graphics`ImplicitPlot`

$\mathbf{g1 = ImplicitPlot[elipsa, \{\boldsymbol{x}, -3, 3\}, DisplayFunction \to Identity];}$
$\mathbf{g2 = Plot[t1, \{\boldsymbol{x}, 1, 4\}, DisplayFunction \to Identity];}$
$\mathbf{g3 = Plot[t2, \{\boldsymbol{x}, -4, -1\}, DisplayFunction \to Identity];}$
$\mathbf{Show[\{g1, g2, g3\}, DisplayFunction \to \$DisplayFunction,}$
$\mathbf{PlotRange \to \{\{-4, 4\}, \{-3, 3\}\}];}$



Zpět

Integrální počet funkcí jedné proměnné

- Neurčité integrály
- Určité a nevlastní integrály
- Geometrické aplikace určitého integrálu

Zpět

- Příklad 7.1.1 Vhodnou metodou vypočítejte neurčitý integrál $\int \cos(\ln x)\, \mathrm{d}x$.
- Příklad 7.1.2 Vhodnou metodou vypočítejte neurčitý integrál $\int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}\, \mathrm{d}x$.
- Příklad 7.1.3 Vhodnou metodou vypočítejte neurčitý integrál $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^6}}\, \mathrm{d}x$.

Zpět

Příklad 7.1.1

Vhodnou metodou vypočítejte neurčitý integrál $\int \cos(\ln x)\, \mathrm{d}x$.

? Zpět

Příklad 7.1.1

Vhodnou metodou vypočítejte neurčitý integrál $\int \cos(\ln x)\ \mathrm{d}x$.

Výsledek:

$$\int \cos(\ln x)\ \mathrm{d}x = \frac{x}{2}\left(\cos(\ln x) + \sin(\ln x)\right)\ .$$

Zpět

Příklad 7.1.1

Vhodnou metodou vypočítejte neurčitý integrál $\int \cos(\ln x)\ \mathrm{d}x$.

Návod:

Dvakrát po sobě použijte metodu per partes, přičemž v 1. kroku položte:
$u'(x) = 1$, $v(x) = \cos(\ln x)$. Hledaný integrál pak vypočtěte ze vzniklé rovnice.

Zpět

Příklad 7.1.1

Vhodnou metodou vypočítejte neurčitý integrál $\int \cos(\ln x)\ \mathrm{d}x$.

Řešení:

$$\int \cos(\ln x)\ \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} u'(x) = 1 & u(x) = \int 1\ \mathrm{d}x = x \\ v(x) = \cos(\ln x) & v'(x) = -\sin(\ln x) \cdot \dfrac{1}{x} \end{array} \right| = x\cos(\ln x) + \int \sin(\ln x)\ \mathrm{d}x =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} u'(x) = 1 & u(x) = \int 1\ \mathrm{d}x = x \\ v(x) = \sin(\ln x) & v'(x) = \cos(\ln x) \cdot \dfrac{1}{x} \end{array} \right| = x\cos(\ln x) + \left(x\sin(\ln x) - \int \cos(\ln x)\ \mathrm{d}x \right) =$$

$$= x\cos(\ln x) + x\sin(\ln x) - \int \cos(\ln x)\ \mathrm{d}x$$

Vypustíme-li z uvedeného řetězce rovností „vnitřní“ členy, můžeme psát:

$$\int \cos(\ln x)\ \mathrm{d}x = x\cos(\ln x) + x\sin(\ln x) - \int \cos(\ln x)\ \mathrm{d}x$$

Převedením posledního členu z pravé strany na stranu levou dostaneme:

$$2\int \cos(\ln x)\ \mathrm{d}x = x\cos(\ln x) + x\sin(\ln x)$$

Odtud pak plyne:

$$\int \cos(\ln x)\ \mathrm{d}x = \frac{x\cos(\ln x) + x\sin(\ln x)}{2} = \frac{x}{2}\left(\cos(\ln x) + \sin(\ln x)\right).$$

Zpět

Příklad 7.1.1

Vhodnou metodou vypočítejte neurčitý integrál $\int \cos(\ln x)\ \mathrm{d}x$.

Maple:

```
> Int(cos(ln(x)),x)=int(cos(ln(x)),x);
```

$$\int \cos(\ln(x))\,dx = \frac{1}{2}\cos(\ln(x))\,x + \frac{1}{2}\sin(\ln(x))\,x$$

Zpět

Příklad 7.1.1

Vhodnou metodou vypočítejte neurčitý integrál $\int \cos(\ln x)\ \mathrm{d}x$.

Mathematica:

Integrate[Sin[Log[*x*]], *x*]

$-\frac{1}{2}x\mathrm{Cos}[\mathrm{Log}[x]] + \frac{1}{2}x\mathrm{Sin}[\mathrm{Log}[x]]$

Zpět

Příklad 7.1.2

Vhodnou metodou vypočítejte neurčitý integrál $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}\,\mathrm{d}x$.

? Zpět

Příklad 7.1.2

Vhodnou metodou vypočítejte neurčitý integrál $\int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}\, \mathrm{d}x$.

Výsledek:

$$\int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}\, \mathrm{d}x = 2\sqrt{\sin x}\,.$$

Zpět

Příklad 7.1.2

Vhodnou metodou vypočítejte neurčitý integrál $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}\,\mathrm{d}x$.

Návod:

Integrál vypočítejte pomocí substituce $\sin x = t$.

Zpět

Příklad 7.1.2

Vhodnou metodou vypočítejte neurčitý integrál $\int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}\, \mathrm{d}x$.

Řešení:

$$\int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}\, \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{lcr} \sin x & = & t \\ \cos x\ \mathrm{d}x & = & \mathrm{d}t \end{array} \right| = \int \frac{1}{\sqrt{t}}\, \mathrm{d}t =$$

$$= \int t^{-\frac{1}{2}}\, \mathrm{d}t = \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{t} = 2\sqrt{\sin x}$$

Zpět

Příklad 7.1.2

Vhodnou metodou vypočítejte neurčitý integrál $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}\,\mathrm{d}x$.

Maple:

```
> Int(cos(x)/sqrt(sin(x)),x)=int(cos(x)/sqrt(sin(x)),x);
```

$$\int \frac{\cos(x)}{\sqrt{\sin(x)}}\,dx = 2\sqrt{\sin(x)}$$

Zpět

Příklad 7.1.2

Vhodnou metodou vypočítejte neurčitý integrál $\int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}\, \mathrm{d}x$.

Mathematica:

Integrate[Cos[*x*]/Sqrt[Sin[*x*]], *x*]

$2\sqrt{\mathrm{Sin}[x]}$

Zpět

Příklad 7.1.3

Vhodnou metodou vypočítejte neurčitý integrál $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^6}}\, dx$.

?

Zpět

Příklad 7.1.3

Vhodnou metodou vypočítejte neurčitý integrál $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^6}}\,\mathrm{d}x$.

Výsledek:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^6}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\,\arcsin x^3 \,.$$

Zpět

Příklad 7.1.3

Vhodnou metodou vypočítejte neurčitý integrál $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^6}}\,\mathrm{d}x$.

Návod:

Integrand nejprve upravte, a to tak, abyste mohli použít substituci $x^3 = t$.

Zpět

Příklad 7.1.3

Vhodnou metodou vypočítejte neurčitý integrál $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^6}}\,\mathrm{d}x$.

Řešení:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^6}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x^2}{\sqrt{1-(x^3)^2}}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{rcr} x^3 & = & t \\ 3x^2\ \mathrm{d}x & = & \mathrm{d}t \\ x^2\ \mathrm{d}x & = & \frac{1}{3}\ \mathrm{d}t \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\ \arcsin t = \frac{1}{3}\ \arcsin x^3$$

Zpět

Příklad 7.1.3

Vhodnou metodou vypočítejte neurčitý integrál $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^6}}\,\mathrm{d}x$.

Maple:

```
>   Int(x^2/sqrt(1-x^6),x)=int(x^2/sqrt(1-x^6),x);
```

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^6}}\,dx = \frac{1}{3}\arcsin(x^3)$$

Zpět

Příklad 7.1.3

Vhodnou metodou vypočítejte neurčitý integrál $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^6}}\,\mathrm{d}x$.

Mathematica:

Integrate[x^2/Sqrt[1 − x^6], x]

$$\frac{\mathrm{ArcSin}\left[x^3\right]}{3}$$

Zpět

- Příklad 7.2.1 Vypočtěte určitý integrál $\displaystyle\int\limits_{-1}^{3} x \cdot \mathrm{e}^{3-x^2}\,\mathrm{d}x.$

- Příklad 7.2.2 Vypočtěte určitý integrál $\displaystyle\int\limits_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} 3x \cdot \ln x\,\mathrm{d}x.$

- Příklad 7.2.3 Vypočtěte nevlastní integrál $\displaystyle\int\limits_{0}^{1} \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x\,.$

Zpět

Příklad 7.2.1

Vypočtěte určitý integrál $\displaystyle\int_{-1}^{3} x \cdot \mathrm{e}^{3-x^2}\,\mathrm{d}x$.

? Zpět

Příklad 7.2.1

Vypočtěte určitý integrál $\int\limits_{-1}^{3} x \cdot \mathrm{e}^{3-x^2}\,\mathrm{d}x$.

Výsledek:

$$\int\limits_{-1}^{3} x \cdot \mathrm{e}^{3-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^2 - \frac{1}{\mathrm{e}^6}\right).$$

Zpět

Příklad 7.2.1

Vypočtěte určitý integrál $\int_{-1}^{3} x \cdot \mathrm{e}^{3-x^2}\,\mathrm{d}x$.

Návod:

Integrovaná funkce $f(x) = x \cdot \mathrm{e}^{3-x^2}$ je definovaná na množině $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$, na níž je navíc spojitá. Protože platí, že $\langle -1; 3\rangle \subset \mathcal{D}(f)$, je tím spíše spojitá na intervalu $\langle -1; 3\rangle$. Tím je zaručena existence primitivní funkce $F(x)$ k funkci $f(x)$ na intervalu $\langle -1; 3\rangle$. Zadaný integrál tudíž existuje. Primitivní funkce $F(x)$ se vypočítá pomocí substituce $3 - x^2 = t$.

Zpět

Příklad 7.2.1

Vypočtěte určitý integrál $\int\limits_{-1}^{3} x \cdot \mathrm{e}^{3-x^2}\ \mathrm{d}x$.

Řešení:

$$\int\limits_{-1}^{3} x \cdot \mathrm{e}^{3-x^2}\ \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{rcl} 3-x^2 & = & t \\ -2x\ \mathrm{d}x & = & \mathrm{d}t \\ x\ \mathrm{d}x & = & -\frac{1}{2}\ \mathrm{d}t \\ x=-1 & \Rightarrow & t=2 \\ x=3 & \Rightarrow & t=-6 \end{array} \right| = \frac{-1}{2} \int\limits_{2}^{-6} \mathrm{e}^{t}\ \mathrm{d}t = \frac{-1}{2} \left[\mathrm{e}^{t} \right]_{2}^{-6} =$$

$$= \frac{-1}{2}\left(\mathrm{e}^{-6} - \mathrm{e}^{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{2} - \frac{1}{\mathrm{e}^{6}}\right)$$

Zpět

Příklad 7.2.1

Vypočtěte určitý integrál $\int\limits_{-1}^{3} x \cdot \mathrm{e}^{3-x^2}\,\mathrm{d}x$.

Maple:

```
> Int(x*exp(3-x^2),x=-1..3)=int(x*exp(3-x^2),x=-1..3);
```

$$\int_{-1}^{3} x\, e^{(3-x^2)}\, dx = \frac{1}{2}\, e^2 - \frac{1}{2}\, e^{(-6)}$$

Zpět

Příklad 7.2.1

Vypočtěte určitý integrál $\int\limits_{-1}^{3} x \cdot \mathrm{e}^{3-x^2}\,\mathrm{d}x$.

Mathematica:

Integrate[x ∗ Exp[3 − x^2], {x, −1, 3}]

$\frac{-1+e^8}{2e^6}$

Zpět

Příklad 7.2.2

Vypočtěte určitý integrál $\int_{e}^{e^2} 3x \cdot \ln x \, dx$.

? Zpět

Příklad 7.2.2

Vypočtěte určitý integrál $\int\limits_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} 3x \cdot \ln x \, \mathrm{d}x$.

Výsledek:

$$\int\limits_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} 3x \cdot \ln x \, \mathrm{d}x = \frac{9}{4}\mathrm{e}^4 - \frac{3}{4}\mathrm{e}^2\,.$$

Zpět

Příklad 7.2.2

Vypočtěte určitý integrál $\int\limits_{e}^{e^2} 3x \cdot \ln x \, dx$.

Návod:

Integrovaná funkce $f(x) = 3x \cdot \ln x$ je definovaná na množině $\mathcal{D}(f) = (0, \infty)$, na níž je navíc spojitá. Protože platí, že $\langle e, e^2 \rangle \subset \mathcal{D}(f)$, je tím spíše spojitá na intervalu $\langle e, e^2 \rangle$. Tím je zaručena existence primitivní funkce $F(x)$ k funkci $f(x)$ na intervalu $\langle e, e^2 \rangle$. Zadaný integrál tudíž existuje. Vypočítáme jej pomocí metody per partes, a to tak, že položíme: $u' = 3x$, $v = \ln x$.

Zpět

Příklad 7.2.2

Vypočtěte určitý integrál $\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} 3x \cdot \ln x \; \mathrm{d}x$.

Řešení:

$$\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} 3x \cdot \ln x \; \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{lll} u' = 3x & \Rightarrow & u = \frac{3x^2}{2} \\ v = \ln x & \Rightarrow & v' = \frac{1}{x} \end{array} \right| = \left[\frac{3x^2}{2} \cdot \ln x \right]_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} - \int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{3x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} \; \mathrm{d}x =$$

$$= \left[\frac{3x^2}{2} \cdot \ln x \right]_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} - \frac{3}{2} \int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} x \; \mathrm{d}x = \left[\frac{3x^2}{2} \cdot \ln x \right]_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} - \frac{3}{2} \left[\frac{x^2}{2} \right]_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} =$$

$$= \left[\frac{3x^2}{2} \cdot \left(\ln x - \frac{1}{2} \right) \right]_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} = \frac{3\mathrm{e}^4}{2} \left(\ln \mathrm{e}^2 - \frac{1}{2} \right) - \frac{3\mathrm{e}^2}{2} \left(\ln \mathrm{e} - \frac{1}{2} \right) =$$

$$= \frac{9}{4}\mathrm{e}^4 - \frac{3}{4}\mathrm{e}^2$$

Zpět

Příklad 7.2.2

Vypočtěte určitý integrál $\int\limits_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} 3x \cdot \ln x \, \mathrm{d}x$.

Maple:

```
>   Int(3*x*ln(x),x=exp(1)..exp(2))=int(3*x*ln(x),x=exp(1)..exp(2));
```

$$\int_e^{e^2} 3\,x\ln(x)\,dx = -\frac{3}{4}\,e^2 + \frac{9}{4}\,e^4$$

Zpět

Příklad 7.2.2

Vypočtěte určitý integrál $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} 3x \cdot \ln x \;\mathrm{d}x.$

Mathematica:

Integrate[3*x*Log[*x*], {*x*, Exp[1], Exp[2]}]

$\frac{3}{4}e^2\left(-1+3e^2\right)$

Zpět

Příklad 7.2.3

Vypočtěte nevlastní integrál $\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.

? Zpět

Příklad 7.2.3

Vypočtěte nevlastní integrál $\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.

Výsledek:

$$\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 2(\mathrm{e}-1)\,.$$

Zpět

Příklad 7.2.3

Vypočtěte nevlastní integrál $\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.

Návod:

Integrovaná funkce $f(x) = \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$ je definovaná na množině $\mathcal{D}(f) = (0, \infty)$. Protože uzavřený interval $\langle 0, 1\rangle$ není podmnožinou $\mathcal{D}(f)$, funkce $f(x)$ nemůže mít na intervalu $\langle 0, 1\rangle$ primitivní funkci. Zadaný integrál tudíž neexistuje.
Platí však, že $(0, 1\rangle \subset \mathcal{D}(f)$ a protože funkce $f(x)$ je na $\mathcal{D}(f)$ spojitá, je tím spíše spojitá na intervalu $(0, 1\rangle$. Tím je zaručena existence primitivní funkce $F(x)$ k funkci $f(x)$ „alespoň“ na intervalu $(0, 1\rangle$. Jedná se tedy o nevlastní integrál, který se vypočítá takto:

$$\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = [F(x)]_0^1 = F(1) - \lim_{x\to 0_+} F(x),$$

pokud ovšem bude uvedená limita vlastní. Primitivní funkci $F(x)$ vypočítáme pomocí substituce $t = \sqrt{x}$.

Zpět

Příklad 7.2.3

Vypočtěte nevlastní integrál $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.

Řešení:

Nejprve si přečtěte Návod.

$$F(x) = \int \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \quad = \quad \left| \begin{array}{rcl} \sqrt{x} & = & t \\ \frac{1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x & = & \mathrm{d}t \\ \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x & = & 2\,\mathrm{d}t \end{array} \right| = 2\int \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = 2\mathrm{e}^t = 2\,\mathrm{e}^{\sqrt{x}}$$

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \left[2\,\mathrm{e}^{\sqrt{x}}\right]_0^1 = 2\,\mathrm{e}^{\sqrt{1}} - \lim_{x\to 0_+} 2\,\mathrm{e}^{\sqrt{x}} = 2\mathrm{e} - 2\mathrm{e}^0 = 2\mathrm{e} - 2 = 2(\mathrm{e}-1)$$

Zpět

Příklad 7.2.3

Vypočtěte nevlastní integrál $\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.

Maple:

```
>   Int(exp(sqrt(x))/sqrt(x),x=0..1)=int(exp(sqrt(x))/sqrt(x),x=0..1);
```

$$\int_0^1 \frac{e^{(\sqrt{x})}}{\sqrt{x}}\,dx = 2\,e - 2$$

Zpět

Příklad 7.2.3

Vypočtěte nevlastní integrál $\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \, \mathrm{d}x$.

Mathematica:

Přímý výpočet pomocí programu Mathematica:
$\mathbf{Integrate[Exp[Sqrt[}\boldsymbol{x}\mathbf{]]/Sqrt[}\boldsymbol{x}\mathbf{], \{}\boldsymbol{x}\mathbf{, 0, 1\}]}$

$2(-1+e)$

nebo vypočteme neurčitý integrál a spočteme nevlastní integrál pomocí limit:
$\boldsymbol{v} = \mathbf{Integrate[Exp[Sqrt[}\boldsymbol{x}\mathbf{]]/Sqrt[}\boldsymbol{x}\mathbf{],} \ \boldsymbol{x}\mathbf{]}$

$2e^{\sqrt{x}}$

$\mathbf{integral = Limit[}\boldsymbol{v}, \boldsymbol{x} \rightarrow \mathbf{1] - Limit[}\boldsymbol{v}, \boldsymbol{x} \rightarrow \mathbf{0, Direction} \rightarrow \mathbf{-1]}$

$-2+2e$

Zpět

Geometrické aplikace určitého integrálu

- **Příklad 7.3.1** Vypočtěte plošný obsah rovinného obrazce ohraničeného grafem funkce
$$f(x) = x\sqrt{x+4}\ ,\ \ x \in \langle -4, 0\rangle$$
a osou x.
- **Příklad 7.3.2** Vypočtěte plošný obsah rovinného obrazce ohraničeného grafy funkcí
$$f(x) = \sin^2 x\ ,\ \ g(x) = \sin^3 x\ ,\ \ x \in \langle -\pi, 0\rangle .$$

Zpět

Příklad 7.3.1

Vypočtěte plošný obsah rovinného obrazce ohraničeného grafem funkce

$$f(x) = x\,\sqrt{x+4}\,,\ \ x \in \langle -4, 0\rangle$$

a osou x.

? Zpět

Příklad 7.3.1

Vypočtěte plošný obsah rovinného obrazce ohraničeného grafem funkce

$$f(x) = x\sqrt{x+4}\,,\; x \in \langle -4, 0\rangle$$

a osou x.

Výsledek:

$P = \frac{128}{15}$.

Zpět

Příklad 7.3.1

Vypočtěte plošný obsah rovinného obrazce ohraničeného grafem funkce

$$f(x) = x\,\sqrt{x+4}\,,\ x \in \langle -4, 0\rangle$$

a osou x.

Návod:

Vypočtěte určitý integrál $-\int_{-4}^{0} x\,\sqrt{x+4}\,\mathrm{d}x\,.$ Zpět

Příklad 7.3.1

Vypočtěte plošný obsah rovinného obrazce ohraničeného grafem funkce

$$f(x) = x\,\sqrt{x+4}\,,\ x \in \langle -4, 0\rangle$$

a osou x.

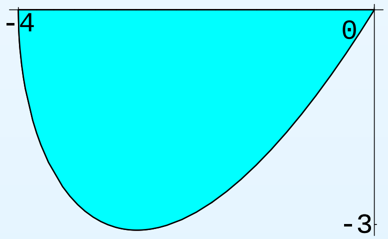
Řešení:

Nejprve budeme hledat průsečíky grafu funkce $f(x)$ s osou x. Jejich x-ové souřadnice získáme jako řešení rovnice $f(x) = 0$, tj. $x\,\sqrt{x+4} = 0$.
Tedy:

$$x\,\sqrt{x+4} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \quad \vee \quad \sqrt{x+4} = 0 \quad ,$$

přičemž: $\sqrt{x+4} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x+4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -4 \quad .$
Rovnice $x\,\sqrt{x+4} = 0$ má tedy 2 řešení: $x_1 = 0$ a $x_2 = -4$, což jsou právě krajní body uvažovaného intervalu $\langle -4, 0\rangle$. Vzhledem k tomu, že spojitá funkce nemůže mezi dvěma sousedními nulovými body střídat znaménko, je jasné, že bude platit buďto
$f(x) > 0 \ \ \forall x \in (-4, 0)$, nebo naopak
$f(x) < 0 \ \ \forall x \in (-4, 0)$. Zda platí první, či druhá alternativa, zjistíme např. tak, že určíme znaménko funkční hodnoty funkce f v některém (zcela libovolně zvoleném) bodě ležícím v intervalu $(-4, 0)$. Protože např. $-2 \in (-4, 0)$ a $f(-2) < 0$, platí: $f(x) < 0 \ \ \forall x \in (-4, 0)$.

Obrazec jehož obsah počítáme:



Další

Příklad 7.3.1

Vypočtěte plošný obsah rovinného obrazce ohraničeného grafem funkce

$$f(x) = x\,\sqrt{x+4}\,,\ x \in \langle -4, 0\rangle$$

a osou x.

Řešení:

Plošný obsah P zadaného obrazce tedy spočteme takto:

$$P = -\int_{-4}^{0} x\,\sqrt{x+4}\,\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{rcl} x+4 & = & t \\ x & = & t-4 \\ \mathrm{d}x & = & \mathrm{d}t \\ x=-4 & \Rightarrow & t=0 \\ x=0 & \Rightarrow & t=4 \end{array}\right| = -\int_{0}^{4} (t-4)\,\sqrt{t}\,\mathrm{d}t =$$

$$= -\int_{0}^{4}\left(t\sqrt{t} - 4\sqrt{t}\right)\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{4}\left(-t^{\frac{3}{2}} + 4t^{\frac{1}{2}}\right)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \left[-\frac{2}{5}\sqrt{t^5} + 4\cdot\frac{2}{3}\sqrt{t^3}\right]_0^4 = \left(-\frac{2}{5}\sqrt{4^5} + 4\cdot\frac{2}{3}\sqrt{4^3}\right) - 0 =$$

$$= \frac{-64}{5} + \frac{64}{3} = \frac{128}{15}$$

Zpět

Příklad 7.3.1

Vypočtěte plošný obsah rovinného obrazce ohraničeného grafem funkce

$$f(x) = x\,\sqrt{x+4}\,,\ x \in \langle -4, 0\rangle$$

a osou x.

Maple:

```
> Int(-x*sqrt(x+4),x=-4..0)=int(-x*sqrt(x+4),x=-4..0);
```

$$\int_{-4}^{0} -x\,\sqrt{x+4}\,dx = \frac{128}{15}$$

Zpět

Příklad 7.3.1

Vypočtěte plošný obsah rovinného obrazce ohraničeného grafem funkce

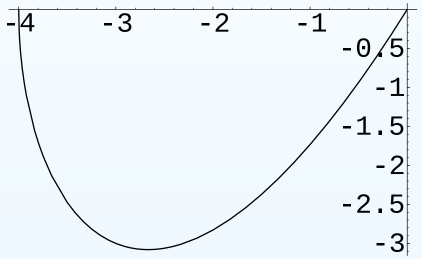
$$f(x) = x\,\sqrt{x+4}\,,\ x \in \langle -4, 0\rangle$$

a osou x.

Mathematica:

Nejdříve si nakreslíme graf dané funkce:

g = Plot[xSqrt[x + 4], {x, −4, 0}]



−Graphics−

Nyní vypočteme plochu obrazce:

P = Integrate[−xSqrt[x + 4], {x, −4, 0}]

$\frac{128}{15}$

Zpět

Příklad 7.3.2

Vypočtěte plošný obsah rovinného obrazce ohraničeného grafy funkcí

$$f(x) = \sin^2 x\ ,\quad g(x) = \sin^3 x\ ,\ x \in \langle -\pi, 0\rangle.$$

? Zpět

Příklad 7.3.2

Vypočtěte plošný obsah rovinného obrazce ohraničeného grafy funkcí

$$f(x) = \sin^2 x\ , \quad g(x) = \sin^3 x\ , \ x \in \langle -\pi, 0\rangle.$$

Výsledek:

$P = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{3}\,.$

Zpět

Příklad 7.3.2

Vypočtěte plošný obsah rovinného obrazce ohraničeného grafy funkcí

$$f(x) = \sin^2 x\ , \quad g(x) = \sin^3 x\ ,\ x \in \langle -\pi, 0\rangle .$$

Návod:

Pro plošný obsah obrazce platí

$$P = \int_{-\pi}^{0} (\sin^2 x - \sin^3 x)\ \mathrm{d}x .$$

Zpět

Příklad 7.3.2

Vypočtěte plošný obsah rovinného obrazce ohraničeného grafy funkcí

$$f(x) = \sin^2 x\ , \quad g(x) = \sin^3 x\ , \ x \in \langle -\pi, 0\rangle .$$

Řešení:

Nejprve budeme hledat průsečíky grafů funkcí $f(x)$ a $g(x)$. Jejich x-ové souřadnice získáme jako řešení rovnice $f(x) = g(x)$, tj. $\sin^2 x = \sin^3 x$.
Tedy:

$$\sin^2 x = \sin^3 x \quad \Leftrightarrow \quad \sin^2 x - \sin^3 x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin^2 x \ \cdot (1 - \sin x) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin^2 x = 0 \quad \vee \quad 1 - \sin x = 0 \quad ,$$

přičemž:

$$\sin^2 x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = k\pi\ , \ k \in \mathbb{Z}$$

a

$$1 - \sin x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi\ , \ k \in \mathbb{Z}.$$

Z bodů tvaru $k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$, leží v intervalu $\langle -\pi, 0\rangle$ dva body, a to: $x = -\pi$ a $x = 0$. Z bodů tvaru $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$, neleží v intervalu $\langle -\pi, 0\rangle$ žádný z nich. Rovnice $\sin^2 x = \sin^3 x$ má tedy v intervalu $\langle -\pi, 0\rangle$ 2 řešení: $x_1 = -\pi$ a $x_2 = 0$, což jsou právě krajní body uvažovaného intervalu $\langle -\pi, 0\rangle$. Vzhledem k tomu, že je funkce $f(x) - g(x) = \sin^2 x - \sin^3 x$ spojitá, nemůže mezi dvěma sousedními nulovými body střídat znaménko.

