Sbírka příkladů
Matematika II pro strukturované studium

Kolektiv autorů

Ústav matematiky VŠCHT, Praha

Chcete-li ukončit prohlížení stiskněte klávesu Esc.

Chcete-li pokračovat stiskněte klávesu Enter.

Obsah

Lineární prostor

- Lineární prostor a lineární podprostor
- Lineární nezávislost
- Báze a dimenze lineárního prostoru

Zpět

Lineární prostor a lineární podprostor

- **Příklad 1.1.1** Rozhodněte, zda podmnožina M vektorového prostoru $\mathbb{R}^4$ je jeho lineárním podprostorem,
  $$\mathrm{M} = \{\overrightarrow{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^4,\ x_1 = x_4\}.$$
  Pokud ano, najděte nějakou bázi a určete dimenzi M.

- **Příklad 1.1.2** Rozhodněte, zda podmnožina M vektorového prostoru $\mathcal{P}$ všech polynomů je jeho lineárním podprostorem, jestliže
  a) $\mathrm{M} = \{f \in \mathcal{P}, f(2) = 0\}$;
  b) $\mathrm{M} = \{f \in \mathcal{P}, f(0) = 2\}$.

- **Příklad 1.1.3** Nechť $\mathcal{P}_2$ je množina všech polynomů stupně nejvýše 2, $\widetilde{\mathcal{P}_2}$ je množina všech polynomů stupně právě 2, tj.
  $$\mathcal{P}_2 = \{p,\ p \text{ je polynom, st}\, p \leq 2\}, \quad \widetilde{\mathcal{P}_2} = \{p,\ p \text{ je polynom, st}\, p = 2\}.$$
  Rozhodněte, zda $\mathcal{P}_2$ a $\widetilde{\mathcal{P}_2}$ tvoří lineární podprostor vektorového prostoru všech polynomů $\mathcal{P}$. Pokud ano, najděte jejich bázi a určete jejich dimenzi.

Zpět

Příklad 1.1.1

Rozhodněte, zda podmnožina M vektorového prostoru $\mathbb{R}^4$ je jeho lineárním podprostorem,

$$\mathrm{M} = \{\overrightarrow{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^4,\ x_1 = x_4\}.$$

Pokud ano, najděte nějakou bázi a určete dimenzi M.

? Zpět

Příklad 1.1.1

Rozhodněte, zda podmnožina M vektorového prostoru $\mathbb{R}^4$ je jeho lineárním podprostorem,

$$\mathrm{M} = \{\overrightarrow{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^4,\ x_1 = x_4\}.$$

Pokud ano, najděte nějakou bázi a určete dimenzi M.

Výsledek:

M je lineárním podprostorem vektorového prostoru $\mathbb{R}^4$.
Bázi M tvoří například vektory
$\overrightarrow{v} = (1, 0, 0, 1)^{\mathrm{T}},\ \overrightarrow{e_2} = (0, 1, 0, 0)^{\mathrm{T}},\ \overrightarrow{e_3} = (0, 0, 1, 0)^{\mathrm{T}}.$
Dimenze M = 3.

Zpět

Příklad 1.1.1

Rozhodněte, zda podmnožina M vektorového prostoru $\mathbb{R}^4$ je jeho lineárním podprostorem,

$$\mathrm{M} = \{\overrightarrow{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^4,\ x_1 = x_4\}.$$

Pokud ano, najděte nějakou bázi a určete dimenzi M.

Návod:

Musíme ověřit, že množina M obsahuje nulový prvek a je uzavřená vzhledem k operacím sčítání a násobení reálným číslem. Dále najdeme nějakou bázi, tj. maximální počet lineárně nezávislých prvků z M. Dimenze je pak rovna počtu prvků této (a každé) báze.

Zpět

Příklad 1.1.1

Rozhodněte, zda podmnožina M vektorového prostoru $\mathbb{R}^4$ je jeho lineárním podprostorem,

$\mathrm{M} = \{\overrightarrow{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^4,\ x_1 = x_4\}$.

Pokud ano, najděte nějakou bázi a určete dimenzi M.

Řešení:

a) Nulový prvek $\overrightarrow{o} = (0,0,0,0)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^4$ leží v M, neboť $o_1 = o_4 = 0$.
b) Nechť $\overrightarrow{x}$, $\overrightarrow{y} \in$ M. Musíme ověřit, že také $\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y} \in$ M. Ale
$\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^{\mathrm{T}} + (y_1, y_2, y_3, y_4)^{\mathrm{T}} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, x_4 + y_4)^{\mathrm{T}}$, a protože podle předpokladu je $x_1 = x_4$ a $y_1 = y_4$, je také $x_1 + y_1 = x_4 + y_4$ a vektor $\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y} \in$ M. Množina M je tedy uzavřená vzhledem k operaci sčítání.
c) Nechť $\overrightarrow{x} \in$ M. Zbývá ověřit, že také $\alpha\overrightarrow{x} \in$ M pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$. Ale
$\alpha\overrightarrow{x} = \alpha(x_1, x_2, x_3, x_4)^{\mathrm{T}} = (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3, \alpha x_4)^{\mathrm{T}}$. Protože $x_1 = x_4$, je také $\alpha x_1 = \alpha x_4$ a $\alpha\overrightarrow{x} \in$ M. Tedy množina M je také uzavřená vzhledem k operaci násobení reálným číslem.
Z a), b), c) plyne, že M je lineárním podprostorem vektorového prostoru $\mathbb{R}^4$.
Hledejme nyní bázi M. Vyjdeme z kanonické báze prostoru $\mathbb{R}^4$. Vektory $\overrightarrow{e_2} = (0,1,0,0)^{\mathrm{T}}$, $\overrightarrow{e_3} = (0,0,1,0)^{\mathrm{T}}$ leží v M. Třetí vektor báze je např. vektor $\overrightarrow{v} = (1,0,0,1)^{\mathrm{T}}$. Ověříme, že vektory $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{e_3}$ jsou lineárně nezávislé a generují M, tedy že skutečně tvoří bázi M.
Lineární nezávislost:
Sestavíme z vektorů $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{e_3}$ matici:

$$\begin{pmatrix} \overrightarrow{v}^{\mathrm{T}} \\ \overrightarrow{e_2}^{\mathrm{T}} \\ \overrightarrow{e_3}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Další

Příklad 1.1.1

Rozhodněte, zda podmnožina M vektorového prostoru $\mathbb{R}^4$ je jeho lineárním podprostorem,

$$\mathrm{M} = \{\overrightarrow{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^4,\ x_1 = x_4\}.$$

Pokud ano, najděte nějakou bázi a určete dimenzi M.

Řešení:

Matice je v horním trojúhelníkovém tvaru a má hodnost 3. Vektory $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{e_3}$ jsou tedy lineárně nezávislé.
Vektory $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{e_3}$ generují celý lineární podprostor M:
Nechť $\overrightarrow{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^{\mathrm{T}} \in \mathrm{M}$. Ptáme se, zda $\overrightarrow{x}$ je nějakou lineární kombinací vektorů $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{e_3}$, tj. hledáme čísla α, β, γ (koeficienty lineární kombinace), tak aby

$$\alpha \cdot (1, 0, 0, 1)^{\mathrm{T}} + \beta \cdot (0, 1, 0, 0)^{\mathrm{T}} + \gamma \cdot (0, 0, 1, 0)^{\mathrm{T}} = (x_1, x_2, x_3, x_1)^{\mathrm{T}}.$$

$$(\alpha, \beta, \gamma, \alpha)^{\mathrm{T}} = (x_1, x_2, x_3, x_1)^{\mathrm{T}} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{ccc} \alpha & = & x_1 \\ \beta & = & x_2 \\ \gamma & = & x_3 \end{array}$$

$$\overrightarrow{x} = x_1 \cdot \overrightarrow{v} + x_2 \cdot \overrightarrow{e_2} + x_3 \overrightarrow{e_3}$$

a tři vektory $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{e_3}$ generují M. Tvoří tedy bázi M a dimenze M je rovna třem.

Zpět

Příklad 1.1.1

Rozhodněte, zda podmnožina M vektorového prostoru $\mathbb{R}^4$ je jeho lineárním podprostorem,

$$\mathrm{M} = \{\overrightarrow{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^4,\ x_1 = x_4\}.$$

Pokud ano, najděte nějakou bázi a určete dimenzi M.

Maple:

```
> with(linalg):
> x:=vector([x1,x2,x3,x1]);
```

$$x := [x1,\ x2,\ x3,\ x1]$$

```
> y:=vector([y1,y2,y3,y1]);
```

$$y := [y1,\ y2,\ y3,\ y1]$$

```
> evalm(x+y);
```

$$[x1 + y1,\ x2 + y2,\ x3 + y3,\ x1 + y1]$$

```
> evalm(alpha*x);
```

$$[\alpha\, x1,\ \alpha\, x2,\ \alpha\, x3,\ \alpha\, x1]$$

```
> e2:=vector([0,1,0,0]);
```

$$e2 := [0,\ 1,\ 0,\ 0]$$

```
> e3:=vector([0,0,1,0]);
```

$$e3 := [0,\ 0,\ 1,\ 0]$$

```
> v:=vector([1,0,0,1]);
```

$$v := [1,\ 0,\ 0,\ 1]$$

Další

Příklad 1.1.1

Rozhodněte, zda podmnožina M vektorového prostoru $\mathbb{R}^4$ je jeho lineárním podprostorem,

$$\mathrm{M} = \{\overrightarrow{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^4,\ x_1 = x_4\}.$$

Pokud ano, najděte nějakou bázi a určete dimenzi M.

Maple:

```
> comb:=a*v+b*e2+c*e3;
```

$$comb := a\,v + b\,e2 + c\,e3$$

```
> evalm(comb);
```

$$[a,\ b,\ c,\ a]$$

```
> A:=matrix(3,4,[1,0,0,1,0,1,0,0,0,0,1,0]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> rank(A);
```

$$3$$

Zpět

Příklad 1.1.1

Rozhodněte, zda podmnožina M vektorového prostoru $\mathbb{R}^4$ je jeho lineárním podprostorem,

$$\mathrm{M} = \{\overrightarrow{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^4,\ x_1 = x_4\}.$$

Pokud ano, najděte nějakou bázi a určete dimenzi M.

Mathematica:

$\boldsymbol{x} = \{\mathbf{x1}, \mathbf{x2}, \mathbf{x3}, \mathbf{x1}\};$
$\boldsymbol{y} = \{\mathbf{y1}, \mathbf{y2}, \mathbf{y3}, \mathbf{y1}\};$

$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$

$\{\mathrm{x1} + \mathrm{y1}, \mathrm{x2} + \mathrm{y2}, \mathrm{x3} + \mathrm{y3}, \mathrm{x1} + \mathrm{y1}\}$

$\boldsymbol{z}[[\mathbf{4}]] == \boldsymbol{z}[[\mathbf{1}]]$

True

$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\alpha x}$

$\{\mathrm{x1}\alpha, \mathrm{x2}\alpha, \mathrm{x3}\alpha, \mathrm{x1}\alpha\}$

$\boldsymbol{v}[[\mathbf{4}]] == \boldsymbol{v}[[\mathbf{1}]]$

True

M je podprostor prostoru $\mathbb{R}^4$

$\mathbf{e1} = \{\mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{1}\}; \mathbf{e2} = \{\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{0}\}; \mathbf{e3} = \{\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{0}\};$

$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{a}\mathbf{e1} + \boldsymbol{b}\mathbf{e2} + \boldsymbol{c}\mathbf{e3}$

$\{a, b, c, a\}$

$\boldsymbol{u}[[\mathbf{4}]] == \boldsymbol{u}[[\mathbf{1}]]$

True

$\{e1, e2, e3\}$ je báze podprostoru M.

Příklad 1.1.2

Rozhodněte, zda podmnožina M vektorového prostoru $\mathcal{P}$ všech polynomů je jeho lineárním podprostorem, jestliže
a) $\mathrm{M} = \{f \in \mathcal{P}, f(2) = 0\}$;
b) $\mathrm{M} = \{f \in \mathcal{P}, f(0) = 2\}$.

? Zpět

Příklad 1.1.2

Rozhodněte, zda podmnožina M vektorového prostoru $\mathcal{P}$ všech polynomů je jeho lineárním podprostorem, jestliže
a) $\mathrm{M} = \{f \in \mathcal{P}, f(2) = 0\}$;
b) $\mathrm{M} = \{f \in \mathcal{P}, f(0) = 2\}$.

Výsledek:

a) M je lineárním podprostorem $\mathcal{P}$.
b) M není lineárním podprostorem $\mathcal{P}$.

Zpět

Příklad 1.1.2

Rozhodněte, zda podmnožina M vektorového prostoru $\mathcal{P}$ všech polynomů je jeho lineárním podprostorem, jestliže
a) $\mathrm{M} = \{f \in \mathcal{P}, f(2) = 0\}$;
b) $\mathrm{M} = \{f \in \mathcal{P}, f(0) = 2\}$.

Návod:

V obou případech musíme ověřit, zda $0 \in \mathrm{M}$, kde 0 je nulový polynom, tj. $0(x) = 0 \ \forall x \in \mathcal{P}$. Dále musíme ukázat, že M je uzavřená na operace sčítání a násobení reálným číslem.

Zpět

Příklad 1.1.2

Rozhodněte, zda podmnožina M vektorového prostoru $\mathcal{P}$ všech polynomů je jeho lineárním podprostorem, jestliže
a) $\mathrm{M} = \{f \in \mathcal{P}, f(2) = 0\}$;
b) $\mathrm{M} = \{f \in \mathcal{P}, f(0) = 2\}$.

Řešení:

a) Protože $0 \in \mathcal{P}$ a $0(2) = 0$, je $0 \in \mathrm{M}$. Nechť $f,\ g \in M,\ \alpha \in \mathbb{R}$. Ptáme se, zda také $f + g$ a αf leží v M. Ale f i g jsou polynomy, tedy i jejich součet je polynom. Protože $f(2) = 0,\ g(2) = 0$, je $(f + g)(2) = f(2) + g(2) = 0$ a $(f + g) \in \mathrm{M}$. αf je také polynom a $(\alpha f)(2) = \alpha f(2) = 0$, tedy i $(\alpha f) \in M$. Množina M je lineární podprostor prostoru $\mathcal{P}$. Využili jsme zde definice součtu dvou funkcí a definice reálného násobku funkce.
b) Platí $0(x) = 0\ \forall x \in \mathbb{R}$, nemůže tedy být $0(0) = 2$. Nulový prvek $\mathcal{P} \notin \mathrm{M}$ a množina M v tomto případě není lineárním podprostorem $\mathcal{P}$.

Zpět

Příklad 1.1.2

Rozhodněte, zda podmnožina M vektorového prostoru $\mathcal{P}$ všech polynomů je jeho lineárním podprostorem, jestliže
a) $\mathrm{M} = \{f \in \mathcal{P}, f(2) = 0\}$;
b) $\mathrm{M} = \{f \in \mathcal{P}, f(0) = 2\}$.

Maple:

a)

```
> with(linalg):
> f:=x->y;
```

$$f := x \rightarrow y$$

```
> f(2):=0;
```

$$\mathrm{f}(2) := 0$$

```
> o:=x->0;
```

$$o := x \rightarrow 0$$

```
> o(2);
```

$$0$$

```
> g:x->z;
```

$$x \rightarrow z$$

```
> g(2):=0;
```

$$\mathrm{g}(2) := 0$$

```
> fg:=x->f(x)+g(x);
```

$$fg := x \rightarrow \mathrm{f}(x) + \mathrm{g}(x)$$

Další

Příklad 1.1.2

Rozhodněte, zda podmnožina M vektorového prostoru $\mathcal{P}$ všech polynomů je jeho lineárním podprostorem, jestliže
a) $\mathrm{M} = \{f \in \mathcal{P}, f(2) = 0\}$;
b) $\mathrm{M} = \{f \in \mathcal{P}, f(0) = 2\}$.

Maple:

```
> fg(2);
```

$$0$$

```
> af:=x->a*f(x);
```

$$af := x \rightarrow a\,\mathrm{f}(x)$$

```
> af(2);
```

$$0$$

b)

```
> with(linalg):
> f:=x->y;
```

$$f := x \rightarrow y$$

```
> f(0):=2;
```

$$\mathrm{f}(0) := 2$$

```
> o:=x->0;
```

$$o := x \rightarrow 0$$

```
> o(0);
```

$$0$$

Další

Příklad 1.1.2

Rozhodněte, zda podmnožina M vektorového prostoru $\mathcal{P}$ všech polynomů je jeho lineárním podprostorem, jestliže
a) $\mathrm{M} = \{f \in \mathcal{P}, f(2) = 0\}$;
b) $\mathrm{M} = \{f \in \mathcal{P}, f(0) = 2\}$.

Maple:

```
> g:x->z;
```

$$x \rightarrow z$$

```
> g(0):=2;
```

$$\mathrm{g}(0) := 2$$

```
> fg:=x->f(x)+g(x);
```

$$fg := x \rightarrow \mathrm{f}(x) + \mathrm{g}(x)$$

```
> fg(0);
```

$$4$$

```
> af:=x->a*f(x);
```

$$af := x \rightarrow a\,\mathrm{f}(x)$$

```
> af(0);
```

$$2\,a$$

Zpět

Příklad 1.1.2

Rozhodněte, zda podmnožina M vektorového prostoru $\mathcal{P}$ všech polynomů je jeho lineárním podprostorem, jestliže
a) $\mathrm{M} = \{f \in \mathcal{P}, f(2) = 0\}$;
b) $\mathrm{M} = \{f \in \mathcal{P}, f(0) = 2\}$.

Mathematica:

```
f[2]:=0;
g[2]:=0;
h[x_] = f[x] + g[x];
h[2] == 0
```

True

```
k[x_] = α f[x];
k[2] == 0
```

True

Prostor M je lineární podprostor prostoru $\mathcal{P}$.

```
f[0]:=2;
g[0]:=2;
h[x_] = f[x] + g[x];
h[0] == 2
```

False

```
k[x_] = α f[x];
```

Další

Příklad 1.1.2

Rozhodněte, zda podmnožina M vektorového prostoru $\mathcal{P}$ všech polynomů je jeho lineárním podprostorem, jestliže
a) $\mathrm{M} = \{f \in \mathcal{P}, f(2) = 0\}$;
b) $\mathrm{M} = \{f \in \mathcal{P}, f(0) = 2\}$.

Mathematica:

***k*[0] == 2**

$2\alpha == 2$

Prostor M není lineární podprostor prostoru $\mathcal{P}$.

Zpět

Příklad 1.1.3

Nechť $\mathcal{P}_2$ je množina všech polynomů stupně nejvýše 2, $\widetilde{\mathcal{P}_2}$ je množina všech polynomů stupně právě 2, tj.

$$\mathcal{P}_2 = \{p,\ p \text{ je polynom, st}\, p \le 2\}, \quad \widetilde{\mathcal{P}_2} = \{p,\ p \text{ je polynom, st}\, p = 2\}.$$

Rozhodněte, zda $\mathcal{P}_2$ a $\widetilde{\mathcal{P}_2}$ tvoří lineární podprostor vektorového prostoru všech polynomů $\mathcal{P}$. Pokud ano, najděte jejich bázi a určete jejich dimenzi.

? Zpět

Příklad 1.1.3

Nechť $\mathcal{P}_2$ je množina všech polynomů stupně nejvýše 2, $\widetilde{\mathcal{P}_2}$ je množina všech polynomů stupně právě 2, tj.

$$\mathcal{P}_2 = \{p,\ p \text{ je polynom, st}\, p \leq 2\}, \quad \widetilde{\mathcal{P}_2} = \{p,\ p \text{ je polynom, st}\, p = 2\}.$$

Rozhodněte, zda $\mathcal{P}_2$ a $\widetilde{\mathcal{P}_2}$ tvoří lineární podprostor vektorového prostoru všech polynomů $\mathcal{P}$. Pokud ano, najděte jejich bázi a určete jejich dimenzi.

Výsledek:

$\widetilde{\mathcal{P}_2}$ není lineárním podprostorem $\mathcal{P}$. $\mathcal{P}_2$ je lineárním podprostorem $\mathcal{P}$, bázi $\mathcal{P}_2$ tvoří např. funkce $x^2,\ x,\ 1$, $\dim \mathcal{P}_2 = 3$.

Zpět

Příklad 1.1.3

Nechť $\mathcal{P}_2$ je množina všech polynomů stupně nejvýše 2, $\widetilde{\mathcal{P}_2}$ je množina všech polynomů stupně právě 2, tj.

$$\mathcal{P}_2 = \{p,\ p \text{ je polynom, } \operatorname{st} p \leq 2\}, \quad \widetilde{\mathcal{P}_2} = \{p,\ p \text{ je polynom, } \operatorname{st} p = 2\}.$$

Rozhodněte, zda $\mathcal{P}_2$ a $\widetilde{\mathcal{P}_2}$ tvoří lineární podprostor vektorového prostoru všech polynomů $\mathcal{P}$. Pokud ano, najděte jejich bázi a určete jejich dimenzi.

Návod:

Musíme zjistit, zda $0 \in \mathcal{P}_2$ a $0 \in \widetilde{\mathcal{P}_2}$, kde 0 je nulový polynom, tj. $0(x) = 0\ \forall x \in \mathcal{P}$. Rovněž musíme ukázat, že množiny jsou uzavřené vzhledem k operacím sčítání a násobení reálným číslem. Dále najdeme nějakou bázi, tj. maximální počet lineárně nezávislých prvků $\mathcal{P}_2$ a $\widetilde{\mathcal{P}_2}$. Dimenze je pak rovna počtu prvků této (a každé) báze.

Zpět

Příklad 1.1.3

Nechť $\mathcal{P}_2$ je množina všech polynomů stupně nejvýše 2, $\widetilde{\mathcal{P}_2}$ je množina všech polynomů stupně právě 2, tj.

$$\mathcal{P}_2 = \{p,\ p \text{ je polynom, } \operatorname{st} p \leq 2\}, \quad \widetilde{\mathcal{P}_2} = \{p,\ p \text{ je polynom, } \operatorname{st} p = 2\}.$$

Rozhodněte, zda $\mathcal{P}_2$ a $\widetilde{\mathcal{P}_2}$ tvoří lineární podprostor vektorového prostoru všech polynomů $\mathcal{P}$. Pokud ano, najděte jejich bázi a určete jejich dimenzi.

Řešení:

Protože nulový polynom je polynom nulového stupně, je ihned zřejmé, že nemůže být prvkem množiny $\widetilde{\mathcal{P}_2}$, a tedy množina $\widetilde{\mathcal{P}_2}$ není lineárním podprostorem prostoru $\mathcal{P}$. Na druhé straně je $\operatorname{st} 0 = 0 \leq 2$, a tedy nulový polynom je prvkem $\mathcal{P}_2$. Dále sečteme-li dva polynomy stupně nejvýše 2, dostaneme opět polynom stupně nejvýše 2. Rovněž vynásobíme-li polynom stupně nejvýše 2 libovolným reálným číslem, dostaneme opět polynom nejvýše 2. stupně. Tedy množina $\mathcal{P}_2$ je lineárním podprostorem vektorového prostoru $\mathcal{P}$.
Zbývá najít bázi a určit dimenzi $\mathcal{P}_2$. Každý polynom stupně nejvýše 2 má obecně tvar $p(x) = ax^2 + bx + c,\ a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$, a je tedy lineární kombinací funkcí $x^2,\ x$ a 1 ($1(x) = 1\ \forall x \in \mathbb{R}$). Funkce $x^2,\ x$ a 1 generují $\mathcal{P}_2$. Pomocí Wronskiánu ukážeme, že jsou lineárně nezávislé (determinant počítáme rozvojem podle posledního řádku):

$$W(x) = \begin{vmatrix} x^2 & x & 1 \\ 2x & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} x & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Ukázali jsme, že funkce $x^2,\ x$ a 1 tvoří lineárně nezávislý systém funkcí a generují lineární prostor $\mathcal{P}_2$, tvoří tedy bázi $\mathcal{P}_2$. Tato báze má tři prvky, a tedy dimenze $\mathcal{P}_2\ =\ 3$.

Zpět

Příklad 1.1.3

Nechť $\mathcal{P}_2$ je množina všech polynomů stupně nejvýše 2, $\widetilde{\mathcal{P}_2}$ je množina všech polynomů stupně právě 2, tj.

$$\mathcal{P}_2 = \{p,\ p \text{ je polynom, st}\, p \leq 2\}, \quad \widetilde{\mathcal{P}_2} = \{p,\ p \text{ je polynom, st}\, p = 2\}.$$

Rozhodněte, zda $\mathcal{P}_2$ a $\widetilde{\mathcal{P}_2}$ tvoří lineární podprostor vektorového prostoru všech polynomů $\mathcal{P}$. Pokud ano, najděte jejich bázi a určete jejich dimenzi.

Maple:

```
> with(linalg):
> p:=a*x^2+b*x+c;
```

$$p := a\,x^2 + b\,x + c$$

```
> degree(p,x);
```

$$2$$

```
> a:=0: b:=0: c:=0:
> p(x);
```

$$0$$

```
> degree(p,x);
```

$$-\infty$$

```
> c:=1:
> p(x);
```

$$1$$

```
> degree(p,x);
```

$$0$$

Další

Příklad 1.1.3

Nechť $\mathcal{P}_2$ je množina všech polynomů stupně nejvýše 2, $\widetilde{\mathcal{P}_2}$ je množina všech polynomů stupně právě 2, tj.

$$\mathcal{P}_2 = \{p,\ p \text{ je polynom, st}\, p \leq 2\}, \quad \widetilde{\mathcal{P}_2} = \{p,\ p \text{ je polynom, st}\, p = 2\}.$$

Rozhodněte, zda $\mathcal{P}_2$ a $\widetilde{\mathcal{P}_2}$ tvoří lineární podprostor vektorového prostoru všech polynomů $\mathcal{P}$. Pokud ano, najděte jejich bázi a určete jejich dimenzi.