Další

Příklad 7.3.2

Vypočtěte plošný obsah rovinného obrazce ohraničeného grafy funkcí

$$f(x) = \sin^2 x\ ,\quad g(x) = \sin^3 x\ ,\ x \in \langle -\pi, 0\rangle.$$

Řešení:

Musí tudíž platit buďto $\sin^2 x - \sin^3 x > 0\ \ \forall x \in (-\pi, 0)$, neboli $\sin^2 x > \sin^3 x\ \ \forall x \in (-\pi, 0)$, nebo naopak $\sin^2 x - \sin^3 x < 0\ \ \forall x \in (-\pi, 0)$, neboli $\sin^2 x < \sin^3 x\ \ \forall x \in (-\pi, 0)$. Zda platí první, či druhá alternativa, zjistíme např. tak, že určíme znaménko funkční hodnoty funkce $f - g$ v některém (zcela libovolně zvoleném) bodě ležícím v intervalu $(-\pi, 0)$. Protože např. $-\frac{\pi}{2} \in (-\pi, 0)$ a $f(-\frac{\pi}{2}) - g(-\frac{\pi}{2}) = \sin^2(-\frac{\pi}{2}) - \sin^3(-\frac{\pi}{2}) = (-1)^2 - (-1)^3 = 1 + 1 = 2 > 0$, platí: $\sin^2 x - \sin^3 x > 0\ \ \forall x \in (-\pi, 0)$, neboli $\sin^2 x > \sin^3 x\ \ \forall x \in (-\pi, 0)$.
Plošný obsah P zadaného obrazce tedy spočteme takto:

$$P = \int_{-\pi}^{0} (\sin^2 x - \sin^3 x)\ \mathrm{d}x.$$

Nejprve si spočteme primitivní funkci k funkci $\sin^2 x - \sin^3 x$:

$$\int (\sin^2 x - \sin^3 x)\ \mathrm{d}x = \int \sin^2 x\ \mathrm{d}x - \int \sin^3 x\ \mathrm{d}x\ ,$$

přičemž každý z posledních dvou integrálů vypočteme samostatně:

Další

Příklad 7.3.2

Vypočtěte plošný obsah rovinného obrazce ohraničeného grafy funkcí

$$f(x) = \sin^2 x\ , \quad g(x) = \sin^3 x\ , \ x \in \langle -\pi, 0\rangle .$$

Řešení:

$$\begin{aligned}
\int \sin^2 x \, \mathrm{d}x &= \int \frac{1-\cos 2x}{2} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int (1-\cos 2x) \, \mathrm{d}x = \\
&= \frac{1}{2}\int \mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int \cos 2x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\, x - \frac{1}{4}\int 2\cos 2x \, \mathrm{d}x = \\
&= \left| \begin{array}{rcr} 2x & = & t \\ 2\,\mathrm{d}x & = & \mathrm{d}t \end{array} \right| = \frac{1}{2}\, x - \frac{1}{4}\int \cos t \, \mathrm{d}t = \\
&= \frac{1}{2}\, x - \frac{1}{4}\sin t = \frac{1}{2}\, x - \frac{1}{4}\sin 2x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int \sin^3 x \, \mathrm{d}x &= \int \sin x \cdot \sin^2 x \, \mathrm{d}x = \int \sin x \cdot (1-\cos^2 x) \, \mathrm{d}x = \\
&= \left| \begin{array}{rcr} \cos x & = & t \\ -\sin x\,\mathrm{d}x & = & \mathrm{d}t \end{array} \right| = -\int (1-t^2) \, \mathrm{d}t = \\
&= -t + \frac{t^3}{3} = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3}
\end{aligned}$$

Další

Příklad 7.3.2

Vypočtěte plošný obsah rovinného obrazce ohraničeného grafy funkcí

$$f(x) = \sin^2 x \ , \quad g(x) = \sin^3 x \ , \ x \in \langle -\pi, 0 \rangle .$$

Řešení:

Tedy:

$$\int (\sin^2 x - \sin^3 x)\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ x - \frac{1}{4} \sin 2x + \cos x - \frac{\cos^3 x}{3}$$

Tudíž:

$$\begin{aligned} P &= \int_{-\pi}^{0} (\sin^2 x - \sin^3 x)\ \mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}\ x - \frac{1}{4} \sin 2x + \cos x - \frac{\cos^3 x}{3} \right]_{-\pi}^{0} = \\ &= \left(1 - \frac{1}{3} \right) - \left(-\frac{\pi}{2} - 1 + \frac{1}{3} \right) = 2 - \frac{2}{3} + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{3} \end{aligned}$$

Zpět

Příklad 7.3.2

Vypočtěte plošný obsah rovinného obrazce ohraničeného grafy funkcí

$$f(x) = \sin^2 x\ ,\quad g(x) = \sin^3 x\ ,\ x \in \langle -\pi, 0\rangle.$$

Maple:

```
> Int((sin(x))^2-(sin(x))^3,x=-Pi..0)=int((sin(x))^2-(sin(x))^3,x=-Pi..
0);
```

$$\int_{-\pi}^{0} \sin(x)^2 - \sin(x)^3\,dx = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{3}$$

Zpět

Příklad 7.3.2

Vypočtěte plošný obsah rovinného obrazce ohraničeného grafy funkcí

$$f(x) = \sin^2 x \ , \quad g(x) = \sin^3 x \ , \ x \in \langle -\pi, 0 \rangle.$$

Mathematica:

$\boldsymbol{P = \text{Integrate[Sin[}x\text{]\^{}2} - \text{Sin[}x\text{]\^{}3}, \{x, -\text{Pi}, 0\}]}$

$\frac{1}{6}(8 + 3\pi)$

Zpět

Diferenciální rovnice 1. řádu

- Metoda separace proměnných
- Lineární diferenciální rovnice 1. řádu
- Řešení diferenciálních rovnic 1. řádu

Zpět

Metoda separace proměnných

- Příklad 8.1.1 Nalezněte řešení diferenciální rovnice $y' = \dfrac{xy^2 - x}{x^2y - y}$, které vyhovuje počáteční podmínce $y(\frac{1}{2}) = -2$.
- Příklad 8.1.2 Nalezněte obecné řešení diferenciální rovnice $y' = 6x^2\sqrt{y}$.
- Příklad 8.1.3 Nalezněte řešení diferenciální rovnice $y' = \dfrac{x}{2y + 1}$, které vyhovuje počáteční podmínce $y(0) = -1$.

Zpět

Příklad 8.1.1

Nalezněte řešení diferenciální rovnice $y' = \dfrac{xy^2 - x}{x^2y - y}$, které vyhovuje počáteční podmínce $y(\frac{1}{2}) = -2$.

? Zpět

Příklad 8.1.1

Nalezněte řešení diferenciální rovnice $y' = \dfrac{xy^2 - x}{x^2y - y}$, které vyhovuje počáteční podmínce $y(\frac{1}{2}) = -2$.

Výsledek:

$y(x) = -\sqrt{5 - 4x^2}\,, \quad x \in (-1, 1)\,.$

Zpět

Příklad 8.1.1

Nalezněte řešení diferenciální rovnice $y' = \dfrac{xy^2 - x}{x^2y - y}$, které vyhovuje počáteční podmínce $y(\frac{1}{2}) = -2$.

Návod:

Použijeme metodu separace proměnných.

Zpět

Příklad 8.1.1

Nalezněte řešení diferenciální rovnice $y' = \dfrac{xy^2 - x}{x^2y - y}$, které vyhovuje počáteční podmínce $y(\frac{1}{2}) = -2$.

Řešení:

Postup rozdělíme do čtyř kroků.

1. krok: Z úpravy

$$y' = \frac{xy^2 - x}{x^2y - y} \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{x(y^2 - 1)}{(x^2 - 1)y}$$

plyne:

$$g(x) = \frac{x}{x^2 - 1}\,, \quad x \neq \pm 1\,,$$
$$h(y) = \frac{y^2 - 1}{y}\,, \quad y \neq 0\,.$$

2. krok: Nalezneme všechna konstantní řešení. Hledejme kořeny rovnice $h(y) = 0$.

$$\frac{y^2 - 1}{y} = 0 \quad \Rightarrow \quad y^2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad (y - 1)(y + 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad y = \pm 1$$

Rovnice má konstantní řešení $y(x) = -1$ a $y(x) = 1$. Ani jedno ovšem nesplňuje počáteční podmínku $y(\frac{1}{2}) = -2$.

Další

Příklad 8.1.1

Nalezněte řešení diferenciální rovnice $y' = \dfrac{xy^2 - x}{x^2y - y}$, které vyhovuje počáteční podmínce $y(\frac{1}{2}) = -2$.

Řešení:

3. krok: Najdeme obdélník, kde je $h(y) \neq 0$ a kde leží bod $(\frac{1}{2}, -2)$. Tedy $\frac{1}{2} \in (-1, 1)$ a $-2 \in (-\infty, -1)$. Graf hledaného řešení leží v obdélníku $(-1, 1) \times (-\infty, -1)$. Hledejme toto řešení.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{x(y^2 - 1)}{(x^2 - 1)y} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{y}{y^2 - 1}\,\mathrm{d}y = \int \frac{x}{x^2 - 1}\,\mathrm{d}x \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{2y}{y^2 - 1}\,\mathrm{d}y = \int \frac{2x}{x^2 - 1}\,\mathrm{d}x \quad \Rightarrow \quad \ln|y^2 - 1| = \ln|x^2 - 1| + C$$

Spočteme hodnotu integrační konstanty:

$$\ln|(-2)^2 - 1| = \ln|(\tfrac{1}{2})^2 - 1| + C \quad \Rightarrow \quad \ln 3 - \ln(\tfrac{3}{4}) = C \quad \Rightarrow \quad C = \ln 4\,.$$

Hledejme dál funkční předpis řešení.

$$\ln|y^2 - 1| = \ln|x^2 - 1| + \ln 4 \quad \Rightarrow \quad \ln|y^2 - 1| = \ln 4|x^2 - 1| \quad \Rightarrow \quad |y^2 - 1| = 4|x^2 - 1|$$

Pro $x \in (-1, 1)$ je $x^2 - 1 < 0$ a $|x^2 - 1| = -(x^2 - 1)$. Pro $y \in (-\infty, -1)$ je $y^2 - 1 > 0$ a $|y^2 - 1| = y^2 - 1$.

$$y^2 - 1 = -4(x^2 - 1) \quad \Rightarrow \quad y^2 = 1 - 4(x^2 - 1) \quad \Rightarrow \quad |y| = \sqrt{5 - 4x^2}$$

Další

Příklad 8.1.1

Nalezněte řešení diferenciální rovnice $y' = \dfrac{xy^2 - x}{x^2y - y}$, které vyhovuje počáteční podmínce $y(\frac{1}{2}) = -2$.

Řešení:

Funkční hodnoty hledané funkce leží v intervalu $(-\infty, -1)$, tedy $y < 0$. Proto

$$y(x) = -\sqrt{5 - 4x^2}\,.$$

4. krok: Určíme definiční obor řešení. Výraz $-\sqrt{5 - 4x^2}$ má smysl, pokud

$$5 - 4x^2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad (\sqrt{5} - 2x)(\sqrt{5} + 2x) \geq 0\,.$$

Nerovnici řeší $x \in \langle -\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{\sqrt{5}}{2} \rangle \supset (-1, 1)$. Definičním oborem řešení bude celý interval $(-1, 1)$, pokud pro každé $x \in (-1, 1)$ je $y(x) < -1$.

$$-\sqrt{5 - 4x^2} < -1 \quad \Rightarrow \quad 5 - 4x^2 > 1 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 1 < 0$$

Poslední nerovnost je splněna právě na intervalu $(-1, 1)$. Funkce

$$y(x) = -\sqrt{5 - 4x^2}\,, \quad x \in (-1, 1)$$

je řešením rovnice $y' = \dfrac{xy^2 - x}{x^2y - y}$ vyhovujícím počáteční podmínce $y(\frac{1}{2}) = -2$.

Zpět

Příklad 8.1.1

Nalezněte řešení diferenciální rovnice $y' = \dfrac{xy^2 - x}{x^2y - y}$, které vyhovuje počáteční podmínce $y(\frac{1}{2}) = -2$.

Maple:

```
> DR:=(diff(y(x),x)=(x*(y(x))^2-x)/(x^2*y(x)-y(x)));
```

$$DR := \frac{d}{dx}\,\mathrm{y}(x) = \frac{x\,\mathrm{y}(x)^2 - x}{x^2\,\mathrm{y}(x) - \mathrm{y}(x)}$$

```
> PP:=y(0.5)=-2;
```

$$PP := \mathrm{y}(0.5) = -2$$

```
> dsolve({DR,PP},y(x));
```

$$\mathrm{y}(x) = -\sqrt{5 - 4\,x^2}$$

Zpět

Příklad 8.1.1

Nalezněte řešení diferenciální rovnice $y' = \dfrac{xy^2 - x}{x^2y - y}$, které vyhovuje počáteční podmínce $y(\frac{1}{2}) = -2$.

Mathematica:

$\mathbf{DR = y'[x]{=}{=}(x(y[x])\hat{}2 - x)/(x\hat{}2 * y[x] - y[x])}$

$y'[x] == \frac{-x+x\,y[x]^2}{-y[x]+x^2\,y[x]}$

$\mathbf{PP = y[1/2] == -2}$

$y\left[\frac{1}{2}\right] == -2$

$\mathbf{DSolve[\{DR, PP\}, y[x], x]}$

Solve::ifun : Inverse functions are being
used by Solve, so some solutions may not be found;
use Reduce for complete solution information. More. . .

Solve::ifun : Inverse functions are being
used by Solve, so some solutions may not be found;
use Reduce for complete solution information. More. . .

DSolve::bvnul :
For some branches of the general solution, the given
boundary conditions lead to an empty solution. More. . .

$\left\{\left\{y[x] \to -\sqrt{5-4x^2}\right\}\right\}$

Zpět

Příklad 8.1.2

Nalezněte obecné řešení diferenciální rovnice $y' = 6x^2\sqrt{y}$.

? Zpět

Příklad 8.1.2

Nalezněte obecné řešení diferenciální rovnice $y' = 6x^2\sqrt{y}$.

Výsledek:

$y(x) = 0\,,\ x \in \mathbb{R}\,,$

$y_K(x) = \left(x^3 + K\right)^2,\ K \in \mathbb{R}\,,\quad x \in (-\sqrt[3]{K}, \infty)\,.$

Zpět

Příklad 8.1.2

Nalezněte obecné řešení diferenciální rovnice $y' = 6x^2\sqrt{y}\,.$

Návod:

Použijeme metodu separace proměnných.

Zpět

Příklad 8.1.2

Nalezněte obecné řešení diferenciální rovnice $y' = 6x^2\sqrt{y}$.

Řešení:

Postup rozdělíme do čtyř kroků.

1. krok: $g(x) = 6x^2$, $x \in \mathbb{R}$, $\quad h(y) = \sqrt{y}$, $y \in \langle 0, \infty)$.

2. krok: Kořeny rovnice $h(y) = 0$ odpovídají konstantním řešením.

$$\sqrt{y} = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0$$

Rovnice má jedno konstantní řešení $y(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$.

3. krok: V obdélníku $(-\infty, \infty) \times (0, \infty)$ je $h(y) \neq 0$. Tam leží grafy hledaných řešení. Najděme je.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 6x^2\sqrt{y} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{1}{\sqrt{y}}\,\mathrm{d}y = \int 6x^2\,\mathrm{d}x \quad \Rightarrow \quad \int y^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}y = \int 6x^2\,\mathrm{d}x \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 2y^{\frac{1}{2}} = 2x^3 + C \quad \Rightarrow \quad y^{\frac{1}{2}} = x^3 + \frac{C}{2}$$

Integrační konstantu $\frac{C}{2}$ označme K . Z poslední rovnosti vyjádříme y . Umocnění na druhou je ekvivalentní úprava pouze tehdy, když obě strany rovnice jsou kladné nebo záporné. Protože $y^{\frac{1}{2}} > 0$, musí být $x^3 + K > 0$. Tedy

$$y_K(x) = \left(x^3 + K\right)^2 , \quad x^3 + K > 0 , \quad K \in \mathbb{R} .$$

4. krok: Řešení existuje pro všechna reálná x , pro která $x^3 + K > 0$, tedy pro $x > -\sqrt[3]{K}$. Navíc musí platit nerovnost $y > 0$ a zároveň platí $\left(x^3 + K\right)^2 > 0$. Obecným řešením rovnice je množina funkcí $y_K(x) = \left(x^3 + K\right)^2$, $x \in (-\sqrt[3]{K}, \infty)$ plus konstantní řešení $y(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$.

Zpět

Příklad 8.1.2

Nalezněte obecné řešení diferenciální rovnice $y' = 6x^2\sqrt{y}$.

Maple:

```
> DR:=(diff(y(x),x)=6*x^2*sqrt(y(x)));
```

$$DR := \frac{d}{dx}\,\mathrm{y}(x) = 6\,x^2\,\sqrt{\mathrm{y}(x)}$$

```
> dsolve(DR,y(x));
```

$$\sqrt{\mathrm{y}(x)} - x^3 - \_C1 = 0$$

Zpět

Příklad 8.1.2

Nalezněte obecné řešení diferenciální rovnice $y' = 6x^2\sqrt{y}$.

Mathematica:

DR = $y'[x]$ == 6x^2Sqrt[$y[x]$]

$y'[x] == 6x^2\sqrt{y[x]}$

DSolve[DR, $y[x]$, x]

$\{\{y[x] \to \frac{1}{4}\left(4x^6 + 4x^3 C[1] + C[1]^2\right)\}\}$

Simplify[%]

$\left\{\left\{y[x] \to \frac{1}{4}\left(2x^3 + C[1]\right)^2\right\}\right\}$

Lehce se můžete přesvědčit, že řešení je stejné jako v našem výpočtu.

Zpět

Příklad 8.1.3

Nalezněte řešení diferenciální rovnice $y' = \dfrac{x}{2y+1}$, které vyhovuje počáteční podmínce $y(0) = -1$.

? Zpět

Příklad 8.1.3

Nalezněte řešení diferenciální rovnice $y' = \dfrac{x}{2y+1}$, které vyhovuje počáteční podmínce $y(0) = -1$.

Výsledek:

$$y(x) = -\frac{1+\sqrt{2x^2+1}}{2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Zpět

Příklad 8.1.3

Nalezněte řešení diferenciální rovnice $y' = \dfrac{x}{2y+1}$, které vyhovuje počáteční podmínce $y(0) = -1$.

Návod:

Použijeme metodu separace proměnných.

Zpět

Příklad 8.1.3

Nalezněte řešení diferenciální rovnice $y' = \dfrac{x}{2y+1}$, které vyhovuje počáteční podmínce $y(0) = -1$.

Řešení:

Postup rozdělíme do tří kroků.

1. krok: Pravá strana rovnice je ve tvaru $g(x) \cdot h(y)$, kde

$$g(x) = x\,, \ x \in \mathbb{R}\,,$$
$$h(y) = \frac{1}{2y+1}\,, \ y \neq -\frac{1}{2}\,.$$

2. krok: Protože vždy $h(y) \neq 0$, rovnice nemá žádné konstantní řešení.

3. krok: Najdeme obdélník, kde je $h(y) \neq 0$ a kde leží bod $(0, -1)$. Protože $-1 \in (-\infty, -\frac{1}{2})$, leží graf hledaného řešení v obdélníku $(-\infty, \infty) \times (-\infty, -\frac{1}{2})$. Hledejme toto řešení.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{x}{2y+1} \quad \Rightarrow \quad \int (2y+1)\ \mathrm{d}y = \int x\ \mathrm{d}x \quad \Rightarrow \quad y^2 + y = \frac{x^2}{2} + C$$

Spočteme hodnotu integrační konstanty:

$$(-1)^2 - 1 = \frac{0^2}{2} + C \quad \Rightarrow \quad C = 0\,.$$

Další

Příklad 8.1.3

Nalezněte řešení diferenciální rovnice $y' = \dfrac{x}{2y+1}$, které vyhovuje počáteční podmínce $y(0) = -1$.

Řešení:

Hledejme dál funkční předpis řešení. Musíme vyřešit kvadratickou rovnici pro neznámou y.

$$y^2 + y - \frac{x^2}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad D = 1 - 4\left(-\frac{x^2}{2}\right) = 1 + 2x^2 \quad \Rightarrow \quad y_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+2x^2}}{2}$$

Pro všechna reálná x je diskriminat kladný ($D = 1 + 2x^2 > 0$). Otázkou zůstává, které y je řešení. Funkční hodnoty hledané funkce leží v intervalu $(-\infty, -\frac{1}{2})$, tedy chceme, aby $y_{1,2} < -\frac{1}{2}$, tj.

$$\frac{-1 \pm \sqrt{1+2x^2}}{2} < -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \pm\sqrt{1+2x^2} < 0 \,.$$

Poslední nerovnost je splněna pouze pro znaménko mínus. Řešením je tedy funkce

$$y(x) = \frac{-1 - \sqrt{1+2x^2}}{2}\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Zpět

Příklad 8.1.3

Nalezněte řešení diferenciální rovnice $y' = \dfrac{x}{2y+1}$, které vyhovuje počáteční podmínce $y(0) = -1$.

Maple:

```
> DR:=(diff(y(x),x)=(x)/(2*y(x)+1));
```

$$DR := \frac{d}{dx}\,\mathrm{y}(x) = \frac{x}{2\,\mathrm{y}(x)+1}$$

```
> PP:=y(0)=-1;
```

$$PP := \mathrm{y}(0) = -1$$

```
> dsolve({DR,PP},y(x));
```

$$\mathrm{y}(x) = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{1+2\,x^2}}{2}$$

Zpět

Příklad 8.1.3

Nalezněte řešení diferenciální rovnice $y' = \dfrac{x}{2y+1}$, které vyhovuje počáteční podmínce $y(0) = -1$.

Mathematica:

$\left\{\left\{y[x] \to \frac{1}{4}\left(2x^3 + C[1]\right)^2\right\}\right\}$

DR = $\boldsymbol{y'[x] == x/(2y[x]+1)}$

$y'[x] == \frac{x}{1+2y[x]}$

PP = $\boldsymbol{y[0] == -1}$

$y[0] == -1$

DSolve[{DR, PP}, $\boldsymbol{y[x], x}$]

DSolve::bvnul :
For some branches of the general solution, the given
boundary conditions lead to an empty solution. More...

$\left\{\left\{y[x] \to \frac{1}{2}\left(-1 - \sqrt{1+2x^2}\right)\right\}\right\}$

Zpět

Lineární diferenciální rovnice 1. řádu

- Příklad 8.2.1 Nalezněte řešení diferenciální rovnice $\frac{1}{2}\,y' - xy = x$, které vyhovuje počáteční podmínce $y(0) = 7$.
- Příklad 8.2.2 Nalezněte všechna řešení diferenciální rovnice $y' = \dfrac{2y + x}{x}$.
- Příklad 8.2.3 Nalezněte řešení diferenciální rovnice $(1 + x)\,y' + xy = 0$, které vyhovuje počáteční podmínce $y(0) = 10$.

Zpět

Příklad 8.2.1

Nalezněte řešení diferenciální rovnice $\frac{1}{2}\,y' - xy = x$, které vyhovuje počáteční podmínce $y(0) = 7$.

? Zpět

Příklad 8.2.1

Nalezněte řešení diferenciální rovnice $\frac{1}{2}\,y' - xy = x$, které vyhovuje počáteční podmínce $y(0) = 7$.

Výsledek:

$$y(x) = 8\mathrm{e}^{x^2} - 1\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Zpět

Příklad 8.2.1

Nalezněte řešení diferenciální rovnice $\frac{1}{2}\,y' - xy = x$, které vyhovuje počáteční podmínce $y(0) = 7$.

Návod:

a) Řešení lineární diferenciální rovnice $y' + a(x)y = b(x)$ má tvar $y(x) = y_H(x) + y_P(x)$, kde $y_H(x)$ je obecné řešení přiřazené homogenní diferenciální rovnice a $y_P(x)$ je partikulární (jedno) řešení dané rovnice. Obecné řešení $y_H(x)$ hledáme metodou separace proměnných a víme, že $y_H(x) = C\varphi(x)$, kde $\varphi(x)$ je jedno řešení přiřazené homogenní rovnice. Partikulární řešení $y_P(x)$ hledáme ve tvaru $y_P(x) = C(x)\varphi(x)$ tzv. metodou variace konstanty.
b) V tomto případě lze také použít metodu separace proměnných.

Zpět

Příklad 8.2.1

Nalezněte řešení diferenciální rovnice $\frac{1}{2}\,y' - xy = x$, které vyhovuje počáteční podmínce $y(0) = 7$.

Řešení:

Postupujeme ve čtyřech krocích. Zadenou NLDR (Nehomogenní Lineární Diferenciální Rovnici) převedeme na tvar

$$y' - 2xy = 2x\,,$$

k ní přiřazená homogenní rovnice je

$$y' - 2xy = 0\,.$$

1. krok: Hledejme metodou separace proměnných $\varphi(x)$, jedno nenulové řešení přiřazené homogenní rovnice.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2xy \quad\Rightarrow\quad \int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = \int 2x\,\mathrm{d}x \quad\Rightarrow\quad \ln|y| = x^2 \quad\Rightarrow\quad |y| = \mathrm{e}^{x^2} \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \text{např.} \quad y = \varphi(x) = \mathrm{e}^{x^2}\,.$$

Integrační konstantu jsme nepsali, protože hledáme jedno řešení $\varphi(x)$. Tedy

$$y_H(x) = C\mathrm{e}^{x^2}\,.$$

2. krok: Partikulární řešení dané nehomogenní lineární rovnice hledáme ve tvaru součinu

$$y_P(x) = C(x)\,\varphi(x) = C(x)\mathrm{e}^{x^2}\,,$$

kde $C(x)$ je neznámá funkce, tj. v $y_H(x)$ nahradíme konstantu C funkcí. Hledejme ji. Chceme, aby $y_P(x)$ bylo řešení NLDR. Spočteme $y'_P(x)$:

Další

Příklad 8.2.1

Nalezněte řešení diferenciální rovnice $\frac{1}{2}\,y' - xy = x$, které vyhovuje počáteční podmínce $y(0) = 7$.

Řešení:

$y'_P(x) = C'(x)\mathrm{e}^{x^2} + C(x)2x\mathrm{e}^{x^2}$ a dosadíme $y'_P(x)$ a $y_P(x)$ do rovnice.

$$y' - 2xy = 2x \quad \Rightarrow \quad C'(x)\mathrm{e}^{x^2} + C(x)2x\mathrm{e}^{x^2} - 2xC(x)\mathrm{e}^{x^2} = 2x \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad C'(x) = 2x\mathrm{e}^{-x^2} \quad \Rightarrow \quad C(x) = \int 2x\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \quad \Rightarrow \quad C(x) = -\mathrm{e}^{-x^2}$$

Integrační konstantu nepíšeme, neboť hledáme jedno řešení $y_P(x)$, tedy jednu funkci $C(x)$. Dosadíme za $C(x)$. Partikulární řešení je

$$y_P(x) = -\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{e}^{x^2} = -1\,.$$

3. krok: Výsledky kroku jedna a dva dávají obecné řešení zadané rovnice

$$y(x) = y_H(x) + y_P(x) = C\mathrm{e}^{x^2} - 1\,.$$

Pravá strana NLDR ($b(x) = 2x$) a koeficient u y ($a(x) = 2x$) jsou spojité funkce na $\mathbb{R}$. Tedy definiční obor řešení je $\mathbb{R}$.

4. krok: Ze všech nalezených řešení (obecného řešení NLDR) vybereme jedno, které splňuje počáteční podmínku $y(0) = 7$.

$$7 = C\mathrm{e}^0 - 1 \quad \Rightarrow \quad C = 8\,.$$

Řešením dané počáteční úlohy je funkce $y(x) = 8\mathrm{e}^{x^2} - 1$, $x \in \mathbb{R}$.

Zpět

Příklad 8.2.1

Nalezněte řešení diferenciální rovnice $\frac{1}{2}\,y' - xy = x$, které vyhovuje počáteční podmínce $y(0) = 7$.

Maple:

```
> DR:=(0.5*diff(y(x),x)-x*y(x)=x);
```

$$DR := 0.5\,(\tfrac{d}{dx}\,\mathrm{y}(x)) - x\,\mathrm{y}(x) = x$$

```
> PP:=y(0)=7;
```

$$PP := \mathrm{y}(0) = 7$$

```
> dsolve({DR,PP},y(x));
```

$$\mathrm{y}(x) = -1 + 8\,e^{(x^2)}$$

Zpět

Příklad 8.2.1

Nalezněte řešení diferenciální rovnice $\frac{1}{2}\,y' - xy = x$, které vyhovuje počáteční podmínce $y(0) = 7$.

Mathematica:

$\mathbf{DR = y'[x]/2 - xy[x] == x}$

$-xy[x] + \frac{y'[x]}{2} == x$

$\mathbf{PP = y[0] == 7}$

$y[0] == 7$

$\mathbf{DSolve[\{DR, PP\}, y[x], x]}$

$\left\{\left\{y[x] \to -1 + 8e^{x^2}\right\}\right\}$

Zpět

Příklad 8.2.2

Nalezněte všechna řešení diferenciální rovnice $y' = \dfrac{2y + x}{x}$.

? Zpět

Příklad 8.2.2

Nalezněte všechna řešení diferenciální rovnice $y' = \dfrac{2y + x}{x}$.

Výsledek:

$y(x) = -x + Cx^2$, $x < 0$ nebo $y(x) = -x + Cx^2$, $x > 0$, kde C je libovolná reálná konstanta.

Zpět

Příklad 8.2.2

Nalezněte všechna řešení diferenciální rovnice $y' = \dfrac{2y+x}{x}$.

Návod:

Rovnice je lineární diferenciální rovnice tvaru $y' + a(x)y = b(x)$ a její řešení hledáme podle návodu v předchozím příkladě.

Zpět

Příklad 8.2.2

Nalezněte všechna řešení diferenciální rovnice $y' = \dfrac{2y+x}{x}$.

Řešení:

Postupujeme ve třech krocích. Danou NLDR převedeme na tvar

$$y' - \frac{2}{x} y = 1 ,$$

k ní přiřazená homogenní rovnice je

$$y' - \frac{2}{x} y = 0 .$$

1. krok: Hledejme metodou separace proměnných $\varphi(x)$, jedno nenulové řešení přiřazené homogenní rovnice.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{2}{x}\, y \quad \Rightarrow \quad \int \frac{1}{y}\, \mathrm{d}y = \int \frac{2}{x}\, \mathrm{d}x \quad \Rightarrow \quad \ln|y| = 2\ln|x| \quad \Rightarrow \quad |y| = |x|^2$$

$$\text{např.} \quad y = \varphi(x) = x^2.$$

Integrační konstantu jsme nepsali, protože hledáme jedno řešení $\varphi(x)$. Tedy

$$y_H(x) = C\, x^2 .$$

Další

Příklad 8.2.2

Nalezněte všechna řešení diferenciální rovnice $y' = \dfrac{2y+x}{x}$.

Řešení:

2. krok: Partikulární řešení dané nehomogenní lineární rovnice hledáme ve tvaru součinu

$$y_P(x) = C(x)\,\varphi(x) = C(x)x^2,$$

kde $C(x)$ je neznámá funkce, tj. v $y_H(x)$ nahradíme konstantu C funkcí. Hledejme ji. Chceme, aby $y_P(x)$ bylo řešení zadané NLDR. Spočteme $y'_P(x)$: $y'_P(x) = C'(x)x^2 + C(x)2x$ a dosadíme $y'_P(x)$ a $y_P(x)$ do rovnice.

$$y' - \frac{2}{x}y = 1 \quad \Rightarrow \quad C'(x)x^2 + C(x)2x - \frac{2}{x}\,C(x)x^2 = 1 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad C'(x) = \frac{1}{x^2} \quad \Rightarrow \quad C(x) = \int \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x \quad \Rightarrow \quad C(x) = -\frac{1}{x}$$

Integrační konstantu nepíšeme, neboť hledáme jedno řešení $y_P(x)$, tedy jednu funkci $C(x)$. Dosadíme za $C(x)$. Partikulární řešení je

$$y_P(x) = -\frac{1}{x}\,x^2 = -x\,.$$

Další

Příklad 8.2.2

Nalezněte všechna řešení diferenciální rovnice $y' = \dfrac{2y + x}{x}$.