Maple:

```
> p1:=a1*x^2+b1*x+c1;
```

$$p1 := a1\, x^2 + b1\, x + c1$$

```
> p2:=a2*x^2+b2*x+c2;
```

$$p2 := a2\, x^2 + b2\, x + c2$$

```
> p1+p2;
```

$$a1\, x^2 + b1\, x + c1 + a2\, x^2 + b2\, x + c2$$

```
> sort(%);
```

$$x^2\, a2 + x^2\, a1 + x\, b2 + x\, b1 + c1 + c2$$

```
> degree(%,x);
```

$$2$$

```
> alpha*p1;
```

$$\alpha\, (x^2\, a1 + x\, b1 + c1)$$

```
> degree(%,x);
```

$$2$$

Další

Příklad 1.1.3

Nechť $\mathcal{P}_2$ je množina všech polynomů stupně nejvýše 2, $\widetilde{\mathcal{P}_2}$ je množina všech polynomů stupně právě 2, tj.

$$\mathcal{P}_2 = \{p,\ p \text{ je polynom, st}\, p \leq 2\}, \quad \widetilde{\mathcal{P}_2} = \{p,\ p \text{ je polynom, st}\, p = 2\}.$$

Rozhodněte, zda $\mathcal{P}_2$ a $\widetilde{\mathcal{P}_2}$ tvoří lineární podprostor vektorového prostoru všech polynomů $\mathcal{P}$. Pokud ano, najděte jejich bázi a určete jejich dimenzi.

Maple:

```
> A := vector([x^2,x,1]);
```

$$A := [x^2,\ x,\ 1]$$

```
> Wr := wronskian(A,x);
```

$$Wr := \begin{bmatrix} x^2 & x & 1 \\ 2\,x & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> det(Wr);
```

$$-2$$

Zpět

Příklad 1.1.3

Nechť $\mathcal{P}_2$ je množina všech polynomů stupně nejvýše 2, $\widetilde{\mathcal{P}_2}$ je množina všech polynomů stupně právě 2, tj.

$$\mathcal{P}_2 = \{p,\ p \text{ je polynom, st}\, p \le 2\}, \quad \widetilde{\mathcal{P}_2} = \{p,\ p \text{ je polynom, st}\, p = 2\}.$$

Rozhodněte, zda $\mathcal{P}_2$ a $\widetilde{\mathcal{P}_2}$ tvoří lineární podprostor vektorového prostoru všech polynomů $\mathcal{P}$. Pokud ano, najděte jejich bázi a určete jejich dimenzi.

Mathematica:

```
p1[x_] = a1x^2 + b1x + c1;
p2[x_] = a2x^2 + b2x + c2;
```

```
p[x_] = Collect[p1[x] + p2[x], x]
```

$c1 + c2 + (b1 + b2)x + (a1 + a2)x^2$

```
q[x_] = Collect[αp1[x], x]
```

$c1\alpha + b1x\alpha + a1x^2\alpha$

Je vidět, že prostor $\mathcal{P}_2$ je podprostor prostoru $\mathcal{P}$, ale prostor $\widetilde{\mathcal{P}_2}$ není.

```
f[x_] = x^2;
g[x_] = x;
h[x] = 1;
```

```
W = {{f[x], g[x], h[x]}, {D[f[x], x], D[g[x], x], D[h[x], x]},
{D[f[x], {x, 2}], D[g[x], {x, 2}], D[h[x], {x, 2}]}};
```

Další

Příklad 1.1.3

Nechť $\mathcal{P}_2$ je množina všech polynomů stupně nejvýše 2, $\widetilde{\mathcal{P}_2}$ je množina všech polynomů stupně právě 2, tj.

$$\mathcal{P}_2 = \{p,\ p \text{ je polynom, st}\, p \leq 2\}, \quad \widetilde{\mathcal{P}_2} = \{p,\ p \text{ je polynom, st}\, p = 2\}.$$

Rozhodněte, zda $\mathcal{P}_2$ a $\widetilde{\mathcal{P}_2}$ tvoří lineární podprostor vektorového prostoru všech polynomů $\mathcal{P}$. Pokud ano, najděte jejich bázi a určete jejich dimenzi.

Mathematica:

MatrixForm[*W*]

$$\begin{pmatrix} x^2 & x & 1 \\ 2x & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Det[*W*]

-2

Funkce f, g a h tvoří bázi prostoru $\mathcal{P}_2$. Zpět

Lineární nezávislost

- **Příklad 1.2.1** Podle definice zjistěte, zda vektory tvoří lineárně závislý nebo lineárně nezávislý systém vektorů v R^4:

  a) $\overrightarrow{a} = (2, 1, -3, 4)^{\mathrm{T}}, \quad \overrightarrow{b} = (1, 3, -4, -2)^{\mathrm{T}}, \quad \overrightarrow{c} = (3, -1, -1, 0)^{\mathrm{T}}.$

  b) $\overrightarrow{a} = (1, 2, 3, 4)^{\mathrm{T}}, \quad \overrightarrow{b} = (2, 3, 4, 1)^{\mathrm{T}}, \quad \overrightarrow{c} = (3, 4, 1, 2)^{\mathrm{T}}, \quad \overrightarrow{d} = (0, 1, 2, 7)^{\mathrm{T}}.$

- **Příklad 1.2.2** Ověřte, že vektory

  $$\overrightarrow{a} = (-1, 4, 2, -5, 3)^{\mathrm{T}}, \quad \overrightarrow{b} = (1, 1, 0, 0, 4)^{\mathrm{T}}, \quad \overrightarrow{c} = (3, -5, -2, 8, 7)^{\mathrm{T}}$$

  jsou lineárně nezávislé, a vyjádřete vektor $\overrightarrow{v} = (1, -4, -2, 5, -3)^{\mathrm{T}}$ jako jejich lineární kombinaci.

- **Příklad 1.2.3** Nechť vektory $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ tvoří lineárně nezávislý systém vektorů ve vektorovém prostoru $\mathcal{V}$. Určete, zda následující systémy vektorů jsou lineárně závislé nebo nezávislé:
  a) $\overrightarrow{u}, \ \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}, \ \overrightarrow{u} + \overrightarrow{w},$
  b) $\overrightarrow{u} - 2\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}, \ 3\overrightarrow{u} - \overrightarrow{w}, \ \overrightarrow{u} + 4\overrightarrow{v} - 3\overrightarrow{w}.$

- **Příklad 1.2.4** Rozhodněte, zda systém funkcí f, g, h ve vektorovém prostoru funkcí spojitých na $\mathbb{R}$, je lineárně závislý nebo nezávislý.
  a) $f(x) = 2x - 1, \ g(x) = x + 1, \ h(x) = -x + 2;$
  b) $f(x) = \sin x, \ g(x) = \cos x, \ h(x) = \sin x \cos x.$

Zpět

Příklad 1.2.1

Podle definice zjistěte, zda vektory tvoří lineárně závislý nebo lineárně nezávislý systém vektorů v R^4:

a) $\overrightarrow{a} = (2, 1, -3, 4)^{\mathrm{T}}, \quad \overrightarrow{b} = (1, 3, -4, -2)^{\mathrm{T}}, \quad \overrightarrow{c} = (3, -1, -1, 0)^{\mathrm{T}}.$

b) $\overrightarrow{a} = (1, 2, 3, 4)^{\mathrm{T}}, \quad \overrightarrow{b} = (2, 3, 4, 1)^{\mathrm{T}}, \quad \overrightarrow{c} = (3, 4, 1, 2)^{\mathrm{T}}, \quad \overrightarrow{d} = (0, 1, 2, 7)^{\mathrm{T}}.$

? Zpět

Příklad 1.2.1

Podle definice zjistěte, zda vektory tvoří lineárně závislý nebo lineárně nezávislý systém vektorů v R^4:

a) $\overrightarrow{a} = (2, 1, -3, 4)^{\mathrm{T}}$, $\overrightarrow{b} = (1, 3, -4, -2)^{\mathrm{T}}$, $\overrightarrow{c} = (3, -1, -1, 0)^{\mathrm{T}}$.

b) $\overrightarrow{a} = (1, 2, 3, 4)^{\mathrm{T}}$, $\overrightarrow{b} = (2, 3, 4, 1)^{\mathrm{T}}$, $\overrightarrow{c} = (3, 4, 1, 2)^{\mathrm{T}}$, $\overrightarrow{d} = (0, 1, 2, 7)^{\mathrm{T}}$.

Výsledek:

a) vektory $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ tvoří lineárně nezávislý systém vektorů

b) vektory $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$, $\overrightarrow{d}$ tvoří lineárně závislý systém vektorů.

Zpět

Příklad 1.2.1

Podle definice zjistěte, zda vektory tvoří lineárně závislý nebo lineárně nezávislý systém vektorů v R^4:

a) $\vec{a} = (2, 1, -3, 4)^{\mathrm{T}}, \quad \vec{b} = (1, 3, -4, -2)^{\mathrm{T}}, \quad \vec{c} = (3, -1, -1, 0)^{\mathrm{T}}.$

b) $\vec{a} = (1, 2, 3, 4)^{\mathrm{T}}, \quad \vec{b} = (2, 3, 4, 1)^{\mathrm{T}}, \quad \vec{c} = (3, 4, 1, 2)^{\mathrm{T}}, \quad \vec{d} = (0, 1, 2, 7)^{\mathrm{T}}.$

Návod:

Hledáme koeficienty lineární kombinace daných vektorů, která dává nulový vektor. Jsou-li všechny tyto koeficienty nulové (tzv. triviální lineární kombinace), systém vektorů je lineárně nezávislý. Je-li alespoň jeden koeficient nenulový, pak systém vektorů je lineárně závislý.

Zpět

Příklad 1.2.1

Podle definice zjistěte, zda vektory tvoří lineárně závislý nebo lineárně nezávislý systém vektorů v R^4:

a) $\quad \overrightarrow{a} = (2,1,-3,4)^{\mathrm{T}}, \quad \overrightarrow{b} = (1,3,-4,-2)^{\mathrm{T}}, \quad \overrightarrow{c} = (3,-1,-1,0)^{\mathrm{T}}.$

b) $\quad \overrightarrow{a} = (1,2,3,4)^{\mathrm{T}}, \quad \overrightarrow{b} = (2,3,4,1)^{\mathrm{T}}, \quad \overrightarrow{c} = (3,4,1,2)^{\mathrm{T}}, \quad \overrightarrow{d} = (0,1,2,7)^{\mathrm{T}}.$

Řešení:

a)
Hledáme čísla $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ (koeficienty lineární kombinace) tak, aby

$$\alpha \cdot (2,1,-3,4)^{\mathrm{T}} + \beta \cdot (1,3,-4,-2)^{\mathrm{T}} + \gamma \cdot (3,-1,-1,0)^{\mathrm{T}} = (0,0,0,0)^{\mathrm{T}}.$$

Po souřadnicích:

$$\begin{aligned} 2\alpha + \beta + 3\gamma &= 0 \\ \alpha + 3\beta - \gamma &= 0 \\ -3\alpha - 4\beta - \gamma &= 0 \\ 4\alpha - 2\beta &= 0 \end{aligned}$$

Tuto homogenní soustavu vyřešíme Gaussovou eliminační metodou:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \\ -3 & -4 & -1 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & 5 \\ 0 & -5 & 7 \\ 0 & -4 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -50 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

K (-2)násobku druhého řádku jsme přičetli první řádek, k dvojnásobku třetího řádku přičteme trojnásobek prvního a ke čtvrtému řádku přičteme (-2)násobek prvního. Tím vynulujeme poddiagonální prvky prvního sloupce.

Další

Příklad 1.2.1

Podle definice zjistěte, zda vektory tvoří lineárně závislý nebo lineárně nezávislý systém vektorů v R^4:

a) $\overrightarrow{a} = (2, 1, -3, 4)^{\mathrm{T}}, \quad \overrightarrow{b} = (1, 3, -4, -2)^{\mathrm{T}}, \quad \overrightarrow{c} = (3, -1, -1, 0)^{\mathrm{T}}.$

b) $\overrightarrow{a} = (1, 2, 3, 4)^{\mathrm{T}}, \quad \overrightarrow{b} = (2, 3, 4, 1)^{\mathrm{T}}, \quad \overrightarrow{c} = (3, 4, 1, 2)^{\mathrm{T}}, \quad \overrightarrow{d} = (0, 1, 2, 7)^{\mathrm{T}}.$

Řešení:

Nyní od třetího řádku odečteme druhý a k pětinásobku čtvrtého řádku přičteme (−4)násobek druhého. Tím jsme vynulovali poddiagonální prvky druhého sloupce. Kdybychom nyní ke čtvrtému řádku přičetli 25−ti násobek třetího, dostali bychom nulový vektor. Čtvrtý řádek tedy vynecháme. Můžeme (ale nemusíme) ještě vydělit druhý řádek pěti. Dostaneme matici soustavy v horním trojúhelníkovém tvaru. Hodnost matice je rovna počtu neznámých = 3, podle Frobeniovy věty má tato soustava právě jedno řešení. Toto řešení, tedy koeficienty α, β, γ lineární kombinace, vypočteme zpětným chodem Gaussovy eliminace: $\gamma = 0, \qquad \beta = 0, \qquad \alpha = 0.$

Tedy jediná lineární kombinace vektorů $\overrightarrow{a}, \ \overrightarrow{b}, \ \overrightarrow{c}$, která dává nulový vektor, je triviální lineární kombinace, vektory tedy tvoří lineárně nezávislý systém.

b)

Hledáme čísla $\alpha, \ \beta, \ \gamma, \ \delta$ (koeficienty lineární kombinace) tak, aby

$$\alpha \cdot (1, 2, 3, 4)^{\mathrm{T}} + \beta \cdot (2, 3, 4, 1)^{\mathrm{T}} + \gamma \cdot (3, 4, 1, 2)^{\mathrm{T}} + \delta \cdot (0, 1, 2, 7)^{\mathrm{T}} = (0, 0, 0, 0)^{\mathrm{T}}.$$

Po souřadnicích:

$$\begin{aligned} \alpha + 2\beta + 3\gamma \qquad &= 0 \\ 2\alpha + 3\beta + 4\gamma + \ \delta &= 0 \\ 3\alpha + 4\beta + \ \gamma + 2\delta &= 0 \\ 4\alpha + \ \beta + 2\gamma + 7\delta &= 0 \end{aligned}$$

Další

Příklad 1.2.1

Podle definice zjistěte, zda vektory tvoří lineárně závislý nebo lineárně nezávislý systém vektorů v R^4:

a) $\overrightarrow{a} = (2,1,-3,4)^{\mathrm{T}}, \quad \overrightarrow{b} = (1,3,-4,-2)^{\mathrm{T}}, \quad \overrightarrow{c} = (3,-1,-1,0)^{\mathrm{T}}.$

b) $\overrightarrow{a} = (1,2,3,4)^{\mathrm{T}}, \quad \overrightarrow{b} = (2,3,4,1)^{\mathrm{T}}, \quad \overrightarrow{c} = (3,4,1,2)^{\mathrm{T}}, \quad \overrightarrow{d} = (0,1,2,7)^{\mathrm{T}}.$

Řešení:

Tuto homogenní soustavu vyřešíme Gaussovou eliminační metodou:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -8 & 2 \\ 0 & -7 & -10 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

K druhému řádku jsme přičetli (-2)násobek prvního, k třetímu řádku jsme přičetli (-3)násobek prvního a ke čtvrtému řádku jsme přičetli (-4)násobek prvního. Tím jsme vynulovali poddiagonální prvky prvního sloupce. Nyní k třetímu řádku přičteme (-2)násobek druhého a ke čtvrtému řádku přičteme (-7)násobek druhého. Nyní jsou nulové i poddiagonální prvky druhého sloupce. Vidíme, že kdybychom přičetli ke čtvrtému řádku třetí, dostali bychom nulový vektor. Čtvrtý řádek tedy vynecháme. Třetí řádek můžeme ještě vydělit (-4)mi. Hodnost matice soustavy $= 3$, počet neznámých $= 4$, podle Frobeniovy věty má tedy soustava nekonečně mnoho řešení. Řešení najdeme zpětným chodem Gaussovy eliminace. Protože $4 - 3 = 1$, volíme jednu neznámou jako parametr: $\delta := \mathrm{t}, \ \mathrm{t} \in \mathbb{R}$, a dopočítáme:

Další

Příklad 1.2.1

Podle definice zjistěte, zda vektory tvoří lineárně závislý nebo lineárně nezávislý systém vektorů v R^4:

a) $\overrightarrow{a} = (2, 1, -3, 4)^{\mathrm{T}}, \quad \overrightarrow{b} = (1, 3, -4, -2)^{\mathrm{T}}, \quad \overrightarrow{c} = (3, -1, -1, 0)^{\mathrm{T}}.$

b) $\overrightarrow{a} = (1, 2, 3, 4)^{\mathrm{T}}, \quad \overrightarrow{b} = (2, 3, 4, 1)^{\mathrm{T}}, \quad \overrightarrow{c} = (3, 4, 1, 2)^{\mathrm{T}}, \quad \overrightarrow{d} = (0, 1, 2, 7)^{\mathrm{T}}.$

Řešení:

$$\begin{array}{rcl} \gamma = 0 & & \\ -\beta - 2\gamma + \delta = 0 & \Rightarrow & \beta = \quad t \quad , \quad \text{např. pro } t = 1 \quad je \\ \alpha + 2\beta + 3\gamma = 0 & \Rightarrow & \alpha = -2t \end{array} \qquad \begin{array}{ccr} \alpha & = & -2 \\ \beta & = & 1 \\ \gamma & = & 0 \\ \delta & = & 1 \end{array}$$

Našli jsme netriviální lineární kombinaci daných vektorů, která je rovna nulovému vektoru:

$$(-2) \cdot \overrightarrow{a} + 1 \cdot \overrightarrow{b} + 0 \cdot \overrightarrow{c} + 1 \cdot \overrightarrow{d} = (0, 0, 0, 0)^{\mathrm{T}},$$

a tedy vektory tvoří lineárně závislý systém.

Zpět

Příklad 1.2.1

Podle definice zjistěte, zda vektory tvoří lineárně závislý nebo lineárně nezávislý systém vektorů v R^4:

a) $\overrightarrow{a} = (2,1,-3,4)^{\mathrm{T}}$, $\overrightarrow{b} = (1,3,-4,-2)^{\mathrm{T}}$, $\overrightarrow{c} = (3,-1,-1,0)^{\mathrm{T}}$.

b) $\overrightarrow{a} = (1,2,3,4)^{\mathrm{T}}$, $\overrightarrow{b} = (2,3,4,1)^{\mathrm{T}}$, $\overrightarrow{c} = (3,4,1,2)^{\mathrm{T}}$, $\overrightarrow{d} = (0,1,2,7)^{\mathrm{T}}$.

Maple:

```
> with(linalg):
> a := vector( [2,1,-3,4] ): b := vector( [1,3,-4,-2] ): c := vector(
[3,-1,-1,0] ): basis( {a, b, c} );
```

$$\{a,\ b,\ c\}$$

```
> eqns:= {2*alpha+beta+3*gamma=0,alpha+3*beta-gamma=0,
-3*alpha-4*beta-gamma=0,4*alpha-2*beta=0}:
> A:=genmatrix(eqns,[alpha,beta,gamma]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -3 & -4 & -1 \\ 4 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> koef:=vector([alpha,beta,gamma]);
```

$$koef := [\alpha,\ \beta,\ \gamma]$$

```
> assign(koef=linsolve(A,[0,0,0,0]));
> eval(koef);
```

$$[0,\ 0,\ 0]$$

Další

Příklad 1.2.1

Podle definice zjistěte, zda vektory tvoří lineárně závislý nebo lineárně nezávislý systém vektorů v R^4:

a) $\vec{a} = (2,1,-3,4)^{\mathrm{T}}, \quad \vec{b} = (1,3,-4,-2)^{\mathrm{T}}, \quad \vec{c} = (3,-1,-1,0)^{\mathrm{T}}.$

b) $\vec{a} = (1,2,3,4)^{\mathrm{T}}, \quad \vec{b} = (2,3,4,1)^{\mathrm{T}}, \quad \vec{c} = (3,4,1,2)^{\mathrm{T}}, \quad \vec{d} = (0,1,2,7)^{\mathrm{T}}.$

Maple:

b)

```
> a := vector( [1,2,3,4] ): b := vector( [2,3,4,1] ): c := vector(
[3,4,1,2] ): d:=vector([0,1,2,7]): basis( {a, b, c,d} );
```

$$\{a,\ b,\ c\}$$

```
> eqns:= {alpha+2*beta+3*gamma=0,2*alpha+3*beta+4*gamma+delta=0,
3*alpha+4*beta+gamma+2*delta=0,4*alpha+beta+2*gamma+7*delta=0}:
> A:=genmatrix(eqns,[alpha,beta,gamma,delta]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

```
> ffgausselim(A);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Další

Příklad 1.2.1

Podle definice zjistěte, zda vektory tvoří lineárně závislý nebo lineárně nezávislý systém vektorů v R^4:

a) $\overrightarrow{a} = (2, 1, -3, 4)^{\mathrm{T}}, \quad \overrightarrow{b} = (1, 3, -4, -2)^{\mathrm{T}}, \quad \overrightarrow{c} = (3, -1, -1, 0)^{\mathrm{T}}.$

b) $\overrightarrow{a} = (1, 2, 3, 4)^{\mathrm{T}}, \quad \overrightarrow{b} = (2, 3, 4, 1)^{\mathrm{T}}, \quad \overrightarrow{c} = (3, 4, 1, 2)^{\mathrm{T}}, \quad \overrightarrow{d} = (0, 1, 2, 7)^{\mathrm{T}}.$

Maple:

```
> rank(A);
```

$$3$$

```
> koef:=vector([alpha,beta,gamma,delta]);
```

$$koef := [\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta]$$

```
> assign(koef=linsolve(A,[0,0,0,0]));
> eval(koef);
```

$$[-2\ \_t_1,\ \_t_1,\ 0,\ \_t_1]$$