Řešení:

3. krok: Výsledky kroku jedna a dva dávají obecné řešení zadané rovnice

$$y(x) = y_H(x) + y_P(x) = Cx^2 - x\,.$$

Pravá strana NLDR ($b(x) = 1$) a koeficient u y ($a(x) = -\frac{2}{x}$) jsou spojité funkce na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Tedy definiční obor řešení je buď interval $(-\infty, 0)$ nebo interval $(0, \infty)$.

Zpět

Příklad 8.2.2

Nalezněte všechna řešení diferenciální rovnice $y' = \dfrac{2y+x}{x}$.

Maple:

```
> DR:=(diff(y(x),x)=(2*y(x)+x)/(x));
```

$$DR := \frac{d}{dx}\,\mathrm{y}(x) = \frac{2\,\mathrm{y}(x) + x}{x}$$

```
> dsolve(DR,y(x));
```

$$\mathrm{y}(x) = -x + x^2\,\_C1$$

Zpět

Příklad 8.2.2

Nalezněte všechna řešení diferenciální rovnice $y' = \dfrac{2y+x}{x}$.

Mathematica:

$\mathbf{DR = y'[x] == (2y[x] + x)/x}$

$y'[x] == \frac{x+2y[x]}{x}$

$\mathbf{DSolve[DR, y[x], x]}$

$\{\{y[x] \to -x + x^2 C[1]\}\}$

Zpět

Příklad 8.2.3

Nalezněte řešení diferenciální rovnice $(1+x)\,y' + xy = 0$, které vyhovuje počáteční podmínce $y(0) = 10$.

?

Zpět

Příklad 8.2.3

Nalezněte řešení diferenciální rovnice $(1+x)\,y' + xy = 0$, které vyhovuje počáteční podmínce $y(0) = 10$.

Výsledek:

$y(x) = 10(x+1)\mathrm{e}^{-x}\,, \quad x > -1\,.$

Zpět

Příklad 8.2.3

Nalezněte řešení diferenciální rovnice $(1+x)\,y' + xy = 0$, které vyhovuje počáteční podmínce $y(0) = 10$.

Návod:

Řešení homogenní lineární diferenciální rovnice $a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$, kde $a_1(x) \neq 0$, má tvar $y(x) = C\varphi(x)$, kde $\varphi(x)$ je jedno řešení dané homogenní rovnice. Funkci $\varphi(x)$ hledáme metodou separace proměnných.

Zpět

Příklad 8.2.3

Nalezněte řešení diferenciální rovnice $(1+x)\,y' + xy = 0$, které vyhovuje počáteční podmínce $y(0) = 10$.

Řešení:

Postupujeme ve dvou krocích.

1. krok: Hledejme metodou separace proměnných $\varphi(x)$, jedno nenulové řešení dané homogenní rovnice.

$$y' = -\frac{xy}{1+x} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{xy}{x+1} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = -\int \frac{x}{x+1}\,\mathrm{d}x \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = -\int \left(1 - \frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x \quad \Rightarrow \quad \ln|y| = -x + \ln|x+1| \quad \Rightarrow$$

$$|y| = \mathrm{e}^{-x}|x+1| \quad \Rightarrow \quad \text{např.} \quad y = \varphi(x) = \mathrm{e}^{-x}(x+1).$$

Integrační konstantu jsme nepsali, protože hledáme jedno řešení $\varphi(x)$. Tedy

$$y(x) = C(x+1)\mathrm{e}^{-x}.$$

Koeficient u y' ($a_1(x) = x+1$) a koeficient u y ($a_0(x) = x$) jsou spojité funkce na $\mathbb{R}$, ale $a_1(x) \neq 0$ pro $x \neq -1$. Tedy definiční obor řešení je interval $(-\infty, -1)$ nebo interval $(-1, \infty)$.

2. krok: Ze všech nalezených řešení vybereme jedno, které splňuje počáteční podmínku $y(0) = 10$.

$$10 = C(0+1)\mathrm{e}^{0} \quad \Rightarrow \quad C = 10\,.$$

Řešením dané počáteční úlohy je funkce $y(x) = 10(x+1)\mathrm{e}^{-x}$, $x \in (-1, \infty)$, protože $0 \in (-1, \infty)$.

Příklad 8.2.3

Nalezněte řešení diferenciální rovnice $(1+x)\,y' + xy = 0$, které vyhovuje počáteční podmínce $y(0) = 10$.

Maple:

```
> DR:=((x+1)*diff(y(x),x)+x*y(x)=0);
```

$$DR := (x+1)\left(\frac{d}{dx}\,\mathrm{y}(x)\right) + x\,\mathrm{y}(x) = 0$$

```
> PP:=y(0)=10;
```

$$PP := \mathrm{y}(0) = 10$$

```
> dsolve({DR,PP},y(x));
```

$$\mathrm{y}(x) = 10\,e^{(-x)}\,(x+1)$$

Zpět

Příklad 8.2.3

Nalezněte řešení diferenciální rovnice $(1+x)\,y' + xy = 0$, které vyhovuje počáteční podmínce $y(0) = 10$.

Mathematica:

$\mathbf{DR = (1+\boldsymbol{x})\boldsymbol{y}'[\boldsymbol{x}] + \boldsymbol{x}\boldsymbol{y}[\boldsymbol{x}] == 0}$

$xy[x] + (1+x)y'[x] == 0$

$\mathbf{PP = \boldsymbol{y}[0] == 10}$

$y[0] == 10$

$\mathbf{DSolve[\{DR, PP\}, \boldsymbol{y}[\boldsymbol{x}], \boldsymbol{x}]}$

$\{\{y[x] \to 10e^{-x}(1+x)\}\}$

Zpět

Řešení diferenciálních rovnic 1. řádu

- Příklad 8.3.1 Je funkce $y(x) = 2x + 3$, $x \in \mathbb{R}$ řešením diferenciální rovnice $(y')^2 + xy' = y$.
- Příklad 8.3.2 Je funkce $y(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$, $x > 0$ řešením diferenciální rovnice $y \ln y + xy' = 0$.
- Příklad 8.3.3 Je funkce $y(x) = \frac{\sqrt{3x^3+3}}{3}$, $x \in \mathbb{R}$ řešením diferenciální rovnice $y' = \dfrac{x^2}{y}$, které vyhovuje počáteční podmínce $y(0) = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Zpět

Příklad 8.3.1

Je funkce $y(x) = 2x + 3,\ x \in \mathbb{R}$ řešením diferenciální rovnice $(y')^2 + xy' = y$.

? Zpět

Příklad 8.3.1

Je funkce $y(x) = 2x + 3,\ x \in \mathbb{R}$ řešením diferenciální rovnice $(y')^2 + xy' = y$.

Výsledek:

Není řešením.

Zpět

Příklad 8.3.1

Je funkce $y(x) = 2x + 3,\ x \in \mathbb{R}$ řešením diferenciální rovnice $(y')^2 + xy' = y$.

Návod:

Vypočteme $y'(x)$ a do diferenciální rovnice dosadíme za $y'(x)$ a $y(x)$. Levá strana rovnice se musí rovnat pravé pro všechna reálná x.

Zpět

Příklad 8.3.1

Je funkce $y(x) = 2x + 3$, $x \in \mathbb{R}$ řešením diferenciální rovnice $(y')^2 + xy' = y$.

Řešení:

Spočteme: $y'(x) = 2$. Levá strava rovnice je

$$L := (2)^2 + x \cdot 2 = 4 + 2x$$

a pravá strana je

$$P := 2x + 3.$$

Tedy $L \neq P$ pro všechna reálná x, funkce $y(x) = 2x + 3$ není řešením dané rovnice.

Zpět

Příklad 8.3.1

Je funkce $y(x) = 2x + 3$, $x \in \mathbb{R}$ řešením diferenciální rovnice $(y')^2 + xy' = y$.

Maple:

```
> res:=y(x)=2*x+3;
```

$$res := \mathrm{y}(x) = 2\,x + 3$$

```
> DR:=((diff(y(x),x))^2+x*diff(y(x),x)=y(x));
```

$$DR := (\tfrac{d}{dx}\,\mathrm{y}(x))^2 + x\,(\tfrac{d}{dx}\,\mathrm{y}(x)) = \mathrm{y}(x)$$

```
> odetest(res,DR);
```

$$1$$

Nenulový výsledek znamená, že testovaná funkce není řešením dané diferenciální rovnice.

Zpět

Příklad 8.3.1

Je funkce $y(x) = 2x + 3,\ x \in \mathbb{R}$ řešením diferenciální rovnice $(y')^2 + xy' = y$.

Mathematica:

$\mathbf{DR = (}\boldsymbol{D}\mathbf{[}\boldsymbol{y}\mathbf{[}\boldsymbol{x}\mathbf{],}\boldsymbol{x}\mathbf{])\hat{}2 +}\ \boldsymbol{x}\ \boldsymbol{D}\mathbf{[}\boldsymbol{y}\mathbf{[}\boldsymbol{x}\mathbf{],}\boldsymbol{x}\mathbf{] == }\boldsymbol{y}\mathbf{[}\boldsymbol{x}\mathbf{]}$

$xy'[x] + y'[x]^2 == y[x]$

$\mathbf{res[x\_] = 2}\boldsymbol{x}\mathbf{ + 3}$

$3 + 2x$

$\mathbf{DR/.}\boldsymbol{y} \rightarrow \mathbf{res}$

$4 + 2x == 3 + 2x$

$L \neq P$, funkce není řešením diferenciální rovnice.

Zpět

Příklad 8.3.2

Je funkce $y(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$, $x > 0$ řešením diferenciální rovnice $y \ln y + xy' = 0$.

? Zpět

Příklad 8.3.2

Je funkce $y(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$, $x > 0$ řešením diferenciální rovnice $y \ln y + xy' = 0$.

Výsledek:

Je řešením.

Zpět

Příklad 8.3.2

Je funkce $y(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$, $x > 0$ řešením diferenciální rovnice $y \ln y + xy' = 0$.

Návod:

Vypočteme $y'(x)$ a do diferenciální rovnice dosaíme za $y'(x)$ a $y(x)$. Levá strana rovnice se musí rovnat nule pro $x > 0$.

Zpět

Příklad 8.3.2

Je funkce $y(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$, $x > 0$ řešením diferenciální rovnice $y \ln y + xy' = 0$.

Řešení:

Spočteme: $y'(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \left(-\frac{1}{x^2}\right)$. Pravá strana rovnice je nula a levá strava rovnice je

$$L := \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \ln \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} + x\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \frac{1}{x} - \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \frac{1}{x} = 0$$

pro všechna reálná $x > 0$, funkce $y(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ je řešením dané diferenciální rovnice.

Zpět

Příklad 8.3.2

Je funkce $y(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$, $x > 0$ řešením diferenciální rovnice $y \ln y + xy' = 0$.

Maple:

```
> res:=y(x)=exp(1/x);
```

$$res := \mathrm{y}(x) = e^{(\frac{1}{x})}$$

```
> DR:=(y(x)*ln(y(x))+x*diff(y(x),x)=0);
```

$$DR := \mathrm{y}(x)\ln(\mathrm{y}(x)) + x\left(\frac{d}{dx}\,\mathrm{y}(x)\right) = 0$$

```
> odetest(res,DR);
```

$$e^{(\frac{1}{x})}\ln(e^{(\frac{1}{x})}) - \frac{e^{(\frac{1}{x})}}{x}$$

```
> simplify(%) assuming x::real;
```

$$0$$

Výsledek 0 znamená, že testovaná funkce je řešením dané diferenciální rovnice.

Zpět

Příklad 8.3.2

Je funkce $y(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$, $x > 0$ řešením diferenciální rovnice $y \ln y + xy' = 0$.

Mathematica:

$\mathbf{DR = \boldsymbol{y}[\boldsymbol{x}]Log[\boldsymbol{y}[\boldsymbol{x}]] + \boldsymbol{x}\ \boldsymbol{D}[\boldsymbol{y}[\boldsymbol{x}], \boldsymbol{x}] == 0}$

$\mathrm{Log}[y[x]]y[x] + xy'[x] == 0$

$\mathbf{res[x\_] = Exp[1/\boldsymbol{x}]}$

$e^{\frac{1}{x}}$

$\mathbf{Assuming[\boldsymbol{x} > 0, Simplify[DR/.\boldsymbol{y} \to res]]}$

True

Funkce je řešením diferenciální rovnice.

Zpět

Příklad 8.3.3

Je funkce $y(x) = \frac{\sqrt{3x^3+3}}{3}$, $x \in \mathbb{R}$ řešením diferenciální rovnice $y' = \dfrac{x^2}{y}$, které vyhovuje počáteční podmínce $y(0) = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

? Zpět

Příklad 8.3.3

Je funkce $y(x) = \frac{\sqrt{3x^3+3}}{3}$, $x \in \mathbb{R}$ řešením diferenciální rovnice $y' = \dfrac{x^2}{y}$, které vyhovuje počáteční podmínce $y(0) = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Výsledek:

Není řešením.

Zpět

Příklad 8.3.3

Je funkce $y(x) = \frac{\sqrt{3x^3+3}}{3}$, $x \in \mathbb{R}$ řešením diferenciální rovnice $y' = \dfrac{x^2}{y}$, které vyhovuje počáteční podmínce $y(0) = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Návod:

Vypočťeme $y'(x)$ a do diferenciální rovnice dosadíme za $y'(x)$ a $y(x)$. Levá strana rovnice se musí rovnat pravé pro všechna reálná x a musí být splněna počáteční podmínka.

Zpět

Příklad 8.3.3

Je funkce $y(x) = \frac{\sqrt{3x^3+3}}{3}$, $x \in \mathbb{R}$ řešením diferenciální rovnice $y' = \dfrac{x^2}{y}$, které vyhovuje počáteční podmínce $y(0) = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Řešení:

Ověříme, zda je splněna počáteční podmínka.

$$y(0) = \frac{\sqrt{3 \cdot 0^3 + 3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Dále zkoumáme, zda je daná funkce řešením příslušné rovnice. Spočteme:

$$y'(x) = \frac{1}{3}\,\frac{9x^2}{2\sqrt{3x^3+3}} = \frac{3x^2}{2\sqrt{3x^3+3}}.$$

Levá strava rovnice je

$$L := \frac{3x^2}{2\sqrt{3x^3+3}}$$

a pravá strana je

$$P := \frac{x^2}{\frac{\sqrt{3x^3+3}}{3}} = \frac{3x^2}{\sqrt{3x^3+3}}.$$

Tedy $L \neq P$ pro všechna reálná x, funkce $y(x) = \frac{\sqrt{3x^3+3}}{3}$ není řešením dané rovnice.

Zpět

Příklad 8.3.3

Je funkce $y(x) = \frac{\sqrt{3x^3+3}}{3}$, $x \in \mathbb{R}$ řešením diferenciální rovnice $y' = \dfrac{x^2}{y}$, které vyhovuje počáteční podmínce $y(0) = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Maple:

```
> f:=x->sqrt(3)/3*(sqrt(x^3+1));
```

$$f := x \to \frac{1}{3}\sqrt{3}\,\sqrt{x^3+1}$$

```
> f(0);
```

$$\frac{\sqrt{3}}{3}$$

```
> res:=y(x)=sqrt(3)/3*(sqrt(x^3+1));
```

$$res := \mathrm{y}(x) = \frac{\sqrt{3}\,\sqrt{x^3+1}}{3}$$

```
> DR:=(diff(y(x),x)=(x^2)/y(x));
```

$$DR := \tfrac{d}{dx}\,\mathrm{y}(x) = \frac{x^2}{\mathrm{y}(x)}$$

```
> odetest(res,DR);
```

$$-\frac{3\,x^2}{2\,\sqrt{3\,x^3+3}}$$

Zpět

Příklad 8.3.3

Je funkce $y(x) = \frac{\sqrt{3x^3+3}}{3}$, $x \in \mathbb{R}$ řešením diferenciální rovnice $y' = \dfrac{x^2}{y}$, které vyhovuje počáteční podmínce $y(0) = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Mathematica:

DR = $D[y[x], x]$==x^2/$y[x]$

$y'[x] == \frac{x^2}{y[x]}$

res[x_] = Sqrt[3x^3 + 3]/3

$\frac{1}{3}\sqrt{3 + 3x^3}$

res[Sqrt[3]/3]

$\frac{1}{3}\sqrt{3 + \frac{1}{\sqrt{3}}}$

DR/.y → res

$\frac{3x^2}{2\sqrt{3+3x^3}} == \frac{3x^2}{\sqrt{3+3x^3}}$

$L \neq P$, funkce není řešením diferenciálním rovnice.

Zpět

Vektory a matice

- Lineární (ne-)závislost vektorů z $\mathbb{R}^n$
- Matice a operace s nimi
- Hodnost matice
- Determinanty

Zpět

Lineární (ne-)závislost vektorů z $\mathbb{R}^n$

- Příklad 9.1.1 Rozhodněte, zda jsou uvedené vektory lineárně závislé nebo nezávislé: $\vec{b}_1 = (1,2,3)\,,\ \vec{b}_2 = (2,-1,4)\,,\ \vec{b}_3 = (3,-4,6)\ \in \mathbb{R}^3\,.$
- Příklad 9.1.2 Z dané skupiny vektorů vyberte maximální počet lineárně nezávislých vektorů a ostatní vyjádřete jako jejich lineární kombinaci: $\vec{v}_1 = (3,4,5)\,,\vec{v}_2 = (2,3,3)\,,\vec{v}_3 = (3,1,8)\,.$

Zpět

Příklad 9.1.1

Rozhodněte, zda jsou uvedené vektory lineárně závislé nebo nezávislé:
$\vec{b}_1 = (1, 2, 3)\,,\ \vec{b}_2 = (2, -1, 4)\,,\ \vec{b}_3 = (3, -4, 6)\ \in \mathbb{R}^3\,.$

? Zpět

Příklad 9.1.1

Rozhodněte, zda jsou uvedené vektory lineárně závislé nebo nezávislé:
$\vec{b}_1 = (1,2,3)$, $\vec{b}_2 = (2,-1,4)$, $\vec{b}_3 = (3,-4,6)$ $\in \mathbb{R}^3$.

Výsledek:

Vektory $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$, $\vec{b}_3$ jsou lineárně nezávislé.

Zpět

Příklad 9.1.1

Rozhodněte, zda jsou uvedené vektory lineárně závislé nebo nezávislé:
$\vec{b}_1 = (1, 2, 3)$, $\vec{b}_2 = (2, -1, 4)$, $\vec{b}_3 = (3, -4, 6)$ $\in \mathbb{R}^3$.

Návod:

Hledáme podmínky, za jakých je lineární kombinace daných vektorů rovna nulovému vektoru.

Zpět

Příklad 9.1.1

Rozhodněte, zda jsou uvedené vektory lineárně závislé nebo nezávislé:
$\vec{b}_1 = (1,2,3)$, $\vec{b}_2 = (2,-1,4)$, $\vec{b}_3 = (3,-4,6)$ $\in \mathbb{R}^3$.

Řešení:

Hledejme koeficienty x_1, x_2, $x_3 \in \mathbb{R}$ tak, aby platilo $x_1\vec{b}_1 + x_2\vec{b}_2 + x_3\vec{b}_3 = \vec{o}$, tj. (rozepsáno po složkách)

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & - & x_2 & - & 4x_3 & = & 0 \\ 3x_1 & + & 4x_2 & + & 6x_3 & = & 0\,. \end{array}$$

Vynásobením první rovnice (-2) a jejím přičtením k rovnici druhé dostaneme rovnici $x_2 = -2x_3$. Dosadíme-li tuto podmínku do první a třetí rovnice, obdržíme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých

$$\begin{array}{rcrcl} x_1 & - & x_3 & = & 0 \\ 3x_1 & - & 2x_3 & = & 0\,, \end{array}$$

jejímž jediným řešením je $x_1 = 0$, $x_3 = 0$ (a tudíž i $x_2 = 0$). Vektory $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$, $\vec{b}_3$ jsou lineárně nezávislé.

Zpět

Příklad 9.1.1

Rozhodněte, zda jsou uvedené vektory lineárně závislé nebo nezávislé:
$\vec{b}_1 = (1,2,3)$, $\vec{b}_2 = (2,-1,4)$, $\vec{b}_3 = (3,-4,6)$ $\in \mathbb{R}^3$.

Maple:

```
> with(linalg):
> b1:=vector([1,2,3]);b2:=vector([2,-1,4]);b3:=vector([3,-4,6]);
```

$$b1 := [1,\ 2,\ 3]$$

$$b2 := [2,\ -1,\ 4]$$

$$b3 := [3,\ -4,\ 6]$$

```
> lv:=[b1,b2,b3];
```

$$lv := [b1,\ b2,\ b3]$$

```
> A:=matrix(3,3,lv);
```

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & -4 & 6 \end{bmatrix}$$

```
> rank(A);
```

$$3$$

Zde vidíme, že hodnost matice, jejíž řádky odpovídají zadaným vektorům, je rovna 3. Z toho plyne, že vektory b1, b2,b3 jsou lineárně nezávislé.

Zpět

Příklad 9.1.1

Rozhodněte, zda jsou uvedené vektory lineárně závislé nebo nezávislé:
$\vec{b}_1 = (1, 2, 3)$, $\vec{b}_2 = (2, -1, 4)$, $\vec{b}_3 = (3, -4, 6)$ $\in \mathbb{R}^3$.

Mathematica:

b1 = {1, 2, 3}; b2 = {2, −1, 4}; b3 = {3, −4, 6};

***A* = {b1, b2, b3};**

MatrixForm[*A*]

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & -4 & 6 \end{pmatrix}$$

MatrixRank[*A*]

3

Zde vidíme, že hodnost matice, jejíž řádky odpovídají zadaným vektorům, je rovna 3. Z toho plyne, že vektory b1, b2,b3 jsou lineárně nezávislé.

Zpět

Příklad 9.1.2

Z dané skupiny vektorů vyberte maximální počet lineárně nezávislých vektorů a ostatní vyjádřete jako jejich lineární kombinaci: $\vec{v}_1 = (3, 4, 5)$, $\vec{v}_2 = (2, 3, 3)$, $\vec{v}_3 = (3, 1, 8)$.

? Zpět

Příklad 9.1.2

Z dané skupiny vektorů vyberte maximální počet lineárně nezávislých vektorů a ostatní vyjádřete jako jejich lineární kombinaci: $\vec{v}_1 = (3, 4, 5)$, $\vec{v}_2 = (2, 3, 3)$, $\vec{v}_3 = (3, 1, 8)$.

Výsledek:

Např. $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$; $\quad \vec{v}_3 = 7\vec{v}_1 - 9\vec{v}_2$.

Zpět

Příklad 9.1.2

Z dané skupiny vektorů vyberte maximální počet lineárně nezávislých vektorů a ostatní vyjádřete jako jejich lineární kombinaci: $\vec{v}_1 = (3, 4, 5)$, $\vec{v}_2 = (2, 3, 3)$, $\vec{v}_3 = (3, 1, 8)$.

Návod:

Lineární závislost zjistíme např. pomocí hodnosti matice, kterou získáme tak, že vektory zapíšeme coby její řádky pod sebe. Vyjádření vektoru jako lineární kombinace ostatních vektorů je problémem řešení nehomogenní soustavy lineárních rovnic.

Zpět

Příklad 9.1.2

Z dané skupiny vektorů vyberte maximální počet lineárně nezávislých vektorů a ostatní vyjádřete jako jejich lineární kombinaci: $\vec{v}_1 = (3, 4, 5)$, $\vec{v}_2 = (2, 3, 3)$, $\vec{v}_3 = (3, 1, 8)$.

Řešení:

Zapišme si všechny vektory do řádků matice $\mathbf{A}$, kterou následně převedeme na HT-tvar:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} .$$

Je zřejmé, že $h(\mathbf{A}) = 2$, a tudíž maximální počet lineárně nezávislých vektorů je 2. Označme tyto vektory $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ (vektory jsou LN)) a vektor $\vec{v}_3$ vyjádřeme jako jejich lineární kombinaci ve tvaru $\vec{v}_3 = \alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2$, tj. (rozepsáno po složkách) hledejme řešení soustavy

$$3 = 3\alpha + 2\beta\,, \quad 1 = 4\alpha + 3\beta\,, \quad 8 = 5\alpha + 3\beta\,.$$

Dosazením 3β z poslední rovnice do druhé dostaneme

$$1 = 4\alpha + (8 - 5\alpha) \quad \Rightarrow \quad \alpha = 7\,.$$

Snadno už dopočítáme z kterékoli z rovnic $\beta = -9$, a tedy $\vec{v}_3 = 7\vec{v}_1 - 9\vec{v}_2$.

Zpět

Příklad 9.1.2

Z dané skupiny vektorů vyberte maximální počet lineárně nezávislých vektorů a ostatní vyjádřete jako jejich lineární kombinaci: $\vec{v}_1 = (3, 4, 5)$, $\vec{v}_2 = (2, 3, 3)$, $\vec{v}_3 = (3, 1, 8)$.

Maple:

```
> with(linalg):
> v1:=vector([3,4,5]);v2:=vector([2,3,3]);v3:=vector([3,1,8]);
```

$$v1 := [3,\ 4,\ 5]$$

$$v2 := [2,\ 3,\ 3]$$

$$v3 := [3,\ 1,\ 8]$$

```
> lv:=[v1,v2,v3]:A:=matrix(3,3,lv);
```

$$A := \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

```
> rank(A);
```

$$2$$

Zde vidíme, že hodnost matice, jejíž řádky odpovídají zadaným vektorům, je rovna 2. Z toho plyne, že vektory v_1, v_2, v_3 jsou lineárně závislé. Dále je patrné, že např. dvojice v_1, v_2 je dvojicí lin. nezávislých vektorů (jeden z nich není násobkem druhého); chceme-li vektor v_3 zapsat jako lin. kombinaci $\alpha\, v_1 + \beta\, v_2$, při hledání koeficientů α a β vlastně řešíme nehomogenní soustavu lin. rovnic, jejíž rozšířenou maticí je A^{T}:

Další

Příklad 9.1.2

Z dané skupiny vektorů vyberte maximální počet lineárně nezávislých vektorů a ostatní vyjádřete jako jejich lineární kombinaci: $\vec{v}_1 = (3,4,5)$, $\vec{v}_2 = (2,3,3)$, $\vec{v}_3 = (3,1,8)$.

Maple:

```
> Ai:=transpose(A);
```

$$\mathrm{Ai} := \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 8 \end{bmatrix}$$

```
> redAi:=gausselim(Ai);
```

$$redAi := \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 0 & \frac{1}{3} & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> koef:=backsub(redAi):alpha:=koef[1];beta:=koef[2];
```

$$\alpha := 7$$

$$\beta := -9$$

Našli jsme hledané koeficienty: vektor v_3 je lineární kombinací vektorů v_1, v_2:
$v_3 = 7\,v_1 - 9\,v_2$.

Zpět

Příklad 9.1.2

Z dané skupiny vektorů vyberte maximální počet lineárně nezávislých vektorů a ostatní vyjádřete jako jejich lineární kombinaci: $\vec{v}_1 = (3,4,5)$, $\vec{v}_2 = (2,3,3)$, $\vec{v}_3 = (3,1,8)$.

Mathematica:

$\mathbf{v1 = \{3,4,5\}; v2 = \{2,3,3\}; v3 = \{3,1,8\};}$

$\boldsymbol{A} \mathbf{= \{v1, v2, v3\};}$

$\mathbf{MatrixForm[}\boldsymbol{A}\mathbf{]}$

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

$\mathbf{MatrixRank[}\boldsymbol{A}\mathbf{]}$

2

$\boldsymbol{B} \mathbf{= RowReduce[Transpose[}\boldsymbol{A}\mathbf{]];}$

$\mathbf{MatrixForm[}\boldsymbol{B}\mathbf{]}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & -9 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{\alpha = B}\mathbf{[[1,3]]}$

7

$\boldsymbol{\beta = B}\mathbf{[[2,3]]}$

-9

Zpět

Matice a operace s nimi

- Příklad 9.2.1 Vypočtěte součin matic **AB** (případně i **BA**), jsou-li dány matice **A**, **B**:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Zpět

Příklad 9.2.1

Vypočtěte součin matic **AB** (případně i **BA**), jsou-li dány matice **A**, **B**:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

? Zpět

Příklad 9.2.1

Vypočtěte součin matic **AB** (případně i **BA**), jsou-li dány matice **A**, **B**:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Výsledek:

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 5 & 10 & 8 \\ 0 & 0 & -2 \\ 10 & 20 & -10 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{BA} = \begin{bmatrix} -6 & 9 & 12 \\ 6 & 0 & 10 \\ 5 & -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Zpět

Příklad 9.2.1

Vypočtěte součin matic **AB** (případně i **BA**), jsou-li dány matice **A**, **B**:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Návod:

Podle pravidla pro násobení matic má výsledný součin **AB** na místě prvku ij hodnotu skalárního součinu $i-$tého řádku matice **A** s $j-$tým sloupcem matice **B**. Pečlivě musíme dbát na pořadí, v němž matice násobíme.

Zpět

Příklad 9.2.1

Vypočtěte součin matic **AB** (případně i **BA**), jsou-li dány matice **A**, **B**:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Řešení:

Matice **A** i **B** jsou typu 3×3, proto mají oba součiny smysl. Výsledkem násobení bude v obou případech matice typu 3×3:

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0+4+1 & 0+8+2 & 9+0+(-1) \\ 0-2+2 & 0-4+4 & 0+0-2 \\ 0+6+4 & 0+12+8 & -6+0-4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{BA} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0+0-6 & 0+0+9 & 0+0+12 \\ 6+0+0 & 4-4+0 & 2+8+0 \\ 3+0+2 & 2-2-3 & 1+4-4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 5 & 10 & 8 \\ 0 & 0 & -2 \\ 10 & 20 & -10 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{BA} = \begin{bmatrix} -6 & 9 & 12 \\ 6 & 0 & 10 \\ 5 & -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Zpět

Příklad 9.2.1

Vypočtěte součin matic **AB** (případně i **BA**), jsou-li dány matice **A**, **B**:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Maple:

```
> with(linalg):
> A:=matrix(3,3,[3,2,1,0,-1,2,-2,3,4]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

```
> B:=matrix(3,3,[0,0,3,2,4,0,1,2,-1]);
```

$$B := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

```
> AB:=evalm(A&*B);
```

$$AB := \begin{bmatrix} 5 & 10 & 8 \\ 0 & 0 & -2 \\ 10 & 20 & -10 \end{bmatrix}$$

Další

Příklad 9.2.1

Vypočtěte součin matic **AB** (případně i **BA**), jsou-li dány matice **A**, **B**:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Maple:

```
> BA:=evalm(B&*A);
```

$$BA := \begin{bmatrix} -6 & 9 & 12 \\ 6 & 0 & 10 \\ 5 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Zpět

Příklad 9.2.1

Vypočtěte součin matic $\mathbf{AB}$ (případně i $\mathbf{BA}$), jsou-li dány matice $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Mathematica:

$\boldsymbol{A = \{\{3,2,1\},\{0,-1,2\},\{-2,3,4\}\};B = \{\{0,0,3\},\{2,4,0\},\{1,2,-1\}\};}$

MatrixForm[*A*]

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

MatrixForm[*B*]

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Další

Příklad 9.2.1

Vypočtěte součin matic **AB** (případně i **BA**), jsou-li dány matice **A**, **B**:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Mathematica:

$\mathbf{MatrixForm}[\boldsymbol{A}.\boldsymbol{B}]$

$$\begin{pmatrix} 5 & 10 & 8 \\ 0 & 0 & -2 \\ 10 & 20 & -10 \end{pmatrix}$$

$\mathbf{MatrixForm}[\boldsymbol{B}.\boldsymbol{A}]$

$$\begin{pmatrix} -6 & 9 & 12 \\ 6 & 0 & 10 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Zpět

Hodnost matice

- Příklad 9.3.1 Určete hodnost matice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix}.$$

- Příklad 9.3.2 Určete hodnost matice v závislosti na parametru $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 2 & 5-\lambda \end{bmatrix}.$$

Zpět

Příklad 9.3.1

Určete hodnost matice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix}.$$

? Zpět

Příklad 9.3.1

Určete hodnost matice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix}.$$

Výsledek:

$h(\mathbf{A}) = 3\,.$

Zpět

Příklad 9.3.1

Určete hodnost matice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix}.$$

Návod:

Gaussovou eliminací převedeme matici $\mathbf{A}$ na HT-matici, jejíž hodnost je určena počtem jejích řádků.

Zpět

Příklad 9.3.1

Určete hodnost matice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix}.$$

Řešení:

Gaussovou eliminací převedeme matici $\mathbf{A}$ na HT-matici:

$$\mathbf{A} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix}.$$

Při výpočtu jsme provedli tyto ekvivalentní úpravy: první a druhý řádek jsme zaměnili, od druhého řádku jsme odečetli dvojnásobek prvního, od třetího řádku jsme odečetli trojnásobek prvního, čtvrtý řádek jsme nechali beze změn. V dalším kroku jsme druhý řádek vydělili třemi a jeho dvojnásobek odečetli od řádku třetího. Čtvrtý řádek jsme vynechali, neboť byl shodný s řádkem třetím. Poslední matice je HT-matice se 3 řádky, její hodnost je tedy rovna třem. Odtud plyne $h(\mathbf{A}) = 3$.

Zpět

Příklad 9.3.1

Určete hodnost matice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix}.$$

Maple:

```
> with(linalg):
> A:=matrix(4,3,[2,3,4,1,0,2,3,2,-1,0,0,-7]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix}$$

```
> gausselim(A);
```

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & \dfrac{-3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> rank(A);
```

$$3$$

Zpět

Příklad 9.3.1

Určete hodnost matice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix}.$$

Mathematica:

$\boldsymbol{A = \{\{2,3,4\},\{1,0,2\},\{3,2,-1\},\{0,0,-7\}\};}$

MatrixForm[*A*]

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}$$

MatrixRank[*A*]

3

Zpět

Příklad 9.3.2

Určete hodnost matice v závislosti na parametru $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 2 & 5-\lambda \end{bmatrix}.$$

? Zpět

Příklad 9.3.2

Určete hodnost matice v závislosti na parametru $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 2 & 5-\lambda \end{bmatrix}.$$

Výsledek:

$h(\mathbf{A}) = 2$ pro $\lambda \neq 3$, $\lambda \neq 4$; $\quad h(\mathbf{A}) = 1$ pro $\lambda = 3$ nebo $\lambda = 4$.

Zpět

Příklad 9.3.2

Určete hodnost matice v závislosti na parametru $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 2 & 5-\lambda \end{bmatrix}.$$

Návod:

Využijeme definice regulární/singulární čtvercové matice.

Zpět

Příklad 9.3.2

Určete hodnost matice v závislosti na parametru $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 2 & 5-\lambda \end{bmatrix} .$$

Řešení:

Ze zadání je zjevné, že uvedená matice bude mít vždy hodnost minimálně jedna, neboť oba řádky zároveň nelze ekvivalentními řádkovými úpravami převést na řádky nulové. Vypočítáme dále determinant:

$$\det \mathbf{A} = \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 2 & 5-\lambda \end{bmatrix} = (2-\lambda)(5-\lambda) + 2 = \lambda^2 - 7\lambda + 12 .$$

Matice $\mathbf{A}$ bude regulární, pokud $\det \mathbf{A} \neq 0$, tj. $\lambda^2 - 7\lambda + 12 = (\lambda - 3)(\lambda - 4) \neq 0$. V případě $\lambda \neq 3$, $\lambda \neq 4$ tak bude $h(\mathbf{A}) = 2$. V případech, kdy $\lambda = 3$ nebo $\lambda = 4$, bude matice singulární, a její hodnost bude $h(\mathbf{A}) = 1$.

Zpět

Příklad 9.3.2

Určete hodnost matice v závislosti na parametru $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 2 & 5-\lambda \end{bmatrix}.$$

Maple:

```
> with(linalg):A:=matrix(2,2,[2-lambda,-1,2,5-lambda]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 2 & 5-\lambda \end{bmatrix}$$

Ukážeme si dva různé způsoby výpočtu.
1. V prvním případě matici nejprve převedeme na odstupňovaný tvar:

```
> A:=gausselim(A);
```

$$A := \begin{bmatrix} 2 & 5-\lambda \\ 0 & -6+\frac{7}{2}\lambda-\frac{1}{2}\lambda^2 \end{bmatrix}$$

Tato matice bude mít druhý řádek nulový, a tedy hodnost jedna, pokud bude výraz $-6+7/2\,\lambda-1/2\,\lambda\,\lambda$ roven nule:

```
> solve(-6+7/2*lambda-1/2*lambda*lambda=0,lambda);
```

$$3,\ 4$$

V případě, že $\lambda = 3$ nebo $\lambda = 4$, tedy platí $h(A) = 1$, což můžeme snadno ověřit:

```
> lambda:=3:A:=matrix(2,2,[2-lambda,-1,2,5-lambda]):rank(A);
```

$$1$$

Další

Příklad 9.3.2

Určete hodnost matice v závislosti na parametru $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 2 & 5-\lambda \end{bmatrix}.$$

Maple:

```
> unassign('lambda'):lambda:=4:A:=matrix(2,2,[2-lambda,-1,2,5-lambda]):
rank(A);
```

$$1$$

```
> unassign('lambda');
```

V ostatních případech bude platit $h(A) = 2$.

2. Druhý způsob výpočtu využívá determinantu matice A:

```
> det(A);
```

$$12 - 7\lambda + \lambda^2$$

Je-li $det A = 0$, pak je matice A singulární, a v tomto případě má hodnost jedna.

```
> solve(det(A)=0,lambda);
```

$$4,\ 3$$

Obdrželi jsme stejný výsledek jako v předchozím případě. Pro λ různé od 3,4 je matice A regulární a má hodnost 2.

Zpět

Příklad 9.3.2

Určete hodnost matice v závislosti na parametru $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 2 & 5-\lambda \end{bmatrix}.$$

Mathematica:

$\boldsymbol{A = \{\{2-\lambda, -1\}, \{2, 5-\lambda\}\}}$

$\{\{2-\lambda, -1\}, \{2, 5-\lambda\}\}$

Solve[Det[A] == 0, λ]

$\{\{\lambda \to 3\}, \{\lambda \to 4\}\}$

A1 = A /.{$\lambda \to 3$}; A2 = A /.{$\lambda \to 4$};

Pro λ různé od 3,4 je matice A regulární a má hodnost 2. Pro hodnoty $\lambda = 3$ a $\lambda = 4$ si hodnost vypočteme.

MatrixRank[A1]

1

MatrixRank[A2]

1

Zpět

Determinanty

- Příklad 9.4.1 Vypočtěte determinanty následujících matic:

$$\mathbf{A_1} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A_2} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A_3} = \begin{bmatrix} 3 & 8 & -2 \\ 6 & 16 & -4 \\ -9 & -24 & 6 \end{bmatrix}.$$

- Příklad 9.4.2 Vypočtěte determinant matice

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) & h(x) \\ f'(x) & g'(x) & h'(x) \\ f''(x) & g''(x) & h''(x) \end{vmatrix},$$

jestliže jsou dány funkce $f(x) = \mathrm{e}^{2x}$, $g(x) = 1 - \cos x$, $h(x) = x^2$.

Zpět

Příklad 9.4.1

Vypočtěte determinanty následujících matic:

$$\mathbf{A_1} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A_2} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A_3} = \begin{bmatrix} 3 & 8 & -2 \\ 6 & 16 & -4 \\ -9 & -24 & 6 \end{bmatrix}.$$

? Zpět

Příklad 9.4.1

Vypočtěte determinanty následujících matic:

$$\mathbf{A_1} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A_2} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A_3} = \begin{bmatrix} 3 & 8 & -2 \\ 6 & 16 & -4 \\ -9 & -24 & 6 \end{bmatrix}.$$

Výsledek:

$\det \mathbf{A_1} = -50\,, \quad \det \mathbf{A_2} = -4\,, \quad \det \mathbf{A_3} = 0\,.$

Zpět

Příklad 9.4.1

Vypočtěte determinanty následujících matic:

$$\mathbf{A_1} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A_2} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A_3} = \begin{bmatrix} 3 & 8 & -2 \\ 6 & 16 & -4 \\ -9 & -24 & 6 \end{bmatrix}.$$

Návod:

Determinant první matice počítáme podle Sarrusova pravidla, při výpočtu determinantu druhé matice využijeme skutečnosti, že jde o HT-matici, třetí determinant určíme na základě vlastností determinantů.

Zpět

Příklad 9.4.1

Vypočtěte determinanty následujících matic:

$$\mathbf{A_1} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A_2} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A_3} = \begin{bmatrix} 3 & 8 & -2 \\ 6 & 16 & -4 \\ -9 & -24 & 6 \end{bmatrix}.$$

Řešení:

Determinant $\det \mathbf{A_1}$ určíme pomocí Sarrusova pravidla:

$$\det \mathbf{A_1} = \det \begin{bmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 0 \end{bmatrix} = 0 + 0 + (-6) - 8 - 36 - 0 = -50\,.$$

U druhého determinantu je výpočet snazší, neboť matice $\mathbf{A_2}$ je horní trojúhelníková čtvercová matice, a tudíž její determinant je roven součinu prvků na hlavní diagonále, tedy

$$\det \mathbf{A_2} = 2 \cdot 2 \cdot (-1) = -4\,.$$

V případě matice $\mathbf{A_3}$ si povšimneme faktu, že druhý a třetí řádek jsou násobky prvního řádku, což podle vlastností determinantů znamená, že

$$\det \mathbf{A_3} = 0\,.$$

Zpět

Příklad 9.4.1

Vypočtěte determinanty následujících matic:

$$\mathbf{A_1} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A_2} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A_3} = \begin{bmatrix} 3 & 8 & -2 \\ 6 & 16 & -4 \\ -9 & -24 & 6 \end{bmatrix}.$$

Maple:

```
> with(linalg):A1:=matrix(3,3,[3,2,-4,0,2,3,-1,4,0]);
```

$$A1 := \begin{bmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> det(A1);
```

$$-50$$

```
> A2:=matrix(3,3,[2,3,4,0,2,1,0,0,-1]);
```

$$A2 := \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

```
> det(A2);
```

$$-4$$

Další

Příklad 9.4.1

Vypočtěte determinanty následujících matic:

$$\mathbf{A_1} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A_2} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A_3} = \begin{bmatrix} 3 & 8 & -2 \\ 6 & 16 & -4 \\ -9 & -24 & 6 \end{bmatrix}.$$

Maple:

```
> A3:=matrix(3,3,[3,8,-2,6,16,-4,-9,-24,6]);
```

$$A3 := \begin{bmatrix} 3 & 8 & -2 \\ 6 & 16 & -4 \\ -9 & -24 & 6 \end{bmatrix}$$

```
> det(A3);
```

$$0$$

Zpět

Příklad 9.4.1

Vypočtěte determinanty následujících matic:

$$\mathbf{A_1} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A_2} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A_3} = \begin{bmatrix} 3 & 8 & -2 \\ 6 & 16 & -4 \\ -9 & -24 & 6 \end{bmatrix}.$$

Mathematica:

```
A1 = {{3, 2, -4}, {0, 2, 3}, {-1, 4, 0}};
Det[A1]
-50
A2 = {{2, 3, 4}, {0, 2, 1}, {0, 0, -1}};
Det[A2]
-4
A3 = {{3, 8, -2}, {6, 16, -4}, {-9, -24, 6}};
Det[A3]
0
```

Zpět

Příklad 9.4.2

Vypočtěte determinant matice

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) & h(x) \\ f'(x) & g'(x) & h'(x) \\ f''(x) & g''(x) & h''(x) \end{vmatrix} ,$$

jestliže jsou dány funkce $f(x) = \mathrm{e}^{2x}$, $g(x) = 1 - \cos x$, $h(x) = x^2$.

? Zpět

Příklad 9.4.2

Vypočtěte determinant matice

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) & h(x) \\ f'(x) & g'(x) & h'(x) \\ f''(x) & g''(x) & h''(x) \end{vmatrix},$$

jestliže jsou dány funkce $f(x) = \mathrm{e}^{2x}$, $g(x) = 1 - \cos x$, $h(x) = x^2$.

Výsledek:

$(-4x^2 + 2)\mathrm{e}^{2x} \sin x + (2x^2 - 10x + 4)\mathrm{e}^{2x} \cos x + (8x - 4)\mathrm{e}^{2x}$.

Zpět

Příklad 9.4.2

Vypočtěte determinant matice

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) & h(x) \\ f'(x) & g'(x) & h'(x) \\ f''(x) & g''(x) & h''(x) \end{vmatrix},$$

jestliže jsou dány funkce $f(x) = \mathrm{e}^{2x}$, $g(x) = 1 - \cos x$, $h(x) = x^2$.

Návod:

Derivace funkcí $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ vypočítáme podle pravidel pro derivování, po dosazení příslušných derivací pak det $\mathbf{A}$ (matice typu 3×3) určíme např. pomocí Sarrusova pravidla.

Zpět

Příklad 9.4.2

Vypočtěte determinant matice

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) & h(x) \\ f'(x) & g'(x) & h'(x) \\ f''(x) & g''(x) & h''(x) \end{vmatrix},$$

jestliže jsou dány funkce $f(x) = \mathrm{e}^{2x}$, $g(x) = 1 - \cos x$, $h(x) = x^2$.

Řešení:

Nejprve určíme všechny potřebné derivace:

$$\begin{array}{llll} f(x) = \mathrm{e}^{2x} & \Rightarrow & f'(x) = 2\mathrm{e}^{2x}, & f''(x) = 4\mathrm{e}^{2x} \\ g(x) = 1 - \cos x & \Rightarrow & g'(x) = \sin x, & g''(x) = \cos x \\ h(x) = x^2 & \Rightarrow & h'(x) = 2x, & h''(x) = 2. \end{array}$$

Povšimněme si, že funkce $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ obsahují všechny člen e^{2x}. S využitím vlastností determinantů pak po vytknutí tohoto členu z prvního sloupce hledaného determinantu dostaneme

$$\begin{aligned} \det\mathbf{A} &= \begin{vmatrix} \mathrm{e}^{2x} & 1-\cos x & x^2 \\ 2\mathrm{e}^{2x} & \sin x & 2x \\ 4\mathrm{e}^{2x} & \cos x & 2 \end{vmatrix} = \mathrm{e}^{2x} \begin{vmatrix} 1 & 1-\cos x & x^2 \\ 2 & \sin x & 2x \\ 4 & \cos x & 2 \end{vmatrix} = \\ &= \mathrm{e}^{2x}\{2\sin x + 2x^2\cos x + 8x(1-\cos x) - 4x^2\sin x - 2x\cos x - \\ &-4(1-\cos x)\} = (-4x^2+2)\mathrm{e}^{2x}\sin x + (2x^2 - 10x + 4)\mathrm{e}^{2x}\cos x + \\ &+(8x-4)\mathrm{e}^{2x}. \end{aligned}$$

Zpět

Příklad 9.4.2

Vypočtěte determinant matice

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) & h(x) \\ f'(x) & g'(x) & h'(x) \\ f''(x) & g''(x) & h''(x) \end{vmatrix},$$

jestliže jsou dány funkce $f(x) = \mathrm{e}^{2x}$, $g(x) = 1 - \cos x$, $h(x) = x^2$.

Maple:

Nejprve určíme všechny příslušné derivace. Pozn. pro zjednodušení zápisu označíme f1, g1, h1 první derivace,

analogicky f2, g2, h2 druhé derivace.

```
> f:=x->exp(2*x);f1(x):=diff(f(x),x);f2(x):=diff(f1(x),x);
```

$$f := x \to e^{(2\,x)}$$

$$\mathrm{f1}(x) := 2\,e^{(2\,x)}$$

$$\mathrm{f2}(x) := 4\,e^{(2\,x)}$$

```
> g:=x->1-cos(x);g1(x):=diff(g(x),x);g2(x):=diff(g1(x),x);
```

$$g := x \to 1 - \cos(x)$$

$$\mathrm{g1}(x) := \sin(x)$$

$$\mathrm{g2}(x) := \cos(x)$$

Další

Příklad 9.4.2

Vypočtěte determinant matice

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) & h(x) \\ f'(x) & g'(x) & h'(x) \\ f''(x) & g''(x) & h''(x) \end{vmatrix},$$

jestliže jsou dány funkce $f(x) = \mathrm{e}^{2x}$, $g(x) = 1 - \cos x$, $h(x) = x^2$.

Maple:

```
> h:=x->x^2;h1(x):=diff(h(x),x);h2(x):=diff(h1(x),x);
```

$$h := x \to x^2$$

$$\mathrm{h1}(x) := 2\,x$$

$$\mathrm{h2}(x) := 2$$

Dále už stačí jen dosadit a vypočítat příslušný determinant.

```
> A:=matrix(3,3,[f(x),g(x),h(x),f1(x),g1(x),h1(x),f2(x),g2(x),h2(x)]);
```

$$A := \begin{bmatrix} e^{(2\,x)} & 1 - \cos(x) & x^2 \\ 2\,e^{(2\,x)} & \sin(x) & 2\,x \\ 4\,e^{(2\,x)} & \cos(x) & 2 \end{bmatrix}$$

```
> det(A);
```

$$2\,e^{(2\,x)}\sin(x) - 10\,e^{(2\,x)}\,x\cos(x) - 4\,e^{(2\,x)} + 4\,e^{(2\,x)}\cos(x) + 2\,e^{(2\,x)}\,x^2\cos(x)$$
$$+ 8\,e^{(2\,x)}\,x - 4\,e^{(2\,x)}\,x^2\sin(x)$$

Zpět

Příklad 9.4.2

Vypočtěte determinant matice

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) & h(x) \\ f'(x) & g'(x) & h'(x) \\ f''(x) & g''(x) & h''(x) \end{vmatrix},$$

jestliže jsou dány funkce $f(x) = \mathrm{e}^{2x}$, $g(x) = 1 - \cos x$, $h(x) = x^2$.

Mathematica:

Nejprve určíme všechny příslušné derivace. Pozn. pro zjednodušení zápisu označíme f1, g1, h1 první derivace,analogicky f2, g2, h2 druhé derivace. Potom vypočteme příslušný determinant.

f[x_] = Exp[2x]; f1[x_] = D[f[x], x]; f2[x_] = D[f1[x], x];

g[x_] = 1 − Cos[x]; g1[x_] = D[g[x], x]; g2[x_] = D[g1[x], x];

h[x_] = x^2; h1[x_] = D[h[x], x]; h2[x_] = D[h1[x], x];

A = {{f[x], g[x], h[x]}, {f1[x], g1[x], h1[x]},{f2[x], g2[x], h2[x]}}

$\{\{e^{2x}, 1 - \mathrm{Cos}[x], x^2\}, \{2e^{2x}, \mathrm{Sin}[x], 2x\}, \{4e^{2x}, \mathrm{Cos}[x], 2\}\}$

det = Det[A]

$-4e^{2x} + 8e^{2x}x + 4e^{2x}\mathrm{Cos}[x] - 10e^{2x}x\mathrm{Cos}[x] + 2e^{2x}x^2\mathrm{Cos}[x] + 2e^{2x}\mathrm{Sin}[x] - 4e^{2x}x^2\mathrm{Sin}[x]$

Simplify[det]

$2e^{2x}(-2 + 4x + (2 - 5x + x^2)\mathrm{Cos}[x] + \mathrm{Sin}[x] - 2x^2\mathrm{Sin}[x])$

Zpět

Soustavy lineárních algebraických rovnic

- Gaussova eliminační metoda
- Gaussova-Jordanova metoda
- Inverzní matice
- Cramerovo pravidlo

Zpět

Gaussova eliminační metoda

- Příklad 10.1.1 Řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & 0, \\ x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 5, \\ 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 1, \\ -x_1 & + & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 4. \end{array}$$

- Příklad 10.1.2 Řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcr} 5x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 1, \\ 3x_1 & + & 5x_2 & - & x_3 & = & 2, \\ 2x_1 & - & 6x_2 & + & 3x_3 & = & 4. \end{array}$$

- Příklad 10.1.3 Řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 6, \\ 3x_1 & + & 7x_2 & - & 4x_3 & = & 16, \\ x_1 & + & 5x_2 & - & 8x_3 & = & 4. \end{array}$$

  Výsledek znázorněte graficky.

- Příklad 10.1.4 Řešte soustavu rovnic a proveďte diskusi řešitelnosti pro parametr $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcrcrcr} \lambda x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1, \\ x_1 & + & \lambda x_2 & + & x_3 & = & \lambda, \\ x_1 & + & x_2 & + & \lambda x_3 & = & \lambda^2. \end{array}$$

Zpět

Příklad 10.1.1

Řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & 0, \\ x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 5, \\ 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 1, \\ -x_1 & + & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 4. \end{array}$$

? Zpět

Příklad 10.1.1

Řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & 0, \\ x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 5, \\ 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 1, \\ -x_1 & + & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 4. \end{array}$$

Výsledek:

$x_1 = 0,\ x_2 = 3,\ x_3 = 2,\ x_4 = 1\,.$

Zpět

Příklad 10.1.1

Řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & 0, \\ x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 5, \\ 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 1, \\ -x_1 & + & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 4. \end{array}$$

Návod:

Matici soustavy převedeme pomocí ekvivalentních úprav na HT-matici, zjistíme, kolik má daná soustava řešení, případně zvolíme parametry (volitelné proměnné) a zpětným chodem dopočteme zbývající neznámé. Zpět

Příklad 10.1.1

Řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & 0, \\ x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 5, \\ 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 1, \\ -x_1 & + & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 4. \end{array}$$

Řešení:

$$(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & -3 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 4 \end{array}\right) \sim \ldots$$

Ke druhému řádku jsme přičetli $(-1)-$násobek prvního řádku (odečetli jsme od druhého řádku první), ke třetímu řádku jsme přičetli $(-2)-$násobek prvního řádku (od třetího řádku jsme odečetli dvojnásobek prvního řádku) a ke čtvrtému řádku jsme přičetli první řádek $((1)-$ násobek prvního řádku).

$$\ldots \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 10 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & -6 \end{array}\right) = \mathbf{B}.$$

Přičetli jsme ke třetímu řádku trojnásobek druhého a od čtvrtého řádku jsme odečetli dvojnásobek druhého řádku.

Další

Příklad 10.1.1

Řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & 0, \\ x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 5, \\ 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 1, \\ -x_1 & + & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 4. \end{array}$$

Řešení:

Vidíme, že $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = 4$ soustava má tedy řešení. Protože $n = h(\mathbf{A})$ má soustava právě jedno řešení. Zbývá provést zpětný chod. Výsledné matici $\mathbf{B}$ odpovídá soustava lineárních rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & 0, \\ & & x_2 & & & + & 2x_4 & = & 5, \\ & & & & 3x_3 & + & 10x_4 & = & 16, \\ & & & & & - & 6x_4 & = & -6. \end{array}$$

Z poslední rovnice soustavy vypočteme $x_4 = 1$, dosadíme do třetí rovnice a vypočteme $x_3 = 2$, dále za x_3 i x_4 dosadíme do druhé rovnice a vypočteme $x_2 = 3$ a konečně za x_2, x_3 a x_4 dosadíme do první rovnice a vypočteme $x_1 = 0$.
Jediným řešením naší soustavy je vektor

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^{\mathrm{T}} = (0, 3, 2, 1)^{\mathrm{T}}.$$

Poznamenejme ještě, že lineární prostor V_H je v tomto případě tvořen pouze nulovým vektorem a $\dim V_H = n - h(\mathbf{A}) = 4 - 4 = 0$.