```
> koefval:=t->(-2*t,t,0,t);
```

$$koefval := t \to (-2\,t,\ t,\ 0,\ t)$$

```
> koefval(1);
```

$$-2,\ 1,\ 0,\ 1$$

Zpět

Příklad 1.2.1

Podle definice zjistěte, zda vektory tvoří lineárně závislý nebo lineárně nezávislý systém vektorů v R^4:

a) $\vec{a} = (2, 1, -3, 4)^{\mathrm{T}}$, $\vec{b} = (1, 3, -4, -2)^{\mathrm{T}}$, $\vec{c} = (3, -1, -1, 0)^{\mathrm{T}}$.

b) $\vec{a} = (1, 2, 3, 4)^{\mathrm{T}}$, $\vec{b} = (2, 3, 4, 1)^{\mathrm{T}}$, $\vec{c} = (3, 4, 1, 2)^{\mathrm{T}}$, $\vec{d} = (0, 1, 2, 7)^{\mathrm{T}}$.

Mathematica:

a)

$\boldsymbol{a = \{2, 1, -3, 4\}; b = \{1, 3, -4, -2\}; c = \{3, -1, -1, 0\};}$

$\textbf{MatrixForm}[\boldsymbol{\alpha a + \beta b + \gamma c}] \boldsymbol{==} \textbf{MatrixForm}[\boldsymbol{\{0, 0, 0, 0\}}]$

$$\begin{pmatrix} 2\alpha + \beta + 3\gamma \\ \alpha + 3\beta - \gamma \\ -3\alpha - 4\beta - \gamma \\ 4\alpha - 2\beta \end{pmatrix} == \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{A} = \textbf{Transpose}[\boldsymbol{\{a, b, c\}}];$

$\textbf{MatrixForm}[\boldsymbol{A}]$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \\ -3 & -4 & -1 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Další

Příklad 1.2.1

Podle definice zjistěte, zda vektory tvoří lineárně závislý nebo lineárně nezávislý systém vektorů v R^4:

a) $\overrightarrow{a} = (2, 1, -3, 4)^{\mathrm{T}}$, $\overrightarrow{b} = (1, 3, -4, -2)^{\mathrm{T}}$, $\overrightarrow{c} = (3, -1, -1, 0)^{\mathrm{T}}$.

b) $\overrightarrow{a} = (1, 2, 3, 4)^{\mathrm{T}}$, $\overrightarrow{b} = (2, 3, 4, 1)^{\mathrm{T}}$, $\overrightarrow{c} = (3, 4, 1, 2)^{\mathrm{T}}$, $\overrightarrow{d} = (0, 1, 2, 7)^{\mathrm{T}}$.

Mathematica:

$\boldsymbol{\{\alpha, \beta, \gamma\} = \mathbf{LinearSolve}[A, \{0, 0, 0, 0\}]}$

$\{0, 0, 0\}$

Vektory jsou lineárně nezávislé.

b)

$\boldsymbol{\alpha = .; \beta = .; \gamma = .; \delta = .;}$

$\boldsymbol{a = \{1, 2, 3, 4\}; b = \{2, 3, 4, 1\}; c = \{3, 4, 1, 2\}; d = \{0, 1, 2, 7\};}$

$\boldsymbol{\mathbf{MatrixForm}[\alpha a + \beta b + \gamma c + \delta d] == \mathbf{MatrixForm}[\{0, 0, 0, 0\}]}$

$$\begin{pmatrix} \alpha + 2\beta + 3\gamma \\ 2\alpha + 3\beta + 4\gamma + \delta \\ 3\alpha + 4\beta + \gamma + 2\delta \\ 4\alpha + \beta + 2\gamma + 7\delta \end{pmatrix} == \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{A = \mathbf{Transpose}[\{a, b, c, d\}];}$

Další

Příklad 1.2.1

Podle definice zjistěte, zda vektory tvoří lineárně závislý nebo lineárně nezávislý systém vektorů v R^4:

a) $\overrightarrow{a} = (2, 1, -3, 4)^{\mathrm{T}}, \quad \overrightarrow{b} = (1, 3, -4, -2)^{\mathrm{T}}, \quad \overrightarrow{c} = (3, -1, -1, 0)^{\mathrm{T}}.$

b) $\overrightarrow{a} = (1, 2, 3, 4)^{\mathrm{T}}, \quad \overrightarrow{b} = (2, 3, 4, 1)^{\mathrm{T}}, \quad \overrightarrow{c} = (3, 4, 1, 2)^{\mathrm{T}}, \quad \overrightarrow{d} = (0, 1, 2, 7)^{\mathrm{T}}.$

Mathematica:

MatrixForm[*A*]

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

NullSpace[*A*]

$\{\{-2, 1, 0, 1\}\}$

$\boldsymbol{\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\} =}$ **NullSpace[*A*][[1]]**

$\{-2, 1, 0, 1\}$

Vektory jsou lineárně závislé.

Zpět

Příklad 1.2.2

Ověřte, že vektory

$$\vec{a} = (-1,\ 4,\ 2, -5,\ 3)^{\mathrm{T}}, \quad \vec{b} = (\ 1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 4)^{\mathrm{T}}, \quad \vec{c} = (\ 3, -5, -2,\ 8,\ 7)^{\mathrm{T}}$$

jsou lineárně nezávislé, a vyjádřete vektor $\vec{v} = (1, -4, -2, 5, -3)^{\mathrm{T}}$ jako jejich lineární kombinaci.

? Zpět

Příklad 1.2.2

Ověřte, že vektory

$$\overrightarrow{a} = (-1,\ 4,\ 2, -5,\ 3)^{\mathrm{T}}, \quad \overrightarrow{b} = (\ 1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 4)^{\mathrm{T}}, \quad \overrightarrow{c} = (\ 3, -5, -2,\ 8,\ 7)^{\mathrm{T}}$$

jsou lineárně nezávislé, a vyjádřete vektor $\overrightarrow{v} = (1, -4, -2, 5, -3)^{\mathrm{T}}$ jako jejich lineární kombinaci.

Výsledek:

$\overrightarrow{v} = (-1) \cdot \overrightarrow{a} + 0 \cdot \overrightarrow{b} + 0 \cdot \overrightarrow{c}$.

Zpět

Příklad 1.2.2

Ověřte, že vektory

$$\overrightarrow{a} = (-1,\ 4,\ 2, -5,\ 3)^{\mathrm{T}}, \quad \overrightarrow{b} = (\ 1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 4)^{\mathrm{T}}, \quad \overrightarrow{c} = (\ 3, -5, -2,\ 8,\ 7)^{\mathrm{T}}$$

jsou lineárně nezávislé, a vyjádřete vektor $\overrightarrow{v} = (1, -4, -2, 5, -3)^{\mathrm{T}}$ jako jejich lineární kombinaci.

Návod:

Z vektorů $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ sestavíme matici $\mathbf{A}$, kterou převedeme na horní trojúhelníkový tvar. Tři vektory $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ jsou lineárně nezávislé právě když hodnost matice $\mathbf{A}$ je rovna 3. Koeficienty lineární kombinace určíme jako řešení nehomogenní soustavy lineárních rovnic.

Zpět

Příklad 1.2.2

Ověřte, že vektory

$$\overrightarrow{a} = (-1,\ 4,\ 2, -5,\ 3)^{\mathrm{T}}, \quad \overrightarrow{b} = (\ 1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 4)^{\mathrm{T}}, \quad \overrightarrow{c} = (\ 3, -5, -2,\ 8,\ 7)^{\mathrm{T}}$$

jsou lineárně nezávislé, a vyjádřete vektor $\overrightarrow{v} = (1, -4, -2, 5, -3)^{\mathrm{T}}$ jako jejich lineární kombinaci.

Řešení:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \overrightarrow{a}^{\mathrm{T}} \\ \overrightarrow{b}^{\mathrm{T}} \\ \overrightarrow{c}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 & -5 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 3 & -5 & -2 & 8 & 7 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 & -5 & 3 \\ 0 & 5 & 2 & -5 & 7 \\ 0 & 7 & 4 & -7 & 16 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 & -5 & 3 \\ 0 & 5 & 2 & -5 & 7 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 31 \end{pmatrix}$$

Nejprve jsme k druhému řádku přičetli první a k třetímu řádku jsme přičetli trojnásobek prvního. Tím jsme vynulovali poddiagonální prvky prvního sloupce. Následně jsme k pětinásobku posledního řádku přičetli $(-7)-$mi násobek druhého řádku. Získali jsme matici $\mathbf{A}$ v horním trojúhelníkovém tvaru. Hodnost matice $\mathbf{A}$, $\mathrm{h}(\mathbf{A}) = 3$, a tedy tři vektory $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ jsou lineárně nezávislé.
Na první pohled je v tomto případě vidět, že vektor $\overrightarrow{v}$ je opačný k vektoru $\overrightarrow{a}$. Z cvičných důvodů ale sestavíme a vyřešíme příslušnou nehomogenní soustavu lineárních rovnic pro určení koeficientů lineární kombinace.
Hledáme čísla α, β a γ tak, aby

$$\alpha \cdot (-1,\ 4,\ 2, -5,\ 3)^{\mathrm{T}} + \beta \cdot (\ 1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 4)^{\mathrm{T}} + \gamma \cdot (\ 3, -5, -2,\ 8,\ 7)^{\mathrm{T}} = (1, -4, -2, 5, -3)^{\mathrm{T}}.$$

Další

Příklad 1.2.2

Ověřte, že vektory

$$\vec{a} = (-1,\ 4,\ 2, -5,\ 3)^{\mathrm{T}}, \quad \vec{b} = (\ 1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 4)^{\mathrm{T}}, \quad \vec{c} = (\ 3, -5, -2,\ 8,\ 7)^{\mathrm{T}}$$

jsou lineárně nezávislé, a vyjádřete vektor $\vec{v} = (1, -4, -2, 5, -3)^{\mathrm{T}}$ jako jejich lineární kombinaci.

Řešení:

Po souřadnicích:

$$\begin{array}{rcl} -\alpha + \beta + \gamma & = & 1 \\ 4\alpha + \beta - 5\gamma & = & -4 \\ 2\alpha - 2\gamma & = & -2 \\ -5\alpha + 8\gamma & = & 5 \\ 3\alpha + 4\beta + 7\gamma & = & -3 \end{array}$$

Tuto soustavu vyřešíme Gaussovou eliminační metodou:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & -5 & -4 \\ 2 & 0 & -2 & -2 \\ -5 & 0 & 8 & 5 \\ 3 & 4 & 7 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 7 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & -5 & -7 & 0 \\ 0 & 7 & 16 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 31 & 0 \end{array}\right) \sim$$

Vynulování poddiagonálních prvků prvního sloupce: k druhému řádku jsme přičetli 4−násobek prvního, ke třetímu řádku jsme přičetli dvojnásobek prvního, ke čtvrtému řádku jsme přičetli (−5)−tinásobek prvního a k pátému řádku jsme přičetli trojnásobek prvního. Kdybychom nyní ke čtvrtému řádku přičetli druhý, dostaneme nulový vektor, čtvrtý řádek tedy vynecháme a vynulujeme poddiagonální prvky druhého sloupce.

Další

Příklad 1.2.2

Ověřte, že vektory

$$\overrightarrow{a} = (-1,\ 4,\ 2, -5,\ 3)^{\mathrm{T}}, \quad \overrightarrow{b} = (\ 1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 4)^{\mathrm{T}}, \quad \overrightarrow{c} = (\ 3, -5, -2,\ 8,\ 7)^{\mathrm{T}}$$

jsou lineárně nezávislé, a vyjádřete vektor $\overrightarrow{v} = (1, -4, -2, 5, -3)^{\mathrm{T}}$ jako jejich lineární kombinaci.

Řešení:

K pětinásobku třetího řádku přičteme (-2)násobek druhého, k pětinásobku čtvrtého řádku přičteme $(-7)-$mi násobek druhého. Kdybychom nyní k $(-6)-$ti násobku čtvrtého řádku přičetli 31násobek třetího, dostali bychom opět nulový vektor. Čtvrtý řádek tedy vynecháme. Dostaneme rozšířenou matici soustavy v horním trojúhelníkovém tvaru. Zpětným chodem Gaussovy eliminace dopočteme hledané koeficienty α, β, γ lineární kombinace.

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{array}{rcl} 6\gamma & = & 0 \\ 5\beta & = & 0 \\ -\alpha & = & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{rcr} \gamma & = & 0 \\ \beta & = & 0 \\ \alpha & = & -1 \end{array}$$

Tedy

$$\overrightarrow{v} = (-1) \cdot \overrightarrow{a} + 0 \cdot \overrightarrow{b} + 0 \cdot \overrightarrow{c}$$

Zpět

Příklad 1.2.2

Ověřte, že vektory

$$\vec{a} = (-1,\ 4,\ 2, -5,\ 3)^{\mathrm{T}}, \quad \vec{b} = (\ 1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 4)^{\mathrm{T}}, \quad \vec{c} = (\ 3, -5, -2,\ 8,\ 7)^{\mathrm{T}}$$

jsou lineárně nezávislé, a vyjádřete vektor $\vec{v} = (1, -4, -2, 5, -3)^{\mathrm{T}}$ jako jejich lineární kombinaci.

Maple:

```
> with(linalg):
> a := vector( [-1,4,2,-5,3] ): b := vector( [1,1,0,0,4] ): c :=
vector( [3,-5,-2,8,7] ): basis( {a, b, c} );
```

$$\{a,\ b,\ c\}$$

```
> A:=matrix(3,5,[-1,4,2,-5,3,1,1,0,0,4,3,-5,-2,8,7]);
```

$$A := \begin{bmatrix} -1 & 4 & 2 & -5 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 3 & -5 & -2 & 8 & 7 \end{bmatrix}$$

```
> ffgausselim(A);
```

$$\begin{bmatrix} -1 & 4 & 2 & -5 & 3 \\ 0 & -5 & -2 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & -6 & 0 & -31 \end{bmatrix}$$

```
> rank(A);
```

$$3$$

Další

Příklad 1.2.2

Ověřte, že vektory

$$\overrightarrow{a} = (-1,\ 4,\ 2, -5,\ 3)^{\mathrm{T}}, \quad \overrightarrow{b} = (\ 1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 4)^{\mathrm{T}}, \quad \overrightarrow{c} = (\ 3, -5, -2,\ 8,\ 7)^{\mathrm{T}}$$

jsou lineárně nezávislé, a vyjádřete vektor $\overrightarrow{v} = (1, -4, -2, 5, -3)^{\mathrm{T}}$ jako jejich lineární kombinaci.

Maple:

```
> eqns:=
{-alpha+beta+3*gamma=1,4*alpha+beta-5*gamma=-4,2*alpha-2*gamma=-2,
-5*alpha+8*gamma=5,3*alpha+4*beta+7*gamma=-3}:
> B:=genmatrix(eqns,[alpha,beta,gamma]);
```

$$B := \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & -5 \\ 2 & 0 & -2 \\ -5 & 0 & 8 \\ 3 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

```
> v:=vector([1,-4,-2,5,-3]);
```

$$v := [1,\ -4,\ -2,\ 5,\ -3]$$

```
> C:=concat(B,v);
```

$$C := \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & -5 & -4 \\ 2 & 0 & -2 & -2 \\ -5 & 0 & 8 & 5 \\ 3 & 4 & 7 & -3 \end{bmatrix}$$

Další

Příklad 1.2.2

Ověřte, že vektory

$$\overrightarrow{a} = (-1,\ 4,\ 2, -5,\ 3)^{\mathrm{T}}, \quad \overrightarrow{b} = (\ 1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 4)^{\mathrm{T}}, \quad \overrightarrow{c} = (\ 3, -5, -2,\ 8,\ 7)^{\mathrm{T}}$$

jsou lineárně nezávislé, a vyjádřete vektor $\overrightarrow{v} = (1, -4, -2, 5, -3)^{\mathrm{T}}$ jako jejich lineární kombinaci.

Maple:

```
> ffgausselim(C);
```

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -5 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> backsub(%);
```

$$[-1,\ 0,\ 0]$$

```
> koef:=vector([alpha,beta,gamma]);
```

$$koef := [\alpha,\ \beta,\ \gamma]$$

```
> assign(koef=linsolve(B,v));
> alpha:=koef[1];
```

$$\alpha := -1$$

```
> beta:=koef[2];
```

$$\beta := 0$$

Další

Příklad 1.2.2

Ověřte, že vektory

$$\overrightarrow{a} = (-1,\ 4,\ 2, -5,\ 3)^{\mathrm{T}}, \quad \overrightarrow{b} = (\ 1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 4)^{\mathrm{T}}, \quad \overrightarrow{c} = (\ 3, -5, -2,\ 8,\ 7)^{\mathrm{T}}$$

jsou lineárně nezávislé, a vyjádřete vektor $\overrightarrow{v} = (1, -4, -2, 5, -3)^{\mathrm{T}}$ jako jejich lineární kombinaci.

Maple:

```
> gama:=koef[3];
```

$$gama := 0$$

```
> alpha*a+beta*b+gama*c;
```

$$-a$$

```
> evalm(v-alpha*a+beta*b+gama*c);
```

$$[0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0]$$

Zpět

Příklad 1.2.2

Ověřte, že vektory

$$\overrightarrow{a} = (-1,\ 4,\ 2, -5,\ 3)^{\mathrm{T}}, \quad \overrightarrow{b} = (\ 1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 4)^{\mathrm{T}}, \quad \overrightarrow{c} = (\ 3, -5, -2,\ 8,\ 7)^{\mathrm{T}}$$

jsou lineárně nezávislé, a vyjádřete vektor $\overrightarrow{v} = (1, -4, -2, 5, -3)^{\mathrm{T}}$ jako jejich lineární kombinaci.

Mathematica:

$\boldsymbol{a = \{-1, 4, 2, -5, 3\}; b = \{0, -5, -2, 5, -7\}; c = \{0, 0, -6, 0, -31\};}$

$\boldsymbol{A = \{a, b, c\};}$

MatrixForm[$\boldsymbol{A}$]

$$\begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 & -5 & 3 \\ 0 & -5 & -2 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & -6 & 0 & -31 \end{pmatrix}$$

MatrixForm[RowReduce[$\boldsymbol{A}$]]

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & \frac{14}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{31}{6} \end{pmatrix}$$

MatrixRank[$\boldsymbol{A}$]

3

Vektory jsou tedy lineárně nezávislé.

Příklad 1.2.2

Ověřte, že vektory

$$\overrightarrow{a} = (-1,\ 4,\ 2, -5,\ 3)^{\mathrm{T}}, \quad \overrightarrow{b} = (\ 1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 4)^{\mathrm{T}}, \quad \overrightarrow{c} = (\ 3, -5, -2,\ 8,\ 7)^{\mathrm{T}}$$

jsou lineárně nezávislé, a vyjádřete vektor $\overrightarrow{v} = (1, -4, -2, 5, -3)^{\mathrm{T}}$ jako jejich lineární kombinaci.

Mathematica:

$\boldsymbol{v = \{1, -4, -2, 5, -3\};}$

$\boldsymbol{\{\alpha, \beta, \gamma\} = \textbf{LinearSolve[Transpose[}A\textbf{]}, v\textbf{]}}$

$\{-1, 0, 0\}$

Tedy

$$\overrightarrow{v} = (-1) \cdot \overrightarrow{a} + 0 \cdot \overrightarrow{b} + 0 \cdot \overrightarrow{c}$$

Zpět

Příklad 1.2.3

Nechť vektory $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ tvoří lineárně nezávislý systém vektorů ve vektorovém prostoru $\mathcal{V}$. Určete, zda následující systémy vektorů jsou lineárně závislé nebo nezávislé:

a) $\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{u}+\overrightarrow{v},\ \overrightarrow{u}+\overrightarrow{w}$,

b) $\overrightarrow{u}-2\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w},\ 3\overrightarrow{u}-\overrightarrow{w},\ \overrightarrow{u}+4\overrightarrow{v}-3\overrightarrow{w}$.

? Zpět

Příklad 1.2.3

Nechť vektory $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ tvoří lineárně nezávislý systém vektorů ve vektorovém prostoru $\mathcal{V}$. Určete, zda následující systémy vektorů jsou lineárně závislé nebo nezávislé:

a) $\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{u}+\overrightarrow{v},\ \overrightarrow{u}+\overrightarrow{w},$

b) $\overrightarrow{u}-2\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w},\ 3\overrightarrow{u}-\overrightarrow{w},\ \overrightarrow{u}+4\overrightarrow{v}-3\overrightarrow{w}.$

Výsledek:

a) vektory tvoří lineárně nezávislý systém vektorů

b) vektory tvoří lineárně závislý systém vektorů.

Zpět

Příklad 1.2.3

Nechť vektory $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ tvoří lineárně nezávislý systém vektorů ve vektorovém prostoru $\mathcal{V}$. Určete, zda následující systémy vektorů jsou lineárně závislé nebo nezávislé:

a) $\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{u}+\overrightarrow{v},\ \overrightarrow{u}+\overrightarrow{w},$

b) $\overrightarrow{u}-2\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w},\ 3\overrightarrow{u}-\overrightarrow{w},\ \overrightarrow{u}+4\overrightarrow{v}-3\overrightarrow{w}.$

Návod:

Hledáme koeficienty lineární kombinace daných vektorů, která dává nulový vektor. Jsou-li všechny tyto koeficienty nulové (tzv. triviální lineární kombinace), systém vektorů je lineárně nezávislý. Je-li alespoň jeden koeficient nenulový, pak systém vektorů je lineárně závislý.

Zpět

Příklad 1.2.3

Nechť vektory $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ tvoří lineárně nezávislý systém vektorů ve vektorovém prostoru $\mathcal{V}$. Určete, zda následující systémy vektorů jsou lineárně závislé nebo nezávislé:
a) $\overrightarrow{u}, \ \overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}, \ \overrightarrow{u}+\overrightarrow{w}$,
b) $\overrightarrow{u}-2\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}, \ 3\overrightarrow{u}-\overrightarrow{w}, \ \overrightarrow{u}+4\overrightarrow{v}-3\overrightarrow{w}$.

Řešení:

Nejprve si uvědomme, že je-li nějaká lineární kombinace lineárně nezávislého systému vektorů rovna nulovému vektoru, pak vždy všechny koeficienty této lineární kombinace jsou nulové.
a)
Hledáme čísla $\alpha, \ \beta, \ \gamma$ tak, aby

$$\alpha \cdot \overrightarrow{u} + \beta \cdot (\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}) + \gamma \cdot (\overrightarrow{u}+\overrightarrow{w}) = \overrightarrow{0},$$

kde $\overrightarrow{0}$ je nulový prvek vektorového prostoru $\mathcal{V}$. Upravíme rovnici na tvar

$$(\alpha+\beta+\gamma) \cdot \overrightarrow{u} + \beta \cdot \overrightarrow{v} + \gamma \cdot \overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}.$$

Toto je lineární kombinace vektorů $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$, která dává nulový vektor. Protože vektory $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ tvoří lineárně nezávislý systém, musí být všechny koeficienty této lineární kombinace nulové:

$$(\alpha+\beta+\gamma) = 0, \qquad \beta = 0, \qquad \gamma = 0.$$

Dostáváme $\alpha=\beta=\gamma=0$, a tedy i vektory $\overrightarrow{u}, \ \overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}, \ \overrightarrow{u}+\overrightarrow{w}$ tvoří lineárně nezávislý systém vektorů.

Další

Příklad 1.2.3

Nechť vektory $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ tvoří lineárně nezávislý systém vektorů ve vektorovém prostoru $\mathcal{V}$. Určete, zda následující systémy vektorů jsou lineárně závislé nebo nezávislé:
a) $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{w}$,
b) $\overrightarrow{u}-2\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}$, $3\overrightarrow{u}-\overrightarrow{w}$, $\overrightarrow{u}+4\overrightarrow{v}-3\overrightarrow{w}$.

Řešení:

b)
Hledáme čísla α, β, γ tak, aby

$$\alpha\cdot(\overrightarrow{u}-2\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w})+\beta\cdot(3\overrightarrow{u}-\overrightarrow{w})+\gamma\cdot(\overrightarrow{u}+4\overrightarrow{v}-3\overrightarrow{w})=\overrightarrow{0}.$$

Neboli

$$(\alpha+3\beta+\gamma)\cdot\overrightarrow{u}+(-2\alpha+4\gamma)\cdot\overrightarrow{v}+(\alpha-\beta-3\gamma)\cdot\overrightarrow{w}=\overrightarrow{0}.$$

Protože vektory $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ tvoří lineárně nezávislý systém, je jediná lineární kombinace, která dává nulový vektor, triviální, tj. všechny koeficienty této lineární kombinace jsou nulové. Pro α, β, γ tak dostáváme homogenní soustavu lineárních algebraických rovnic:

$$\alpha+3\beta+\gamma=0,\quad -2\alpha+4\gamma=0,\quad \alpha-\beta-3\gamma.$$

Soustavu vyřešíme:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & 6 \\ 0 & -4 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Další

Příklad 1.2.3

Nechť vektory $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ tvoří lineárně nezávislý systém vektorů ve vektorovém prostoru $\mathcal{V}$. Určete, zda následující systémy vektorů jsou lineárně závislé nebo nezávislé:
a) $\overrightarrow{u}, \ \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}, \ \overrightarrow{u} + \overrightarrow{w},$
b) $\overrightarrow{u} - 2\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}, \ 3\overrightarrow{u} - \overrightarrow{w}, \ \overrightarrow{u} + 4\overrightarrow{v} - 3\overrightarrow{w}.$

Řešení:

K druhému řádku jsme přičetli dvojnásobek prvního, od třetího řádku jsme odečetli první, pak jsme vynechali třetí řádek a druhý jsme vydělili šesti. Matice soustavy má hodnost 2, počet neznámých je 3, podle Frobeniovy věty má soustava nekonečně mnoho řešení. Řešení, které závisí na jednom parametru $(3 - 2 = 1)$, získáme zpětným chodem Gaussovy eliminace. Položíme $\gamma := \mathrm{t}$ a dopočteme

$$\begin{aligned} \beta + \gamma = 0 \quad &\Rightarrow \quad \beta = -\mathrm{t} \\ \alpha + 3\beta + \gamma = 0 \quad &\Rightarrow \quad \alpha = \ 2\mathrm{t} \end{aligned}$$

Např. pro $\mathrm{t} = 1$ dostaneme $\alpha = 2, \ \beta = -1, \ \gamma = 1$. Našli jsme tedy netriviální lineární kombinaci vektorů $\overrightarrow{u} - 2\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}, \ 3\overrightarrow{u} - \overrightarrow{w}, \ \overrightarrow{u} + 4\overrightarrow{v} - 3\overrightarrow{w}$, která dává nulový vektor, a tedy vektory $\overrightarrow{u} - 2\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}, \ 3\overrightarrow{u} - \overrightarrow{w}, \ \overrightarrow{u} + 4\overrightarrow{v} - 3\overrightarrow{w}$ tvoří lineárně závislý systém.

Zpět

Příklad 1.2.3

Nechť vektory $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ tvoří lineárně nezávislý systém vektorů ve vektorovém prostoru $\mathcal{V}$. Určete, zda následující systémy vektorů jsou lineárně závislé nebo nezávislé:
a) $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{w}$,
b) $\overrightarrow{u}-2\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}$, $3\overrightarrow{u}-\overrightarrow{w}$, $\overrightarrow{u}+4\overrightarrow{v}-3\overrightarrow{w}$.

Maple:

```
> with(linalg):
> collect(a*u+b*(u+v)+c*(u+w),u);
```

$$(a+b+c)\,u+b\,v+c\,w$$

```
> eqns:={a+b+c=0,b=0,c=0};
```

$$eqns := \{a+b+c=0,\ b=0,\ c=0\}$$

```
> A := genmatrix(eqns, [a,b,c]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> linsolve(A,[0,0,0]);
```

$$[0,\ 0,\ 0]$$

b)

```
> collect(a*(u-2*v+w)+b*(3*u-w)+c*(u+4*v-3*w),u);
```

$$(a+3\,b+c)\,u+a\,(-2\,v+w)-b\,w+c\,(4\,v-3\,w)$$

```
> collect(a*(-2*v+w)-b*w+c*(4*v-3*w),v);
```

$$(-2\,a+4\,c)\,v+a\,w-b\,w-3\,c\,w$$

Další

Příklad 1.2.3

Nechť vektory $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ tvoří lineárně nezávislý systém vektorů ve vektorovém prostoru $\mathcal{V}$. Určete, zda následující systémy vektorů jsou lineárně závislé nebo nezávislé:

a) $\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{u}+\overrightarrow{v},\ \overrightarrow{u}+\overrightarrow{w},$

b) $\overrightarrow{u}-2\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w},\ 3\overrightarrow{u}-\overrightarrow{w},\ \overrightarrow{u}+4\overrightarrow{v}-3\overrightarrow{w}.$

Maple:

```
> collect(a*w-b*w-3*c*w,w);
```

$$(a-b-3\,c)\,w$$

```
> res:=(a+3*b+c)*u+(-2*a+4*c)*v+(a-b-3*c)*w;
```

$$res := (a+3\,b+c)\,u+(-2\,a+4\,c)\,v+(a-b-3\,c)\,w$$

```
> eqns:={a+3*b+c=0,-2*a+4*c=0,a-b-3*c=0};
```

$$eqns := \{a+3\,b+c=0,\ -2\,a+4\,c=0,\ a-b-3\,c=0\}$$

```
> A := genmatrix(eqns, [a,b,c]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

```
> ffgausselim(A);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Další

Příklad 1.2.3

Nechť vektory $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ tvoří lineárně nezávislý systém vektorů ve vektorovém prostoru $\mathcal{V}$. Určete, zda následující systémy vektorů jsou lineárně závislé nebo nezávislé:

a) $\overrightarrow{u}, \ \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}, \ \overrightarrow{u} + \overrightarrow{w},$

b) $\overrightarrow{u} - 2\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}, \ 3\overrightarrow{u} - \overrightarrow{w}, \ \overrightarrow{u} + 4\overrightarrow{v} - 3\overrightarrow{w}.$

Maple:

```
> linsolve(A,[0,0,0]);
```

$$[2\_t_1, \ -\_t_1, \ \_t_1]$$

```
> koef:=t->(2*t,-t,t);
```

$$koef := t \rightarrow (2\,t, \ -t, \ t)$$

```
> koef(1);
```

$$2, \ -1, \ 1$$

Zpět

Příklad 1.2.3

Nechť vektory $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ tvoří lineárně nezávislý systém vektorů ve vektorovém prostoru $\mathcal{V}$. Určete, zda následující systémy vektorů jsou lineárně závislé nebo nezávislé:
a) $\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{u}+\overrightarrow{v},\ \overrightarrow{u}+\overrightarrow{w},$
b) $\overrightarrow{u}-2\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w},\ 3\overrightarrow{u}-\overrightarrow{w},\ \overrightarrow{u}+4\overrightarrow{v}-3\overrightarrow{w}.$

Mathematica:

a)
Collect[$au + b(u+v) + c(u+w), u$]

$(a+b+c)u+bv+cw$

Solve[{$a+b+c == 0, b{=}{=}0, c == 0$}, {$a, b, c$}]

$\{\{a\to 0, b\to 0, c\to 0\}\}$

Vektory jsou lineárně nezávislé.

b)
Collect[$a(u-2*v+w)+b(3*u-w)+c(u+4*v-3*w)$,{$u, v, w$}]

$(a+3b+c)u+(-2a+4c)v+(a-b-3c)w$

Solve[{$a+3b+c == 0, -2a+4c{=}{=}0, a-b-3c == 0$},{$a, b, c$}]

Solve::svars :
Equations may not give solutions for all solve variables. More...

$\{\{a\to 2c, b\to -c\}\}$

Vektory jsou lineárně závislé (můžeme volit $c=1$ potom $b=-1$ a $a=2$).

Zpět

Příklad 1.2.4

Rozhodněte, zda systém funkcí f, g, h ve vektorovém prostoru funkcí spojitých na $\mathbb{R}$, je lineárně závislý nebo nezávislý.

a) $f(x) = 2x - 1,\ \ g(x) = x + 1,\ \ h(x) = -x + 2;$

b) $f(x) = \sin x,\ \ g(x) = \cos x,\ \ h(x) = \sin x\ \cos x.$

?

Zpět

Příklad 1.2.4

Rozhodněte, zda systém funkcí f, g, h ve vektorovém prostoru funkcí spojitých na $\mathbb{R}$, je lineárně závislý nebo nezávislý.

a) $f(x) = 2x - 1,\ g(x) = x + 1,\ h(x) = -x + 2;$

b) $f(x) = \sin x,\ g(x) = \cos x,\ h(x) = \sin x\ \cos x.$

Výsledek:

a) Systém je lineárně závislý.

b) Systém je lineárně nezávislý.

Zpět

Příklad 1.2.4

Rozhodněte, zda systém funkcí f, g, h ve vektorovém prostoru funkcí spojitých na $\mathbb{R}$, je lineárně závislý nebo nezávislý.

a) $f(x) = 2x - 1,\ g(x) = x + 1,\ h(x) = -x + 2;$

b) $f(x) = \sin x,\ g(x) = \cos x,\ h(x) = \sin x\ \cos x.$

Návod:

Lineární závislost systému funkcí lze zjistit podle definice (hledáme koeficienty lineární kombinace, která dává nulový prvek daného vektorového prostoru, tj. v tomto případě konstantní nulová funkce na celém $\mathbb{R}$) nebo pomocí Wronskiánu.

Zpět

Příklad 1.2.4

Rozhodněte, zda systém funkcí f, g, h ve vektorovém prostoru funkcí spojitých na $\mathbb{R}$, je lineárně závislý nebo nezávislý.
a) $f(x) = 2x - 1,\ g(x) = x + 1,\ h(x) = -x + 2;$
b) $f(x) = \sin x,\ g(x) = \cos x,\ h(x) = \sin x \cos x.$

Řešení:

a) Podle definice:
Hledáme čísla α, β, γ tak, aby

$$\alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x) + \gamma \cdot h(x) = \mathrm{o}(x) \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

kde $o(x)$ je konstantní nulová funkce na $\mathbb{R}$ - nulový prvek prostoru spojitých funkcí na $\mathbb{R}$:

$$\alpha \cdot (2x - 1) + \beta \cdot (x + 1) + \gamma \cdot (-x + 2) = 0.$$

Po úpravě:

$$(2\alpha + \beta - \gamma) \cdot x + (-\alpha + \beta + 2\gamma) = 0.$$

Funkce vlevo je polynom prvního stupně. Ten je roven nulové funkci právě když všechny jeho koeficienty jsou nulové. Dostáváme homogenní soustavu lineárních rovnic, kterou vyřešíme:

$$\begin{aligned} 2\alpha + \beta - \ \gamma &= 0 \\ -\alpha + \beta + 2\gamma &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Soustava má nekonečně mnoho řešení (hodnost matice soustavy je 2, počet neznámých 3, jednu neznámou volíme jako parametr):

$$\begin{aligned} \alpha &= \ \ \mathrm{t} \\ \beta &= -\mathrm{t} \\ \gamma &= \ \ \mathrm{t} \end{aligned} \quad , \quad \text{např. pro } \mathrm{t} = 1 \text{ je} \quad \begin{aligned} \alpha &= \ \ 1 \\ \beta &= -1 \\ \gamma &= \ \ 1 \end{aligned} \ .$$

Další

Příklad 1.2.4

Rozhodněte, zda systém funkcí f, g, h ve vektorovém prostoru funkcí spojitých na $\mathbb{R}$, je lineárně závislý nebo nezávislý.
a) $f(x) = 2x - 1,\ g(x) = x + 1,\ h(x) = -x + 2;$
b) $f(x) = \sin x,\ g(x) = \cos x,\ h(x) = \sin x\ \cos x.$

Řešení:

Našli jsme netriviální lineární kombinaci, která dává nulovou funkci, a tedy systém funkcí $2x - 1,\ x + 1, -x + 2$ je lineárně závislý.
Pomocí Wronskiánu:

$$W_{f,g,h}(x) = \begin{pmatrix} f(x) & g(x) & h(x) \\ f'(x) & g'(x) & h'(x) \\ f''(x) & g''(x) & h''(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x-1 & x+1 & -x+2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Determinant této matice je roven nule pro všechna $x \in \mathbb{R}$, nelze tedy pomocí Wronskiánu o lineární závislosti nebo nezávislosti daného systému rozhodnout.
b) Podle definice:
Hledáme čísla α, β, γ tak, aby

$$\alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x) + \gamma \cdot h(x) = \mathrm{o}(x) \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

kde $o(x)$ je konstantní nulová funkce na $\mathbb{R}$ - nulový prvek prostoru spojitých funkcí na $\mathbb{R}$:

$$\alpha \cdot \sin x + \beta \cdot \cos x + \gamma \cdot \sin x \cos x = 0.$$

Nyní musíme vyřešit tuto složitou goniometrickou rovnici. Zkusíme, zda pomocí Wronskiánu nezískáme v tomto případě odpověď rychleji.

Další

Příklad 1.2.4

Rozhodněte, zda systém funkcí f, g, h ve vektorovém prostoru funkcí spojitých na $\mathbb{R}$, je lineárně závislý nebo nezávislý.

a) $f(x) = 2x - 1,\ g(x) = x + 1,\ h(x) = -x + 2;$

b) $f(x) = \sin x,\ g(x) = \cos x,\ h(x) = \sin x\ \cos x.$

Řešení:

Pomocí Wronskiánu:

$$W_{f,g,h}(x) = \begin{pmatrix} f(x) & g(x) & h(x) \\ f'(x) & g'(x) & h'(x) \\ f''(x) & g''(x) & h''(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin x & \cos x & \sin x \cos x \\ \cos x & -\sin x & \cos(2x) \\ -\sin x & -\cos x & -2\sin(2x) \end{pmatrix}.$$

Vypočteme determinant rozvojem podle posledního sloupce:

$$\det W_{f,g,h}(x) = \sin x \cos x \begin{vmatrix} \cos x & -\sin x \\ -\sin x & -\cos x \end{vmatrix} - \cos(2x) \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ -\sin x & -\cos x \end{vmatrix} -$$

$$-2\sin(2x) \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix} = \sin x \cos x(-\cos^2 x - \sin^2 x) -$$

$$\cos(2x)(-\sin x \cos x + \sin x \cos x) - 2\sin(2x)(-\sin^2 x - \cos^2 x) = 3\sin x \cos x.$$

Např. pro $x = \dfrac{\pi}{4}$ je $W_{f,g,h}\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 3\dfrac{\sqrt{2}}{2}\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{3}{2} \neq 0$. Našli jsme tedy bod, ve kterém je Wronskián nenulový, a tedy funkce $\sin x$, $\cos x$, $\sin x\ \cos x$ tvoří lineárně nezávislý systém v prostoru funkcí spojitých na $\mathbb{R}$.

Zpět

Příklad 1.2.4

Rozhodněte, zda systém funkcí f, g, h ve vektorovém prostoru funkcí spojitých na $\mathbb{R}$, je lineárně závislý nebo nezávislý.

a) $f(x) = 2x - 1,\ g(x) = x + 1,\ h(x) = -x + 2;$

b) $f(x) = \sin x,\ g(x) = \cos x,\ h(x) = \sin x \cos x.$

Maple:

```
> with(linalg):
> f:=x-> 2*x-1;
```

$$f := x \to 2\,x - 1$$

```
> g:=x->x+1;
```

$$g := x \to x + 1$$

```
> h:=x->-x+2;
```

$$h := x \to -x + 2$$

```
> comb:=x-> a*f(x)+b*g(x)+c*h(x);
```

$$comb := x \to a\,\mathrm{f}(x) + b\,\mathrm{g}(x) + c\,\mathrm{h}(x)$$

```
> collect(comb(x),x);
```

$$(2\,a + b - c)\,x - a + b + 2\,c$$

```
> A:=matrix(2,3,[2,1,-1,-1,1,2]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

```
> ffgausselim(A);
```

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

Další

Příklad 1.2.4

Rozhodněte, zda systém funkcí f, g, h ve vektorovém prostoru funkcí spojitých na $\mathbb{R}$, je lineárně závislý nebo nezávislý.

a) $f(x) = 2x - 1,\ g(x) = x + 1,\ h(x) = -x + 2;$

b) $f(x) = \sin x,\ g(x) = \cos x,\ h(x) = \sin x \cos x.$

Maple:

```
> v:=vector([0,0]);
```

$$v := [0,\ 0]$$

```
> linsolve(A,v);
```

$$[\_t_1,\ -\_t_1,\ \_t_1]$$

```
> koef:=t->(t,-t,t);
```

$$koef := t \to (t,\ -t,\ t)$$

```
> koef(1);
```

$$1,\ -1,\ 1$$

```
> B:=vector([f(x),g(x),h(x)]);
```

$$B := [2\,x - 1,\ x + 1,\ -x + 2]$$

```
> Wr := wronskian(B,x);
```

$$Wr := \begin{bmatrix} 2\,x - 1 & x + 1 & -x + 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> det(Wr);
```

$$0$$

Další

Příklad 1.2.4

Rozhodněte, zda systém funkcí f, g, h ve vektorovém prostoru funkcí spojitých na $\mathbb{R}$, je lineárně závislý nebo nezávislý.

a) $f(x) = 2x - 1,\ g(x) = x + 1,\ h(x) = -x + 2;$

b) $f(x) = \sin x,\ g(x) = \cos x,\ h(x) = \sin x \cos x.$

Maple:

b)

```
> f:=x-> sin(x);
```

$$f := x \to \sin(x)$$

```
> g:=x-> cos(x);
```

$$g := x \to \cos(x)$$

```
> h:=x->sin(x)*cos(x);
```

$$h := x \to \sin(x)\cos(x)$$

```
> comb:=x-> a*f(x)+b*g(x)+c*h(x);
```

$$comb := x \to a\,\mathrm{f}(x) + b\,\mathrm{g}(x) + c\,\mathrm{h}(x)$$

```
> comb(x);
```

$$a\sin(x) + b\cos(x) + c\sin(x)\cos(x)$$

```
> B:=vector([f(x),g(x),h(x)]);
```

$$B := [\sin(x),\ \cos(x),\ \sin(x)\cos(x)]$$

```
> Wr := wronskian(B,x);
```

$$Wr := \begin{bmatrix} \sin(x) & \cos(x) & \sin(x)\cos(x) \\ \cos(x) & -\sin(x) & \cos(x)^2 - \sin(x)^2 \\ -\sin(x) & -\cos(x) & -4\sin(x)\cos(x) \end{bmatrix}$$

Další

Příklad 1.2.4

Rozhodněte, zda systém funkcí f, g, h ve vektorovém prostoru funkcí spojitých na $\mathbb{R}$, je lineárně závislý nebo nezávislý.

a) $f(x) = 2x - 1,\ g(x) = x + 1,\ h(x) = -x + 2;$

b) $f(x) = \sin x,\ g(x) = \cos x,\ h(x) = \sin x \cos x.$

Maple:

```
> det(Wr);
```

$$3\sin(x)^3\cos(x) + 3\cos(x)^3\sin(x)$$

```
> simplify(%);
```

$$3\sin(x)\cos(x)$$

```
> detWr:=x->3*sin(x)*cos(x);
```

$$detWr := x \to 3\sin(x)\cos(x)$$

```
> detWr(Pi/4);
```

$$\frac{3}{2}$$

Zpět

Příklad 1.2.4

Rozhodněte, zda systém funkcí f, g, h ve vektorovém prostoru funkcí spojitých na $\mathbb{R}$, je lineárně závislý nebo nezávislý.

a) $f(x) = 2x - 1,\ g(x) = x + 1,\ h(x) = -x + 2;$

b) $f(x) = \sin x,\ g(x) = \cos x,\ h(x) = \sin x \cos x.$

Mathematica:

a)

f[x_] = 2x − 1; g[x_] = x + 1; h[x_] = −x + 2;

**W = {{f[x], g[x], h[x]}, {D[f[x], x], D[g[x], x], D[h[x], x]},
{D[f[x], {x, 2}], D[g[x], {x, 2}], D[h[x], {x, 2}]}};**

MatrixForm[W]

$$\begin{pmatrix} -1+2x & 1+x & 2-x \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Det[W]

0

Determinant je rovný nule, systém je lineárně závislý.

b)

f[x_] = Sin[x]; g[x_] = Cos[x]; h[x_] = Sin[x]Cos[x];

**W = {{f[x], g[x], h[x]}, {D[f[x], x], D[g[x], x], D[h[x], x]},
{D[f[x], {x, 2}], D[g[x], {x, 2}], D[h[x], {x, 2}]}};**

Další

Příklad 1.2.4

Rozhodněte, zda systém funkcí f, g, h ve vektorovém prostoru funkcí spojitých na $\mathbb{R}$, je lineárně závislý nebo nezávislý.

a) $f(x) = 2x - 1,\ g(x) = x + 1,\ h(x) = -x + 2;$

b) $f(x) = \sin x,\ g(x) = \cos x,\ h(x) = \sin x\, \cos x.$

Mathematica:

MatrixForm[*W*]

$$\begin{pmatrix} \mathrm{Sin}[x] & \mathrm{Cos}[x] & \mathrm{Cos}[x]\mathrm{Sin}[x] \\ \mathrm{Cos}[x] & -\mathrm{Sin}[x] & \mathrm{Cos}[x]^2 - \mathrm{Sin}[x]^2 \\ -\mathrm{Sin}[x] & -\mathrm{Cos}[x] & -4\mathrm{Cos}[x]\mathrm{Sin}[x] \end{pmatrix}$$

Simplify[Det[*W*]]

$3\mathrm{Cos}[x]\mathrm{Sin}[x]$

Determinant je různý od nuly, systém je lineárně nezávislý.

Zpět

Báze a dimenze lineárního prostoru

- **Příklad 1.3.1** Napište libovolnou bázi prostoru $\mathbb{R}^4$, která obsahuje vektor $\overrightarrow{v} = (1,1,1,1)^{\mathrm{T}}$ a vyjádřete vektor $\overrightarrow{a} = (2,-2,1,3)^{\mathrm{T}}$ pomocí této báze.
- **Příklad 1.3.2** Ověřte, že vektory $\overrightarrow{a} = (1,2,1,1)^{\mathrm{T}}$, $\overrightarrow{b} = (2,-1,1,0)^{\mathrm{T}}$, $\overrightarrow{c} = (1,1,2,2)^{\mathrm{T}}$ jsou lineárně nezávislé, a napište jeden další vektor prostoru $\mathbb{R}^4$, který leží v podprostoru, jehož bází jsou vektory $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$, a jeden vektor prostoru $\mathbb{R}^4$, který neleží v podprostoru, jehož bází jsou vektory $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$.
- **Příklad 1.3.3** Určete dimenzi nejmenšího podprostoru prostoru $\mathbb{R}^5$, ve kterém leží vektory
$$\overrightarrow{a} = (4,2,0,-1,1)^{\mathrm{T}},\ \overrightarrow{b} = (-3,1,-1,2,-2)^{\mathrm{T}},\ \overrightarrow{c} = (-2,4,-2,3,-3)^{\mathrm{T}}.$$
Které z vektorů $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ tvoří bázi tohoto podprostoru?

Zpět

Příklad 1.3.1

Napište libovolnou bázi prostoru $\mathbb{R}^4$, která obsahuje vektor $\overrightarrow{v} = (1,1,1,1)^{\mathrm{T}}$ a vyjádřete vektor $\overrightarrow{a} = (2,-2,1,3)^{\mathrm{T}}$ pomocí této báze.

? Zpět

Příklad 1.3.1

Napište libovolnou bázi prostoru $\mathbb{R}^4$, která obsahuje vektor $\overrightarrow{v} = (1,1,1,1)^{\mathrm{T}}$ a vyjádřete vektor $\overrightarrow{a} = (2,-2,1,3)^{\mathrm{T}}$ pomocí této báze.

Výsledek:

Hledaná báze je například tvořena vektory

$$\overrightarrow{v} = (1,1,1,1)^{\mathrm{T}},\ \overrightarrow{e_2} = (0,1,0,0)^{\mathrm{T}},\ \overrightarrow{e_3} = (0,0,1,0)^{\mathrm{T}},\ \overrightarrow{e_4} = (0,0,0,1)^{\mathrm{T}},$$

$$\overrightarrow{a} = 2\cdot\overrightarrow{v} + (-4)\cdot\overrightarrow{e_2} + (-1)\cdot\overrightarrow{e_3} + 1\cdot\overrightarrow{e_4}.$$

Zpět

Příklad 1.3.1

Napište libovolnou bázi prostoru $\mathbb{R}^4$, která obsahuje vektor $\overrightarrow{v} = (1,1,1,1)^{\mathrm{T}}$ a vyjádřete vektor $\overrightarrow{a} = (2,-2,1,3)^{\mathrm{T}}$ pomocí této báze.

Návod:

Protože hledáme bázi prostoru $\mathbb{R}^4$, musíme najít systém čtyř lineárně nezávislých vektorů z $\mathbb{R}^4$, které prostor $\mathbb{R}^4$ generují, přičemž jedním z hledaných vektorů je vektor $\overrightarrow{v}$. Ten doplníme na bázi $\mathbb{R}^4$ např. třemi vektory kanonické (přirozené) báze.
Vektor $\overrightarrow{a}$ najdeme jako lineární kombinaci prvků nalezené báze, neboli hledáme koeficienty příslušné lineární kombinace vektorů báze (tzv. souřadnice vektoru $\overrightarrow{a}$ vzhledem k této bázi).

Zpět

Příklad 1.3.1

Napište libovolnou bázi prostoru $\mathbb{R}^4$, která obsahuje vektor $\overrightarrow{v} = (1,1,1,1)^{\mathrm{T}}$ a vyjádřete vektor $\overrightarrow{a} = (2,-2,1,3)^{\mathrm{T}}$ pomocí této báze.

Řešení:

Kdybychom vektory libovolné báze $\mathbb{R}^4$ zapsali do matice a tuto matici převedli pomocí ekvivalentních úprav na horní trojúhelníkový tvar, měla by tato matice hodnost 4, protože $\dim \mathbb{R}^4 = 4$ a báze je tedy tvořena libovolnými čtyřmi lineárně nezávislými vektory. Zapíšeme-li tedy libovolnou matici řádu 4 (tj. typu 4×4) v horním trojúhelníkovém tvaru, tvoří její 4 řádky 4 vektory báze $\mathbb{R}^4$. Vzhledem k tomu, že nejjednodušší jsou výpočty s vektory kanonické báze, použijeme tyto vektory. Zadaný vektor $\overrightarrow{v} = (1,1,1,1)^{\mathrm{T}}$ má všechny složky nenulové, bude tedy tvořit první řádek matice v horním trojúhelníkovém tvaru:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Hledaná báze je tedy například tvořena vektory

$$\overrightarrow{v} = (1,1,1,1)^{\mathrm{T}},\ \overrightarrow{e_2} = (0,1,0,0)^{\mathrm{T}},\ \overrightarrow{e_3} = (0,0,1,0)^{\mathrm{T}},\ \overrightarrow{e_4} = (0,0,0,1)^{\mathrm{T}}.$$

Ještě jednou poznamenejme, že toto je jen jedna z nekonečně mnoha možných voleb. Nyní najdeme souřadnice vektoru $\overrightarrow{a}$ vzhledem k této bázi, tj. najdeme čísla α, β, γ, δ (koeficienty lineární kombinace) tak, aby

$$\alpha \cdot (1,1,1,1)^{\mathrm{T}} + \beta \cdot (0,1,0,0)^{\mathrm{T}} + \gamma \cdot (0,0,1,0)^{\mathrm{T}} + \delta \cdot (0,0,0,1)^{\mathrm{T}} = (2,-2,1,3)^{\mathrm{T}}.$$

Další

Příklad 1.3.1

Napište libovolnou bázi prostoru $\mathbb{R}^4$, která obsahuje vektor $\overrightarrow{v} = (1,1,1,1)^{\mathrm{T}}$ a vyjádřete vektor $\overrightarrow{a} = (2,-2,1,3)^{\mathrm{T}}$ pomocí této báze.

Řešení:

Dostaneme nehomogenní soustavu lineárních rovnic:

$$\begin{array}{rcrccrcr}
\alpha & = & 2 & & & & & \\
\alpha+\beta & = & -2 & \Rightarrow & & \beta & = & -4 \\
\alpha+\gamma & = & 1 & \Rightarrow & & \gamma & = & -1 \\
\alpha+\delta & = & 3 & \Rightarrow & & \delta & = & 1
\end{array}$$

Tedy

$$\overrightarrow{a} = 2 \cdot \overrightarrow{v} + (-4) \cdot \overrightarrow{e_2} + (-1) \cdot \overrightarrow{e_3} + 1 \cdot \overrightarrow{e_4}.$$

Zpět

Příklad 1.3.1

Napište libovolnou bázi prostoru $\mathbb{R}^4$, která obsahuje vektor $\overrightarrow{v} = (1,1,1,1)^{\mathrm{T}}$ a vyjádřete vektor $\overrightarrow{a} = (2,-2,1,3)^{\mathrm{T}}$ pomocí této báze.

Maple:

```
> with(linalg):
> v:=vector([1,1,1,1]);
```

$$v := [1,\ 1,\ 1,\ 1]$$

```
> e2:=vector([0,1,0,0]);
```

$$e2 := [0,\ 1,\ 0,\ 0]$$

```
> e3:=vector([0,0,1,0]);
```

$$e3 := [0,\ 0,\ 1,\ 0]$$

```
> e4:=vector([0,0,0,1]);
```

$$e4 := [0,\ 0,\ 0,\ 1]$$

```
> A:=matrix([v,e2,e3,e4]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> rank(A);
```

$$4$$

```
> comb:=a*v+b*e2+c*e3+d*e4;
```

$$comb := a\,v + b\,e2 + c\,e3 + d\,e4$$

Další

Příklad 1.3.1

Napište libovolnou bázi prostoru $\mathbb{R}^4$, která obsahuje vektor $\overrightarrow{v} = (1,1,1,1)^{\mathrm{T}}$ a vyjádřete vektor $\overrightarrow{a} = (2,-2,1,3)^{\mathrm{T}}$ pomocí této báze.