Zpět

Příklad 10.1.1

Řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & 0, \\ x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 5, \\ 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 1, \\ -x_1 & + & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 4. \end{array}$$

Maple:

```
> with(linalg):
> eqns :=
{x1+x2-x3-x4=0,x1+2*x2-x3+x4=5,2*x1-x2+x3+2*x4=1,-x1+x2+x3-x4=4};
```

$$eqns := \{x1 + x2 - x3 - x4 = 0,\ x1 + 2\,x2 - x3 + x4 = 5,\ 2\,x1 - x2 + x3 + 2\,x4 = 1,\ -x1 + x2 + x3 - x4 = 4\}$$

Ukážeme si na tomto příkladě tři možná řešení v Maplu:

1. Nejjednodušší řešení:

```
> solve(eqns);
```

$$\{x1 = 0,\ x3 = 2,\ x4 = 1,\ x2 = 3\}$$

2. Nejprve sestavíme matici soustavy A a pak řešíme:

```
> A := genmatrix(eqns, [x1,x2,x3,x4]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Další

Příklad 10.1.1

Řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & 0, \\ x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 5, \\ 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 1, \\ -x_1 & + & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 4. \end{array}$$

Maple:

```
> x:=linsolve(A,[0,5,1,4]);
```

$$x := [0,\ 3,\ 2,\ 1]$$

3. Sestavíme rozšířenou matici soustavy, provedeme přímý chod Gaussovy metody a výsledek získáme zpětným chodem

```
> b:=vector([0,5,1,4]);
```

$$b := [0,\ 5,\ 1,\ 4]$$

```
> Aaug:=augment(A,b);
```

$$Aaug := \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

```
> B:=gausselim(Aaug);
```

$$B := \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 10 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & -6 \end{bmatrix}$$

Další

Příklad 10.1.1

Řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & 0, \\ x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 5, \\ 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 1, \\ -x_1 & + & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 4. \end{array}$$

Maple:

```
> backsub(B);
```

$$[0,\ 3,\ 2,\ 1]$$

Poznámka: Přímý chod Gaussovy eliminace lze provádět postupně, zadáme-li jako parametr číslo sloupce, ve kterém má být Gaussova eliminace zastavena:

```
> gausselim(Aaug,1);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & -3 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

```
> gausselim(Aaug,2);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 10 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & -6 \end{bmatrix}$$

Zpět

Příklad 10.1.1

Řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & 0, \\ x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 5, \\ 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 1, \\ -x_1 & + & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 4. \end{array}$$

Mathematica:

Ukážeme si tři možnosti řešení:

1) řešíme přímo soustavu lineárních rovnic

**eqns = {x1 + x2 − x3 − x4==0, x1 + 2x2 − x3 + x4==5,
2x1 − x2 + x3 + 2x4==1, −x1 + x2 + x3 − x4==4}**

{x1 + x2 − x3 − x4 == 0, x1 + 2x2 − x3 + x4 == 5, 2x1 − x2 + x3 + 2x4 == 1,
− x1 + x2 + x3 − x4 == 4}

Solve[eqns]

{{x1 → 0, x2 → 3, x3 → 2, x4 → 1}}

2) řešení přes matici soustavy a pravou stranu

***A* = {{1, 1, −1, −1}, {1, 2, −1, 1}, {2, −1, 1, 2},{−1, 1, 1, −1}}**

{{1, 1, −1, −1}, {1, 2, −1, 1}, {2, −1, 1, 2}, {−1, 1, 1, −1}}

***b* = {0, 5, 1, 4}**

{0, 5, 1, 4}

LinearSolve[*A*, *b*]

{0, 3, 2, 1}

Další

Příklad 10.1.1

Řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & 0, \\ x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 5, \\ 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 1, \\ -x_1 & + & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 4. \end{array}$$

Mathematica:

3) sestavíme rozšířenou matici a řešíme pomocí GaussJordanovy eliminace

Ab = Transpose[Join[Transpose[*A*], {*b*}]]

$\{\{1, 1, -1, -1, 0\}, \{1, 2, -1, 1, 5\}, \{2, -1, 1, 2, 1\}, \{-1, 1, 1, -1, 4\}\}$

***B* = RowReduce[Ab]**

$\{\{1, 0, 0, 0, 0\}, \{0, 1, 0, 0, 3\}, \{0, 0, 1, 0, 2\}, \{0, 0, 0, 1, 1\}\}$

***B*//MatrixForm**

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

reseni = Transpose[*B*][[5]]

$\{0, 3, 2, 1\}$

Zpět

Příklad 10.1.2

Řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcr} 5x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 1, \\ 3x_1 & + & 5x_2 & - & x_3 & = & 2, \\ 2x_1 & - & 6x_2 & + & 3x_3 & = & 4. \end{array}$$

? Zpět

Příklad 10.1.2

Řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcl} 5x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 1, \\ 3x_1 & + & 5x_2 & - & x_3 & = & 2, \\ 2x_1 & - & 6x_2 & + & 3x_3 & = & 4. \end{array}$$

Výsledek:

Soustava nemá řešení.

Zpět

Příklad 10.1.2

Řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcl} 5x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 1, \\ 3x_1 & + & 5x_2 & - & x_3 & = & 2, \\ 2x_1 & - & 6x_2 & + & 3x_3 & = & 4. \end{array}$$

Návod:

Matici soustavy převedeme pomocí ekvivalentních úprav na HT-matici. Zjistíme, že matice soustavy má hodnost $h(\mathbf{A}) = 2$, rozšířená matice soustavy má hodnost $h(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = 3$. Soustava tedy podle Frobeniovy věty nemá řešení.

Zpět

Příklad 10.1.2

Řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcl} 5x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 1, \\ 3x_1 & + & 5x_2 & - & x_3 & = & 2, \\ 2x_1 & - & 6x_2 & + & 3x_3 & = & 4. \end{array}$$

Řešení:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 5 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & -1 & 2 \\ 2 & -6 & 3 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 5 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 28 & -11 & 7 \\ 0 & -28 & 11 & 18 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 5 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 28 & -11 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 25 \end{array}\right).$$

Nejprve jsme od pětinásobku druhého řádku odečetli trojnásobek prvního řádku a od pětinásobku třetího řádku jsme odečetli dvojnásobek prvního. Při úpravě druhé matice jsme k třetímu řádku přičetli druhý. Matice soustavy má hodnost $h(\mathbf{A}) = 2$, rozšířená matice soustavy má hodnost $h(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = 3$. Soustava tedy podle Frobeniovy věty nemá řešení.

Zpět

Příklad 10.1.2

Řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcl} 5x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 1, \\ 3x_1 & + & 5x_2 & - & x_3 & = & 2, \\ 2x_1 & - & 6x_2 & + & 3x_3 & = & 4. \end{array}$$

Maple:

```
> with(linalg):
> eqns := {5*x1-x2+2*x3=1,3*x1+5*x2-x3=2,2*x1-6*x2+3*x3=4};
```

$$eqns := \{5\,x1 - x2 + 2\,x3 = 1,\, 3\,x1 + 5\,x2 - x3 = 2,\, 2\,x1 - 6\,x2 + 3\,x3 = 4\}$$

```
> solve(eqns);
```

Maple nevrátil žádné řešení, což znamená, že soustava žádné řešení nemá. Ověříme si to například tak, že sestavíme rozšířenou matici soustavy a provedeme Gaussovu eliminaci:

```
> A := genmatrix(eqns, [x1,x2,x3]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & -1 \\ 2 & -6 & 3 \end{bmatrix}$$

```
> b:=vector([1,2,4]);
```

$$b := [1,\ 2,\ 4]$$

```
> Aaug:=augment(A,b);
```

$$Aaug := \begin{bmatrix} 5 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & -1 & 2 \\ 2 & -6 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Další

Příklad 10.1.2

Řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcl} 5x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 1, \\ 3x_1 & + & 5x_2 & - & x_3 & = & 2, \\ 2x_1 & - & 6x_2 & + & 3x_3 & = & 4. \end{array}$$

Maple:

```
> B:=gausselim(Aaug);
```

$$B := \begin{bmatrix} 5 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & \frac{28}{5} & \frac{-11}{5} & \frac{7}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Hodnost matice soustavy je 2, hodnost rozšířené matice soustavy je 3. Soustava nemá řešení. Kdybychom se přesto pokusili provést zpětný chod, dostali bychom:

```
> backsub(B);
```

Error, (in backsub) inconsistent system

Zpět

Příklad 10.1.2

Řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcl} 5x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 1, \\ 3x_1 & + & 5x_2 & - & x_3 & = & 2, \\ 2x_1 & - & 6x_2 & + & 3x_3 & = & 4. \end{array}$$

Mathematica:

Nejdříve řešíme přímo soustavu lineárních rovnic:

**eqns = {x1 + x2 − x3 − x4==0, x1 + 2x2 − x3 + x4==5,
2x1 − x2 + x3 + 2x4==1, −x1 + x2 + x3 − x4==4}**

{x1 + x2 − x3 − x4 == 0, x1 + 2x2 − x3 + x4 == 5,
2x1 − x2 + x3 + 2x4 == 1, −x1 + x2 + x3 − x4 == 4}

Solve[eqns]

{}

Mathematica nevrátil žádné řešení, což znamená, že soustava žádné řešení nemá. Ověříme si to například tak, že sestavíme rozšířenou matici soustavy a provedeme Gaussovu eliminaci:

***A* = {{5, −1, 2}, {3, 5, −1}, {2, −6, 3}}**

{{5, −1, 2}, {3, 5, −1}, {2, −6, 3}}

***b* = {1, 2, 4}**

{1, 2, 4}

Další

Příklad 10.1.2

Řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcl} 5x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 1, \\ 3x_1 & + & 5x_2 & - & x_3 & = & 2, \\ 2x_1 & - & 6x_2 & + & 3x_3 & = & 4. \end{array}$$

Mathematica:

Ab = Transpose[Join[Transpose[*A*], {*b*}]]

$\{\{5,-1,2,1\},\{3,5,-1,2\},\{2,-6,3,4\}\}$

***B* = RowReduce[Ab]**

$\left\{\left\{1,0,\frac{9}{28},0\right\},\left\{0,1,-\frac{11}{28},0\right\},\{0,0,0,1\}\right\}$

***B*//MatrixForm**

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{9}{28} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{11}{28} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Hodnost matice soustavy je 2, hodnost rozšířené matice soustavy je 3. Soustava nemá řešení.

Zpět

Příklad 10.1.3

Řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 6, \\ 3x_1 & + & 7x_2 & - & 4x_3 & = & 16, \\ x_1 & + & 5x_2 & - & 8x_3 & = & 4. \end{array}$$

Výsledek znázorněte graficky.

? Zpět

Příklad 10.1.3

Řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 6, \\ 3x_1 & + & 7x_2 & - & 4x_3 & = & 16, \\ x_1 & + & 5x_2 & - & 8x_3 & = & 4. \end{array}$$

Výsledek znázorněte graficky.

Výsledek:

Soustava má nekonečně mnoho řešení

$$\mathbf{x} = (13/2, -1/2, 0)^{\mathrm{T}} + s(-9, 5, 2)^{\mathrm{T}}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Grafickým řešením je přímka - viz Maple.

Zpět

Příklad 10.1.3

Řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 6, \\ 3x_1 & + & 7x_2 & - & 4x_3 & = & 16, \\ x_1 & + & 5x_2 & - & 8x_3 & = & 4. \end{array}$$

Výsledek znázorněte graficky.

Návod:

Matici soustavy převedeme pomocí ekvivalentních úprav na HT-matici. Zvolíme parametry (volitelné proměnné) a zpětným chodem dopočteme zbývající neznámé. Grafické řešení - viz Maple.

Zpět

Příklad 10.1.3

Řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 6, \\ 3x_1 & + & 7x_2 & - & 4x_3 & = & 16, \\ x_1 & + & 5x_2 & - & 8x_3 & = & 4. \end{array}$$

Výsledek znázorněte graficky.

Řešení:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & 6 \\ 3 & 7 & -4 & 16 \\ 1 & 5 & -8 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 4 & -10 & -2 \\ 0 & 4 & -10 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & -5 & -1 \end{array}\right).$$

Nejprve jsme od druhého řádku odečetli trojnásobek prvního a od třetího řádku odečetli první. V další úpravě jsme od třetího řádku odečetli druhý a vynechali jsme nulový řádek.
Vidíme, že $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = 2,\ n = 3$. Soustava má tedy nekonečně mnoho řešení, $\dim V_H = 3 - 2 = 1 =$ počet volitelných neznámých.
Zpětný chod:
$x_3 := t \in \mathbb{R}$,
$2x_2 = -1 + 5x_3 \quad \Rightarrow \quad x_2 = -1/2 + 5/2t$,
$x_1 = 6 - 2x_3 - x_2 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 6 - 2t + 1/2 - 5/2t \quad \Rightarrow \quad x_1 = 13/2 - 9/2t$.

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \frac{13}{2} - \frac{9}{2}t \\ -\frac{1}{2} - \frac{5}{2}t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{13}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}t \begin{pmatrix} -9 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{13}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -9 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Jednoprvková báze prostoru V_H je tvořena např. vektorem $(-9, 5, 2)^{\mathrm{T}}$. Grafické řešení - viz Maple.

Zpět

Příklad 10.1.3

Řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 6, \\ 3x_1 & + & 7x_2 & - & 4x_3 & = & 16, \\ x_1 & + & 5x_2 & - & 8x_3 & = & 4. \end{array}$$

Výsledek znázorněte graficky.

Maple:

```
> with(linalg): with(plots):
> eqns := {x1+x2+2*x3=6,3*x1+7*x2-4*x3=16,x1+5*x2-8*x3=4};
```

$$eqns := \{x1 + x2 + 2\,x3 = 6,\ 3\,x1 + 7\,x2 - 4\,x3 = 16,\ x1 + 5\,x2 - 8\,x3 = 4\}$$

```
> sols := solve(eqns);
```

$$sols := \{x2 = -\frac{1}{2} + \frac{5\,x3}{2},\ x1 = \frac{13}{2} - \frac{9\,x3}{2},\ x3 = x3\}$$

```
> assign( sols );
> x:=vector([x1,x2,x3]);
```

$$x := \left[\frac{13}{2} - \frac{9\,x3}{2},\ -\frac{1}{2} + \frac{5\,x3}{2},\ x3\right]$$

Graficky představuje řešení soustavy tří rovnic o třech neznámých hledání průsečnice tří rovin, které jsou zadány obecnými rovnicemi odpovídajícími řádkům rozšířené matice soustavy:

```
> implicitplot3d({x+y+2*z=6,3*x+7*y-4*z=16,x+5*y-8*z=4
},x=-3..5,y=-3..5,z=-3..5, axes=boxed);
```

Další

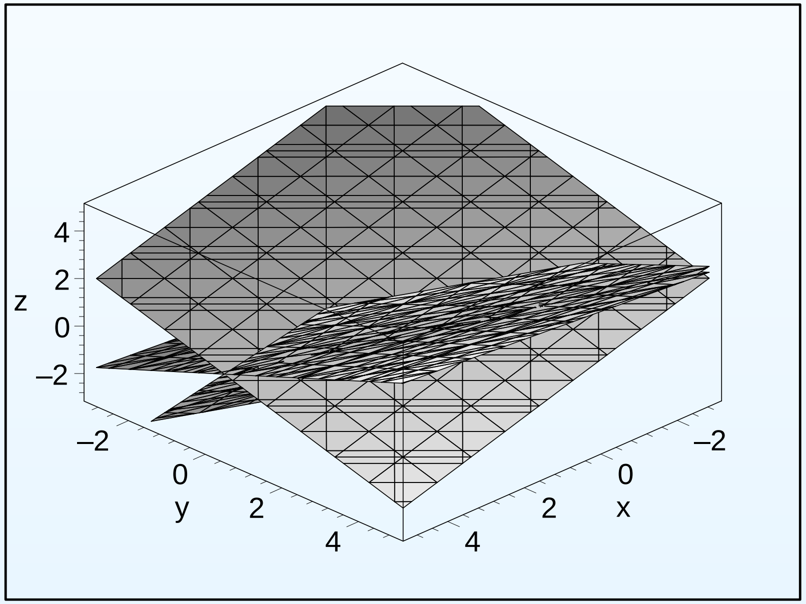
Příklad 10.1.3

Řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 6, \\ 3x_1 & + & 7x_2 & - & 4x_3 & = & 16, \\ x_1 & + & 5x_2 & - & 8x_3 & = & 4. \end{array}$$

Výsledek znázorněte graficky.

Maple:



Průsečnice je přímka, jejíž parametrické rovnice jsou:

$$x = \frac{13}{2} - 9s, \quad y = -\frac{1}{2} + 5s, \quad z = 2s.$$

Zpět

Příklad 10.1.3

Řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 6, \\ 3x_1 & + & 7x_2 & - & 4x_3 & = & 16, \\ x_1 & + & 5x_2 & - & 8x_3 & = & 4. \end{array}$$

Výsledek znázorněte graficky.

Mathematica:

Nejdříve řešíme přímo soustavu lineárních rovnic:

eqns = {x1 + x2 + 2x3==6, 3x1 + 7x2 − 4x3==16,
x1 + 5x2 − 8x3==4}

{x1 + x2 + 2x3 == 6, 3x1 + 7x2 − 4x3 == 16, x1 + 5x2 − 8x3 == 4}

Solve[eqns]

Solve::svars :
Equations may not give solutions for all solve variables. More...[1mm]
$\left\{\left\{\mathrm{x1}\to\frac{13}{2}-\frac{9\mathrm{x3}}{2},\mathrm{x2}\to-\frac{1}{2}+\frac{5\mathrm{x3}}{2}\right\}\right\}$

Mathematica nám vrátil nekonečně mnoho řešení, závislých na jednom parametru. Ověříme si to například tak, že sestavíme rozšířenou matici soustavy a provedeme Gaussovu eliminaci:

***A* = {{1, 1, 2}, {3, 7, −4}, {1, 5, −8}}**

{{1, 1, 2}, {3, 7, −4}, {1, 5, −8}}

***b* = {6, 16, 4}**

{6, 16, 4}

Další

Příklad 10.1.3

Řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 6, \\ 3x_1 & + & 7x_2 & - & 4x_3 & = & 16, \\ x_1 & + & 5x_2 & - & 8x_3 & = & 4. \end{array}$$

Výsledek znázorněte graficky.

Mathematica:

Ab = Transpose[Join[Transpose[*A*], {*b*}]]

$\{\{1, 1, 2, 6\}, \{3, 7, -4, 16\}, \{1, 5, -8, 4\}\}$

***B* = RowReduce[Ab]//MatrixForm**

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{9}{2} & \frac{13}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Znázorníme si to graficky:

r1 = x3/.Solve[eqns[[1]], x3][[1]]
r2 = x3/.Solve[eqns[[2]], x3][[1]]
r3 = x3/.Solve[eqns[[3]], x3][[1]]

$\frac{1}{2}(6 - \mathrm{x1} - \mathrm{x2})$

$\frac{1}{4}(-16 + 3\mathrm{x1} + 7\mathrm{x2})$

$\frac{1}{8}(-4 + \mathrm{x1} + 5\mathrm{x2})$

Další

Příklad 10.1.3

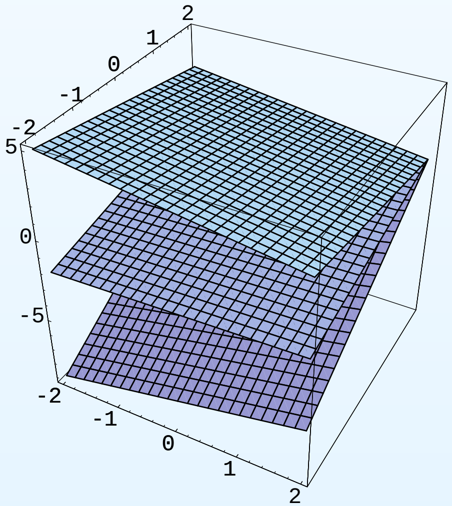
Řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 6, \\ 3x_1 & + & 7x_2 & - & 4x_3 & = & 16, \\ x_1 & + & 5x_2 & - & 8x_3 & = & 4. \end{array}$$

Výsledek znázorněte graficky.

Mathematica:

```
g1 = Plot3D[r1, {x1, −2, 2}, {x2, −2, 2},DisplayFunction → Identity];
g2 = Plot3D[r2, {x1, −2, 2}, {x2, −2, 2},DisplayFunction → Identity];
g3 = Plot3D[r3, {x1, −2, 2}, {x2, −2, 2},DisplayFunction → Identity];
Show[{g1, g2, g3}, DisplayFunction → $DisplayFunction,BoxRatios → {1, 1, 1}];
```



Řešení soustavy je přímka, která je průsečnicí tří rovin.

Zpět

Příklad 10.1.4

Řešte soustavu rovnic a proveďte diskusi řešitelnosti pro parametr $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
\lambda x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1, \\
x_1 & + & \lambda x_2 & + & x_3 & = & \lambda, \\
x_1 & + & x_2 & + & \lambda x_3 & = & \lambda^2.
\end{array}
$$

? Zpět

Příklad 10.1.4

Řešte soustavu rovnic a proveďte diskusi řešitelnosti pro parametr $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcrcrcr} \lambda x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1, \\ x_1 & + & \lambda x_2 & + & x_3 & = & \lambda, \\ x_1 & + & x_2 & + & \lambda x_3 & = & \lambda^2. \end{array}$$

Výsledek:

$\lambda = -2 \quad \Rightarrow \quad$ soustava nemá řešení;

$\lambda = 1 \quad \Rightarrow \quad$ soustava má nekonečně mnoho řešení,

$$\mathbf{x} = (1,0,0)^{\mathrm{T}} + t(-1,0,1)^{\mathrm{T}} + s(-1,1,0)^{\mathrm{T}},\ t,s \in \mathbb{R};$$

$\lambda \notin \{-2,1\} \quad \Rightarrow \quad$ soustava má právě jedno řešení

$$\mathbf{x} = \left(-\frac{1+\lambda}{2+\lambda}, \frac{1}{2+\lambda}, -\frac{(1+\lambda)^2}{2+\lambda}\right)^{\mathrm{T}}.$$

Zpět

Příklad 10.1.4

Řešte soustavu rovnic a proveďte diskusi řešitelnosti pro parametr $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
\lambda x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1, \\
x_1 & + & \lambda x_2 & + & x_3 & = & \lambda, \\
x_1 & + & x_2 & + & \lambda x_3 & = & \lambda^2.
\end{array}
$$

Návod:

Rozšířenou matici soustavy převádíme pomocí ekvivalentních úprav na horní trojúhelníkový tvar. Protože nulovým číslem nelze dělit, musíme pro hodnoty parametru, při kterém by dělení nulou mohlo nastat, řešit soustavu s touto hodnotou λ zvlášť. Provedeme diskusi hodnosti matice a rozšířené matice soustavy v závislosti na různých hodnotách parametru λ a zpětný chod. Nakonec shrneme získané výsledky.

Zpět

Příklad 10.1.4

Řešte soustavu rovnic a proveďte diskusi řešitelnosti pro parametr $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcrcrcr} \lambda x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1, \\ x_1 & + & \lambda x_2 & + & x_3 & = & \lambda, \\ x_1 & + & x_2 & + & \lambda x_3 & = & \lambda^2. \end{array}$$

Řešení:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda^2 & 1-\lambda & 1-\lambda^2 \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda^2 & 1-\lambda^3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1+\lambda & 1 & 1+\lambda \\ 0 & 1 & 1+\lambda & 1+\lambda+\lambda^2 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1+\lambda & 1 & 1+\lambda \\ 0 & 0 & -\lambda(\lambda+2) & -\lambda(1+\lambda)^2 \end{array}\right).$$

Při provádění ekvivalentních úprav jsme vyloučili případ $\lambda = 1$ a z tvaru výsledné horní trojúhelníkové matice vidíme, že speciálními případy budou i hodnoty $\lambda = 0,\ \lambda = -1$ a $\lambda = -2$ (diagonální prvky horní trojúhelníkové matice musí být nenulové).

a) Pro $\lambda = -2$ má upravená matice tvar

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \qquad h(\mathbf{A}) = 2,\ h(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = 3 \quad \Rightarrow \quad \text{soustava nemá řešení.}$$

Další

Příklad 10.1.4

Řešte soustavu rovnic a proveďte diskusi řešitelnosti pro parametr $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcrcrcr} \lambda x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1, \\ x_1 & + & \lambda x_2 & + & x_3 & = & \lambda, \\ x_1 & + & x_2 & + & \lambda x_3 & = & \lambda^2. \end{array}$$

Řešení:

b) Pro $\lambda = -1$ je

$$(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right),$$

kde jsme při poslední úpravě museli přehodit druhý a třetí řádek, aby diagonální prvky byly nenulové. Tedy pro $\lambda = -1$ je $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = n = 3 \quad \Rightarrow$ soustava má právě jedno řešení. Zpětný chod: $x_3 = 0, \quad x_2 = 1, \quad x_1 = x_2 + x_3 - 1 = 0, \quad$ t.j. $\quad \mathbf{x} = (0, 1, 0)^{\mathrm{T}}$.

c) Pro $\lambda = 0$ je

$$(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{rrr|r} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

Tedy pro $\lambda = 0$ je $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = n = 3 \quad \Rightarrow$ soustava má právě jedno řešení. Zpětný chod: $x_3 = 1/2, \quad x_2 = 1/2, \quad x_1 = -1/2, \quad$ t.j. $\quad \mathbf{x} = \dfrac{1}{2}(-1, 1, 1)^{\mathrm{T}}$.

Další

Příklad 10.1.4

Řešte soustavu rovnic a proveďte diskusi řešitelnosti pro parametr $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcrcrcr} \lambda x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1, \\ x_1 & + & \lambda x_2 & + & x_3 & = & \lambda, \\ x_1 & + & x_2 & + & \lambda x_3 & = & \lambda^2. \end{array}$$

Řešení:

d) Pro $\lambda = 1$ je

$$(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right).$$

Tedy pro $\lambda = 1$ je $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = 1,\ n = 3 \quad \Rightarrow$ soustava má nekonečně mnoho řešení, $\dim V_H = n - h(\mathbf{A}) = 2 =$ počet volitelných proměnných. Zpětný chod:

$$x_3 = t \in \mathbb{R}, \quad x_2 = s \in \mathbb{R}, \quad x_1 = 1 - s - t, \quad \text{t.j.}$$

$\mathbf{x} = (1,0,0)^{\mathrm{T}} + t(-1,0,1)^{\mathrm{T}} + s(-1,1,0)^{\mathrm{T}},\ t, s \in \mathbb{R}$;
báze $V_H = \{(-1,0,1)^{\mathrm{T}}, (-1,1,0)^{\mathrm{T}}\}$.
e) Jestliže $\lambda \notin \{-2, 1\}$, pak $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = n = 3$ a soustava má právě jedno řešení.
Báze $V_H = \{(0,0,0)^{\mathrm{T}}\}$. Zpětný chod:

$$x_3 = \frac{(1+\lambda)^2}{2+\lambda},\ (1+\lambda)x_2 = 1+\lambda-x_3 \quad \Rightarrow \quad x_2 = \frac{1}{2+\lambda},\ \lambda x_1 = 1-x_2-x_3 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -\frac{1+\lambda}{2+\lambda}.$$

Například pro $\lambda = -1$ dostáváme: $\mathbf{x} = (0,1,0)^{\mathrm{T}}$, což je řešení, které jsme získali v b).
Pro $\lambda = 0$ dostáváme: $\mathbf{x} = (-1/2, 1/2, 1/2)^{\mathrm{T}}$, což je řešení, které jsme získali v c).

Zpět

Příklad 10.1.4

Řešte soustavu rovnic a proveďte diskusi řešitelnosti pro parametr $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcrcrcr} \lambda x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1, \\ x_1 & + & \lambda x_2 & + & x_3 & = & \lambda, \\ x_1 & + & x_2 & + & \lambda x_3 & = & \lambda^2. \end{array}$$

Maple:

```
> with(linalg): with(plots):
> eqns :=
{lambda*x1+x2+x3=1,x1+lambda*x2+x3=lambda,x1+x2+lambda*x3=lambda^2};
```

$$eqns := \{\lambda\, x1 + x2 + x3 = 1,\ x1 + \lambda\, x2 + x3 = \lambda,\ x1 + x2 + \lambda\, x3 = \lambda^2\}$$

```
> sols := solve(eqns, {x1,x2,x3});
```

$$sols := \{x1 = -\frac{\lambda+1}{\lambda+2},\ x3 = \frac{(\lambda+1)^2}{\lambda+2},\ x2 = \frac{1}{\lambda+2}\}$$

```
> assign( sols );
> x:=vector([x1,x2,x3]);
```

$$x := \left[-\frac{\lambda+1}{\lambda+2},\ \frac{1}{\lambda+2},\ \frac{(\lambda+1)^2}{\lambda+2}\right]$$

Pozor, Maple apriori předpokládá, že lambda je takové, že soustava má řešení, a to právě jedno. My ale víme, že musíme rozlišit hned několik případů.

```
> unassign('x1','x2','x3');
```

Další

Příklad 10.1.4

Řešte soustavu rovnic a proveďte diskusi řešitelnosti pro parametr $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcrcrcr} \lambda x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1, \\ x_1 & + & \lambda x_2 & + & x_3 & = & \lambda, \\ x_1 & + & x_2 & + & \lambda x_3 & = & \lambda^2. \end{array}$$

Maple:

a) $\lambda = -2$:

```
> eqnsa:= {-2*x1+x2+x3=1,x1-2*x2+x3=-2,x1+x2-2*x3=4};
```

$$eqnsa := \{-2\,x1 + x2 + x3 = 1,\ x1 - 2\,x2 + x3 = -2,\ x1 + x2 - 2\,x3 = 4\}$$

```
> solve(eqnsa);
```

Maple nevrátil žádné řešení, soustava tedy pro $\lambda = -2$ řešení nemá. Přesvědčte se o tom pomocí Gaussovy eliminace.

b) $\lambda = -1$:

```
> eqnsb:= {-x1+x2+x3=1,x1-x2+x3=-1,x1+x2-x3=1};
```

$$eqnsb := \{-x1 + x2 + x3 = 1,\ x1 - x2 + x3 = -1,\ x1 + x2 - x3 = 1\}$$

```
> solve(eqnsb);
```

$$\{x3 = 0,\ x1 = 0,\ x2 = 1\}$$

c) $\lambda = 0$:

```
> eqnsc:= {x2+x3=1,x1+x3=0,x1+x2=0};
```

$$eqnsc := \{x2 + x3 = 1,\ x1 + x3 = 0,\ x1 + x2 = 0\}$$

Další

Příklad 10.1.4

Řešte soustavu rovnic a proveďte diskusi řešitelnosti pro parametr $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcrcrcr} \lambda x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1, \\ x_1 & + & \lambda x_2 & + & x_3 & = & \lambda, \\ x_1 & + & x_2 & + & \lambda x_3 & = & \lambda^2. \end{array}$$

Maple:

```
> solve(eqnsc);
```

$$\{x1 = \frac{-1}{2},\ x2 = \frac{1}{2},\ x3 = \frac{1}{2}\}$$

d) $\lambda = 1$:

```
> eqnsd:= {x1+x2+x3=1,x1+x2+x3=1,x1+x2+x3=1};
```

$$eqnsd := \{x1 + x2 + x3 = 1\}$$

```
> solve(eqnsd);
```

$$\{x1 = -x2 - x3 + 1,\ x2 = x2,\ x3 = x3\}$$

```
> A := genmatrix(eqnsd, [x1,x2,x3]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> nullspace(A);
```

$$\{[-1,\ 0,\ 1],\ [-1,\ 1,\ 0]\}$$

Maple nám vrátil bázi prostoru V_H.

Zpět

Příklad 10.1.4

Řešte soustavu rovnic a proveďte diskusi řešitelnosti pro parametr $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcrcrcr} \lambda x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1, \\ x_1 & + & \lambda x_2 & + & x_3 & = & \lambda, \\ x_1 & + & x_2 & + & \lambda x_3 & = & \lambda^2. \end{array}$$

Mathematica:

Nejdříve necháme Mathematicu vyřešit soustavu:

$\{\mathrm{x2} + \mathrm{x3} + \mathrm{x1}\lambda == 1, \mathrm{x1} + \mathrm{x3} + \mathrm{x2}\lambda == \lambda, \mathrm{x1} + \mathrm{x2} + \mathrm{x3}\lambda == \lambda^2\}$

Solve[eqns, {x1, x2, x3}]

$\left\{\left\{\mathrm{x1} \to -\frac{1+\lambda}{2+\lambda}, \mathrm{x2} \to \frac{1}{2+\lambda}, \mathrm{x3} \to -\frac{-1-2\lambda-\lambda^2}{2+\lambda}\right\}\right\}$

Mathematica nám vypočte pouze řešení pro taková λ, kdy existuje pouze jedno řešení. Z výsledku ale vidíme, že pro $\lambda = -2$ řešení neexistuje. Pokusíme se zjistit problematické hodnoty parametru λ. Definujeme si matici soustavy a rozšířenou matici soustavy.

$\boldsymbol{A = \{\{\lambda, 1, 1\}, \{1, \lambda, 1\}, \{1, 1, \lambda\}\}}$

$\{\{\lambda, 1, 1\}, \{1, \lambda, 1\}, \{1, 1, \lambda\}\}$

$\mathbf{Ab} = \boldsymbol{\{\{\lambda, 1, 1, 1\}, \{1, \lambda, 1, \lambda\}, \{1, 1, \lambda, \lambda\text{^}2\}\}}$

$\{\{\lambda, 1, 1, 1\}, \{1, \lambda, 1, \lambda\}, \{1, 1, \lambda, \lambda^2\}\}$

Vypočtěme hodnoty λ, kdy determinant matice soustavy je roven 0.