Maple:

```
> evalm(comb);
```

$$[a,\ a+b,\ a+c,\ a+d]$$

```
> eqns:={a=2,a+b=-2,a+c=1,a+d=3};
```

$$eqns := \{a = 2,\ a+b=-2,\ a+c=1,\ a+d=3\}$$

```
> B:=genmatrix(eqns,[a,b,c,d]);
```

$$B := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> linsolve(B,[2,-2,1,3]);
```

$$[2,\ -4,\ -1,\ 1]$$

Zpět

Příklad 1.3.1

Napište libovolnou bázi prostoru $\mathbb{R}^4$, která obsahuje vektor $\overrightarrow{v} = (1,1,1,1)^{\mathrm{T}}$ a vyjádřete vektor $\overrightarrow{a} = (2,-2,1,3)^{\mathrm{T}}$ pomocí této báze.

Mathematica:

$\mathbf{e1 = \{1,1,1,1\};}$
$\mathbf{e2 = \{0,1,0,0\};}$
$\mathbf{e3 = \{0,0,1,0\};}$
$\mathbf{e4 = \{0,0,0,1\};}$

$\boldsymbol{A} \mathbf{= \{e1,e2,e3,e4\};}$

$\mathbf{MatrixRank[}\boldsymbol{A}\mathbf{]}$

4

Vektory tvoří bázi $\mathbb{R}^4$.

$\boldsymbol{a} \mathbf{= \{2,-2,1,3\};}$

$\boldsymbol{\{\alpha,\beta,\gamma,\delta\}} \mathbf{= LinearSolve[Transpose[}\boldsymbol{A}\mathbf{],}\boldsymbol{a}\mathbf{]}$

$\{2,-4,-1,1\}$

Vektor $\overrightarrow{a} = 2e_1 - 4e_2 - e_3 + e_4$.

Zpět

Příklad 1.3.2

Ověřte, že vektory $\overrightarrow{a} = (1, 2, 1, 1)^{\mathrm{T}}$, $\overrightarrow{b} = (2, -1, 1, 0)^{\mathrm{T}}$, $\overrightarrow{c} = (1, 1, 2, 2)^{\mathrm{T}}$ jsou lineárně nezávislé, a napište jeden další vektor prostoru $\mathbb{R}^4$, který leží v podprostoru, jehož bází jsou vektory $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$, a jeden vektor prostoru $\mathbb{R}^4$, který neleží v podprostoru, jehož bází jsou vektory $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$.

? Zpět

Příklad 1.3.2

Ověřte, že vektory $\overrightarrow{a} = (1, 2, 1, 1)^{\mathrm{T}}$, $\overrightarrow{b} = (2, -1, 1, 0)^{\mathrm{T}}$, $\overrightarrow{c} = (1, 1, 2, 2)^{\mathrm{T}}$ jsou lineárně nezávislé, a napište jeden další vektor prostoru $\mathbb{R}^4$, který leží v podprostoru, jehož bází jsou vektory $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$, a jeden vektor prostoru $\mathbb{R}^4$, který neleží v podprostoru, jehož bází jsou vektory $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$.

Výsledek:

V podprostoru prostoru $\mathbb{R}^4$, jehož bází jsou vektory $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$, leží např. vektor $(4, 2, 4, 3)^{\mathrm{T}}$, neleží v něm např. vektor $(0, 0, 0, 1)^{\mathrm{T}}$.

Zpět

Příklad 1.3.2

Ověřte, že vektory $\overrightarrow{a} = (1, 2, 1, 1)^{\mathrm{T}}$, $\overrightarrow{b} = (2, -1, 1, 0)^{\mathrm{T}}$, $\overrightarrow{c} = (1, 1, 2, 2)^{\mathrm{T}}$ jsou lineárně nezávislé, a napište jeden další vektor prostoru $\mathbb{R}^4$, který leží v podprostoru, jehož bází jsou vektory $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$, a jeden vektor prostoru $\mathbb{R}^4$, který neleží v podprostoru, jehož bází jsou vektory $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$.

Návod:

Z vektorů $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ setavíme matici, kterou převedeme na horní trojúhelníkový tvar. Vektory $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ tvoří lineárně nezávislý systém právě když hodnost této matice je 3. Libovolný vektor z $\mathbb{R}^4$, který je lineární kombinací vektorů $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$, leží v prostoru, jehož bází jsou tyto vektory. Vektor, který doplníme k vektorům $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ tak, aby matice v horním trojúhelníkovém tvaru byla čtvercová, neleží v prostoru, jehož bází jsou vektory $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$.

Zpět

Příklad 1.3.2

Ověřte, že vektory $\overrightarrow{a} = (1,2,1,1)^T$, $\overrightarrow{b} = (2,-1,1,0)^T$, $\overrightarrow{c} = (1,1,2,2)^T$ jsou lineárně nezávislé, a napište jeden další vektor prostoru $\mathbb{R}^4$, který leží v podprostoru, jehož bází jsou vektory $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$, a jeden vektor prostoru $\mathbb{R}^4$, který neleží v podprostoru, jehož bází jsou vektory $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$.

Řešení:

Z vektorů $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ sestavíme matici, kterou převedeme Gaussovou eliminací na horní trojúhelníkový tvar:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \overrightarrow{a}^T \\ \overrightarrow{b}^T \\ \overrightarrow{c}^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & -7 \end{pmatrix}.$$

Hodnost matice $\mathbf{A} = 3$, tedy tři vektory $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ jsou lineárně nezávislé. Samozřejmě generují podprostor $\mathbb{R}^4$, jehož jsou bází, tj. jejich libovolná lineární kombinace leží v tomto podprostoru. Např. vektor

$$1 \cdot \overrightarrow{a} + 1 \cdot \overrightarrow{b} + 1 \cdot \overrightarrow{c} = 1 \cdot (1,2,1,1)^T + 1 \cdot (2,-1,1,0)^T + 1 \cdot (1,1,2,2)^T = (4,2,4,3)^T.$$

leží v podprostoru $\mathbb{R}^4$, jehož bázi tvoří vektory $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$.
Chceme-li najít vektor, který neleží v podprostoru $\mathbb{R}^4$, jehož bázi tvoří vektory $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$, vyjdeme z horního trojúhelníkového tvaru matice $\mathbf{A}$.

Další

Příklad 1.3.2

Ověřte, že vektory $\overrightarrow{a} = (1,2,1,1)^{\mathrm{T}}$, $\overrightarrow{b} = (2,-1,1,0)^{\mathrm{T}}$, $\overrightarrow{c} = (1,1,2,2)^{\mathrm{T}}$ jsou lineárně nezávislé, a napište jeden další vektor prostoru $\mathbb{R}^4$, který leží v podprostoru, jehož bází jsou vektory $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$, a jeden vektor prostoru $\mathbb{R}^4$, který neleží v podprostoru, jehož bází jsou vektory $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$.

Řešení:

Kdybychom doplnili jako čtvrtý řádek vektor $\overrightarrow{e}_4 = (0,0,0,1)^{\mathrm{T}}$, tvoří vektory $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ a $\overrightarrow{e}_4$ bázi celého prostoru $\mathbb{R}^4$ ($\dim \mathbb{R}^4 = 4$, našli jsme 4 lineárně nezávislé vektory). Ukážeme, že vektor $\overrightarrow{e}_4$ není lineární kombinací vektorů $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ a neleží tedy v prostoru generovaném těmito vektory. Předpokládejme, že existují čísla α, β, γ tak, že $\alpha \cdot \overrightarrow{a} + \beta \cdot \overrightarrow{b} + \gamma \cdot \overrightarrow{c} = \overrightarrow{e_4}$, tj.

$$\alpha \cdot (1,2,1,1)^{\mathrm{T}} + \beta \cdot (2,-1,1,0)^{\mathrm{T}} + \gamma \cdot (1,1,2,2)^{\mathrm{T}} = (0,0,0,1)^{\mathrm{T}}.$$

Dostáváme nehomogenní soustavu lineárních rovnic:

$$\begin{array}{rcl}
\alpha + 2\beta + \gamma & = & 0 \\
2\alpha - \beta + \gamma & = & 0 \\
\alpha + \beta + 2\gamma & = & 0 \\
\alpha + + 2\gamma & = & 1
\end{array}$$

Tuto soustavu vyřešíme Gaussovou eliminační metodou:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim$$

Další

Příklad 1.3.2

Ověřte, že vektory $\overrightarrow{a} = (1,2,1,1)^{\mathrm{T}}$, $\overrightarrow{b} = (2,-1,1,0)^{\mathrm{T}}$, $\overrightarrow{c} = (1,1,2,2)^{\mathrm{T}}$ jsou lineárně nezávislé, a napište jeden další vektor prostoru $\mathbb{R}^4$, který leží v podprostoru, jehož bází jsou vektory $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$, a jeden vektor prostoru $\mathbb{R}^4$, který neleží v podprostoru, jehož bází jsou vektory $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$.

Řešení:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & -5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 30 \end{array}\right).$$

Nejprve jsme k druhému řádku přičetli (-2)násobek prvního, od třetího a čtvrtého řádku jsme odečetli první. Tím jsme vynulovali poddiagonální prvky prvního sloupce. K (-5)tinásobku třetího řádku jsme přičetli druhý a k (-5)tinásobku čtvrtého řádku jsme přičetli dvojnásobek druhého. Tím máme vynulovány poddiagonální prvky druhého sloupce. Nakonec přičteme k (-6)tinásobku čtvrtého řádku sedminásobek třetího. Vidíme, že matice soustavy má hodnost 3, zatímco rozšířená matice soustavy má hodnost 4. Podle Frobeniovy věty soustava nemá řešení, a tedy čísla α, β, γ (koeficienty lineární kombinace) nelze najít. Vektor $\overrightarrow{e_4} = (0,0,0,1)^{\mathrm{T}}$ neleží v podprostoru prostoru $\mathbb{R}^4$, jehož bázi tvoří vektory $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$.

Zpět

Příklad 1.3.2

Ověřte, že vektory $\overrightarrow{a} = (1,2,1,1)^{\mathrm{T}}$, $\overrightarrow{b} = (2,-1,1,0)^{\mathrm{T}}$, $\overrightarrow{c} = (1,1,2,2)^{\mathrm{T}}$ jsou lineárně nezávislé, a napište jeden další vektor prostoru $\mathbb{R}^4$, který leží v podprostoru, jehož bází jsou vektory $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$, a jeden vektor prostoru $\mathbb{R}^4$, který neleží v podprostoru, jehož bází jsou vektory $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$.

Maple:

```
> with(linalg):
> a:=vector([1,2,1,1]);
```

$$a := [1,\ 2,\ 1,\ 1]$$

```
> b:=vector([2,-1,1,0]);
```

$$b := [2,\ -1,\ 1,\ 0]$$

```
> c:=vector([1,1,2,2]);
```

$$c := [1,\ 1,\ 2,\ 2]$$

```
> A:=matrix([a,b,c]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

```
> rank(A);
```

$$3$$

```
> ffgausselim(A);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -6 & -7 \end{bmatrix}$$

Další

Příklad 1.3.2

Ověřte, že vektory $\overrightarrow{a} = (1,2,1,1)^{\mathrm{T}}$, $\overrightarrow{b} = (2,-1,1,0)^{\mathrm{T}}$, $\overrightarrow{c} = (1,1,2,2)^{\mathrm{T}}$ jsou lineárně nezávislé, a napište jeden další vektor prostoru $\mathbb{R}^4$, který leží v podprostoru, jehož bází jsou vektory $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$, a jeden vektor prostoru $\mathbb{R}^4$, který neleží v podprostoru, jehož bází jsou vektory $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$.

Maple:

```
> evalm(a+b+c);
```

$$[4,\ 2,\ 4,\ 3]$$

```
> evalm(alpha*a+beta*b+gamma*c);
```

$$[\alpha + 2\,\beta + \gamma,\ 2\,\alpha - \beta + \gamma,\ \alpha + \beta + 2\,\gamma,\ \alpha + 2\,\gamma]$$

```
> eqns:={alpha+2*beta+gamma=4, 2*alpha-beta+gamma=2,
alpha+beta+2*gamma=4, alpha+2*gamma=3};
```

$$eqns := \{\alpha + 2\,\beta + \gamma = 4,\ 2\,\alpha - \beta + \gamma = 2,\ \alpha + \beta + 2\,\gamma = 4,\ \alpha + 2\,\gamma = 3\}$$

```
> B:=genmatrix(eqns,[alpha,beta,gamma]);
```

$$B := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

```
> linsolve(B,[4,2,4,3]);
```

$$[1,\ 1,\ 1]$$

Další

Příklad 1.3.2

Ověřte, že vektory $\overrightarrow{a} = (1,2,1,1)^{\mathrm{T}}$, $\overrightarrow{b} = (2,-1,1,0)^{\mathrm{T}}$, $\overrightarrow{c} = (1,1,2,2)^{\mathrm{T}}$ jsou lineárně nezávislé, a napište jeden další vektor prostoru $\mathbb{R}^4$, který leží v podprostoru, jehož bází jsou vektory $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$, a jeden vektor prostoru $\mathbb{R}^4$, který neleží v podprostoru, jehož bází jsou vektory $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$.

Maple:

```
> alpha:=1; beta:=1; gama:=1;
```

$$\alpha := 1$$

$$\beta := 1$$

$$gama := 1$$

```
> linsolve(B,[0,0,0,1]);
> C:=stackmatrix(A,[0,0,0,1]);
```

$$C := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> rank(C);
```

$$4$$

Zpět

Příklad 1.3.2

Ověřte, že vektory $\overrightarrow{a} = (1,2,1,1)^{\mathrm{T}}$, $\overrightarrow{b} = (2,-1,1,0)^{\mathrm{T}}$, $\overrightarrow{c} = (1,1,2,2)^{\mathrm{T}}$ jsou lineárně nezávislé, a napište jeden další vektor prostoru $\mathbb{R}^4$, který leží v podprostoru, jehož bází jsou vektory $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$, a jeden vektor prostoru $\mathbb{R}^4$, který neleží v podprostoru, jehož bází jsou vektory $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$.

Mathematica:

```
a = {1, 2, 1, 1};
b = {2, -1, 1, 0};
c = {1, 1, 2, 2};
A = {a, b, c};
MatrixRank[A]
```

3

Vektory jsou lineárně nezávislé.

```
v = a + b + c
```

{4, 2, 4, 3}

```
MatrixRank[Join[A, {v}]]
```

3

Vektor $\overrightarrow{v} = [4,2,4,3]$ leží v prostoru generovaném vektory $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ a $\overrightarrow{c}$.

```
u = {0, 0, 0, 1}
```

{0, 0, 0, 1}

Další

Příklad 1.3.2

Ověřte, že vektory $\overrightarrow{a} = (1, 2, 1, 1)^{\mathrm{T}}$, $\overrightarrow{b} = (2, -1, 1, 0)^{\mathrm{T}}$, $\overrightarrow{c} = (1, 1, 2, 2)^{\mathrm{T}}$ jsou lineárně nezávislé, a napište jeden další vektor prostoru $\mathbb{R}^4$, který leží v podprostoru, jehož bází jsou vektory $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$, a jeden vektor prostoru $\mathbb{R}^4$, který neleží v podprostoru, jehož bází jsou vektory $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$.

Mathematica:

MatrixRank[Join[*A*, {*u*}]]

4

Vektor $\overrightarrow{u} = [0, 0, 0, 1]$ neleží v prostoru generovaném vektory $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ a $\overrightarrow{c}$, ale leží v prostoru $\mathbb{R}^4$.

Zpět

Příklad 1.3.3

Určete dimenzi nejmenšího podprostoru prostoru $\mathbb{R}^5$, ve kterém leží vektory

$$\overrightarrow{a} = (4, 2, 0, -1, 1)^{\mathrm{T}},\ \overrightarrow{b} = (-3, 1, -1, 2, -2)^{\mathrm{T}},\ \overrightarrow{c} = (-2, 4, -2, 3, -3)^{\mathrm{T}}.$$

Které z vektorů $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ tvoří bázi tohoto podprostoru?

? Zpět

Příklad 1.3.3

Určete dimenzi nejmenšího podprostoru prostoru $\mathbb{R}^5$, ve kterém leží vektory

$$\overrightarrow{a} = (4, 2, 0, -1, 1)^{\mathrm{T}},\ \overrightarrow{b} = (-3, 1, -1, 2, -2)^{\mathrm{T}},\ \overrightarrow{c} = (-2, 4, -2, 3, -3)^{\mathrm{T}}.$$

Které z vektorů $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ tvoří bázi tohoto podprostoru?

Výsledek:

Dimenze nejmenšího podprostoru prostoru $\mathbb{R}^5$, ve kterém leží vektory $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ je 2.
Bázi tvoří např. vektory $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ nebo vektory $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{c}$.

Zpět

Příklad 1.3.3

Určete dimenzi nejmenšího podprostoru prostoru $\mathbb{R}^5$, ve kterém leží vektory

$$\overrightarrow{a} = (4, 2, 0, -1, 1)^{\mathrm{T}}, \ \overrightarrow{b} = (-3, 1, -1, 2, -2)^{\mathrm{T}}, \ \overrightarrow{c} = (-2, 4, -2, 3, -3)^{\mathrm{T}}.$$

Které z vektorů $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ tvoří bázi tohoto podprostoru?

Návod:

Z vektorů $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ sestavíme matici, kterou převedeme na horní trojúhelníkový tvar, a tak zjistíme, kolik a které z vektorů tvoří lineárně nezávislý systém. Ty jsou pak bází hledaného nejmenšího podprostoru prostoru $\mathbb{R}^5$. Jejich počet je roven dimenzi tohoto podprostoru.

Zpět

Příklad 1.3.3

Určete dimenzi nejmenšího podprostoru prostoru $\mathbb{R}^5$, ve kterém leží vektory

$$\overrightarrow{a} = (4, 2, 0, -1, 1)^{\mathrm{T}},\ \overrightarrow{b} = (-3, 1, -1, 2, -2)^{\mathrm{T}},\ \overrightarrow{c} = (-2, 4, -2, 3, -3)^{\mathrm{T}}.$$

Které z vektorů $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ tvoří bázi tohoto podprostoru?

Řešení:

Z vektorů $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ sestavíme matici, kterou pomocí ekvivalentních úprav převedeme na horní trojúhelníkový tvar:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \overrightarrow{a}^{\mathrm{T}} \\ \overrightarrow{b}^{\mathrm{T}} \\ \overrightarrow{c}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & -1 & 2 & -2 \\ -2 & 4 & -2 & 3 & -3 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 10 & -4 & 5 & -5 \\ 0 & 10 & -4 & 5 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 10 & -4 & 5 & -5 \end{pmatrix}.$$

Hodnost matice $\mathbf{A} = 2$, tedy dva ze tří vektorů tvoří lineárně nezávislý systém, a to vektory $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ nebo vektory $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{c}$, neboť při ekvivalentních úpravách nám "vypadl" buď vektor $\overrightarrow{b}$ nebo vektor $\overrightarrow{c}$, což nám říká, že buď vektor $\overrightarrow{b}$ je lineární kombinací vektorů $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{c}$ nebo vektor $\overrightarrow{c}$ je lineární kombinací vektorů $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$. Tedy báze nejmenšího podprostoru prostoru $\mathbb{R}^5$, ve kterém leží vektory $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$, sestává buď z dvojice vektorů $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ nebo z dvojice vektorů $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{c}$. Protože báze má dva prvky, je dimenze tohoto podprostoru rovna 2.

Zpět

Příklad 1.3.3

Určete dimenzi nejmenšího podprostoru prostoru $\mathbb{R}^5$, ve kterém leží vektory

$$\overrightarrow{a} = (4,2,0,-1,1)^{\mathrm{T}},\ \overrightarrow{b} = (-3,1,-1,2,-2)^{\mathrm{T}},\ \overrightarrow{c} = (-2,4,-2,3,-3)^{\mathrm{T}}.$$

Které z vektorů $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ tvoří bázi tohoto podprostoru?

Maple:

```
> with(linalg):
> eqns:={x+y+2*z-u=0,2*x+2*y+z-2*u=0};
```

$$eqns := \{x + y + 2\,z - u = 0,\ 2\,x + 2\,y + z - 2\,u = 0\}$$

```
> A:=genmatrix(eqns,[x,y,z,u]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

```
> nullspace(A, 'nulldim');
```

$$\{[-1,\ 1,\ 0,\ 0],\ [1,\ 0,\ 0,\ 1]\}$$

```
> nulldim;
```

$$2$$

Zpět

Příklad 1.3.3

Určete dimenzi nejmenšího podprostoru prostoru $\mathbb{R}^5$, ve kterém leží vektory

$$\overrightarrow{a} = (4, 2, 0, -1, 1)^{\mathrm{T}},\ \overrightarrow{b} = (-3, 1, -1, 2, -2)^{\mathrm{T}},\ \overrightarrow{c} = (-2, 4, -2, 3, -3)^{\mathrm{T}}.$$

Které z vektorů $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ tvoří bázi tohoto podprostoru?

Mathematica:

$\boldsymbol{a = \{4, 2, 0, -1, 1\};}$
$\boldsymbol{b = \{-3, 1, -1, 2, -2\};}$
$\boldsymbol{c = \{-2, 4, -2, 3, -3\};}$

$\boldsymbol{A = \{a, b, c\};}$

MatrixRank[$\boldsymbol{A}$]

2

Dimenze prostoru je 2 .

$\boldsymbol{B = \{a, b\};}$

MatrixRank[$\boldsymbol{A}$]

2

Za bázi můžeme volit například $\{\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b}\}$.

Zpět

Lineární zobrazení

- Lineární zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$
- Inverzní matice

Zpět

Lineární zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$

- Příklad 2.1.1 Napište matici $\mathbf{A}$ reprezentující lineární zobrazení L prostoru $\mathbb{R}^3$ do $\mathbb{R}^4$ definované vztahem

$$L((x,y,z)^{\mathrm{T}}) = (4x+2y+z,\ 3x+y,\ 2x+2y+2z,\ x-y-2z)^{\mathrm{T}}.$$

Najděte vektor $\overrightarrow{v} = L(\overrightarrow{u})$, který je obrazem vektoru $\overrightarrow{u} = (1,-3,2)^{\mathrm{T}}$ v tomto zobrazení. Zjistěte, zda vektor $\overrightarrow{u}$ je jediným vektorem, který se zobrazí na vektor $\overrightarrow{v}$. Pokud není jediným, nalezněte alespoň jeden další.

- Příklad 2.1.2 Najděte vektor $\overrightarrow{v}$, který je obrazem vektoru $\overrightarrow{u} = (1,1,1)^{\mathrm{T}}$ v lineárním zobrazení L prostoru $\mathbb{R}^3$ do $\mathbb{R}^3$ reprezentovaném maticí

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zjistěte, zda vektor $\overrightarrow{u}$ je jediným vektorem z prostoru $\mathbb{R}^3$, který se na vektor $\overrightarrow{v}$ zobrazí. Pokud není jediný, najděte všechny další.

- Příklad 2.1.3 Dokažte, že zobrazení $\mathcal{L}_1 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ a zobrazení $\mathcal{L}_2 : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ jsou lineární, a najděte matici $\mathbf{A}$, která reprezentuje složené zobrazení $\mathcal{L}_1 \circ \mathcal{L}_2$.
$\mathcal{L}_1((x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}) = (x_1-2x_2+x_3, 4x_1+2x_2-x_3, -x_1-5x_2+3x_3, 2x_1-3x_2+8x_3)^{\mathrm{T}},$
$\mathcal{L}_2((x_1,x_2,x_3,x_4)^{\mathrm{T}}) = (x_1-2x_2+x_3-x_4, x_1-7x_4, 2x_1-x_3+x_4)^{\mathrm{T}}.$

- Příklad 2.1.4 Najděte jádro K lineárního zobrazení $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ reprezentovaného maticí

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \\ -6 & -4 & 2 \\ -1 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Určete dimenzi K.

Zpět

Příklad 2.1.1

Napište matici **A** reprezentující lineární zobrazení L prostoru $\mathbb{R}^3$ do $\mathbb{R}^4$ definované vztahem

$$L((x, y, z)^{\mathrm{T}}) = (4x + 2y + z,\; 3x + y,\; 2x + 2y + 2z,\; x - y - 2z)^{\mathrm{T}}.$$

Najděte vektor $\overrightarrow{v} = L(\overrightarrow{u})$, který je obrazem vektoru $\overrightarrow{u} = (1, -3, 2)^{\mathrm{T}}$ v tomto zobrazení. Zjistěte, zda vektor $\overrightarrow{u}$ je jediným vektorem, který se zobrazí na vektor $\overrightarrow{v}$. Pokud není jediným, nalezněte alespoň jeden další.

? Zpět

Příklad 2.1.1

Napište matici $\mathbf{A}$ reprezentující lineární zobrazení L prostoru $\mathbb{R}^3$ do $\mathbb{R}^4$ definované vztahem

$$L((x, y, z)^{\mathrm{T}}) = (4x + 2y + z,\ 3x + y,\ 2x + 2y + 2z,\ x - y - 2z)^{\mathrm{T}}.$$

Najděte vektor $\overrightarrow{v} = L(\overrightarrow{u})$, který je obrazem vektoru $\overrightarrow{u} = (1, -3, 2)^{\mathrm{T}}$ v tomto zobrazení. Zjistěte, zda vektor $\overrightarrow{u}$ je jediným vektorem, který se zobrazí na vektor $\overrightarrow{v}$. Pokud není jediným, nalezněte alespoň jeden další.

Výsledek:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad L((0, 0, 0)^{\mathrm{T}}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Zpět

Příklad 2.1.1

Napište matici $\mathbf{A}$ reprezentující lineární zobrazení L prostoru $\mathbb{R}^3$ do $\mathbb{R}^4$ definované vztahem

$$L((x, y, z)^{\mathrm{T}}) = (4x + 2y + z,\ 3x + y,\ 2x + 2y + 2z,\ x - y - 2z)^{\mathrm{T}}.$$

Najděte vektor $\overrightarrow{v} = L(\overrightarrow{u})$, který je obrazem vektoru $\overrightarrow{u} = (1, -3, 2)^{\mathrm{T}}$ v tomto zobrazení. Zjistěte, zda vektor $\overrightarrow{u}$ je jediným vektorem, který se zobrazí na vektor $\overrightarrow{v}$. Pokud není jediným, nalezněte alespoň jeden další.

Návod:

Matice $\mathbf{A}$ bude typu 4×3 a musí splňovat $L((x, y, z)^{\mathrm{T}}) = \mathbf{A}(x, y, z)^{\mathrm{T}}$. Z této rovnosti zjistíme prvky matice $\mathbf{A}$. Protože $L(\overrightarrow{u}) = \mathbf{A}\overrightarrow{u}$, je $\overrightarrow{v} = \mathbf{A}\overrightarrow{u}$. Vektor bude jediný právě když je hodnost matice $\mathbf{A}$ rovna dimenzi vektorového prostoru vzorů, v našem případě 3. Pokud $\mathrm{h}(\mathbf{A}) < 3$, musíme další vektory určit jako řešení soustavy lineárních rovnic $\mathbf{A}(x, y, z)^{\mathrm{T}} = \overrightarrow{v}$.

Zpět

Příklad 2.1.1

Napište matici $\mathbf{A}$ reprezentující lineární zobrazení L prostoru $\mathbb{R}^3$ do $\mathbb{R}^4$ definované vztahem

$$L((x, y, z)^{\mathrm{T}}) = (4x + 2y + z,\ 3x + y,\ 2x + 2y + 2z,\ x - y - 2z)^{\mathrm{T}}.$$

Najděte vektor $\overrightarrow{v} = L(\overrightarrow{u})$, který je obrazem vektoru $\overrightarrow{u} = (1, -3, 2)^{\mathrm{T}}$ v tomto zobrazení. Zjistěte, zda vektor $\overrightarrow{u}$ je jediným vektorem, který se zobrazí na vektor $\overrightarrow{v}$. Pokud není jediným, nalezněte alespoň jeden další.

Řešení:

$$L((x, y, z)^{\mathrm{T}}) = \mathbf{A}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z \\ a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x + 2y + z \\ 3x + \ \ y \\ 2x + 2y + 2z \\ x - \ \ y - 2z \end{pmatrix}.$$

Porovnáme poslední dva vektory a dostaneme

$$\begin{array}{rclrclrclrcl} a_{11} & = & 4 & a_{21} & = & 3 & a_{31} & = & 2 & a_{41} & = & 1 \\ a_{12} & = & 2 & a_{22} & = & 1 & a_{32} & = & 2 & a_{42} & = & -1 \\ a_{13} & = & 1 & a_{23} & = & 0 & a_{33} & = & 2 & a_{43} & = & -2 \end{array}$$

Další

Příklad 2.1.1

Napište matici $\mathbf{A}$ reprezentující lineární zobrazení L prostoru $\mathbb{R}^3$ do $\mathbb{R}^4$ definované vztahem

$$L((x,y,z)^{\mathrm{T}}) = (4x+2y+z,\ 3x+y,\ 2x+2y+2z,\ x-y-2z)^{\mathrm{T}}.$$

Najděte vektor $\overrightarrow{v} = L(\overrightarrow{u})$, který je obrazem vektoru $\overrightarrow{u} = (1,-3,2)^{\mathrm{T}}$ v tomto zobrazení. Zjistěte, zda vektor $\overrightarrow{u}$ je jediným vektorem, který se zobrazí na vektor $\overrightarrow{v}$. Pokud není jediným, nalezněte alespoň jeden další.

Řešení:

Tedy

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Matice $\mathbf{A}$ reprezentuje lineární zobrazení L, neboli $L(\overrightarrow{u}) = \mathbf{A}\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v}$,

$$\mathbf{A}\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \overrightarrow{v}.$$

Protože L je lineární zobrazení prostoru $\mathbb{R}^3$ do $\mathbb{R}^4$, víme, že se nulový vektor $(0,0,0)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^3$ zobrazí na nulový vektor $(0,0,0,0)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^4$. Určitě tedy není vektor $\overrightarrow{u}$ jediný vektor, který se zobrazí na $\overrightarrow{v}$. Máme-li tedy najít alespoň jeden další vektor, který se zobrazí na vektor $\overrightarrow{v} = (0,0,0,0)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^4$ nemusíme už nic počítat a správná odpověď je, že na vektor $\overrightarrow{v}$ se zobrazí také vektor $(0,0,0)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^3$.

Zpět

Příklad 2.1.1

Napište matici **A** reprezentující lineární zobrazení L prostoru $\mathbb{R}^3$ do $\mathbb{R}^4$ definované vztahem

$$L((x,y,z)^{\mathrm{T}}) = (4x+2y+z,\ 3x+y,\ 2x+2y+2z,\ x-y-2z)^{\mathrm{T}}.$$

Najděte vektor $\overrightarrow{v} = L(\overrightarrow{u})$, který je obrazem vektoru $\overrightarrow{u} = (1,-3,2)^{\mathrm{T}}$ v tomto zobrazení. Zjistěte, zda vektor $\overrightarrow{u}$ je jediným vektorem, který se zobrazí na vektor $\overrightarrow{v}$. Pokud není jediným, nalezněte alespoň jeden další.

Maple:

```
> with(linalg):
> eqns:= {4*x+2*y+z=a1,3*x+y=a2,2*x+2*y+2*z=a3,x-y-2*z=a4};
```

$$eqns := \{ 4\,x+2\,y+z=a1,\ 3\,x+y=a2,\ 2\,x+2\,y+2\,z=a3,\ x-y-2\,z=a4 \}$$

```
> A := genmatrix(eqns, [x,y,z]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

```
> u:=vector([1,-3,2]);
```

$$u := [1,\ -3,\ 2]$$

```
> v:=evalm(A&*u);
```

$$v := [0,\ 0,\ 0,\ 0]$$

Další

Příklad 2.1.1

Napište matici $\mathbf{A}$ reprezentující lineární zobrazení L prostoru $\mathbb{R}^3$ do $\mathbb{R}^4$ definované vztahem

$$L((x, y, z)^{\mathrm{T}}) = (4x + 2y + z,\ 3x + y,\ 2x + 2y + 2z,\ x - y - 2z)^{\mathrm{T}}.$$

Najděte vektor $\overrightarrow{v} = L(\overrightarrow{u})$, který je obrazem vektoru $\overrightarrow{u} = (1, -3, 2)^{\mathrm{T}}$ v tomto zobrazení. Zjistěte, zda vektor $\overrightarrow{u}$ je jediným vektorem, který se zobrazí na vektor $\overrightarrow{v}$. Pokud není jediným, nalezněte alespoň jeden další.

Maple:

```
> linsolve (A,v);
```

$$[\_t_1,\ -3\,\_t_1,\ 2\,\_t_1]$$

```
> uall:=t1->vector([t1,-3*t1,2*t1]);
```

$$uall := t1 \to [t1,\ -3\,t1,\ 2\,t1]$$

```
> uall(1);
```

$$[1,\ -3,\ 2]$$

```
> uall(0);
```

$$[0,\ 0,\ 0]$$

```
> uall(5);
```

$$[5,\ -15,\ 10]$$

Zpět

Příklad 2.1.1

Napište matici $\mathbf{A}$ reprezentující lineární zobrazení L prostoru $\mathbb{R}^3$ do $\mathbb{R}^4$ definované vztahem

$$L((x,y,z)^{\mathrm{T}}) = (4x+2y+z,\ 3x+y,\ 2x+2y+2z,\ x-y-2z)^{\mathrm{T}}.$$

Najděte vektor $\overrightarrow{v} = L(\overrightarrow{u})$, který je obrazem vektoru $\overrightarrow{u} = (1,-3,2)^{\mathrm{T}}$ v tomto zobrazení. Zjistěte, zda vektor $\overrightarrow{u}$ je jediným vektorem, který se zobrazí na vektor $\overrightarrow{v}$. Pokud není jediným, nalezněte alespoň jeden další.

Mathematica:

$A = \{$Coefficient$[4x+2y+z, \{x,y,z\}]$,
Coefficient$[3x+y, \{x,y,z\}]$,
Coefficient$[x-y-2z, \{x,y,z\}]\}$;

MatrixForm$[A]$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$u = \{1,-3,2\}$;

$v = A.u$

$\{0,0,0\}$

LinearSolve$[A, v]$

$\{0,0,0\}$

Zpět

Příklad 2.1.2

Najděte vektor $\overrightarrow{v}$, který je obrazem vektoru $\overrightarrow{u} = (1, 1, 1)^{\mathrm{T}}$ v lineárním zobrazení L prostoru $\mathbb{R}^3$ do $\mathbb{R}^3$ reprezentovaném maticí

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zjistěte, zda vektor $\overrightarrow{u}$ je jediným vektorem z prostoru $\mathbb{R}^3$, který se na vektor $\overrightarrow{v}$ zobrazí. Pokud není jediný, najděte všechny další.

? Zpět

Příklad 2.1.2

Najděte vektor $\overrightarrow{v}$, který je obrazem vektoru $\overrightarrow{u} = (1, 1, 1)^{\mathrm{T}}$ v lineárním zobrazení L prostoru $\mathbb{R}^3$ do $\mathbb{R}^3$ reprezentovaném maticí

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zjistěte, zda vektor $\overrightarrow{u}$ je jediným vektorem z prostoru $\mathbb{R}^3$, který se na vektor $\overrightarrow{v}$ zobrazí. Pokud není jediný, najděte všechny další.

Výsledek:

$\overrightarrow{v} = (1, 1, 1)^{\mathrm{T}}$, $\overrightarrow{u}$ je jediným vektorem z $\mathbb{R}^3$, který se na $\overrightarrow{v}$ zobrazí.

Zpět

Příklad 2.1.2

Najděte vektor $\overrightarrow{v}$, který je obrazem vektoru $\overrightarrow{u} = (1,1,1)^{\mathrm{T}}$ v lineárním zobrazení L prostoru $\mathbb{R}^3$ do $\mathbb{R}^3$ reprezentovaném maticí

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zjistěte, zda vektor $\overrightarrow{u}$ je jediným vektorem z prostoru $\mathbb{R}^3$, který se na vektor $\overrightarrow{v}$ zobrazí. Pokud není jediný, najděte všechny další.

Návod:

Protože L je reprezentováno maticí $\mathbf{A}$, je $L(\overrightarrow{u}) = \mathbf{A}\overrightarrow{u}$. Je-li zobrazení L prosté, je vektor $\overrightarrow{u}$ jediný. Protože zobrazení je prosté právě když hodnost matice $\mathbf{A}$ je rovna dimenzi vektorového prostoru vzorů, tj. počtu sloupců matice $\mathbf{A}$, stačí zjistit $\mathrm{h}(\mathbf{A})$. Zjistíme-li, že zobrazení není prosté, najdeme všechny vektory $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^3$, které se zobrazí na vektor $\overrightarrow{v}$ jako řešení $\overrightarrow{x}$ soustavy lineárních rovnic $\mathbf{A}\overrightarrow{x} = \overrightarrow{v}$.

Zpět

Příklad 2.1.2

Najděte vektor $\overrightarrow{v}$, který je obrazem vektoru $\overrightarrow{u} = (1,1,1)^{\mathrm{T}}$ v lineárním zobrazení L prostoru $\mathbb{R}^3$ do $\mathbb{R}^3$ reprezentovaném maticí

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zjistěte, zda vektor $\overrightarrow{u}$ je jediným vektorem z prostoru $\mathbb{R}^3$, který se na vektor $\overrightarrow{v}$ zobrazí. Pokud není jediný, najděte všechny další.

Řešení:

Lineární zobrazení L je reprezentováno maticí $\mathbf{A}$, tj. $L(\overrightarrow{u}) = \mathbf{A}\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v}$.

$$\mathbf{A}\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \overrightarrow{v}$$

Matice $\mathbf{A}$ je v horním trojúhelníkovém tvaru, její hodnost je tedy rovna počtu řádků, tj. $\mathrm{h}(\mathbf{A}) = 3 =$ počtu sloupců matice $\mathbf{A}$ a zobrazení L je prosté. Vektor $\overrightarrow{u}$ je tedy jediným vektorem z $\mathbb{R}^3$, který se na vektor $\overrightarrow{v}$ zobrazí.

Zpět

Příklad 2.1.2

Najděte vektor $\overrightarrow{v}$, který je obrazem vektoru $\overrightarrow{u} = (1, 1, 1)^{\mathrm{T}}$ v lineárním zobrazení L prostoru $\mathbb{R}^3$ do $\mathbb{R}^3$ reprezentovaném maticí

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zjistěte, zda vektor $\overrightarrow{u}$ je jediným vektorem z prostoru $\mathbb{R}^3$, který se na vektor $\overrightarrow{v}$ zobrazí. Pokud není jediný, najděte všechny další.

Maple:

```
> with(linalg):
> A:=matrix(3,3,[2,-1,0,0,4,-3,0,0,1]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> u:=vector(3,[1,1,1]);
```

$$u := [1,\ 1,\ 1]$$

```
> v:=evalm(A&*u);
```

$$v := [1,\ 1,\ 1]$$

```
> allu:=linsolve(A,v);
```

$$allu := [1,\ 1,\ 1]$$

Zpět

Příklad 2.1.2

Najděte vektor $\overrightarrow{v}$, který je obrazem vektoru $\overrightarrow{u} = (1,1,1)^{\mathrm{T}}$ v lineárním zobrazení L prostoru $\mathbb{R}^3$ do $\mathbb{R}^3$ reprezentovaném maticí

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zjistěte, zda vektor $\overrightarrow{u}$ je jediným vektorem z prostoru $\mathbb{R}^3$, který se na vektor $\overrightarrow{v}$ zobrazí. Pokud není jediný, najděte všechny další.

Mathematica:

$\boldsymbol{A = \{\{2, -1, 0\}, \{0, 4, -3\}, \{0, 0, 1\}\};}$

MatrixForm[*A*]

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{u = \{1, 1, 1\};}$

$\boldsymbol{v = A.u}$

$\{1, 1, 1\}$

u1 = LinearSolve[*A*, *v*]

$\{1, 1, 1\}$

Zpět

Příklad 2.1.3

Dokažte, že zobrazení $\mathcal{L}_1 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ a zobrazení $\mathcal{L}_2 : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ jsou lineární, a najděte matici $\mathbf{A}$, která reprezentuje složené zobrazení $\mathcal{L}_1 \circ \mathcal{L}_2$.
$\mathcal{L}_1((x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}) = (x_1 - 2x_2 + x_3, 4x_1 + 2x_2 - x_3, -x_1 - 5x_2 + 3x_3, 2x_1 - 3x_2 + 8x_3)^{\mathrm{T}}$,
$\mathcal{L}_2((x_1, x_2, x_3, x_4)^{\mathrm{T}}) = (x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4, x_1 - 7x_4, 2x_1 - x_3 + x_4)^{\mathrm{T}}$.

? Zpět

Příklad 2.1.3

Dokažte, že zobrazení $\mathcal{L}_1 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ a zobrazení $\mathcal{L}_2 : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ jsou lineární, a najděte matici $\mathbf{A}$, která reprezentuje složené zobrazení $\mathcal{L}_1 \circ \mathcal{L}_2$.
$\mathcal{L}_1((x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}) = (x_1 - 2x_2 + x_3, 4x_1 + 2x_2 - x_3, -x_1 - 5x_2 + 3x_3, 2x_1 - 3x_2 + 8x_3)^{\mathrm{T}}$,
$\mathcal{L}_2((x_1, x_2, x_3, x_4)^{\mathrm{T}}) = (x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4, x_1 - 7x_4, 2x_1 - x_3 + x_4)^{\mathrm{T}}$.

Výsledek:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 14 \\ 4 & -8 & 5 & -19 \\ 0 & 2 & -4 & 39 \\ 15 & -4 & -6 & 27 \end{pmatrix}$$

Zpět

Příklad 2.1.3

Dokažte, že zobrazení $\mathcal{L}_1 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ a zobrazení $\mathcal{L}_2 : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ jsou lineární, a najděte matici $\mathbf{A}$, která reprezentuje složené zobrazení $\mathcal{L}_1 \circ \mathcal{L}_2$.
$\mathcal{L}_1((x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}) = (x_1 - 2x_2 + x_3, 4x_1 + 2x_2 - x_3, -x_1 - 5x_2 + 3x_3, 2x_1 - 3x_2 + 8x_3)^{\mathrm{T}}$,
$\mathcal{L}_2((x_1, x_2, x_3, x_4)^{\mathrm{T}}) = (x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4, x_1 - 7x_4, 2x_1 - x_3 + x_4)^{\mathrm{T}}$.

Návod:

Úlohu řešte tak, že
a) najdete tvar složeného zobrazení a pak sestavíte jeho matici
b) sestavíte nejprve matice jednotlivých zobrazení.
$\mathcal{L}_1((x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}) = (x_1 - 2x_2 + x_3, 4x_1 + 2x_2 - x_3, -x_1 - 5x_2 + 3x_3, 2x_1 - 3x_2 + 8x_3)^{\mathrm{T}}$,
$\mathcal{L}_2((x_1, x_2, x_3, x_4)^{\mathrm{T}}) = (x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4, x_1 - 7x_4, 2x_1 - x_3 + x_4)^{\mathrm{T}}$.
Zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$ je lineární právě když je reprezentováno maticí. Stačí tedy ukázat, že existují matice $\mathbf{A}_1$ a $\mathbf{A}_2$, které reprezentují zobrazení L_1 a L_2.
a) Na vektor $\overrightarrow{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^4$ aplikujeme zobrazení L_2 a na výsledný vektor z $\mathbb{R}^3$ aplikujeme zobrazení L_1. Výsledek složení je vektor z $\mathbb{R}^4$. Protože zobrazení L_1 a L_2 jsou lineární, je lineární i složené zobrazení $L_1(L_2(\overrightarrow{x}))$. Je reprezentováno maticí $\mathbf{A}$, kterou získáme z rovnice $\mathbf{A}\overrightarrow{x} = L_1(L_2(\overrightarrow{x}))$.
b) Zobrazení L_1 je reprezentováno maticí $\mathbf{A}_1$, jejíž prvky získáme porovnáním vektorů $\mathbf{A}_1\overrightarrow{y}$ a $L_1(\overrightarrow{y})$, $y \in \mathbb{R}^3$. Obdobně získáme matici $\mathbf{A}_2$. Výsledná matice $\mathbf{A} = \mathbf{A}_1\mathbf{A}_2$.

Zpět

Příklad 2.1.3

Dokažte, že zobrazení $\mathcal{L}_1 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ a zobrazení $\mathcal{L}_2 : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ jsou lineární, a najděte matici $\mathbf{A}$, která reprezentuje složené zobrazení $\mathcal{L}_1 \circ \mathcal{L}_2$.
$\mathcal{L}_1((x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}) = (x_1 - 2x_2 + x_3, 4x_1 + 2x_2 - x_3, -x_1 - 5x_2 + 3x_3, 2x_1 - 3x_2 + 8x_3)^{\mathrm{T}}$,
$\mathcal{L}_2((x_1, x_2, x_3, x_4)^{\mathrm{T}}) = (x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4, x_1 - 7x_4, 2x_1 - x_3 + x_4)^{\mathrm{T}}$.

Řešení:

Zobrazení z konečnědimenzionálního prostoru do konečnědimenzionálního prostoru je lineární právě když je reprezentováno maticí. Najdeme-li tedy matice, které reprezentují zobrazení $\mathcal{L}_1$ a $\mathcal{L}_2$, dokážeme tím současně, že zobrazení jsou lineární. Nechť $\overrightarrow{y} = (y_1, y_2, y_3)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^3$. Pak

$$\mathcal{L}_1(\overrightarrow{y}) = \mathbf{A}_1 \overrightarrow{y} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3 \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3 \\ a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{33}y_3 \\ a_{41}y_1 + a_{42}y_2 + a_{43}y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 - 2y_2 + y_3 \\ 4y_1 + 2y_2 - y_3 \\ -y_1 - 5y_2 + 3y_3 \\ 2y_1 - 3y_2 + 8y_3 \end{pmatrix}.$$

Porovnáme poslední dva vektory a dostaneme

$$\begin{array}{rclrclrclrcl} a_{11} & = & 1 & a_{21} & = & 4 & a_{31} & = & -1 & a_{41} & = & 2 \\ a_{12} & = & -2 & a_{22} & = & 2 & a_{32} & = & -5 & a_{42} & = & -3 \\ a_{13} & = & 1 & a_{23} & = & -1 & a_{33} & = & 3 & a_{43} & = & 8 \end{array}$$

Tedy zobrazení $\mathcal{L}_1$ je reprezentováno maticí $\mathbf{A}_1$, a je tedy lineární,

Další

Příklad 2.1.3

Dokažte, že zobrazení $\mathcal{L}_1 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ a zobrazení $\mathcal{L}_2 : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ jsou lineární, a najděte matici $\mathbf{A}$, která reprezentuje složené zobrazení $\mathcal{L}_1 \circ \mathcal{L}_2$.
$\mathcal{L}_1((x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}})=(x_1 - 2x_2 + x_3, 4x_1 + 2x_2 - x_3, -x_1 - 5x_2 + 3x_3, 2x_1 - 3x_2 + 8x_3)^{\mathrm{T}}$,
$\mathcal{L}_2((x_1, x_2, x_3, x_4)^{\mathrm{T}}) = (x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4, x_1 - 7x_4, 2x_1 - x_3 + x_4)^{\mathrm{T}}$.

Řešení:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \\ -1 & -5 & 3 \\ 2 & -3 & 8 \end{pmatrix}.$$

Obdobně pro $\mathcal{L}_2$. Nechť $\overrightarrow{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^4$.

$$\mathcal{L}_2(\overrightarrow{y}) = \mathbf{A}_2 \overrightarrow{y} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3 + a_{14}y_4 \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3 + a_{24}y_4 \\ a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{33}y_3 + a_{34}y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 - 2y_2 + y_3 - y_4 \\ y_1 - 7y_4 \\ 2y_1 - y_3 + y_4 \end{pmatrix}.$$

Porovnáme poslední dva vektory a dostaneme

$$\begin{array}{rcrrcrrcr} a_{11} & = & 1 & a_{21} & = & 1 & a_{31} & = & 2 \\ a_{12} & = & -2 & a_{22} & = & 0 & a_{32} & = & 0 \\ a_{13} & = & 1 & a_{23} & = & 0 & a_{33} & = & -1 \\ a_{14} & = & -1 & a_{24} & = & -7 & a_{34} & = & 1 \end{array}$$

Další

Příklad 2.1.3

Dokažte, že zobrazení $\mathcal{L}_1 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ a zobrazení $\mathcal{L}_2 : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ jsou lineární, a najděte matici $\mathbf{A}$, která reprezentuje složené zobrazení $\mathcal{L}_1 \circ \mathcal{L}_2$.
$\mathcal{L}_1((x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}) = (x_1 - 2x_2 + x_3, 4x_1 + 2x_2 - x_3, -x_1 - 5x_2 + 3x_3, 2x_1 - 3x_2 + 8x_3)^{\mathrm{T}}$,
$\mathcal{L}_2((x_1, x_2, x_3, x_4)^{\mathrm{T}}) = (x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4, x_1 - 7x_4, 2x_1 - x_3 + x_4)^{\mathrm{T}}$.

Řešení:

Tedy zobrazení $\mathcal{L}_2$ je reprezentováno maticí $\mathbf{A}_2$, a je také lineární,

$$\mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -7 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Složíme zobrazení $\mathcal{L}_1 \circ \mathcal{L}_2$.
Nechť $\overrightarrow{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^4$.

$$\mathcal{L}_1(\mathcal{L}_2(\overrightarrow{x})) = \mathcal{L}_1((x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4, x_1 - 7x_4, 2x_1 - x_3 + x_4)^{\mathrm{T}}) =$$

$$\begin{aligned} = (&x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 - 2x_1 + 14x_4 + 2x_1 - x_3 + x_4, \\ &4x_1 - 8x_2 + 4x_3 - 4x_4 + 2x_1 - 14x_4 - 2x_1 + x_3 - x_4, \\ &-x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - 5x_1 + 35x_4 + 6x_1 - 3x_3 + 3x_4, \\ &2x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 2x_4 - 3x_1 + 21x_4 + 16x_1 - 8x_3 + 8x_4)^{\mathrm{T}} = \end{aligned}$$

$$(x_1 - 2x_2 + 14x_4, 4x_1 - 8x_2 + 5x_3 - 19x_4, 2x_2 - 4x_3 + 39x_4, 15x_1 - 4x_2 - 6x_3 + 27x_4)^{\mathrm{T}}.$$

Toto složené zobrazení je reprezentováno maticí $\mathbf{A}$ typu 4×4 tak, že $\mathbf{A}\overrightarrow{x} = \mathcal{L}_1(\mathcal{L}_2(\overrightarrow{x}))$, tj.
Další

Příklad 2.1.3

Dokažte, že zobrazení $\mathcal{L}_1 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ a zobrazení $\mathcal{L}_2 : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ jsou lineární, a najděte matici $\mathbf{A}$, která reprezentuje složené zobrazení $\mathcal{L}_1 \circ \mathcal{L}_2$.
$\mathcal{L}_1((x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}) = (x_1 - 2x_2 + x_3, 4x_1 + 2x_2 - x_3, -x_1 - 5x_2 + 3x_3, 2x_1 - 3x_2 + 8x_3)^{\mathrm{T}}$,
$\mathcal{L}_2((x_1, x_2, x_3, x_4)^{\mathrm{T}}) = (x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4, x_1 - 7x_4, 2x_1 - x_3 + x_4)^{\mathrm{T}}$.