Další

Příklad 10.1.4

Řešte soustavu rovnic a proveďte diskusi řešitelnosti pro parametr $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcrcrcr} \lambda x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1, \\ x_1 & + & \lambda x_2 & + & x_3 & = & \lambda, \\ x_1 & + & x_2 & + & \lambda x_3 & = & \lambda^2. \end{array}$$

Mathematica:

Solve[Det[A] == 0, λ]

$\{\{\lambda \to -2\}, \{\lambda \to 1\}, \{\lambda \to 1\}\}$

Problematické body jsou $\lambda = -2$ a $\lambda = -1$. Vyšetříme řešení pro tyto parametry.

$\lambda = -2$

-2

RowReduce[Ab]//MatrixForm

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solve[eqns, {x1, x2, x3}]

$\{\}$

Další

Příklad 10.1.4

Řešte soustavu rovnic a proveďte diskusi řešitelnosti pro parametr $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcrcrcr} \lambda x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1, \\ x_1 & + & \lambda x_2 & + & x_3 & = & \lambda, \\ x_1 & + & x_2 & + & \lambda x_3 & = & \lambda^2. \end{array}$$

Mathematica:

$\boldsymbol{\lambda = 1}$

1

RowReduce[Ab]//MatrixForm

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Solve[eqns, {x1, x2, x3}]

Solve::svars :
Equations may not give solutions for all solve variables. More...

{{x1 → 1 − x2 − x3}}

Pro $\lambda = -2$ neexistuje řešení, pro $\lambda = -1$ existuje nekonečně řešení (řešení je závislé na dvou parametrech), pro ostatní hodnoty parametru λ existuje jedno řešení
$x_1 = -\frac{1+\lambda}{2+\lambda}, x_2 = \frac{1}{2+\lambda}, x_3 = -\frac{-1-2\lambda-\lambda^2}{2+\lambda}$.

Zpět

Gaussova-Jordanova metoda

- **Příklad 10.2.1** Řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & 0, \\
2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 1, \\
x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 5, \\
-x_1 & + & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 4.
\end{array}$$

- **Příklad 10.2.2** Gaussovou-Jordanovou metodou řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & + & x_4 & = & -5, \\
2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & 0, \\
7x_1 & - & x_2 & + & 4x_3 & - & 3x_4 & = & 15, \\
x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & - & x_4 & = & -3.
\end{array}$$

Zpět

Příklad 10.2.1

Řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcrcl}
x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & 0, \\
2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 1, \\
x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 5, \\
-x_1 & + & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 4.
\end{array}$$

? Zpět

Příklad 10.2.1

Řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & 0, \\ 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 1, \\ x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 5, \\ -x_1 & + & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 4. \end{array}$$

Výsledek:

$x_1 = 0,\ x_2 = 3,\ x_3 = 2,\ x_4 = 1.$

Zpět

Příklad 10.2.1

Řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & 0, \\ 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 1, \\ x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 5, \\ -x_1 & + & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 4. \end{array}$$

Návod:

Pomocí ekvivalentních úprav převedeme rozšířenou matici soustavy na matici

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_4 \end{array}\right).$$

Zpět

Příklad 10.2.1

Řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & 0, \\ 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 1, \\ x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 5, \\ -x_1 & + & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 4. \end{array}$$

Řešení:

$$(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 4 \end{array}\right) \sim^1 \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 4 \end{array}\right) \sim^2 \left(\begin{array}{rrrr|r} 3 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 10 & 16 \\ 0 & 0 & 6 & 2 & 14 \end{array}\right) \sim^3$$

$$\ldots \sim^3 \left(\begin{array}{rrrr|r} 3 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 6 & 15 \\ 0 & 0 & 3 & 10 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & -18 & -18 \end{array}\right) \sim^4 \left(\begin{array}{rrrr|r} 3 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 10 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim^5 \ldots$$

$$\ldots \sim^5 \left(\begin{array}{rrrr|r} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim^6 \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Další

Příklad 10.2.1

Řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & 0, \\ 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 1, \\ x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 5, \\ -x_1 & + & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 4. \end{array}$$

Řešení:

Ekvivalentní úpravy:
$\sim^1$: Od druhého řádku jsme odečetli dvojnásobek prvního, od třetího řádku jsme odečetli první a ke čtvrtému řádku jsme první přičetli.
$\sim^2$: Ke trojnásobku prvního řádku jsme přičetli druhý řádek, k trojnásobku třetího jsme přičetli druhý a k trojnásobku čtvrtého jsme přičetli dvojnásobek druhého.
$\sim^3$: K (-2) násobku druhého řádku jsme přičetli třetí a od čtvrtého jsme odečetli dvojnásobek třetího.
$\sim^4$: Abychom si zjednodušili počítání, vydělili jsme druhý řádek číslem 3 a poslední řádek číslem -18.
$\sim^5$: Od prvního řádku jsme odečetli poslední, od druhého jsme odečetli dvojnásobek posledního a od třetího jsme odečetli desetinásobek posledního řádku.
$\sim^6$: Nakonec vydělíme první a třetí řádek třemi, abychom získali na diagonále jedničky.
Poznamenejme, že je také možné provádět úpravy tak, aby diagonální prvky byly rovny rovnou při úpravách jedné, ale v tom případě se nevyhneme počítání se zlomky (viz. Maple).
Vidíme, že $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = 4$ a $k = n - h(\mathbf{A}) = 4 - 4 = 0$ soustava má tedy právě jedno řešení $\mathbf{x} = (0, 3, 2, 1)^{\mathrm{T}}$.

Zpět

Příklad 10.2.1

Řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & 0, \\ 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 1, \\ x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 5, \\ -x_1 & + & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 4. \end{array}$$

Maple:

```
> with(linalg): with(plots):
> A:=array([[1,1,-1,-1,0],[2,-1,1,2,1],[1,2,-1,1,5],[-1,1,1,-1,4]]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

```
> B:=gaussjord(A);
```

$$B := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> x:=vector(4,[]);
```

$$x := \mathrm{array}(1..4, [])$$

Další

Příklad 10.2.1

Řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & 0, \\ 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 1, \\ x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 5, \\ -x_1 & + & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 4. \end{array}$$

Maple:

```
> for i to 4 do x[i] := B[i,5]; end do:
> print(x);
```

$$[0,\ 3,\ 2,\ 1]$$

Také Gausovu-Jordanovu metodu lze provádět postupně po sloupcích, např.:

```
> gaussjord(A,3);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{10}{3} & \frac{16}{3} \\ 0 & 0 & 0 & -6 & -6 \end{bmatrix}$$

Zpět

Příklad 10.2.1

Řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & 0, \\ 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 1, \\ x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 5, \\ -x_1 & + & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 4. \end{array}$$

Mathematica:

Definujeme rozšířenou matici soustavy a provedeme Gaussovu-Jordanovu eliminaci:

Ab = {{1, 1, −1, −1, 0}, {2, −1, 1, 2, 1}, {1, 2, −1, 1, 5}, {−1, 1, 1, −1, 4}}

$\{\{1, 1, -1, -1, 0\}, \{2, -1, 1, 2, 1\}, \{1, 2, -1, 1, 5\}, \{-1, 1, 1, -1, 4\}\}$

***B* = RowReduce[Ab]**

$\{\{1, 0, 0, 0, 0\}, \{0, 1, 0, 0, 3\}, \{0, 0, 1, 0, 2\}, \{0, 0, 0, 1, 1\}\}$

***B*//MatrixForm**

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

reseni = Transpose[*B*][[5]]

$\{0, 3, 2, 1\}$

Zpět

Příklad 10.2.2

Gaussovou-Jordanovou metodou řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & + & x_4 & = & -5, \\ 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & 0, \\ 7x_1 & - & x_2 & + & 4x_3 & - & 3x_4 & = & 15, \\ x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & - & x_4 & = & -3. \end{array}$$

? Zpět

Příklad 10.2.2

Gaussovou-Jordanovou metodou řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & + & x_4 & = & -5, \\ 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & 0, \\ 7x_1 & - & x_2 & + & 4x_3 & - & 3x_4 & = & 15, \\ x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & - & x_4 & = & -3. \end{array}$$

Výsledek:

$x_1 = 1,\ x_2 = 0,\ x_3 = 2,\ x_4 = 0.$

Zpět

Příklad 10.2.2

Gaussovou-Jordanovou metodou řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & + & x_4 & = & -5, \\ 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & 0, \\ 7x_1 & - & x_2 & + & 4x_3 & - & 3x_4 & = & 15, \\ x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & - & x_4 & = & -3. \end{array}$$

Návod:

Pomocí ekvivalentních úprav převedeme rozšířenou matici soustavy na matici

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_4 \end{array}\right).$$

Zpět

Příklad 10.2.2

Gaussovou-Jordanovou metodou řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & + & x_4 & = & -5, \\ 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & 0, \\ 7x_1 & - & x_2 & + & 4x_3 & - & 3x_4 & = & 15, \\ x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & - & x_4 & = & -3. \end{array}$$

Řešení:

$$(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -3 & 1 & -5 \\ 2 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ 7 & -1 & 4 & -3 & 15 \\ 1 & 1 & -2 & -1 & -3 \end{array}\right) \sim^1 \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -3 & 1 & -5 \\ 0 & -1 & 5 & 0 & 10 \\ 0 & -15 & 25 & -10 & 50 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 2 \end{array}\right) \sim^2 \ldots$$

$$\ldots \sim^2 \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 7 & 3 & 15 \\ 0 & -1 & 5 & 0 & 10 \\ 0 & 3 & -5 & 2 & -10 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 2 \end{array}\right) \sim^3 \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 7 & 3 & 15 \\ 0 & -1 & 5 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 10 & 2 & 20 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 8 \end{array}\right) \sim^4 \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 7 & 3 & 15 \\ 0 & -1 & 5 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 4 \end{array}\right) \sim^5 \ldots$$

$$\ldots \sim^5 \left(\begin{array}{rrrr|r} -5 & 0 & 0 & -8 & -5 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim^6 \left(\begin{array}{rrrr|r} -15 & 0 & 0 & 0 & -15 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -15 & 0 & -30 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim^7 \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Další

Příklad 10.2.2

Gaussovou-Jordanovou metodou řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & + & x_4 & = & -5, \\ 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & 0, \\ 7x_1 & - & x_2 & + & 4x_3 & - & 3x_4 & = & 15, \\ x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & - & x_4 & = & -3. \end{array}$$

Řešení:

Ekvivalentní úpravy:
$\sim^1$: Od druhého řádku jsme odečetli dvojnásobek prvního, od třetího řádku jsme odečetli sedminásobek prvního a od čtvrtého řádku jsme první odečetli.
$\sim^2$: K prvnímu řádku jsme přičetli dvojnásobek druhého řádku, třetí řádek jsme vydělili číslem -5.
$\sim^3$: K třetímu řádku jsme přičetli trojnásobek druhého, k (-1)krát čtvrtému řádku jsme přičetli druhý.
$\sim^4$: Vydělili jsme třetí a čtvrtý řádek číslem 2.
$\sim^5$: K (-5)tinásobku prvního řádku jsme přičetli sedminásobek třetího, od druhého řádku jsme odečetli třetí, od pětinásobku čtvrtého řádku jsme odečetli dvojnásobek třetího.
$\sim^6$: K trojnásobku prvního řádku jsme přičetli osminásobek čtvrtého, k trojnásobku druhého jsme přičetli čtvrtý a k (-3)násobku třetího jsme přičetli poslední řádek.
$\sim^7$: Nakonec vydělíme každý řádek diagonálním prvkem, abychom získali na diagonále jedničky.
Soustava má právě jedno řešení $\mathbf{x} = (1, 0, 2, 0)^{\mathrm{T}}$.

Zpět

Příklad 10.2.2

Gaussovou-Jordanovou metodou řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & + & x_4 & = & -5, \\ 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & 0, \\ 7x_1 & - & x_2 & + & 4x_3 & - & 3x_4 & = & 15, \\ x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & - & x_4 & = & -3. \end{array}$$

Maple:

```
> with(linalg):
> A := array(
[[1,2,-3,1,-5],[2,3,-1,2,0],[7,-1,4,-3,15],[1,1,-2,-1,-3]] );
```

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & -5 \\ 2 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ 7 & -1 & 4 & -3 & 15 \\ 1 & 1 & -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

```
> B:=gaussjord(A);
```

$$B := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> x:=vector(4,[]);
```

$$x := \mathrm{array}(1..4,\ [])$$

Další

Příklad 10.2.2

Gaussovou-Jordanovou metodou řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & + & x_4 & = & -5, \\ 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & 0, \\ 7x_1 & - & x_2 & + & 4x_3 & - & 3x_4 & = & 15, \\ x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & - & x_4 & = & -3. \end{array}$$

Maple:

```
> for i to 4 do x[i] := B[i,5]; end do:
> print(x);
```

$$[1,\ 0,\ 2,\ 0]$$

Zpět

Příklad 10.2.2

Gaussovou-Jordanovou metodou řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & + & x_4 & = & -5, \\ 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & 0, \\ 7x_1 & - & x_2 & + & 4x_3 & - & 3x_4 & = & 15, \\ x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & - & x_4 & = & -3. \end{array}$$

Mathematica:

Definujeme rozšířenou matici soustavy a provedeme Gaussovu-Jordanovu eliminaci:

Ab = {{1, 2, −3, 1, −5}, {2, 3, −1, 2, 0}, {7, −1, 4, −3, 15},
{1, 1, −2, −1, −3}}

$\{\{1, 2, -3, 1, -5\}, \{2, 3, -1, 2, 0\},$
$\{7, -1, 4, -3, 15\}, \{1, 1, -2, -1, -3\}\}$

B **= RowReduce[Ab]**

$\{\{1, 0, 0, 0, 1\}, \{0, 1, 0, 0, 0\},$
$\{0, 0, 1, 0, 2\}, \{0, 0, 0, 1, 0\}\}$

B **//MatrixForm**

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

reseni = Transpose[*B*][[5]]

$\{1, 0, 2, 0\}$

Zpět

Inverzní matice

- **Příklad 10.3.1** Pomocí inverzní matice řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcr} 4x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 7, \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 7, \\ x_1 & - & 4x_2 & - & 4x_3 & = & 7. \end{array}$$

- **Příklad 10.3.2** Pomocí inverzní matice řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & = & -4, \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 6, \\ x_1 & & & + & x_3 & = & 5. \end{array}$$

  Výsledek znázorněte graficky.

Zpět

Příklad 10.3.1

Pomocí inverzní matice řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcr} 4x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 7, \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 7, \\ x_1 & - & 4x_2 & - & 4x_3 & = & 7. \end{array}$$

? Zpět

Příklad 10.3.1

Pomocí inverzní matice řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcr} 4x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 7, \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 7, \\ x_1 & - & 4x_2 & - & 4x_3 & = & 7. \end{array}$$

Výsledek:

$x_1 = 3,\ x_2 = -2,\ x_3 = 1\,.$

Zpět

Příklad 10.3.1

Pomocí inverzní matice řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcr} 4x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 7, \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 7, \\ x_1 & - & 4x_2 & - & 4x_3 & = & 7. \end{array}$$

Návod:

Nejprve ověříme, že matice soustavy je regulární, pak vypočteme inverzní matici, kterou zprava vynásobíme vektorem pravé strany.

Zpět

Příklad 10.3.1

Pomocí inverzní matice řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcr} 4x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 7, \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 7, \\ x_1 & - & 4x_2 & - & 4x_3 & = & 7. \end{array}$$

Řešení:

Matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -4 & -4 \end{pmatrix}$ je regulární, protože (determinant je počítán rozvojem podle prvního sloupce)

$$\det \mathbf{A} = 4 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -4 & -4 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -4 & -4 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 4(-4+12) - 2(-12+4) + 1(9-1) = 56 \neq 0.$$

Nyní vypočteme inverzní matici pomocí Gaussovy-Jordanovy metody:

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 4 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim^1 \left(\begin{array}{rrr|rrr} 4 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 19 & 17 & 1 & 0 & -4 \end{array}\right) \sim^2 \left(\begin{array}{rrr|rrr} 4 & 0 & 16 & -2 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 112 & -18 & 38 & -4 \end{array}\right) \dots$$

Další

Příklad 10.3.1

Pomocí inverzní matice řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcl} 4x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 7, \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 7, \\ x_1 & - & 4x_2 & - & 4x_3 & = & 7. \end{array}$$

Řešení:

$$\cdots \sim^3 \left(\begin{array}{rrr|rrr} -28 & 0 & 0 & -4 & -4 & -4 \\ 0 & 112 & 0 & 22 & -34 & -20 \\ 0 & 0 & 112 & -18 & 38 & -4 \end{array}\right) \sim^4 \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{11}{56} & -\frac{17}{56} & -\frac{5}{28} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{9}{56} & \frac{19}{56} & -\frac{1}{28} \end{array}\right).$$

Ekvivalentní úpravy:
$\sim^1$: (-2)krát 2.řádek + 1. řádek, (-4)krát 3. řádek + 1. řádek; $\sim^2$: 1.řádek + (-3)krát 2. řádek, 3. řádek + (-19)krát 2. řádek;
$\sim^3$: (-7)krát 1.řádek + 3. řádek, 112krát 2. řádek + 5krát 3. řádek; $\sim^4$: vydělení každého řádku diagonálním prvkem.
Tedy

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{56}\begin{pmatrix} 8 & 8 & 8 \\ 11 & -17 & -10 \\ -9 & 19 & -2 \end{pmatrix} \qquad \text{a konečně}$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} = \frac{1}{56}\begin{pmatrix} 8 & 8 & 8 \\ 11 & -17 & -10 \\ -9 & 19 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{56}\begin{pmatrix} 56+56+56 \\ 77-119-70 \\ -63+133-14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Zpět

Příklad 10.3.1

Pomocí inverzní matice řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcl} 4x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 7, \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 7, \\ x_1 & - & 4x_2 & - & 4x_3 & = & 7. \end{array}$$

Maple:

```
> with(linalg):
> A := array( [[4,3,1],[2,1,3],[1,-4,-4]] );
```

$$A := \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -4 & -4 \end{bmatrix}$$

```
> det(A);
```

$$56$$

```
> B:=inverse(A);
```

$$B := \begin{bmatrix} \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{11}{56} & \frac{-17}{56} & \frac{-5}{28} \\ \frac{-9}{56} & \frac{19}{56} & \frac{-1}{28} \end{bmatrix}$$

Další

Příklad 10.3.1

Pomocí inverzní matice řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcr} 4x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 7, \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 7, \\ x_1 & - & 4x_2 & - & 4x_3 & = & 7. \end{array}$$

Maple:

```
> b:=vector([[7],[7],[7]]);
```

$$b := [[7], [7], [7]]$$

```
> x:=B&*b;
```

$$x := B \,\&{*}\, b$$

```
> evalm(x);
```

$$\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Zpět

Příklad 10.3.1

Pomocí inverzní matice řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcr} 4x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 7, \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 7, \\ x_1 & - & 4x_2 & - & 4x_3 & = & 7. \end{array}$$

Mathematica:

$\boldsymbol{A = \{\{4,3,1\},\{2,1,3\},\{1,-4,-4\}\};}$
$\boldsymbol{b = \{7,7,7\};}$

A1 = Inverse[*A*]

$\left\{\left\{\frac{1}{7},\frac{1}{7},\frac{1}{7}\right\},\left\{\frac{11}{56},-\frac{17}{56},-\frac{5}{28}\right\},\left\{-\frac{9}{56},\frac{19}{56},-\frac{1}{28}\right\}\right\}$

Inverzní matice je tedy tvaru:

A1//MatrixForm

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{11}{56} & -\frac{17}{56} & -\frac{5}{28} \\ -\frac{9}{56} & \frac{19}{56} & -\frac{1}{28} \end{pmatrix}$$

Řešení:

$\boldsymbol{x = \mathbf{A1}.b}$

$\{3,-2,1\}$

Zpět

Příklad 10.3.2

Pomocí inverzní matice řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & = & -4, \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 6, \\ x_1 & & & + & x_3 & = & 5. \end{array}$$

Výsledek znázorněte graficky.

? Zpět

Příklad 10.3.2

Pomocí inverzní matice řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & = & -4, \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 6, \\ x_1 & & & + & x_3 & = & 5. \end{array}$$

Výsledek znázorněte graficky.

Výsledek:

$x_1 = 2,\ x_2 = 1,\ x_3 = 3$. Graficky úloha představuje průnik tří rovin. V tomto případě je průnikem bod - viz Maple.

Zpět

Příklad 10.3.2

Pomocí inverzní matice řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & = & -4, \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 6, \\ x_1 & & & + & x_3 & = & 5. \end{array}$$

Výsledek znázorněte graficky.

Návod:

Nejprve ověříme, že matice soustavy je regulární, pak vypočteme inverzní matici, kterou zprava vynásobíme vektorem pravé strany.

Zpět

Příklad 10.3.2

Pomocí inverzní matice řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & = & -4, \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 6, \\ x_1 & & & + & x_3 & = & 5. \end{array}$$

Výsledek znázorněte graficky.

Řešení:

Matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ je regulární ($\det A \neq 0$).

$$\det \mathbf{A} = 1 \cdot (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1(1+3) + 1(2-1) = 5 \neq 0.$$

Nyní vypočteme inverzní matici pomocí Gaussovy-Jordanovy metody:

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 2 & 1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim^1 \left(\begin{array}{rrr|rrr} 2 & 1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right) \sim^2 \left(\begin{array}{rrr|rrr} 2 & 0 & -8 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -10 & 2 & -2 & -2 \end{array}\right)$$

$$\ldots \sim^3 \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & -4 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim^4 \left(\begin{array}{rrr|rrr} 5 & 0 & 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim^5 \ldots$$

Další

Příklad 10.3.2

Pomocí inverzní matice řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & = & -4, \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 6, \\ x_1 & & & + & x_3 & = & 5. \end{array}$$

Výsledek znázorněte graficky.

Řešení:

$$\cdots \sim^5 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{4}{5} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{array}\right).$$

Ekvivalentní úpravy:
$\sim^1$: (-2)krát 2.řádek + 1. řádek, (-2)krát 3. řádek + 1. řádek;
$\sim^2$: 1.řádek + 2. řádek, 3. řádek + 2. řádek;
$\sim^3$: první a třetí řádek vydělíme 2;
$\sim^4$: 5krát 1.řádek + (-4)krát 3. řádek, 2. řádek - 3. řádek;
$\sim^5$: vydělení každého řádku diagonálním prvkem.
Tedy

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 5 & -5 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{a konečně}$$

Další

Příklad 10.3.2

Pomocí inverzní matice řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & = & -4, \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 6, \\ x_1 & & & + & x_3 & = & 5. \end{array}$$

Výsledek znázorněte graficky.

Řešení:

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 5 & -5 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -4-6+20 \\ 0+30-25 \\ 4+6+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Graficky úloha představuje průnik tří rovin. V tomto případě je průnikem bod. Grafické řešení - viz. Maple.

Zpět

Příklad 10.3.2

Pomocí inverzní matice řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & = & -4, \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 6, \\ x_1 & & & + & x_3 & = & 5. \end{array}$$

Výsledek znázorněte graficky.

Maple:

```
> with(linalg): with(plots):
> A := array( [[2,1,-3],[1,1,1],[1,0,1]] );
```

$$A := \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> det(A);
```

$$5$$

```
> B:=inverse(A);
```

$$B := \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{-1}{5} & \frac{4}{5} \\ 0 & 1 & -1 \\ \frac{-1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

Další

Příklad 10.3.2

Pomocí inverzní matice řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & = & -4, \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 6, \\ x_1 & & & + & x_3 & = & 5. \end{array}$$

Výsledek znázorněte graficky.

Maple:

```
> b:=array([[-4],[6],[5]]);
```

$$b := \begin{bmatrix} -4 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix}$$

```
> x:=evalm(B&*b);
```

$$x := \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Graficky představuje řešení soustavy tří rovnic o třech neznámých hledání průsečnice tří rovin, které jsou zadány obecnými rovnicemi odpovídajícími řádkům rozšířené matice soustavy. Protože soustava má právě jedno řešení, mají tyto tři roviny jeden společný bod.

```
> implicitplot3d({2*x+y-3*z=-4,x+y+z=6,x+z=5},x=1..3,y=0..2,z=2..4,
axes=boxed);
```

Další

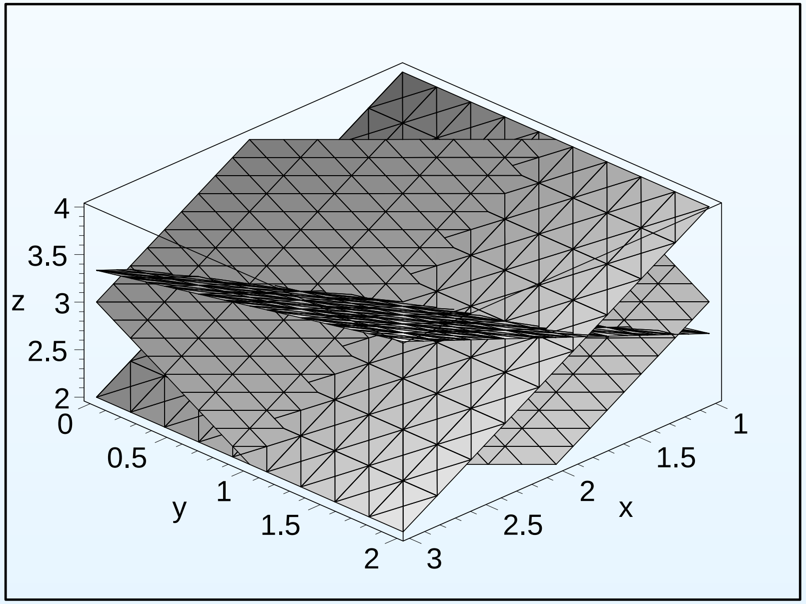
Příklad 10.3.2

Pomocí inverzní matice řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & = & -4, \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 6, \\ x_1 & & & + & x_3 & = & 5. \end{array}$$

Výsledek znázorněte graficky.

Maple:



Zpět

Příklad 10.3.2

Pomocí inverzní matice řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & = & -4, \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 6, \\ x_1 & & & + & x_3 & = & 5. \end{array}$$

Výsledek znázorněte graficky.

Mathematica:

$\boldsymbol{A = \{\{2, 1, -3\}, \{1, 1, 1\}, \{1, 0, 1\}\};}$
$\boldsymbol{b = \{4, 6, 5\};}$

A1 = Inverse[A]

$\left\{\left\{\frac{1}{5}, -\frac{1}{5}, \frac{4}{5}\right\}, \{0, 1, -1\}, \left\{-\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right\}\right\}$

Inverzní matice je tedy tvaru:

A1//MatrixForm

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{4}{5} \\ 0 & 1 & -1 \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

Inverzní matice pomocí Gaussovy-Jordánovy eliminace:

$\boldsymbol{\mathrm{AE} = \{\{2, 1, -3, 1, 0, 0\}, \{1, 1, 1, 0, 1, 0\},}$
$\boldsymbol{\{1, 0, 1, 0, 0, 1\}\};}$

Další

Příklad 10.3.2

Pomocí inverzní matice řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & = & -4, \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 6, \\ x_1 & & & + & x_3 & = & 5. \end{array}$$

Výsledek znázorněte graficky.

Mathematica:

RowReduce[AE]//MatrixForm

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{4}{5} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{x} = \mathbf{A1}.\boldsymbol{b}$

$\left\{\frac{18}{5}, 1, \frac{7}{5}\right\}$

Graficky představuje řešení soustavy tří rovnic o třech neznámých hledání průsečnice tří rovin, které jsou zadány obecnými rovnicemi odpovídajícími řádkům rozšířené matice soustavy. Protože soustava má právě jedno řešení, mají tyto tři roviny jeden společný bod.

r1 = 4 − 2x1 − x2;
r2 = 6 − x2 − x1;
r3 = 5 − x1;

Další

Příklad 10.3.2

Pomocí inverzní matice řešte soustavu rovnic

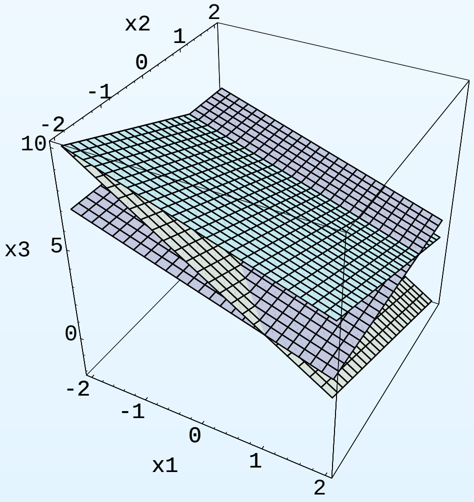
$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & = & -4, \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 6, \\ x_1 & & & + & x_3 & = & 5. \end{array}$$

Výsledek znázorněte graficky.

Mathematica:

g1 = Plot3D[r1, {x1, −2, 2}, {x2, −2, 2},DisplayFunction → Identity];
g2 = Plot3D[r2, {x1, −2, 2}, {x2, −2, 2},DisplayFunction → Identity];
g3 = Plot3D[r3, {x1, −2, 2}, {x2, −2, 2},DisplayFunction → Identity];

Show[{g1, g2, g3}, DisplayFunction → $DisplayFunction,
BoxRatios → {1, 1, 1}, AxesLabel → {x1, x2, x3}];



Zpět

Cramerovo pravidlo

- **Příklad 10.4.1** Cramerovým pravidlem řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcr} 5x_1 & + & 6x_2 & = & -3, \\ 4x_1 & - & 3x_2 & = & 1. \end{array}$$

- **Příklad 10.4.2** Pomocí Cramerova pravidla řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcr} 5x_1 & - & 6x_2 & + & 4x_3 & = & 3, \\ 3x_1 & & & + & 2x_3 & = & 5, \\ 4x_1 & - & 5x_2 & + & 2x_3 & = & 1. \end{array}$$

Zpět

Příklad 10.4.1

Cramerovým pravidlem řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcr} 5x_1 & + & 6x_2 & = & -3, \\ 4x_1 & - & 3x_2 & = & 1. \end{array}$$

? Zpět

Příklad 10.4.1

Cramerovým pravidlem řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcr} 5x_1 & + & 6x_2 & = & -3, \\ 4x_1 & - & 3x_2 & = & 1. \end{array}$$

Výsledek:

$x_1 = -\dfrac{1}{13},\ x_2 = -\dfrac{17}{39}.$

Zpět

Příklad 10.4.1

Cramerovým pravidlem řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcr} 5x_1 & + & 6x_2 & = & -3, \\ 4x_1 & - & 3x_2 & = & 1. \end{array}$$

Návod:

Vypočteme příslušné determinanty D, D_1 a D_2 a jednotlivé složky řešení

$$x_1 = \frac{\mathrm{D}_1}{\mathrm{D}}, \; x_2 = \frac{\mathrm{D}_2}{\mathrm{D}}.$$

Zpět

Příklad 10.4.1

Cramerovým pravidlem řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcr} 5x_1 & + & 6x_2 & = & -3, \\ 4x_1 & - & 3x_2 & = & 1. \end{array}$$

Řešení:

$$\mathrm{D} = \det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -15 - 24 = -39,$$

$$\mathrm{D}_1 = \det \mathbf{A}_1 = \begin{vmatrix} -3 & 6 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 9 - 6 = 3, \qquad \mathrm{D}_2 = \det \mathbf{A}_2 = \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 5 + 12 = 17.$$

$$x_1 = \frac{\mathrm{D}_1}{\mathrm{D}} = -\frac{3}{39} = -\frac{1}{13}, \quad x_2 = \frac{\mathrm{D}_2}{\mathrm{D}} = -\frac{17}{39}.$$

Zpět

Příklad 10.4.1

Cramerovým pravidlem řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcr} 5x_1 & + & 6x_2 & = & -3, \\ 4x_1 & - & 3x_2 & = & 1. \end{array}$$

Maple:

```
> with(linalg):
> x1:=det(array([[-3,6],[1,-3]]))/det(array( [[5,6],[4,-3]] ));
```

$$x1 := \frac{-1}{13}$$

```
> x2:=det(array([[5,-3],[4,1]]))/det(array( [[5,6],[4,-3]] ));
```

$$x2 := \frac{-17}{39}$$

Zpět

Příklad 10.4.1

Cramerovým pravidlem řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcr} 5x_1 & + & 6x_2 & = & -3, \\ 4x_1 & - & 3x_2 & = & 1. \end{array}$$

Mathematica:

$\boldsymbol{A = \{\{5,6\},\{4,-3\}\}}$

$\{\{5,6\},\{4,-3\}\}$

$\mathbf{A1 = \{\{-3,6\},\{1,-3\}\}}$

$\{\{-3,6\},\{1,-3\}\}$

$\mathbf{A2 = \{\{5,-3\},\{4,1\}\}}$

$\{\{5,-3\},\{4,1\}\}$

x1 = Det[A1]/Det[A1]

1

x2 = Det[A2]/Det[A1]

$\frac{17}{3}$

$\boldsymbol{x} = \mathbf{\{x1, x2\}}$

$\left\{1, \frac{17}{3}\right\}$

Zpět

Příklad 10.4.2

Pomocí Cramerova pravidla řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcr} 5x_1 & - & 6x_2 & + & 4x_3 & = & 3, \\ 3x_1 & & & + & 2x_3 & = & 5, \\ 4x_1 & - & 5x_2 & + & 2x_3 & = & 1. \end{array}$$

? Zpět

Příklad 10.4.2

Pomocí Cramerova pravidla řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{ccccccc} 5x_1 & - & 6x_2 & + & 4x_3 & = & 3, \\ 3x_1 & & & + & 2x_3 & = & 5, \\ 4x_1 & - & 5x_2 & + & 2x_3 & = & 1. \end{array}$$

Výsledek:

$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}} = (1, 1, 1)^{\mathrm{T}}.$

Zpět

Příklad 10.4.2

Pomocí Cramerova pravidla řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcr} 5x_1 & - & 6x_2 & + & 4x_3 & = & 3, \\ 3x_1 & & & + & 2x_3 & = & 5, \\ 4x_1 & - & 5x_2 & + & 2x_3 & = & 1. \end{array}$$

Návod:

Vypočteme příslušné determinanty D, D_1, D_2 a D_3 a jednotlivé složky řešení

$$x_1 = \frac{\mathrm{D}_1}{\mathrm{D}},\ x_2 = \frac{\mathrm{D}_2}{\mathrm{D}},\ x_3 = \frac{\mathrm{D}_3}{\mathrm{D}}.$$

Zpět

Příklad 10.4.2

Pomocí Cramerova pravidla řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcl} 5x_1 & - & 6x_2 & + & 4x_3 & = & 3, \\ 3x_1 & & & + & 2x_3 & = & 5, \\ 4x_1 & - & 5x_2 & + & 2x_3 & = & 1. \end{array}$$

Řešení:

Vypočteme determinanty D (rozvojem podle 2. řádku), D_1 (rozvojem podle 2. řádku), D_2 (rozvojem podle 1. řádku) a D_3 (rozvojem podle 2. řádku):

$$D = \det \begin{vmatrix} 5 & -6 & 4 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -5 & 2 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} -6 & 4 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 5 & -6 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = -3(-12+20)-2(-25+24) = -22.$$

$$D_1 = \det \begin{vmatrix} 3 & -6 & 4 \\ 5 & 0 & 2 \\ 1 & -5 & 2 \end{vmatrix} = -5 \begin{vmatrix} -6 & 4 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = -5(-12+20)-2(-15+6) = -22.$$

$$D_2 = \det \begin{vmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 5\cdot 8-3\cdot(-2)+4\cdot(-17) = -22.$$

Další

Příklad 10.4.2

Pomocí Cramerova pravidla řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{ccccccc} 5x_1 & - & 6x_2 & + & 4x_3 & = & 3, \\ 3x_1 & & & + & 2x_3 & = & 5, \\ 4x_1 & - & 5x_2 & + & 2x_3 & = & 1. \end{array}$$

Řešení:

$$\mathrm{D}_3 = \det \begin{vmatrix} 5 & -6 & 3 \\ 3 & 0 & 5 \\ 4 & -5 & 1 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} -6 & 3 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 5 & -6 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = -3(-6+15)-5(-25+24) = -22.$$

$$x_1 = \frac{\mathrm{D}_1}{\mathrm{D}} = 1, \quad x_2 = \frac{\mathrm{D}_2}{\mathrm{D}} = 1, \quad x_3 = \frac{\mathrm{D}_3}{\mathrm{D}} = 1.$$

Zpět

Příklad 10.4.2

Pomocí Cramerova pravidla řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcl} 5x_1 & - & 6x_2 & + & 4x_3 & = & 3, \\ 3x_1 & & & + & 2x_3 & = & 5, \\ 4x_1 & - & 5x_2 & + & 2x_3 & = & 1. \end{array}$$

Maple:

```
> with(linalg):
> A := array( [[5,-6,4],[3,0,2],[4,-5,2]] );
```

$$A := \begin{bmatrix} 5 & -6 & 4 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -5 & 2 \end{bmatrix}$$

```
> A1 := array( [[3,-6,4],[5,0,2],[1,-5,2]] );
```

$$A1 := \begin{bmatrix} 3 & -6 & 4 \\ 5 & 0 & 2 \\ 1 & -5 & 2 \end{bmatrix}$$

```
> A2 := array( [[5,3,4],[3,5,2],[4,1,2]] );
```

$$A2 := \begin{bmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Další

Příklad 10.4.2

Pomocí Cramerova pravidla řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcr} 5x_1 & - & 6x_2 & + & 4x_3 & = & 3, \\ 3x_1 & & & + & 2x_3 & = & 5, \\ 4x_1 & - & 5x_2 & + & 2x_3 & = & 1. \end{array}$$

Maple:

```
> A3 := array( [[5,-6,3],[3,0,5],[4,-5,1]] );
```

$$A3 := \begin{bmatrix} 5 & -6 & 3 \\ 3 & 0 & 5 \\ 4 & -5 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> x1:=det(A1)/det(A); x2:=det(A2)/det(A); x3:=det(A3)/det(A);
```

$$x1 := 1$$

$$x2 := 1$$

$$x3 := 1$$

Zpět

Příklad 10.4.2

Pomocí Cramerova pravidla řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcl} 5x_1 & - & 6x_2 & + & 4x_3 & = & 3, \\ 3x_1 & & & + & 2x_3 & = & 5, \\ 4x_1 & - & 5x_2 & + & 2x_3 & = & 1. \end{array}$$

Mathematica:

```
A = {{5, -6, 4}, {3, 0, 2}, {4, -5, 2}}
{{5, -6, 4}, {3, 0, 2}, {4, -5, 2}}
A1 = {{3, -6, 4}, {5, 0, 2}, {1, -5, 2}}
{{3, -6, 4}, {5, 0, 2}, {1, -5, 2}}
A2 = {{5, 3, 4}, {3, 5, 2}, {4, 1, 2}}
{{5, 3, 4}, {3, 5, 2}, {4, 1, 2}}
A3 = {{5, -6, 3}, {3, 0, 5}, {4, -5, 1}}
{{5, -6, 3}, {3, 0, 5}, {4, -5, 1}}
x1 = Det[A1]/Det[A1];
x2 = Det[A2]/Det[A1];
x3 = Det[A3]/Det[A1];
x = {x1, x2, x3}
{1, 1, 1}
```

Zpět

Geometrie v $\mathbb{R}^n$ zvláště v $\mathbb{R}^3$

Zpět

Euklidovský prostor $\mathbb{R}^n$

- **Příklad 11.1.1** Určete vektor $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = B - A$ s počátečním bodem $A = (2, 3, 0)$ a koncovým bodem $B = (9, 9, 1)$.
- **Příklad 11.1.2** Určete vzdálenost bodů $A = (2, 3, 0)$ a $B = (9, 9, 1)$.

Zpět

Příklad 11.1.1

Určete vektor $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = B - A$ s počátečním bodem $A = (2, 3, 0)$ a koncovým bodem $B = (9, 9, 1)$.

Zpět

Příklad 11.1.1

Určete vektor $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = B - A$ s počátečním bodem $A = (2, 3, 0)$ a koncovým bodem $B = (9, 9, 1)$.

Výsledek:

$\vec{v} = (7, 6, 1)$.

Zpět

Příklad 11.1.1

Určete vektor $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = B - A$ s počátečním bodem $A = (2, 3, 0)$ a koncovým bodem $B = (9, 9, 1)$.

Řešení:

$\vec{v} = \overrightarrow{AB} = B - A = (9, 9, 1) - (2, 3, 0) = (7, 6, 1)$.

Zpět

Příklad 11.1.1

Určete vektor $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = B - A$ s počátečním bodem $A = (2, 3, 0)$ a koncovým bodem $B = (9, 9, 1)$.

Maple:

```
> a:=<2,3,0>;
```

$$a := \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

```
> b:=<9,9,1>;
```

$$b := \begin{bmatrix} 9 \\ 9 \\ 1 \end{bmatrix}$$

```
> v:=b-a;
```

$$v := \begin{bmatrix} 7 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Zpět

Příklad 11.1.1

Určete vektor $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = B - A$ s počátečním bodem $A = (2, 3, 0)$ a koncovým bodem $B = (9, 9, 1)$.

Mathematica:

$\boldsymbol{a = \{2, 3, 0\}}$

$\{2, 3, 0\}$

$\boldsymbol{b = \{9, 9, 1\}}$

$\{9, 9, 1\}$

$\boldsymbol{v = b - a}$

$\{7, 6, 1\}$

Zpět

Příklad 11.1.2

Určete vzdálenost bodů $A = (2, 3, 0)$ a $B = (9, 9, 1)$.

Zpět

Příklad 11.1.2

Určete vzdálenost bodů $A = (2, 3, 0)$ a $B = (9, 9, 1)$.

Výsledek:

Vzdálenost bodů A a B je $\rho(A, B) = \sqrt{86} \doteq 9{,}27$.

Zpět

Příklad 11.1.2

Určete vzdálenost bodů $A = (2, 3, 0)$ a $B = (9, 9, 1)$.

Řešení:

$\rho(A, B) = \sqrt{(9-2)^2 + (9-3)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{86} \doteq 9{,}27.$

Zpět

Příklad 11.1.2

Určete vzdálenost bodů $A = (2, 3, 0)$ a $B = (9, 9, 1)$.

Maple:

```
> with(LinearAlgebra):
> a:=<2,3,0>;
```

$$a := \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

```
> b:=<9,9,1>;
```

$$b := \begin{bmatrix} 9 \\ 9 \\ 1 \end{bmatrix}$$

```
> v:=b-a;
```

$$v := \begin{bmatrix} 7 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}$$

```
> r:=Norm(v,2);
```

$$r := \sqrt{86}$$

```
> evalf(r);
```

$$9.273618495$$

Zpět

Příklad 11.1.2

Určete vzdálenost bodů $A = (2, 3, 0)$ a $B = (9, 9, 1)$.

Mathematica:

$\boldsymbol{a = \{2, 3, 0\}}$

$\{2, 3, 0\}$

$\boldsymbol{b = \{9, 9, 1\}}$

$\{9, 9, 1\}$

$\boldsymbol{v = b - a}$

$\{7, 6, 1\}$

$\boldsymbol{r = \mathbf{Norm}[v]}$

$\sqrt{86}$

$\boldsymbol{N[r]}$

9.27362

Zpět

Norma, úhel vektorů, skalární a vektorový součin

- Příklad 11.2.1 Spočtěte skalární součin vektorů $\vec{u} = (3, 2, 4)$ a $\vec{v} = (1, 2, 5)$.
- Příklad 11.2.2 Spočtěte normu vektoru $\vec{v} = (2, 3, 4)$.
- Příklad 11.2.3 Spočtěte úhel vektorů $\vec{u} = (3, 2, 4)$ a $\vec{v} = (1, 2, 5)$.
- Příklad 12.2.4 Najděte jednotkový vektor příslušný k vektoru $\vec{v} = (6, 0, 8)$.
- Příklad 12.2.5 Najděte pravoúhlou složku vektoru $\vec{u} = (1, 1, 5)$ ve směru vektoru $\vec{v} = (6, 0, 8)$.
- Příklad 12.2.6 Spočtěte vektorový součin vektorů $\vec{u} = (3, 2, 4)$ a $\vec{v} = (1, 2, 5)$.
- Příklad 12.2.7 Spočtěte smíšený součin vektorů $\vec{a} = (7, 4, 5)$, $\vec{b} = (2, 8, 3)$ a $\vec{c} = (1, 9, 6)$.

Zpět

Příklad 11.2.1

Spočtěte skalární součin vektorů $\vec{u} = (3, 2, 4)$ a $\vec{v} = (1, 2, 5)$.

Zpět

Příklad 11.2.1

Spočtěte skalární součin vektorů $\vec{u} = (3, 2, 4)$ a $\vec{v} = (1, 2, 5)$.

Výsledek:

Skalární součin vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$ je $\vec{u} \cdot \vec{v} = 27$.

Zpět

Příklad 11.2.1

Spočtěte skalární součin vektorů $\vec{u} = (3, 2, 4)$ a $\vec{v} = (1, 2, 5)$.

Řešení:

$\vec{u} \cdot \vec{v} = (3, 2, 4) \cdot (1, 2, 5) = 3 \times 1 + 2 \times 2 + 4 \times 5 = 27.$

Zpět

Příklad 11.2.1

Spočtěte skalární součin vektorů $\vec{u} = (3, 2, 4)$ a $\vec{v} = (1, 2, 5)$.

Maple:

```
> with(LinearAlgebra):
> u:=<3,2,4>;
```

$$u := \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

```
> v:=<1,2,5>;
```

$$v := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

```
> u.v;
```

$$27$$

Zpět

Příklad 11.2.1

Spočtěte skalární součin vektorů $\vec{u} = (3, 2, 4)$ a $\vec{v} = (1, 2, 5)$.

Mathematica:

$\boldsymbol{u = \{3, 2, 4\}}$

$\{3, 2, 4\}$

$\boldsymbol{v = \{1, 2, 5\}}$

$\{1, 2, 5\}$

$\boldsymbol{u.v}$

27

Zpět

Příklad 11.2.2

Spočtěte normu vektoru $\vec{v} = (2, 3, 4)$.

Zpět

Příklad 11.2.2

Spočtěte normu vektoru $\vec{v} = (2, 3, 4)$.

Výsledek:

Norma vektoru $\vec{v}$ je $||\vec{v}|| = \sqrt{29} \doteq 5{,}385$.

Zpět

Příklad 11.2.2

Spočtěte normu vektoru $\vec{v} = (2, 3, 4)$.

Řešení:

$||\vec{v}|| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{29}$.

Zpět

Příklad 11.2.2

Spočtěte normu vektoru $\vec{v} = (2, 3, 4)$.

Maple:

```
> with(LinearAlgebra):
> v:=<2,3,4>;
```

$$v := \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

```
> r:=Norm(v,2);
```

$$r := \sqrt{29}$$

```
> evalf(r);
```

$$5.385164807$$

Zpět

Příklad 11.2.2

Spočtěte normu vektoru $\vec{v} = (2, 3, 4)$.

Mathematica:

$\boldsymbol{v = \{2, 3, 4\}}$

$\{2, 3, 4\}$

$\boldsymbol{r = \mathbf{Norm}[v]}$

$\sqrt{29}$

$\boldsymbol{N[r]}$

5.38516

Zpět

Příklad 11.2.3

Spočtěte úhel vektorů $\vec{u} = (3, 2, 4)$ a $\vec{v} = (1, 2, 5)$.

Zpět

Příklad 11.2.3

Spočtěte úhel vektorů $\vec{u} = (3, 2, 4)$ a $\vec{v} = (1, 2, 5)$.

Výsledek:

Úhel vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$ je $\varphi \doteq 24^\circ$.

Zpět

Příklad 11.2.3

Spočtěte úhel vektorů $\vec{u} = (3, 2, 4)$ a $\vec{v} = (1, 2, 5)$.

Řešení:

$$\varphi = \arccos \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{||\vec{u}||\ ||\vec{v}||} = \arccos \frac{3 \times 1 + 2 \times 2 + 4 \times 5}{\sqrt{3^2 + 2^2 + 4^2}\ \sqrt{1^2 + 2^2 + 5^2}} =$$

$$= \arccos(9 \sqrt{\frac{3}{290}}) \doteq 0{,}414 \text{ rad } \doteq 24^\circ.$$

Zpět

Příklad 11.2.3

Spočtěte úhel vektorů $\vec{u} = (3, 2, 4)$ a $\vec{v} = (1, 2, 5)$.

Maple:

```
> with(LinearAlgebra):
> u:=<3,2,4>;
```

$$u := \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

```
> v:=<1,2,5>;
```

$$v := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

```
> uhel:=arccos(u.v/( Norm(u,2)*Norm(v,2) ));
```

$$uhel := \arccos(\frac{9\sqrt{29}\sqrt{30}}{290})$$

```
> evalf(uhel);
```

$$0.4143312975$$

Zpět

Příklad 11.2.3

Spočtěte úhel vektorů $\vec{u} = (3, 2, 4)$ a $\vec{v} = (1, 2, 5)$.

Mathematica:

$\boldsymbol{u} = \{\mathbf{3, 2, 4}\}$

$\{3, 2, 4\}$

$\boldsymbol{v} = \{\mathbf{1, 2, 5}\}$

$\{1, 2, 5\}$

uhel = ArcCos[*u*.*v*/(Norm[*u*] ∗ Norm[*v*])]

$\mathrm{ArcCos}[9\sqrt{\frac{3}{290}}]$

***N*[uhel]**

0.414331

***N*[uhel ∗ 180/Pi]**

23.7394

Zpět

Příklad 11.2.4

Najděte jednotkový vektor příslušný k vektoru $\vec{v} = (6, 0, 8)$.

Zpět

Příklad 11.2.4

Najděte jednotkový vektor příslušný k vektoru $\vec{v} = (6, 0, 8)$.

Výsledek:

Jednotkový vektor příslušný k vektoru $\vec{v} = (6, 0, 8)$ je vektor $\vec{v_0} = (3/5, 0, 4/5)$.

Zpět

Příklad 11.2.4

Najděte jednotkový vektor příslušný k vektoru $\vec{v} = (6, 0, 8)$.

Řešení:

Příslušný jednotkový vektor je

$$\vec{v_0} = \frac{1}{||\vec{v}||}\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{6^2 + 0^2 + 8^2}}(6, 0, 8) = \frac{1}{10}(6, 0, 8) = (3/5, 0, 4/5).$$

Zpět

Příklad 11.2.4

Najděte jednotkový vektor příslušný k vektoru $\vec{v} = (6, 0, 8)$.

Maple:

```
> with(LinearAlgebra):
> v:=<6,0,8>;
```

$$v := \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix}$$

```
> v0:=v/Norm(v,2);
```

$$v0 := \begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ 0 \\ \frac{4}{5} \end{bmatrix}$$

Zpět

Příklad 11.2.4

Najděte jednotkový vektor příslušný k vektoru $\vec{v} = (6, 0, 8)$.

Mathematica:

$\boldsymbol{v = \{6, 0, 8\}}$

$\{6, 0, 8\}$

$\mathbf{v0} = \boldsymbol{v}/\mathbf{Norm}[\boldsymbol{v}]$

$\{\frac{3}{5}, 0, \frac{4}{5}\}$

Zpět

Příklad 11.2.5

Najděte pravoúhlou složku vektoru $\vec{u} = (1, 1, 5)$ ve směru vektoru $\vec{v} = (6, 0, 8)$.

Zpět

Příklad 11.2.5

Najděte pravoúhlou složku vektoru $\vec{u} = (1, 1, 5)$ ve směru vektoru $\vec{v} = (6, 0, 8)$.

Výsledek:

Pravoúhlá složka vektoru $\vec{u}$ ve směru vektoru $\vec{v}$ je
$\vec{p} = (69/25, 0, 92/25)$.

Zpět

Příklad 11.2.5

Najděte pravoúhlou složku vektoru $\vec{u} = (1, 1, 5)$ ve směru vektoru $\vec{v} = (6, 0, 8)$.

Řešení:

$$\vec{p} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\vec{v} \cdot \vec{v}} \vec{v} = \frac{1 \times 6 + 1 \times 0 + 5 \times 8}{6^2 + 0^2 + 8^2} (6, 0, 8) = (69/25, 0, 92/25).$$

Zpět

Příklad 11.2.5

Najděte pravoúhlou složku vektoru $\vec{u} = (1, 1, 5)$ ve směru vektoru $\vec{v} = (6, 0, 8)$.

Maple:

```
> with(LinearAlgebra):
> u:=<1,1,5>;
```

$$u := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

```
> v:=<6,0,8>;
```

$$v := \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix}$$

```
> p:=u.v/(v.v)*v;
```

$$p := \begin{bmatrix} \frac{69}{25} \\ 0 \\ \frac{92}{25} \end{bmatrix}$$

Zpět

Příklad 11.2.5

Najděte pravoúhlou složku vektoru $\vec{u} = (1, 1, 5)$ ve směru vektoru $\vec{v} = (6, 0, 8)$.

Mathematica:

$\boldsymbol{u = \{1, 1, 5\}}$

$\{1, 1, 5\}$

$\boldsymbol{v = \{6, 0, 8\}}$

$\{6, 0, 8\}$

$\boldsymbol{p = u.v/(v.v) * v}$

$\{\frac{69}{25}, 0, \frac{92}{25}\}$

Zpět

Příklad 11.2.6

Spočtěte vektorový součin vektorů $\vec{u} = (3, 2, 4)$ a $\vec{v} = (1, 2, 5)$.

Zpět

Příklad 11.2.6

Spočtěte vektorový součin vektorů $\vec{u} = (3, 2, 4)$ a $\vec{v} = (1, 2, 5)$.

Výsledek:

Vektorový součin vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$ je $\vec{u} \times \vec{v} = (2, -11, 4)$.

Zpět

Příklad 11.2.6

Spočtěte vektorový součin vektorů $\vec{u} = (3, 2, 4)$ a $\vec{v} = (1, 2, 5)$.

Řešení:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 3 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = (2 \times 5 - 4 \times 2,\ 4 \times 1 - 3 \times 5,\ 3 \times 2 - 2 \times 1) = (2, -11, 4).$$

Zpět

Příklad 11.2.6

Spočtěte vektorový součin vektorů $\vec{u} = (3, 2, 4)$ a $\vec{v} = (1, 2, 5)$.

Maple:

```
> with(LinearAlgebra):
> u:=<3,2,4>;
```

$$u := \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

```
> v:=<1,2,5>;
```

$$v := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

```
> w:=CrossProduct(u,v);
```

$$w := \begin{bmatrix} 2 \\ -11 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Zpět

Příklad 11.2.6

Spočtěte vektorový součin vektorů $\vec{u} = (3, 2, 4)$ a $\vec{v} = (1, 2, 5)$.

Mathematica:

$\boldsymbol{u = \{3, 2, 4\}}$

$\{3, 2, 4\}$

$\boldsymbol{v = \{1, 2, 5\}}$

$\{1, 2, 5\}$

$\boldsymbol{w = \mathbf{Cross}[u, v]}$

$\{2, -11, 4\}$

Zpět

Příklad 11.2.7

Spočtěte smíšený součin vektorů $\vec{a} = (7, 4, 5)$, $\vec{b} = (2, 8, 3)$ a $\vec{c} = (1, 9, 6)$.

Zpět

Příklad 11.2.7

Spočtěte smíšený součin vektorů $\vec{a} = (7, 4, 5)$, $\vec{b} = (2, 8, 3)$ a $\vec{c} = (1, 9, 6)$.

Výsledek:

Smíšený součin vektorů $\vec{a}$, $\vec{b}$ a $\vec{c}$ je 161.

Zpět

Příklad 11.2.7

Spočtěte smíšený součin vektorů $\vec{a} = (7, 4, 5)$, $\vec{b} = (2, 8, 3)$ a $\vec{c} = (1, 9, 6)$.

Řešení:

$$V = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} 7 & 4 & 5 \\ 2 & 8 & 3 \\ 1 & 9 & 6 \end{vmatrix} = 161$$

Zpět

Příklad 11.2.7

Spočtěte smíšený součin vektorů $\vec{a} = (7, 4, 5)$, $\vec{b} = (2, 8, 3)$ a $\vec{c} = (1, 9, 6)$.

Maple:

```
> with(LinearAlgebra):
> a:=<7,4,5>;
```

$$a := \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

```
> b:=<2,8,3>;
```

$$b := \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ 3 \end{bmatrix}$$

```
> c:=<1,9,6>;
```

$$c := \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \\ 6 \end{bmatrix}$$

```
> v:=a.CrossProduct(b,c);
```

$$v := 161$$

Zpět

Příklad 11.2.7

Spočtěte smíšený součin vektorů $\vec{a} = (7, 4, 5)$, $\vec{b} = (2, 8, 3)$ a $\vec{c} = (1, 9, 6)$.

Mathematica:

$\boldsymbol{a = \{7, 4, 5\}}$

$\{7, 4, 5\}$

$\boldsymbol{b = \{2, 8, 3\}}$

$\{2, 8, 3\}$

$\boldsymbol{c = \{1, 9, 6\}}$

$\{1, 9, 6\}$

$\boldsymbol{v = a.\mathbf{Cross}[b, c]}$

161

Můžeme také použít determinant: $\boldsymbol{v = \mathbf{Det}[\{a, b, c\}]}$

161

Zpět

Parametrické rovnice přímky

- **Příklad 11.3.1** Určete parametrické rovnice přímky AB, je-li $A = (1, 2, 4)$, $B = (2, 5, 3)$.
- **Příklad 11.3.2** Určete společné body přímek AB a CD, je-li $A = (3, 4, 3)$ $B = (4, 5, 5)$ $C = (8, 0, 10)$ $D = (12, -2, 16)$.
- **Příklad 11.3.3** Určete vzájemnou polohu přímek AB a CD, je-li $A = (1, 2, 4)$, $B = (2, 5, 3)$, $C = (8, 9, 1)$ a $D = (6, 4, 7)$.
- **Příklad 11.3.4** Určete souřadnice těžiště T trojúhelníku ABC, kde $A = (4, 2, 8)$, $B = (3, 7, 1)$, $C = (8, 9, 6)$.

Zpět

Příklad 11.3.1

Určete parametrické rovnice přímky AB, je-li $A = (1, 2, 4)$, $B = (2, 5, 3)$.

Zpět

Příklad 11.3.1

Určete parametrické rovnice přímky AB, je-li $A = (1, 2, 4)$, $B = (2, 5, 3)$.

Výsledek:

Parametrické rovnice přímky jsou

$$\begin{aligned} x &= 1 + t \\ y &= 2 + 3t \\ z &= 4 - t, \qquad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Zpět

Příklad 11.3.1

Určete parametrické rovnice přímky AB, je-li $A = (1, 2, 4)$, $B = (2, 5, 3)$.

Řešení:

Obecný bod přímky AB je
$X(t) = A + t(B - A) = (1, 2, 4) + t(2 - 1,\ 5 - 2,\ 3 - 4) = (1, 2, 4) + t(1,\ 3,\ -1)$.
Parametrické rovnice přímky jsou

$$
\begin{aligned}
x &= 1 + t \\
y &= 2 + 3t \\
z &= 4 - t, \qquad t \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

Zpět

Příklad 11.3.1

Určete parametrické rovnice přímky AB, je-li $A = (1, 2, 4)$, $B = (2, 5, 3)$.