Řešení:

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - 2x_2 + 14x_4 \\ 4x_1 - 8x_2 + 5x_3 - 19x_4 \\ 2x_2 - 4x_3 + 39x_4 \\ 15x_1 - 4x_2 - 6x_3 + 27x_4 \end{pmatrix}.$$

Porovnáme poslední dva vektory a dostaneme

$$\begin{array}{lcrlcrlcrlcr} a_{11} & = & 1 & a_{21} & = & 4 & a_{31} & = & 0 & a_{41} & = & 15 \\ a_{12} & = & -2 & a_{22} & = & -8 & a_{32} & = & 2 & a_{42} & = & -4 \\ a_{13} & = & 0 & a_{23} & = & 5 & a_{33} & = & -4 & a_{43} & = & -5 \\ a_{14} & = & 14 & a_{24} & = & -19 & a_{34} & = & 39 & a_{44} & = & 27 \end{array}$$

Tedy lineární zobrazení $\mathcal{L}_1 \circ \mathcal{L}_2$ je reprezentováno maticí $\mathbf{A}$,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 14 \\ 4 & -8 & 5 & -19 \\ 0 & 2 & -4 & 39 \\ 15 & -4 & -5 & 27 \end{pmatrix}.$$

b) Matice jednotlivých zobrazení jsme už sestavili. Pro matici $\mathbf{A}$, která reprezentuje složené zobrazení $\mathcal{L}_1 \circ \mathcal{L}_2$, platí $\mathbf{A} = \mathbf{A}_1\mathbf{A}_2$. Ověřte sami, že skutečně dostanete stejnou matici $\mathbf{A}$ jako v a).

Zpět

Příklad 2.1.3

Dokažte, že zobrazení $\mathcal{L}_1 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ a zobrazení $\mathcal{L}_2 : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ jsou lineární, a najděte matici $\mathbf{A}$, která reprezentuje složené zobrazení $\mathcal{L}_1 \circ \mathcal{L}_2$.
$\mathcal{L}_1((x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}})=(x_1 - 2x_2 + x_3, 4x_1 + 2x_2 - x_3, -x_1 - 5x_2 + 3x_3, 2x_1 - 3x_2 + 8x_3)^{\mathrm{T}}$,
$\mathcal{L}_2((x_1, x_2, x_3, x_4)^{\mathrm{T}}) = (x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4, x_1 - 7x_4, 2x_1 - x_3 + x_4)^{\mathrm{T}}$.

Maple:

```
> with(linalg):
> L1:=(x1,x2,x3)->(x1-2*x2+x3,4*x1+2*x2-x3,-x1-5*x2+3*x3,
2*x1-3*x2+8*x3 );
```

$$L1 := (x1,\ x2,\ x3) \to (x1 - 2\,x2 + x3,\ 4\,x1 + 2\,x2 - x3,\ -x1 - 5\,x2 + 3\,x3,\ 2\,x1 - 3\,x2 + 8\,x3)$$

```
> L2:=(x1,x2,x3,x4)->(x1-2*x2+x3-x4,x1-7*x4,2*x1-x3+x4);
```

$$L2 := (x1,\ x2,\ x3,\ x4) \to (x1 - 2\,x2 + x3 - x4,\ x1 - 7\,x4,\ 2\,x1 - x3 + x4)$$

```
> L1(L2(x1,x2,x3,x4));
```

$$x1 - 2\,x2 + 14\,x4,\ 4\,x1 - 8\,x2 + 5\,x3 - 19\,x4,\ 2\,x2 - 4\,x3 + 39\,x4,\ 15\,x1 - 4\,x2 - 6\,x3 + 27\,x4$$

```
> A1:=matrix(4,3,[1,-2,1,4,2,-1,-1,-5,3,2,-3,8]);
```

$$A1 := \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \\ -1 & -5 & 3 \\ 2 & -3 & 8 \end{bmatrix}$$

Další

Příklad 2.1.3

Dokažte, že zobrazení $\mathcal{L}_1 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ a zobrazení $\mathcal{L}_2 : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ jsou lineární, a najděte matici **A**, která reprezentuje složené zobrazení $\mathcal{L}_1 \circ \mathcal{L}_2$.
$\mathcal{L}_1((x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}) = (x_1 - 2x_2 + x_3, 4x_1 + 2x_2 - x_3, -x_1 - 5x_2 + 3x_3, 2x_1 - 3x_2 + 8x_3)^{\mathrm{T}}$,
$\mathcal{L}_2((x_1, x_2, x_3, x_4)^{\mathrm{T}}) = (x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4, x_1 - 7x_4, 2x_1 - x_3 + x_4)^{\mathrm{T}}$.

Maple:

```
> A2:=matrix(3,4,[1,-2,1,-1,1,0,0,-7,2,0,-1,1]);
```

$$A2 := \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -7 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> A:=evalm(A1&*A2);
```

$$A := \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 14 \\ 4 & -8 & 5 & -19 \\ 0 & 2 & -4 & 39 \\ 15 & -4 & -6 & 27 \end{bmatrix}$$

Zpět

Příklad 2.1.3

Dokažte, že zobrazení $\mathcal{L}_1 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ a zobrazení $\mathcal{L}_2 : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ jsou lineární, a najděte matici **A**, která reprezentuje složené zobrazení $\mathcal{L}_1 \circ \mathcal{L}_2$.
$\mathcal{L}_1((x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}) = (x_1 - 2x_2 + x_3, 4x_1 + 2x_2 - x_3, -x_1 - 5x_2 + 3x_3, 2x_1 - 3x_2 + 8x_3)^{\mathrm{T}}$,
$\mathcal{L}_2((x_1, x_2, x_3, x_4)^{\mathrm{T}}) = (x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4, x_1 - 7x_4, 2x_1 - x_3 + x_4)^{\mathrm{T}}$.

Mathematica:

L1[x1_, x2_, x3_] = {x1 − 2x2 + x3, 4x1 + 2x2 − x3, −x1 − 5x2 + 3x3,2x1 − 3x2 + 8x3};

A1 = {{1, −2, 1}, {4, 2, −1}, {−1, −5, 3}, {2, −3, 8}};

L2[x1_, x2_, x3_, x4_] = {x1 − 2x2 + x3 − x4, x1 − 7x4, 2x1 − x3 + x4};

A2 = {{1, −2, 1, −1}, {1, 0, 0, −7}, {2, 0, −1, 1}};

sloz = Apply[L1, L2[x1, x2, x3, x4]]

{3x1 − 2x2 − 2(x1 − 7x4), −2x1 + x3 + 2(x1 − 7x4) + 4(x1 − 2x2 + x3 − x4) − x4,
− x1 + 2x2 − x3 − 5(x1 − 7x4) + x4 + 3(2x1 − x3 + x4), −3(x1 − 7x4) + 2(x1 − 2x2 + x3 −
x4) + 8(2x1 − x3 + x4)}

***L*[x1_, x2_, x3_] = Expand[sloz]**

{x1 − 2x2 + 14x4, 4x1 − 8x2 + 5x3 − 19x4, 2x2 − 4x3 + 39x4, 15x1 − 4x2 − 6x3 + 27x4}

***A* = {{1, −2, 0, 14}, {4, −8, 5, −19}, {0, 2, −4, 39},{15, −4, −6, 27}};**

MatrixForm[*A*]

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 14 \\ 4 & -8 & 5 & -19 \\ 0 & 2 & -4 & 39 \\ 15 & -4 & -6 & 27 \end{pmatrix}$$

Další

Příklad 2.1.3

Dokažte, že zobrazení $\mathcal{L}_1 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ a zobrazení $\mathcal{L}_2 : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ jsou lineární, a najděte matici $\mathbf{A}$, která reprezentuje složené zobrazení $\mathcal{L}_1 \circ \mathcal{L}_2$.
$\mathcal{L}_1((x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}) = (x_1 - 2x_2 + x_3, 4x_1 + 2x_2 - x_3, -x_1 - 5x_2 + 3x_3, 2x_1 - 3x_2 + 8x_3)^{\mathrm{T}}$,
$\mathcal{L}_2((x_1, x_2, x_3, x_4)^{\mathrm{T}}) = (x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4, x_1 - 7x_4, 2x_1 - x_3 + x_4)^{\mathrm{T}}$.

Mathematica:

MatrixForm[A1.A2]

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 14 \\ 4 & -8 & 5 & -19 \\ 0 & 2 & -4 & 39 \\ 15 & -4 & -6 & 27 \end{pmatrix}$$

Zpět

Příklad 2.1.4

Najděte jádro K lineárního zobrazení $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ reprezentovaného maticí

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \\ -6 & -4 & 2 \\ -1 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Určete dimenzi K.

? Zpět

Příklad 2.1.4

Najděte jádro K lineárního zobrazení $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ reprezentovaného maticí

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \\ -6 & -4 & 2 \\ -1 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Určete dimenzi K.

Výsledek:

$\dim K = 1, \;\; K = \{\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^3, \;\; \overrightarrow{x} = \alpha(1, 1, 5)^{\mathrm{T}}, \alpha \in \mathbb{R}\}.$

Zpět

Příklad 2.1.4

Najděte jádro K lineárního zobrazení $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ reprezentovaného maticí

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \\ -6 & -4 & 2 \\ -1 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Určete dimenzi K.

Návod:

Protože jádro lineárního zobrazení $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ je množina

$$K = \{\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^3,\ L(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{0}\} = \{\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^3,\ \mathbf{A}\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}\},$$

vyřešíme homogenní soustavu lineárních rovnic $\mathbf{A}\overrightarrow{x} = 0$. Jádro je rovno vektorovému prostoru všech řešení této homogenní soustavy.

Zpět

Příklad 2.1.4

Najděte jádro K lineárního zobrazení $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ reprezentovaného maticí

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \\ -6 & -4 & 2 \\ -1 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Určete dimenzi K.

Řešení:

Jádro lineárního zobrazení L z prostoru $\mathbb{R}^3$ do $\mathbb{R}^4$ je množina $K = \{\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^3,\ L(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{0}\}$. Je-li toto zobrazení reprezentováno maticí $\mathbf{A}$, můžeme rovnost $L(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{0}$ nahradit rovností $\mathbf{A}\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$. Abychom tedy našli jádro, musíme vyřešit homogenní soustavu lineárních rovnic $\mathbf{A}\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$. Jádro je množina všech řešení této homogenní soustavy. Matici soustavy $\mathbf{A}$ převedeme pomocí ekvivalentních úprav na horní trojúhelníkový tvar:

$$\begin{pmatrix} 7 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \\ -6 & -4 & 2 \\ -1 & -4 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 7 & 3 & -2 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & -10 & 2 \\ 0 & -25 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 7 & 3 & -2 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

K sedminásobku 2. řádku jsme přičetli (-3)násobek prvního, k sedminásobku 3. řádku jsme přičetli šestinásobek prvního a k sedminásobku 4. řádku jsme přičetli první řádek. Vznikla matice, ve které třetí a čtvrtý řádek jsou násobky druhého, proto je vynecháme. Hodnost matice je $\mathrm{h}(\mathbf{A}) = 2$, počet neznámých je $n = 3$. Vektorový prostor všech řešení této homogenní soustavy (= hledané jádro K) má dimenzi

$$\dim K = n - \mathrm{h}(A) = 3 - 2 = 1.$$

Další

Příklad 2.1.4

Najděte jádro K lineárního zobrazení $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ reprezentovaného maticí

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \\ -6 & -4 & 2 \\ -1 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Určete dimenzi K.

Řešení:

Pomocí zpětného chodu Gaussovy eliminace najdeme K. Hledáme všechny vektory $\overrightarrow{x} = (x, y, z)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^3$, které řeší homogenní soustavu. Jednu neznámou volíme jako parametr. Dostaneme

$$z = t, \quad 5y - z = 0 \;\Rightarrow\; y = \frac{1}{5}\,t, \quad 7x + 3y - 2z = 0 \;\Rightarrow\; x = \frac{1}{5}\,t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Tedy

$$K = \{\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^3, \overrightarrow{x} = t\left(\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, 1\right)^{\mathrm{T}},\ t \in \mathbb{R}\} = \{\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^3, \overrightarrow{x} = \alpha\,(1, 1, 5)^{\mathrm{T}},\ \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Poznamenejme, že oba zápisy jsou správně. Použitím α jsme se jen zbavili zlomků. To lze, neboť je-li $\overrightarrow{x} = t\left(\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, 1\right)^{\mathrm{T}}$ řešení naší homogenní soustavy, je jistě i $\overrightarrow{x} = \alpha\,(1, 1, 5)^{\mathrm{T}}$ řešení této soustavy. Přesvědčte se o tom.

Zpět

Příklad 2.1.4

Najděte jádro K lineárního zobrazení $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ reprezentovaného maticí

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \\ -6 & -4 & 2 \\ -1 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Určete dimenzi K.

Maple:

```
> with(linalg):
> A:=matrix(4,3,[7,3,-2,3,2,-1,-6,-4,2,-1,-4,1]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 7 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \\ -6 & -4 & 2 \\ -1 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> kernel(A, 'nulldim');
```

$$\{[1, 1, 5]\}$$

```
> nulldim;
```

$$1$$

Zpět

Příklad 2.1.4

Najděte jádro K lineárního zobrazení $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ reprezentovaného maticí

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \\ -6 & -4 & 2 \\ -1 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Určete dimenzi K.

Mathematica:

$\boldsymbol{A = \{\{7, 3, -2\}, \{3, 2, -1\},\{-6, -4, 2\}, \{-1, -4, 1\}\};}$

MatrixForm[*A*]

$$\begin{pmatrix} 7 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \\ -6 & -4 & 2 \\ -1 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

K **= NullSpace[*A*]**

$\{\{1, 1, 5\}\}$

dim = MatrixRank[*K*]

1

Zpět

Inverzní matice

- **Příklad 2.2.1** Zjistěte, zda k matici $\mathbf{A}$ existuje matice inverzní. Pokud ano, vypočtěte ji.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- **Příklad 2.2.2** Určete matici reprezentující lineární zobrazení L prostoru $\mathbb{R}^3$ do $\mathbb{R}^3$ definované vztahem

$$L((x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}) = (2x_1 + x_3, x_1 - x_2 - x_3, -x_1 + 3x_2 + 2x_3)^{\mathrm{T}}$$

a nalezněte k ní matici inverzní.

- **Příklad 2.2.3** Řešte maticovou rovnici $\mathbf{AX} + \mathbf{X} = \mathbf{A}^2$, kde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zpět

Příklad 2.2.1

Zjistěte, zda k matici **A** existuje matice inverzní. Pokud ano, vypočtěte ji.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

? Zpět

Příklad 2.2.1

Zjistěte, zda k matici $\mathbf{A}$ existuje matice inverzní. Pokud ano, vypočtěte ji.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Výsledek:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Zpět

Příklad 2.2.1

Zjistěte, zda k matici **A** existuje matice inverzní. Pokud ano, vypočtěte ji.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Návod:

Vypočteme determinant matice **A**. Je-li $\det \mathbf{A} \neq 0$, inverzní matice existuje. Najdeme ji Gaussovou-Jordanovou metodou, t.j. matici $(\mathbf{A}|\mathbf{E})$ převedeme pomocí ekvivalentních úprav na matici $(\mathbf{E}|\mathbf{A}^{-1})$, kde **E** je jednotková matice.

Zpět

Příklad 2.2.1

Zjistěte, zda k matici $\mathbf{A}$ existuje matice inverzní. Pokud ano, vypočtěte ji.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Řešení:

Inverzní matice $\mathbf{A}^{-1}$ k matici $\mathbf{A}$ existuje právě když matice $\mathbf{A}$ je regulární, tj. $\det \mathbf{A} \neq 0$. Vypočteme tedy determinant matice $\mathbf{A}$. Počítáme rozvojem podle druhého sloupce:

$$\det \mathbf{A} = 1 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{4+2} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 + 2 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 + 2(1-2) = -1.$$

Využili jsme toho, že determinant horní trojúhelníkové matice je roven součinu diagonálních prvků, druhý determinant matice 3×3 jsme počítali rozvojem podle 1. řádku.
Determinant matice $\mathbf{A}$ je nenulový, tedy matice $\mathbf{A}$ je regulární a inverzní matice existuje.
Nechť $\mathbf{E}$ je jednotková matice. Výpočet provedeme Gaussovou-Jordanovou metodou, tj. matici $(\mathbf{A}|\mathbf{E})$ převedeme pomocí ekvivalentních úprav na matici $(\mathbf{E}|\mathbf{A}^{-1})$:

Další

Příklad 2.2.1

Zjistěte, zda k matici $\mathbf{A}$ existuje matice inverzní. Pokud ano, vypočtěte ji.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Řešení:

$$(\mathbf{A}|\mathbf{E}) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -4 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

K (-2)násobku druhého řádku jsme přičetli první řádek

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 0 & -2 & 4 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -4 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & 1 & -2 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -2 & -2 & -1 \end{array}\right) \sim$$

Od prvního a čtvrtého řádku jsme odečetli druhý. V dalším kroku jsme k prvnímu řádku přičetli dvojnásobek třetího řádku a ke čtvrtému řádku jsme přičetli (-2)násobek třetího. Zbývá upravit čtvrtý sloupec.

Další

Příklad 2.2.1

Zjistěte, zda k matici $\mathbf{A}$ existuje matice inverzní. Pokud ano, vypočtěte ji.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Řešení:

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -2 & -2 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right) = (\mathbf{E}|\mathbf{A}^{-1}).$$

K prvnímu řádku jsme přičetli dvojnásobek čtvrtého, k druhému řádku jsme přičetli (-2)násobek čtvrtého, od třetího řádku jsme odečetli čtvrtý. Při poslední úpravě vydělíme každý řádek diagonálním prvkem. Dostaneme vlevo jednotkovou matici $\mathbf{E}$ a vpravo hledanou inverzní matici $\mathbf{A}^{-1}$.

Zpět

Příklad 2.2.1

Zjistěte, zda k matici **A** existuje matice inverzní. Pokud ano, vypočtěte ji.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Maple:

```
> with(linalg):
> A:= matrix(4,4,[2,1,0,0,1,0,-1,2,0,0,1,-1,0,1,0,-1]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

```
> det(A);
```

$$-1$$

```
> inverse(A);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Zpět

Příklad 2.2.1

Zjistěte, zda k matici $\mathbf{A}$ existuje matice inverzní. Pokud ano, vypočtěte ji.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Mathematica:

$\boldsymbol{A} = \{\{2,1,0,0\},\{1,0,-1,2\},\{0,0,1,-1\},\{0,1,0,-1\}\};$

Det[*A*]

-1

$\boldsymbol{B} = $ **Inverse[*A*];**

MatrixForm[*B*]

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Zpět

Příklad 2.2.2

Určete matici reprezentující lineární zobrazení L prostoru $\mathbb{R}^3$ do $\mathbb{R}^3$ definované vztahem

$$L((x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}) = (2x_1 + x_3, x_1 - x_2 - x_3, -x_1 + 3x_2 + 2x_3)^{\mathrm{T}}$$

a nalezněte k ní matici inverzní.

? Zpět

Příklad 2.2.2

Určete matici reprezentující lineární zobrazení L prostoru $\mathbb{R}^3$ do $\mathbb{R}^3$ definované vztahem

$$L((x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}) = (2x_1 + x_3, x_1 - x_2 - x_3, -x_1 + 3x_2 + 2x_3)^{\mathrm{T}}$$

a nalezněte k ní matici inverzní.

Výsledek:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 5 & 3 \\ 2 & -6 & -2 \end{pmatrix}.$$

Zpět

Příklad 2.2.2

Určete matici reprezentující lineární zobrazení L prostoru $\mathbb{R}^3$ do $\mathbb{R}^3$ definované vztahem

$$L((x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}) = (2x_1 + x_3, x_1 - x_2 - x_3, -x_1 + 3x_2 + 2x_3)^{\mathrm{T}}$$

a nalezněte k ní matici inverzní.

Návod:

Porovnáním vektorů $A\overrightarrow{x}$ a $L(\overrightarrow{x})$ získáme prvky matice $\mathbf{A}$. Inverzní matici vypočteme Gaussovou-Jordanovou metodou nebo pomocí algebraických doplňků.

Zpět

Příklad 2.2.2

Určete matici reprezentující lineární zobrazení L prostoru $\mathbb{R}^3$ do $\mathbb{R}^3$ definované vztahem

$$L((x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}) = (2x_1 + x_3, x_1 - x_2 - x_3, -x_1 + 3x_2 + 2x_3)^{\mathrm{T}}$$

a nalezněte k ní matici inverzní.

Řešení:

Protože $L(\overrightarrow{x}) = A\overrightarrow{x}$, dostaneme prvky a_{ij} matice A typu 3×3 porovnáním vektorů $A\overrightarrow{x}$ a $L(\overrightarrow{x})$:

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 \qquad\quad + x_3 \\ x_1 - x_2 - x_3 \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 \end{pmatrix}.$$

Tedy matice $\mathbf{A}$ reprezentující lineární zobrazení $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ je

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Nyní vypočteme Gaussovou-Jordanovou metodou inverzní matici, tj. pomocí ekvivalentních úprav převedeme matici $(\mathbf{A}|\mathbf{E})$ na matici $(\mathbf{E}|\mathbf{A}^{-1})$:

$$(\mathbf{A}|\mathbf{E}) = \left(\begin{array}{rrr|rrr} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 6 & 5 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \sim$$

Další

Příklad 2.2.2

Určete matici reprezentující lineární zobrazení L prostoru $\mathbb{R}^3$ do $\mathbb{R}^3$ definované vztahem

$$L((x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}) = (2x_1 + x_3, x_1 - x_2 - x_3, -x_1 + 3x_2 + 2x_3)^{\mathrm{T}}$$

a nalezněte k ní matici inverzní.

Řešení:

K (-2)násobku druhého řádku jsme přičetli první, ke dvojnásobku třetího řádku jsme přičetli první. Při další úpravě jsme k třetímu řádku přičetli (-3)násobek druhého.

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -2 & 6 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 8 & 0 & 0 & 2 & 6 & 2 \\ 0 & 8 & 0 & -2 & 10 & 6 \\ 0 & 0 & -4 & -2 & 6 & 2 \end{array}\right) \sim$$

Ke čtyřnásobku prvního řádku jsme přičetli třetí řádek, ke čtyřnásobku druhého řádku jsme přičetli trojnásobek třetího. Zbývá vydělit každý řádek diagonálním prvkem.

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right) = (\mathbf{E}|\mathbf{A}^{-1}) \implies \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 5 & 3 \\ 2 & -6 & -2 \end{pmatrix}.$$

Zpět

Příklad 2.2.2

Určete matici reprezentující lineární zobrazení L prostoru $\mathbb{R}^3$ do $\mathbb{R}^3$ definované vztahem

$$L((x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}) = (2x_1 + x_3, x_1 - x_2 - x_3, -x_1 + 3x_2 + 2x_3)^{\mathrm{T}}$$

a nalezněte k ní matici inverzní.

Maple:

```
> with(linalg):
> eqns := {2*x1+x3=y1,x1-x2-x3=y2,-x1+3*x2+2*x3=y3};
```

$$eqns := \{2\,x1 + x3 = y1,\ x1 - x2 - x3 = y2,\ -x1 + 3\,x2 + 2\,x3 = y3\}$$

```
> A := genmatrix(eqns, [x1,x2,x3]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

```
> B:=inverse(A);
```

$$B := \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{-1}{4} & \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{-3}{2} & \frac{-1}{2} \end{bmatrix}$$

Zpět

Příklad 2.2.2

Určete matici reprezentující lineární zobrazení L prostoru $\mathbb{R}^3$ do $\mathbb{R}^3$ definované vztahem

$$L((x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}) = (2x_1 + x_3, x_1 - x_2 - x_3, -x_1 + 3x_2 + 2x_3)^{\mathrm{T}}$$

a nalezněte k ní matici inverzní.

Mathematica:

$\boldsymbol{A = \{\{2, 0, 1\}, \{1, -1, -1\}, \{-1, 3, 2\}\};}$

MatrixForm[*A*]

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{B =}$ **Inverse[*A*];**

MatrixForm[*B*]

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Zpět

Příklad 2.2.3

Řešte maticovou rovnici $\mathbf{AX} + \mathbf{X} = \mathbf{A}^2$, kde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

? Zpět

Příklad 2.2.3

Řešte maticovou rovnici $\mathbf{AX} + \mathbf{X} = \mathbf{A}^2$, kde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Výsledek:

$$\mathbf{X} := \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Zpět

Příklad 2.2.3

Řešte maticovou rovnici $\mathbf{AX} + \mathbf{X} = \mathbf{A}^2$, kde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Návod:

Nejprve vyjádříme matici $\mathbf{X}$ obecně z maticové rovnice, teprve potom dosadíme konkrétní matici $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}^2$, $\mathbf{A} + \mathbf{E}$ a inverzní matici k $\mathbf{A} + \mathbf{E}$. $\mathbf{E}$ je jednotková matice, matici $\mathbf{A} + \mathbf{E}$ dostaneme vytknutím matice $\mathbf{X}$ a matici $(\mathbf{A} + \mathbf{E})^{-1}$ musíme spočítat (pozor, včas ověřte, že inverzní matice existuje), abychom mohli vypočítat výslednou matici $\mathbf{X}$.

Zpět

Příklad 2.2.3

Řešte maticovou rovnici $\mathbf{AX} + \mathbf{X} = \mathbf{A}^2$, kde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Řešení:

Nejprve vyjádříme matici $\mathbf{X}$ obecně z maticové rovnice. Vytkneme v levé části rovnice matici $\mathbf{X}$ vpravo:

$$\mathbf{AX} + \mathbf{X} = \mathbf{A}^2 \quad \Longrightarrow \quad (\mathbf{A} + \mathbf{E})\mathbf{X} = \mathbf{A}^2,$$

$\mathbf{E}$ je jednotková matice, $\mathbf{E} = \operatorname{diag}(1, 1, 1) \in \mathbb{R}^3$. Nyní bychom potřebovali celou rovnici vynásobit zleva maticí $(\mathbf{A} + \mathbf{E})^{-1}$. To ale musíme vědět, že inverzní matice existuje. Tedy musíme vypočítat matici $\mathbf{A} + \mathbf{E}$ a ověřit, že je regulární, tj. $\det(\mathbf{A} + \mathbf{E}) \neq 0$. Determinant budeme počítat rozvojem podle třetího řádku.

$$\mathbf{A} + \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\det(\mathbf{A} + \mathbf{E}) = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2 + (4 - 1) = 1.$$

Celou rovnici tedy vynásobíme inverzní maticí $(\mathbf{A} + \mathbf{E})^{-1}$ zleva a použijeme definici inverzní matice, tj. $(\mathbf{A} + \mathbf{E})^{-1}(\mathbf{A} + \mathbf{E}) = \mathbf{E}$, a dále rovnost $\mathbf{EX} = \mathbf{X}$.