Maple:

```
> a:=<1,2,4>: b:=<2,5,3>: x:=a+t*(b-a);
```

$$x := \begin{bmatrix} 1+t \\ 2+3\,t \\ 4-t \end{bmatrix}$$

Zpět

Příklad 11.3.1

Určete parametrické rovnice přímky AB, je-li $A = (1, 2, 4)$, $B = (2, 5, 3)$.

Mathematica:

$\boldsymbol{a = \{1, 2, 4\}; b = \{2, 5, 3\}; x = a + t * (b - a)}$

$\{1 + t, 2 + 3t, 4 - t\}$

Zpět

Příklad 11.3.2

Určete společné body přímek AB a CD, je-li $A = (3, 4, 3)$ $B = (4, 5, 5)$ $C = (8, 0, 10)$ $D = (12, -2, 16)$.

Zpět

Příklad 11.3.2

Určete společné body přímek AB a CD, je-li $A = (3, 4, 3)$ $B = (4, 5, 5)$ $C = (8, 0, 10)$ $D = (12, -2, 16)$.

Výsledek:

Přímky mají jediný společný bod $P = (2, 3, 1)$.

Zpět

Příklad 11.3.2

Určete společné body přímek AB a CD, je-li $A = (3, 4, 3)$ $B = (4, 5, 5)$ $C = (8, 0, 10)$ $D = (12, -2, 16)$.

Řešení:

Obecný bod přímky AB je $X(t) = A + t(B - A)$ a obecný bod přímky CD je $Y(s) = C + s(D - C)$. Soustava třech lineárních rovnic o dvou neznámých t, s

$$X(t) = Y(s),$$

tedy

$$\begin{aligned} 3 + t &= 8 + 4s \\ 4 + t &= -2s \\ 3 + 2t &= 10 + 6s \end{aligned}$$

má jediné řešení $t = -1,\ s = -3/2$, takže přímky mají jediný společný bod $P = (2, 3, 1)$.

Zpět

Příklad 11.3.2

Určete společné body přímek AB a CD, je-li $A = (3, 4, 3)$ $B = (4, 5, 5)$ $C = (8, 0, 10)$ $D = (12, -2, 16)$.

Maple:

```
> with(LinearAlgebra):
> a:=<3,4,3>: b:=<4,5,5>: c:=<8,0,10>: d:=<12,-2,16>:
> m:=<b-a|c-d|c-a>:
> r:=LinearSolve(m);
```

$$r := \begin{bmatrix} -1 \\ -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

```
> p:=a+r[1]*(b-a);
```

$$p := \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Zpět

Příklad 11.3.2

Určete společné body přímek AB a CD, je-li $A = (3, 4, 3)$ $B = (4, 5, 5)$ $C = (8, 0, 10)$ $D = (12, -2, 16)$.

Mathematica:

$\boldsymbol{a = \{3, 4, 3\}; b = \{4, 5, 5\}; c = \{8, 0, 10\}; d = \{12, -2, 16\};}$

$\boldsymbol{x = a + t(b - a); y = c + s(d - c);}$

$\boldsymbol{r = \mathrm{Solve}[x == y]}$

$\{\{s \to -\frac{3}{2}, t \to -1\}\}$

$\boldsymbol{p = x/.r}$

$\{\{2, 3, 1\}\}$

$\boldsymbol{p = y/.r}$

$\{\{2, 3, 1\}\}$

Zpět

Příklad 11.3.3

Určete vzájemnou polohu přímek AB a CD, je-li $A = (1, 2, 4)$, $B = (2, 5, 3)$, $C = (8, 9, 1)$ a $D = (6, 4, 7)$.

Zpět

Příklad 11.3.3

Určete vzájemnou polohu přímek AB a CD, je-li $A = (1, 2, 4)$, $B = (2, 5, 3)$, $C = (8, 9, 1)$ a $D = (6, 4, 7)$.

Výsledek:

Přímky jsou mimoběžné, jejich vzdálenost je $v = \sqrt{\frac{600}{31}} \doteq 4{,}4$.

Zpět

Příklad 11.3.3

Určete vzájemnou polohu přímek AB a CD, je-li $A = (1, 2, 4)$, $B = (2, 5, 3)$, $C = (8, 9, 1)$ a $D = (6, 4, 7)$.

Řešení:

Nejdříve zjistíme, mají-li přímky společné body. Obecný bod přímky AB je $X(t) = A + t(B - A)$ a obecný bod přímky CD je $Y(s) = C + s(D - C)$. Soustava

$$X(t) = Y(s)$$

třech lineárních rovnic o dvou neznámých t, s nemá řešení, protože hodnost matice soustavy

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \\ -1 & -6 \end{pmatrix}$$

je 2, zatímco hodnost rozšířené matice

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 3 & 5 & 7 \\ -1 & -6 & -3 \end{pmatrix}$$

je 3, takže přímky nemají žádný společný bod, což je typický případ pro dvě přímky v prostoru dimenze větší než 2.

Další

Příklad 11.3.3

Určete vzájemnou polohu přímek AB a CD, je-li $A = (1, 2, 4)$, $B = (2, 5, 3)$, $C = (8, 9, 1)$ a $D = (6, 4, 7)$.

Řešení:

Mohou být tedy rovnoběžné nebo mimoběžné. To rozhodneme porovnáním jejich směrových vektorů $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{CD}$. Ty tvoří sloupce matice M_1. Její hodnost je 2, tedy směrové vektory jsou lineárně nezávislé a přímky jsou mimoběžné. Vzdálenost přímek určíme jako odmocninu z minima funkce dvou proměnných

$$w(t, s) = (X(t) - Y(s)) \cdot (X(t) - Y(s)).$$

Zpět

Příklad 11.3.3

Určete vzájemnou polohu přímek AB a CD, je-li $A=(1,2,4)$, $B=(2,5,3)$, $C=(8,9,1)$ a $D=(6,4,7)$.

Maple:

```
> with(LinearAlgebra):
> a:=<1,2,4>: b:=<2,5,3>: c:=<8,9,1>: d:=<6,4,7>:
> x:=a+t*(b-a): y:=c+s*(d-c):
> m1:=<b-a|c-d>;
```

$$m1 := \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \\ -1 & -6 \end{bmatrix}$$

```
> m2:=<b-a|c-d|c-a>;
```

$$m2 := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 3 & 5 & 7 \\ -1 & -6 & -3 \end{bmatrix}$$

```
> Rank(m1);
```

$$2$$

```
> Rank(m2);
```

$$3$$

Další

Příklad 11.3.3

Určete vzájemnou polohu přímek AB a CD, je-li $A = (1, 2, 4)$, $B = (2, 5, 3)$, $C = (8, 9, 1)$ a $D = (6, 4, 7)$.

Maple:

```
> w:=minimize((x-y).(x-y));
```

$$w := \frac{600}{31}$$

```
> v:=evalf(sqrt(w));
```

$$v := 4.399413452$$

Zpět

Příklad 11.3.3

Určete vzájemnou polohu přímek AB a CD, je-li $A = (1, 2, 4)$, $B = (2, 5, 3)$, $C = (8, 9, 1)$ a $D = (6, 4, 7)$.

Mathematica:

$\boldsymbol{a = \{1, 2, 4\}; b = \{2, 5, 3\}; c = \{8, 9, 1\}; d = \{6, 4, 7\};}$

$\boldsymbol{x = a + t * (b - a); y = c + s * (d - c);}$

$\mathbf{m1} = \boldsymbol{\{b - a, c - d\}}$

$\{\{1, 3, -1\}, \{2, 5, -6\}\}$

$\mathbf{m2} = \boldsymbol{\{b - a, c - d, c - a\}}$

$\{\{1, 3, -1\}, \{2, 5, -6\}, \{7, 7, -3\}\}$

MatrixRank[m1]

2

MatrixRank[m2]

3

$\boldsymbol{w} = \mathbf{Minimize}[\boldsymbol{(x - y).(x - y), \{t, s\}}]$

$\{\frac{600}{31}, \{t \to \frac{79}{31}, s \to \frac{4}{31}\}\}$

$\boldsymbol{v = N}[\mathbf{Sqrt}[\boldsymbol{w}[[1]]]]$

4.39941

Zpět

Příklad 11.3.4

Určete souřadnice těžiště T trojúhelníku ABC, kde $A = (4, 2, 8)$, $B = (3, 7, 1)$, $C = (8, 9, 6)$.

Zpět

Příklad 11.3.4

Určete souřadnice těžiště T trojúhelníku ABC, kde $A = (4, 2, 8)$, $B = (3, 7, 1)$, $C = (8, 9, 6)$.

Výsledek:

Těžiště má souřadnice $T = (5, 6, 5)$.

Zpět

Příklad 11.3.4

Určete souřadnice těžiště T trojúhelníku ABC, kde $A = (4, 2, 8)$, $B = (3, 7, 1)$, $C = (8, 9, 6)$.

Řešení:

$T = (A + B + C)/3 = ((4 + 3 + 8)/3, (2 + 7 + 9)/3, (8 + 1 + 6)/3) = (5, 6, 5).$

Zpět

Příklad 11.3.4

Určete souřadnice těžiště T trojúhelníku ABC, kde $A = (4, 2, 8)$, $B = (3, 7, 1)$, $C = (8, 9, 6)$.

Maple:

```
> a:=<4,2,8>: b:=<3,7,1>: c:=<8,9,6>:
> t:=(a+b+c)/3;
```

$$t := \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Zpět

Příklad 11.3.4

Určete souřadnice těžiště T trojúhelníku ABC, kde $A = (4, 2, 8)$, $B = (3, 7, 1)$, $C = (8, 9, 6)$.

Mathematica:

$\boldsymbol{a = \{4, 2, 8\}; b = \{3, 7, 1\}; c = \{8, 9, 6\};}$

$\boldsymbol{t = (a + b + c)/3}$

$\{5, 6, 5\}$

Zpět

Parametrické rovnice roviny

- Příklad 11.4.1 Určete parametrické rovnice roviny ABC, je-li $A = (1, 2, 4)$, $B = (2, 5, 3)$, $C = (6, 2, 8)$.
- Příklad 11.4.2 Určete společné body roviny ABC a přímky DE, je-li $A = (4, 2, 7)$, $B = (1, 9, 4)$, $C = (2, 5, 0)$, $D = (3, 6, 8)$, $E = (9, 1, 7)$.

Zpět

Příklad 11.4.1

Určete parametrické rovnice roviny ABC, je-li $A = (1, 2, 4)$, $B = (2, 5, 3)$, $C = (6, 2, 8)$.

Zpět

Příklad 11.4.1

Určete parametrické rovnice roviny ABC, je-li $A = (1, 2, 4)$, $B = (2, 5, 3)$, $C = (6, 2, 8)$.

Výsledek:

Parametrické rovnice roviny ABC jsou

$$\begin{aligned} x &= 1 + t + 5s \\ y &= 2 + 3t \\ z &= 4 - t + 4s, \qquad t, s \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Zpět

Příklad 11.4.1

Určete parametrické rovnice roviny ABC, je-li $A = (1, 2, 4)$, $B = (2, 5, 3)$, $C = (6, 2, 8)$.

Řešení:

Obecný bod roviny ABC je $X(t) = A + t(B - A) + s(C - A) =$
$(1, 2, 4) + t(2-1,\ 5-2,\ 3-4) + s(6-1,\ 2-2,\ 8-4) = (1, 2, 4) + t(1,\ 3,\ -1) + s(5,\ 0,\ 4)$.
Parametrické rovnice roviny ABC jsou

$$\begin{aligned} x &= 1 + t + 5s \\ y &= 2 + 3t \\ z &= 4 - t + 4s, \qquad t, s \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Zpět

Příklad 11.4.1

Určete parametrické rovnice roviny ABC, je-li $A = (1, 2, 4)$, $B = (2, 5, 3)$, $C = (6, 2, 8)$.

Maple:

```
> a:=<1,2,4>: b:=<2,5,3>: c:=<6,2,8>: x:=a+t*(b-a)+s*(c-a);
```

$$x := \begin{bmatrix} 1 + t + 5\,s \\ 2 + 3\,t \\ 4 - t + 4\,s \end{bmatrix}$$

Zpět

Příklad 11.4.1

Určete parametrické rovnice roviny ABC, je-li $A = (1, 2, 4)$, $B = (2, 5, 3)$, $C = (6, 2, 8)$.

Mathematica:

$\boldsymbol{a = \{1, 2, 4\}; b = \{2, 5, 3\}; c = \{6, 2, 8\}; x = a + t * (b - a) + s * (c - a)}$

$\{1 + 5s + t, 2 + 3t, 4 + 4s - t\}$

Zpět

Příklad 11.4.2

Určete společné body roviny ABC a přímky DE, je-li $A = (4, 2, 7)$, $B = (1, 9, 4)$, $C = (2, 5, 0)$, $D = (3, 6, 8)$, $E = (9, 1, 7)$.

Zpět

Příklad 11.4.2

Určete společné body roviny ABC a přímky DE, je-li $A = (4, 2, 7)$, $B = (1, 9, 4)$, $C = (2, 5, 0)$, $D = (3, 6, 8)$, $E = (9, 1, 7)$.

Výsledek:

Rovina a přímka mají jediný společný bod $P = (42/17,\ 219/34,\ 275/34)$.

Zpět

Příklad 11.4.2

Určete společné body roviny ABC a přímky DE, je-li $A = (4, 2, 7)$, $B = (1, 9, 4)$, $C = (2, 5, 0)$, $D = (3, 6, 8)$, $E = (9, 1, 7)$.

Řešení:

Obecný bod roviny ABC je $X(t, s) = A + t(B - A) + s(C - A)$ a obecný bod přímky DE je $Y(u) = D + u(E - D)$. Soustava třech lineárních rovnic o třech neznámých t, s, u

$$X(t, s) = Y(u),$$

tedy

$$\begin{aligned} 4 - 2s - 3t &= 3 + 6u \\ 2 + 3s + 7t &= 6 - 5u \\ 7 - 7s - 3t &= 8 - u \end{aligned}$$

má jediné řešení $t = 73/85$, $s = -89/170$, $u = -3/34$, takže rovina a přímka mají jediný společný bod $P = (42/17,\ 219/34,\ 275/34)$.

Zpět

Příklad 11.4.2

Určete společné body roviny ABC a přímky DE, je-li $A = (4, 2, 7)$, $B = (1, 9, 4)$, $C = (2, 5, 0)$, $D = (3, 6, 8)$, $E = (9, 1, 7)$.

Maple:

```
> with(LinearAlgebra):
> a:=<4,2,7>: b:=<1,9,4>: c:=<2,5,0>: d:=<3,6,8>: e:=<9,1,7>:
> m:=<b-a|c-a|d-e|d-a>:
> r:=LinearSolve(m);
```

$$r := \begin{bmatrix} \frac{73}{85} \\ \frac{-89}{170} \\ \frac{-3}{34} \end{bmatrix}$$

```
> pr:=a+r[1]*(b-a)+r[2]*(c-a);
```

$$pr := \begin{bmatrix} \frac{42}{17} \\ \frac{219}{34} \\ \frac{275}{34} \end{bmatrix}$$

Další

Příklad 11.4.2

Určete společné body roviny ABC a přímky DE, je-li $A = (4, 2, 7)$, $B = (1, 9, 4)$, $C = (2, 5, 0)$, $D = (3, 6, 8)$, $E = (9, 1, 7)$.

Maple:

```
> pp:=d+r[3]*(e-d);
```

$$pp := \begin{bmatrix} \frac{42}{17} \\ \frac{219}{34} \\ \frac{275}{34} \end{bmatrix}$$

Zpět

Příklad 11.4.2

Určete společné body roviny ABC a přímky DE, je-li $A = (4, 2, 7)$, $B = (1, 9, 4)$, $C = (2, 5, 0)$, $D = (3, 6, 8)$, $E = (9, 1, 7)$.

Mathematica:

$\boldsymbol{a = \{4, 2, 7\}; b = \{1, 9, 4\}; c = \{2, 5, 0\}; d = \{3, 6, 8\}; e = \{9, 1, 7\};}$

$\boldsymbol{x = a + t(b - a) + s(c - a); y = d + u(e - d);}$

$\boldsymbol{r = \mathbf{Solve}[x == y]}$

$\{\{s \to -\frac{89}{170}, t \to \frac{73}{85}, u \to -\frac{3}{34}\}\}$

$\boldsymbol{x/.r}$

$\{\{\frac{42}{17}, \frac{219}{34}, \frac{275}{34}\}\}$

$\boldsymbol{y/.r}$

$\{\{\frac{42}{17}, \frac{219}{34}, \frac{275}{34}\}\}$

Zpět

Obecná rovnice roviny

- **Příklad 11.5.1** Určete vzdálenost bodu $A = (3, 2, 7)$ od roviny σ, jejíž obecná rovnice je $5x + 2y - z + 9 = 0$.
- **Příklad 11.5.2** Najděte obecnou rovnici roviny σ procházející body $A = (3, 7, 2)$, $B = (2, 1, 0)$, $C = (5, 8, 4)$.
- **Příklad 11.5.3** Vypočtěte vzdálenost bodu A od přímky BC, je-li $A = (0, 5, 1)$, $B = (2, 3, 9)$, $C = (4, 7, 6)$.
- **Příklad 11.5.4** Určete bod S souměrně sdružený s bodem $P = (3, -1, 0)$ podle roviny ABC procházející body $A = (-1, 5, 0)$, $B = (3, -2, 1)$, $C = (0, 2, 4)$.

Zpět

Příklad 11.5.1

Určete vzdálenost bodu $A = (3, 2, 7)$ od roviny σ, jejíž obecná rovnice je $5x + 2y - z + 9 = 0$.

Zpět

Příklad 11.5.1

Určete vzdálenost bodu $A = (3, 2, 7)$ od roviny σ, jejíž obecná rovnice je $5x + 2y - z + 9 = 0$.

Výsledek:

Vzdálenost bodu A od roviny σ je $7\sqrt{\frac{3}{10}} \doteq 3{,}83$.

Zpět

Příklad 11.5.1

Určete vzdálenost bodu $A = (3, 2, 7)$ od roviny σ, jejíž obecná rovnice je $5x + 2y - z + 9 = 0$.

Řešení:

Vzdálenost bodu $A = (x_0, y_0, z_0)$ od roviny σ s obecnou rovnicí $\vec{n} \cdot X + d = 0$, kde $\vec{n} = (a, b, c)$ je normálový vektor roviny, je

$$v(A, \sigma) = \frac{|\vec{n} \cdot A + d|}{||\vec{n}||} = \frac{|(a, b, c) \cdot (x_0, y_0, z_0) + d|}{||(a, b, c)||} = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} =$$

$$= \frac{|5 \times 3 + 2 \times 2 - 7 + 9|}{\sqrt{5^2 + 2^2 + (-1)^2}} = 7\sqrt{\frac{3}{10}} \doteq 3{,}83.$$

Zpět

Příklad 11.5.1

Určete vzdálenost bodu $A = (3, 2, 7)$ od roviny σ, jejíž obecná rovnice je $5x + 2y - z + 9 = 0$.

Maple:

```
> with(LinearAlgebra):
> a:=<3,2,7>: n:=<5,2,-1>: d:=9: v:=abs(n.a+d)/Norm(n,2);
```

$$v := \frac{7\sqrt{30}}{10}$$

```
> evalf(v);
```

$$3.834057902$$

Zpět

Příklad 11.5.1

Určete vzdálenost bodu $A = (3, 2, 7)$ od roviny σ, jejíž obecná rovnice je $5x + 2y - z + 9 = 0$.

Mathematica:

$\boldsymbol{a = \{3, 2, 7\}; n = \{5, 2, -1\}; d = 9; v = \mathbf{Abs}[n.a + d]/\mathbf{Norm}[n]}$

$7\sqrt{\frac{3}{10}}$

$\boldsymbol{N[v]}$

3.83406

Zpět

Příklad 11.5.2

Najděte obecnou rovnici roviny σ procházející body $A = (3, 7, 2)$, $B = (2, 1, 0)$, $C = (5, 8, 4)$.

Zpět

Příklad 11.5.2

Najděte obecnou rovnici roviny σ procházející body $A = (3, 7, 2)$, $B = (2, 1, 0)$, $C = (5, 8, 4)$.

Výsledek:

Obecná rovnice roviny je $-10x - 2y + 11z + 22 = 0$.

Zpět

Příklad 11.5.2

Najděte obecnou rovnici roviny σ procházející body $A = (3, 7, 2)$, $B = (2, 1, 0)$, $C = (5, 8, 4)$.

Řešení:

Normálový vektor roviny je kolný na každý vektor roviny, tedy i na vektory $\overrightarrow{AB} = B - A = (-1, -6, -2)$ a $\overrightarrow{AC} = C - A = (2, 1, 2)$. To splňuje vektorový součin

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ -1 & -6 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (-10, -2, 11).$$

Absolutní člen d v rovnici $-10x - 2y + 11z + d = 0$ určíme dosazením souřadnic libovolného z bodů A, B nebo C, např. A: $d = -\vec{n} \cdot A = -(-10, -2, 11) \cdot (3, 7, 2) = 22$. Obecná rovnice roviny je potom $-10x - 2y + 11z + 22 = 0$.

Zpět

Příklad 11.5.2

Najděte obecnou rovnici roviny σ procházející body $A = (3, 7, 2)$, $B = (2, 1, 0)$, $C = (5, 8, 4)$.

Maple:

```
> with(LinearAlgebra):
> n:=CrossProduct(b-a,c-a);
```

$$n := \begin{bmatrix} -10 \\ -2 \\ 11 \end{bmatrix}$$

```
> d:=-n.a;
```

$$d := 22$$

Zpět

Příklad 11.5.2

Najděte obecnou rovnici roviny σ procházející body $A = (3, 7, 2)$, $B = (2, 1, 0)$, $C = (5, 8, 4)$.

Mathematica:

$\boldsymbol{a = \{3, 7, 2\}; b = \{2, 1, 0\}; c = \{5, 8, 4\};}$

$\boldsymbol{n = \textbf{Cross}[(b - a), (c - a)]}$

$\{-10, -2, 11\}$

$\boldsymbol{d = -n.a}$

22

Zpět

Příklad 11.5.3

Vypočtěte vzdálenost bodu A od přímky BC, je-li $A = (0, 5, 1)$, $B = (2, 3, 9)$, $C = (4, 7, 6)$.

Zpět

Příklad 11.5.3

Vypočtěte vzdálenost bodu A od přímky BC, je-li $A = (0, 5, 1)$, $B = (2, 3, 9)$, $C = (4, 7, 6)$.

Výsledek:

Vzdálenost bodu A od přímky BC je $2\sqrt{\frac{326}{29}} \doteq 6{,}7$.

Zpět

Příklad 11.5.3

Vypočtěte vzdálenost bodu A od přímky BC, je-li $A = (0,5,1)$, $B = (2,3,9)$, $C = (4,7,6)$.

Řešení:

Obecný bod přímky BC je
$$X(t) = B + t(C - B).$$

Směrový vektor $\overrightarrow{BC} = C - B$ této přímky je současně normálový vektor roviny kolmé na přímku BC. Tedy obecná rovnice roviny σ kolmé na přímku BC jdoucí bodem A je

$$(C - B) \cdot X = (C - B) \cdot A.$$

Pozor! Tuto rovnici nelze závorkou $(C - B)$ vydělit, protože nejde o součin čísel, ale o skalární součin vektorů. Tato rovnice neříká, že X se rovná A, ale pouze, že průmět X do $(C - B)$ se rovná průmětu A do $(C - B)$. V důsledku toho nelze ve zlomcích krátit vektor, který se objevuje ve skalárním součinu.
Hodnotu parametru t odpovídající průsečíku přímky BC s rovninou σ najdeme z rovnice

$$(C - B) \cdot (B + t(C - B)) = (C - B) \cdot A$$

$$(C - B) \cdot B + t(C - B) \cdot (C - B) = (C - B) \cdot A$$

$$t = \frac{(C - B) \cdot (A - B)}{(C - B) \cdot (C - B)}.$$

Další

Příklad 11.5.3

Vypočtěte vzdálenost bodu A od přímky BC, je-li $A = (0, 5, 1)$, $B = (2, 3, 9)$, $C = (4, 7, 6)$.

Řešení:

Tuto hodnotu parametru t dosadíme do parametrické rovnice přímky BC a dostaneme bod P přímky BC, který je nejblíže bodu A

$$P = B + \frac{(C - B) \cdot (A - B)}{(C - B) \cdot (C - B)}(C - B).$$

Potom vzdálenost v bodu A od přímky BC je rovna vzdálenosti bodu A od bodu P

$$v = ||AP|| = ||P - A|| = ||B - A + \frac{(C - B) \cdot (A - B)}{(C - B) \cdot (C - B)}(C - B)||.$$

Tento obecný výsledek je vhodný při použití počítače, protože potom stačí zadat pouze souřadnice daných bodů a tento výsledný vztah.

Zpět

Příklad 11.5.3

Vypočtěte vzdálenost bodu A od přímky BC, je-li $A = (0, 5, 1)$, $B = (2, 3, 9)$, $C = (4, 7, 6)$.

Maple:

```
> with(LinearAlgebra):
> a:=<0,5,1>: b:=<2,3,9>: c:=<4,7,6>:
> p:=b+((c-b).(a-b))*(c-b)/((c-b).(c-b));
```

$$p := \begin{bmatrix} \frac{114}{29} \\ \frac{199}{29} \\ \frac{177}{29} \end{bmatrix}$$

```
> v:=Norm(p-a,2);
```

$$v := \frac{2\sqrt{9454}}{29}$$

```
> evalf(v);
```

$$6.705633247$$

Zpět

Příklad 11.5.3

Vypočtěte vzdálenost bodu A od přímky BC, je-li $A = (0,5,1)$, $B = (2,3,9)$, $C = (4,7,6)$.

Mathematica:

$\boldsymbol{a = \{0,5,1\}; b = \{2,3,9\}; c = \{4,7,6\};}$

$\boldsymbol{p = b + ((c-b).(a-b)) * (c-b)/((c-b).(c-b))}$

$\{\frac{114}{29}, \frac{199}{29}, \frac{177}{29}\}$

$\boldsymbol{v = \mathbf{Norm}[p - a]}$

$2\sqrt{\frac{326}{29}}$

$\boldsymbol{N[v]}$

6.70563

Zpět

Příklad 11.5.4

Určete bod S souměrně sdružený s bodem $P = (3, -1, 0)$ podle roviny ABC procházející body $A = (-1, 5, 0)$, $B = (3, -2, 1)$, $C = (0, 2, 4)$.

Zpět

Příklad 11.5.4

Určete bod S souměrně sdružený s bodem $P = (3, -1, 0)$ podle roviny ABC procházející body $A = (-1, 5, 0)$, $B = (3, -2, 1)$, $C = (0, 2, 4)$.

Výsledek:

Bod S má souřadnice $S = (17/7,\ -47/35,\ -4/35)$.

Zpět

Příklad 11.5.4

Určete bod S souměrně sdružený s bodem $P = (3, -1, 0)$ podle roviny ABC procházející body $A = (-1, 5, 0)$, $B = (3, -2, 1)$, $C = (0, 2, 4)$.

Řešení:

Nejprve najdeme normálový vektor $\vec{n}$ roviny ABC

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}.$$

Obecná rovnice roviny ABC je

$$\vec{n} \cdot X = \vec{n} \cdot A.$$

Bodem P vedeme přímku p kolmou k rovině ABC

$$X(t) = P + t\vec{n}.$$

Najdeme hodnotu parametru t_R příslušející průsečíku R přímky p s rovinou ABC

$$\vec{n} \cdot (P + t\vec{n}) = \vec{n} \cdot A$$

$$t_R = \frac{\vec{n} \cdot (A - P)}{\vec{n} \cdot \vec{n}}.$$

Další

Příklad 11.5.4

Určete bod S souměrně sdružený s bodem $P = (3, -1, 0)$ podle roviny ABC procházející body $A = (-1, 5, 0)$, $B = (3, -2, 1)$, $C = (0, 2, 4)$.

Řešení:

Hodnota parametru t_S příslušející bodu S bude

$$t_S = 2t_R.$$

Potom bod S bude

$$S = P + t_S\vec{n} = P + 2\frac{\vec{n}\cdot(A-P)}{\vec{n}\cdot\vec{n}}\vec{n}.$$

Tento způsob výpočtu, kdy nejprve najdeme obecný výsledek a teprve potom dosadíme konkrétní číselné hodnoty, je vhodný při použití počítače.

Zpět

Příklad 11.5.4

Určete bod S souměrně sdružený s bodem $P = (3, -1, 0)$ podle roviny ABC procházející body $A = (-1, 5, 0)$, $B = (3, -2, 1)$, $C = (0, 2, 4)$.

Maple:

```
> with(LinearAlgebra):
> p:=<3,-1,0>: a:=<-1,5,0>: b:=<3,-2,1>: c:=<0,2,4>:
> n:=CrossProduct(b-a,c-a):
> s:=p+2*(n.(a-p))/(n.n)*n;
```

$$s := \begin{bmatrix} \frac{17}{7} \\ \frac{-47}{35} \\ \frac{-4}{35} \end{bmatrix}$$

Zpět

Příklad 11.5.4

Určete bod S souměrně sdružený s bodem $P = (3, -1, 0)$ podle roviny ABC procházející body $A = (-1, 5, 0)$, $B = (3, -2, 1)$, $C = (0, 2, 4)$.

Mathematica:

$\boldsymbol{p = \{3, -1, 0\}; a = \{-1, 5, 0\}; b = \{3, -2, 1\}; c = \{0, 2, 4\};}$

$\boldsymbol{n = \mathbf{Cross}[b - a, c - a];}$

$\boldsymbol{s = p + 2(n.(a - p))/(n.n)n}$

$\{\frac{17}{7}, -\frac{47}{35}, -\frac{4}{35}\}$

Zpět