Další

Příklad 2.2.3

Řešte maticovou rovnici $\mathbf{AX}+\mathbf{X}=\mathbf{A}^2$, kde

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}.$$

Řešení:

$$(\mathbf{A}+\mathbf{E})^{-1}(\mathbf{A}+\mathbf{E})\mathbf{X}=(\mathbf{A}+\mathbf{E})^{-1}\mathbf{A}^2 \quad\Longrightarrow\quad \mathbf{X}=(\mathbf{A}+\mathbf{E})^{-1}\mathbf{A}^2.$$

Dostali jsme obecný předpis pro matici $\mathbf{X}$. Vypočteme konkrétní matice:

$$\mathbf{A}^2=\begin{pmatrix}3&2&1\\2&2&1\\1&1&1\end{pmatrix},$$

$$(\mathbf{A}+\mathbf{E}\,|\,\mathbf{E})=\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&1&1&1&0&0\\1&2&0&0&1&0\\1&0&1&0&0&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{rrr|rrr}2&1&1&1&0&0\\0&-3&1&1&-2&0\\0&1&-1&1&0&-2\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{rrr|rrr}6&0&4&4&-2&0\\0&-3&1&1&-2&0\\0&0&-2&4&-2&-6\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{rrr|rrr}6&0&0&12&-6&-12\\0&-6&0&6&-6&-6\\0&0&-2&4&-2&-6\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{rrr|rrr}1&0&0&2&-1&-2\\0&1&0&-1&1&1\\0&0&1&-2&1&3\end{array}\right)=(\mathbf{E}\,|\,(\mathbf{A}+\mathbf{E})^{-1}).$$

Další

Příklad 2.2.3

Řešte maticovou rovnici $\mathbf{AX} + \mathbf{X} = \mathbf{A}^2$, kde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Řešení:

Zbývá vypočítat $\mathbf{X}$:

$$\mathbf{X} = (\mathbf{A} + \mathbf{E})^{-1}\mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Zpět

Příklad 2.2.3

Řešte maticovou rovnici $\mathbf{AX} + \mathbf{X} = \mathbf{A}^2$, kde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Maple:

```
> with(linalg):
> A:= matrix(3,3,[1,1,1,1,1,0,1,0,0]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> AA:=evalm(A&*A);
```

$$AA := \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> E:=diag(1,1,1);
```

$$E := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Další

Příklad 2.2.3

Řešte maticovou rovnici $\mathbf{AX}+\mathbf{X}=\mathbf{A}^2$, kde

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Maple:

```
> evalm(A+E);
```

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> det(%);
```

$$1$$

```
> B:=inverse(A+E);
```

$$B := \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

```
> X:=evalm(B&*AA);
```

$$X := \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Zpět

Příklad 2.2.3

Řešte maticovou rovnici $\mathbf{AX} + \mathbf{X} = \mathbf{A}^2$, kde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Mathematica:

$\boldsymbol{A = \{\{2, 0, 1\}, \{1, -1, -1\}, \{-1, 3, 2\}\};}$

MatrixForm[*A*]

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

_B_ = Inverse[*A*];

MatrixForm[*B*]

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{A = \{\{1, 1, 1\}, \{1, 1, 0\}, \{1, 0, 0\}\};}$

MatrixForm[*A*]

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Další

Příklad 2.2.3

Řešte maticovou rovnici $\mathbf{AX} + \mathbf{X} = \mathbf{A}^2$, kde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Mathematica:

$\mathbf{AA = \boldsymbol{A}.\boldsymbol{A};}$

MatrixForm[AA]

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\mathbf{EE = \{\{1, 0, 0\}, \{0, 1, 0\}, \{0, 0, 1\}\};}$

MatrixForm[EE]

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} + \mathbf{EE;}$

MatrixForm[*B*]

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Další

Příklad 2.2.3

Řešte maticovou rovnici $\mathbf{AX} + \mathbf{X} = \mathbf{A}^2$, kde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Mathematica:

Det[*B*]

1

CC = Inverse[*B*];

MatrixForm[CC]

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

***X* = CC.AA;**

MatrixForm[*X*]

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Zpět

Lineární diferenciální rovnice

- Obecné řešení homogenní LDR 2. řádu
- Partikulární řešení homogenní LDR 2. řádu (počáteční úloha)
- Obecné řešení LDR 2. řádu
- Partikulární řešení LDR 2. řádu (počáteční úloha)
- Partikulární řešení LDR 2. řádu (okrajová úloha)
- LDR vyšších řádů, metoda snížení řádu

Zpět

Obecné řešení LDR 2. řádu

- **Příklad 3.1.1** Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice (LDR) $y'' + 5y' + 6y = 0\,.$
- **Příklad 3.1.2** Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $4y'' - 8y' + 3y = 0\,.$
- **Příklad 3.1.3** Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y'' + y' + y = 0\,.$
- **Příklad 3.1.4** Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y'' + 4y' + 4y = 0\,.$

Zpět

Příklad 3.1.1

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice (LDR) $y'' + 5y' + 6y = 0$.

? Zpět

Příklad 3.1.1

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice (LDR) $y'' + 5y' + 6y = 0$.

Výsledek:

$y(x) = C_1 \mathrm{e}^{-2x} + C_2\,\mathrm{e}^{-3x}\,, \quad x \in \mathbb{R}\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}\,.$

Zpět

Příklad 3.1.1

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice (LDR) $y'' + 5y' + 6y = 0\,.$

Návod:

Rovnice je homogenní lineární diferenciální rovnice (HLDR) s konstantními koeficienty tvaru $k_0 y'' + k_1 y' + k_2 y = 0\,, k_0, k_1, k_2 \in \mathbb{R}\,, k_0 \neq 0$. Její řešení hledáme ve tvaru $y = \mathrm{e}^{\lambda x}$, kde $\lambda \in \mathbb{R}$. Konstantu λ určíme tak, aby funkce $y = \mathrm{e}^{\lambda x}$ splňovala zadanou rovnici. Proto musí být λ kořenem charakteristické rovnice $k_0\lambda^2 + k_1\lambda + k_2 = 0$.

Zpět

Příklad 3.1.1

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice (LDR) $y'' + 5y' + 6y = 0$.

Řešení:

Charakteristická rovnice zadané LDR $y'' + 5y' + 6y = 0$ je

$$\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0.$$

Její kořeny jsou $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -3$. (Pro chytřejší poznámka: Kvadratická rovnice je v normovaném tvaru, kořeny lze určit z jejich vlastností $\lambda_1 + \lambda_2 = -5$, $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 6$.) Má-li charakteristická rovnice dva různé reálné kořeny λ_1, λ_2, pak obecné řešení HLDR má tvar

$$y(x) = C_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 x} + C_2\, \mathrm{e}^{\lambda_2 x}\,, \quad x \in \mathbb{R}\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Obecné řešení zadané LDR tedy je

$$y(x) = C_1 \mathrm{e}^{-2x} + C_2\, \mathrm{e}^{-3x}\,, \quad x \in \mathbb{R}\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Zpět

Příklad 3.1.1

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice (LDR) $y'' + 5y' + 6y = 0$.

Maple:

```
> DR:=(diff(y(x),x$2)+5*diff(y(x),x)+6*y(x)=0);
```

$$DR := (\frac{d^2}{dx^2}\,\mathrm{y}(x)) + 5\,(\frac{d}{dx}\,\mathrm{y}(x)) + 6\,\mathrm{y}(x) = 0$$

```
> dsolve(DR,y(x));
```

$$\mathrm{y}(x) = \_C1\; e^{(-3\,x)} + \_C2\; e^{(-2\,x)}$$

Zpět

Příklad 3.1.1

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice (LDR) $y'' + 5y' + 6y = 0$.

Mathematica:

rovnice = y"[x] + 5y′[x] + 6y[x] == 0;

reseni = DSolve[rovnice, y[x], x]

$\{\{y[x] \to e^{-3x}C[1] + e^{-2x}C[2]\}\}$

Zpět

Příklad 3.1.2

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $4y'' - 8y' + 3y = 0$.

? Zpět

Příklad 3.1.2

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $4y'' - 8y' + 3y = 0$.

Výsledek:

$$y(x) = C_1 \mathrm{e}^{\frac{3}{2}x} + C_2\, \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Zpět

Příklad 3.1.2

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $4y'' - 8y' + 3y = 0$.

Návod:

Rovnice je lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty tvaru $k_0 y'' + k_1 y' + k_2 y = 0$ a její řešení hledáme podle návodu v předchozím příkladě.

Zpět

Příklad 3.1.2

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $4y'' - 8y' + 3y = 0$.

Řešení:

Charakteristická rovnice zadané LDR $4y'' - 8y' + 3y = 0$ je

$$4\lambda^2 - 8\lambda + 3 = 0.$$

Její kořeny jsou $\lambda_1 = \frac{3}{2}$, $\lambda_2 = \frac{1}{2}$. (Kořeny kvadratické rovnice nalezneme pomocí vzorečku $\lambda_{1,2} = \frac{-(-8)\pm\sqrt{(-8)^2-4\cdot4\cdot3}}{2\cdot4}$.) Má-li charakteristická rovnice dva různé reálné kořeny λ_1, λ_2, pak obecné řešení HLDR má tvar

$$y(x) = C_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 x} + C_2\, \mathrm{e}^{\lambda_2 x}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Obecné řešení zadané LDR tedy je

$$y(x) = C_1 \mathrm{e}^{\frac{3}{2} x} + C_2\, \mathrm{e}^{\frac{1}{2} x}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Zpět

Příklad 3.1.2

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $4y'' - 8y' + 3y = 0$.

Maple:

```
> DR:=(4*diff(y(x),x$2)-8*diff(y(x),x)+3*y(x)=0);
```

$$DR := 4\left(\frac{d^2}{dx^2}\,\mathrm{y}(x)\right) - 8\left(\frac{d}{dx}\,\mathrm{y}(x)\right) + 3\,\mathrm{y}(x) = 0$$

```
> dsolve(DR,y(x));
```

$$\mathrm{y}(x) = \_C1\, e^{\left(\frac{x}{2}\right)} + \_C2\, e^{\left(\frac{3\,x}{2}\right)}$$

Zpět

Příklad 3.1.2

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $4y'' - 8y' + 3y = 0$.

Mathematica:

rovnice = 4*y*"[*x*] − 8*y*′[*x*] + 3*y*[*x*] == 0;

reseni = DSolve[rovnice, *y*[*x*], *x*]

$$\left\{\left\{y[x] \to e^{x/2}C[1] + e^{3x/2}C[2]\right\}\right\}$$

Zpět

Příklad 3.1.3

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y'' + y' + y = 0$.

? Zpět

Příklad 3.1.3

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y'' + y' + y = 0$.

Výsledek:

$$y(x) = C_1 \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + C_2\, \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right), \quad x \in \mathbb{R}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Zpět

Příklad 3.1.3

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y'' + y' + y = 0$.

Návod:

Rovnice je lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty tvaru $k_0 y'' + k_1 y' + k_2 y = 0$ a její řešení hledáme podle návodu v prvním příkladě.

Zpět

Příklad 3.1.3

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y'' + y' + y = 0$.

Řešení:

Charakteristická rovnice zadané LDR $y'' + y' + y = 0$ je

$$\lambda^2 + \lambda + 1 = 0.$$

Její kořeny jsou $\lambda_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\, i$, $\lambda_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\, i$. (Kořeny kvadratické rovnice hledáme v oboru komplexních čísel, nalezneme je pomocí vzorečku $\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1}$.) Má-li charakteristická rovnice dva imaginární komplexně sdružené kořeny $\lambda_1 = a + b\, i, \lambda_2 = a - b\, i$, pak obecné řešení HLDR má tvar

$$y(x) = C_1 \mathrm{e}^{ax} \cos bx + C_2\, \mathrm{e}^{ax} \sin bx\,, \quad x \in \mathbb{R}\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Obecné řešení zadané LDR tedy je

$$y(x) = C_1 \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} \cos(\frac{\sqrt{3}}{2} x) + C_2\, \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} \sin(\frac{\sqrt{3}}{2} x)\,, \quad x \in \mathbb{R}\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Zpět

Příklad 3.1.3

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y'' + y' + y = 0$.

Maple:

```
> DR:=(diff(y(x),x$2)+diff(y(x),x)+y(x)=0);
```

$$DR := (\frac{d^2}{dx^2}\,\mathrm{y}(x)) + (\frac{d}{dx}\,\mathrm{y}(x)) + \mathrm{y}(x) = 0$$

```
> dsolve(DR,y(x));
```

$$\mathrm{y}(x) = \_C1\; e^{(-\frac{x}{2})}\sin(\frac{\sqrt{3}\,x}{2}) + \_C2\; e^{(-\frac{x}{2})}\cos(\frac{\sqrt{3}\,x}{2})$$

Zpět

Příklad 3.1.3

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y'' + y' + y = 0$.

Mathematica:

rovnice = $\boldsymbol{y}$"[$\boldsymbol{x}$] + $\boldsymbol{y'}$[$\boldsymbol{x}$] + $\boldsymbol{y}$[$\boldsymbol{x}$] == 0;

reseni = DSolve[rovnice, $\boldsymbol{y}$[$\boldsymbol{x}$], $\boldsymbol{x}$]

$$\left\{\left\{y[x] \to e^{-x/2}C[2]\mathrm{Cos}\left[\frac{\sqrt{3}x}{2}\right] + e^{-x/2}C[1]\mathrm{Sin}\left[\frac{\sqrt{3}x}{2}\right]\right\}\right\}$$

Zpět

Příklad 3.1.4

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y'' + 4y' + 4y = 0$.

Zpět

Příklad 3.1.4

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y'' + 4y' + 4y = 0$.

Výsledek:

$y(x) = C_1 \mathrm{e}^{-2x} + C_2\, x\, \mathrm{e}^{-2x}\,, \quad x \in \mathbb{R}\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}\,.$

Zpět

Příklad 3.1.4

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y'' + 4y' + 4y = 0$.

Návod:

Rovnice je lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty tvaru $k_0 y'' + k_1 y' + k_2 y = 0$ a její řešení hledáme podle návodu v prvním příkladě.

Zpět

Příklad 3.1.4

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y'' + 4y' + 4y = 0$.

Řešení:

Charakteristická rovnice zadané LDR $y'' + 4y' + 4y = 0$ je

$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0.$$

Její kořeny jsou $\lambda_{1,2} = -2$. (Levou stranu rovnice lze podle vzorečku $A^2 + 2AB + b^2 = (A + B)^2$ upravit, tedy $(x + 2)^2 = 0$.) Má-li charakteristická rovnice jeden dvojnásobný reálný kořen λ, pak obecné řešení HLDR má tvar

$$y(x) = C_1 \mathrm{e}^{\lambda x} + C_2\, x\, \mathrm{e}^{\lambda x}\,, \quad x \in \mathbb{R}\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Obecné řešení zadané LDR tedy je

$$y(x) = C_1 \mathrm{e}^{-2x} + C_2\, x\, \mathrm{e}^{-2x}\,, \quad x \in \mathbb{R}\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Zpět

Příklad 3.1.4

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y'' + 4y' + 4y = 0$.

Maple:

```
> DR:=(diff(y(x),x$2)+4*diff(y(x),x)+4*y(x)=0);
```

$$DR := (\frac{d^2}{dx^2}\,\mathrm{y}(x)) + 4\,(\frac{d}{dx}\,\mathrm{y}(x)) + 4\,\mathrm{y}(x) = 0$$

```
> dsolve(DR,y(x));
```

$$\mathrm{y}(x) = \_C1\; e^{(-2\,x)} + \_C2\; e^{(-2\,x)}\,x$$

Zpět

Příklad 3.1.4

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y'' + 4y' + 4y = 0$.

Mathematica:

rovnice = *y*”[*x*] + 4*y*′[*x*] + 4*y*[*x*] == 0;

reseni = DSolve[rovnice, *y*[*x*], *x*]

$\{\{y[x] \to e^{-2x}C[1] + e^{-2x}xC[2]\}\}$

Zpět

Příklad 3.1.5

Ověřte, že funkce $y_1(x) = \cos 2x$ a $y_2(x) = \sin 2x$ jsou řešení lineární diferenciální rovnice $y'' + 4\,y = 0$. Tvoří funkce y_1, y_2 fundamentální systém řešení?

= ? Zpět

Příklad 3.1.5

Ověřte, že funkce $y_1(x) = \cos 2x$ a $y_2(x) = \sin 2x$ jsou řešení lineární diferenciální rovnice $y'' + 4\,y = 0$. Tvoří funkce y_1, y_2 fundamentální systém řešení?

Výsledek:

Ano, tvoří fundamentální systém.

Zpět

Příklad 3.1.5

Ověřte, že funkce $y_1(x) = \cos 2x$ a $y_2(x) = \sin 2x$ jsou řešení lineární diferenciální rovnice $y'' + 4\,y = 0$. Tvoří funkce y_1, y_2 fundamentální systém řešení?

Návod:

Pro $y_1(x)$ a $y_2(x)$ dosazením ověřte pravdivost diferenciální rovnice. Fundamentální systém řešení tvoří v případě LDR 2. řadu dvě lineárně nezávislá řešení. Nezávislost řešení ověřujeme pomocí Wronského determinantu.

Zpět

Příklad 3.1.5

Ověřte, že funkce $y_1(x) = \cos 2x$ a $y_2(x) = \sin 2x$ jsou řešení lineární diferenciální rovnice $y'' + 4\,y = 0$. Tvoří funkce y_1, y_2 fundamentální systém řešení?

Řešení:

Funkci y_1 (resp. y_2) dosadíme do dané diferenciální rovnice. Spočtěme $y_1''(x)$ (resp. $y_2''(x)$):

$$y_1(x) = \cos 2x \quad \Longrightarrow \quad y_1'(x) = -2\sin 2x \quad \Longrightarrow \quad y_1''(x) = -4\cos 2x\,,$$

$$y_2(x) = \sin 2x \quad \Longrightarrow \quad y_2'(x) = 2\cos 2x \quad \Longrightarrow \quad y_2''(x) = -4\sin 2x\,.$$

Dosaďme y_1 a y_1'' (resp. y_2 a y_2'') do levé strany dané rovnice:

$$y_1'' + 4\,y_1 = -4\cos 2x + 4\cos 2x = 0\,,$$

$$y_2'' + 4\,y_2 = -4\sin 2x + 4\sin 2x = 0\,.$$

Pravá strana dané rovnice je rovna nule. Ukázali jsme tak, že jak pro funkci $y_1(x) = \cos 2x$, tak pro funkci $y_2(x) = \sin 2x$ se levá strana rovnice $y'' + 4\,y = 0$ rovná pravé pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Funkce jsou řešení dané diferenciální rovnice. Tvoří fundamentální systém řešení, jsou-li lineárně nezávislé.

Další

Příklad 3.1.5

Ověřte, že funkce $y_1(x) = \cos 2x$ a $y_2(x) = \sin 2x$ jsou řešení lineární diferenciální rovnice $y'' + 4\,y = 0$. Tvoří funkce y_1, y_2 fundamentální systém řešení?

Řešení:

Spočtěme jejich Wronskián:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos 2x & \sin 2x \\ -\sin 2x & \cos 2x \end{vmatrix} = \cos^2 2x + \sin^2 2x = 1 \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}\,.$$

Wronského determinant je různý od nuly, tedy funkce $y_1(x)$ a $y_2(x)$ jsou lineárně nezávislé, tvoří fundamentální systém řešení.

Zpět

Příklad 3.1.5

Ověřte, že funkce $y_1(x) = \cos 2x$ a $y_2(x) = \sin 2x$ jsou řešení lineární diferenciální rovnice $y'' + 4\,y = 0$. Tvoří funkce y_1, y_2 fundamentální systém řešení?

Maple:

```
> res1:=y(x)=cos(2*x);
```

$$res1 := \mathrm{y}(x) = \cos(2\,x)$$

```
> DR:=(diff(y(x),x$2)+4*y(x)=0);
```

$$DR := (\frac{d^2}{dx^2}\,\mathrm{y}(x)) + 4\,\mathrm{y}(x) = 0$$

```
> odetest(res1,DR);
```

$$0$$

```
> res2:=y(x)=sin(2*x);
```

$$res2 := \mathrm{y}(x) = \sin(2\,x)$$

```
> odetest(res2,DR);
```

$$0$$

```
> with(linalg):
```

Warning, the protected names norm and trace have been redefined and unprotected

```
> det(wronskian([cos(2*x),sin(2*x)],x));
```

$$2\cos(2\,x)^2 + 2\sin(2\,x)^2$$

```
> simplify(%);
```

$$2$$

Zpět

Příklad 3.1.5

Ověřte, že funkce $y_1(x) = \cos 2x$ a $y_2(x) = \sin 2x$ jsou řešení lineární diferenciální rovnice $y'' + 4\,y = 0$. Tvoří funkce y_1, y_2 fundamentální systém řešení?

Mathematica:

rovnice = *y*"[*x*] + 4*y*[*x*] == 0;

rovnice/.{*y* → Function[*x*, Cos[2*x*]]}

True

rovnice/.{*y* → Function[*x*, Sin[2*x*]]}

True

***W* = {{Cos[2*x*], Sin[2*x*]}, *D*[{Cos[2*x*], Sin[2*x*]}, *x*]}**

{{Cos[2*x*], Sin[2*x*]}, {−2Sin[2*x*], 2Cos[2*x*]}}

Simplify[Det[*W*]]

2

Zpět

Příklad 3.1.6

Ověřte, že funkce $y_1(x) = \mathrm{e}^x$ a $y_2(x) = x\,\mathrm{e}^x$ jsou řešení lineární diferenciální rovnice $y'' - 2y' + y = 0$. Tvoří funkce y_1, y_2 fundamentální systém řešení?

? Zpět

Příklad 3.1.6

Ověřte, že funkce $y_1(x) = \mathrm{e}^x$ a $y_2(x) = x\,\mathrm{e}^x$ jsou řešení lineární diferenciální rovnice $y'' - 2y' + y = 0$. Tvoří funkce y_1, y_2 fundamentální systém řešení?

Výsledek:

Ano, tvoří fundamentální systém.

Zpět

Příklad 3.1.6

Ověřte, že funkce $y_1(x) = \mathrm{e}^x$ a $y_2(x) = x\,\mathrm{e}^x$ jsou řešení lineární diferenciální rovnice $y'' - 2y' + y = 0$. Tvoří funkce y_1, y_2 fundamentální systém řešení?

Návod:

Pro $y_1(x)$ a $y_2(x)$ dosazením ověřte pravdivost diferenciální rovnice. Fundamentální systém řešení tvoří v případě LDR 2. řadu dvě lineárně nezávislá řešení. Nezávislost řešení ověřujeme pomocí Wronského determinantu.

Zpět

Příklad 3.1.6

Ověřte, že funkce $y_1(x) = \mathrm{e}^x$ a $y_2(x) = x\,\mathrm{e}^x$ jsou řešení lineární diferenciální rovnice $y'' - 2y' + y = 0$. Tvoří funkce y_1, y_2 fundamentální systém řešení?

Řešení:

Funkci y_1 (resp. y_2) dosadíme do dané diferenciální rovnice. Spočtěme $y_1'(x), y_1''(x)$ (resp. $y_2'(x), y_2''(x)$):

$$y_1(x) = \mathrm{e}^x \quad \Longrightarrow \quad y_1'(x) = \mathrm{e}^x \quad \Longrightarrow \quad y_1''(x) = \mathrm{e}^x \,,$$

$$y_2(x) = x\,\mathrm{e}^x \quad \Longrightarrow \quad y_2'(x) = (1+x)\mathrm{e}^x \quad \Longrightarrow \quad y_2''(x) = (2+x)\mathrm{e}^x \,.$$

Dosaďme y_1, y_1' a y_1'' (resp. y_2, y_2' a y_2'') do levé strany dané rovnice:

$$y_1'' - 2y_1' + y_1 = \mathrm{e}^x - 2\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x = 0 \,,$$

$$y_2'' - 2y_2' + y_2 = (2+x)\mathrm{e}^x - 2\,(1+x)\mathrm{e}^x + x\,\mathrm{e}^x = 0 \,.$$

Pravá strana dané rovnice je rovna nule. Ukázali jsme tak, že jak pro funkci $y_1(x) = \mathrm{e}^x$, tak pro funkci $y_2(x) = x\,\mathrm{e}^x$ se levá strana rovnice $y'' - 2y' + y = 0$ rovná pravé pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Funkce jsou řešení dané diferenciální rovnice. Tvoří fundamentální systém řešení, jsou-li lineárně nezávislé.

Další

Příklad 3.1.6

Ověřte, že funkce $y_1(x) = \mathrm{e}^x$ a $y_2(x) = x\,\mathrm{e}^x$ jsou řešení lineární diferenciální rovnice $y'' - 2y' + y = 0$. Tvoří funkce y_1, y_2 fundamentální systém řešení?

Řešení:

Spočtěme jejich Wronskián:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathrm{e}^x & x\,\mathrm{e}^x \\ \mathrm{e}^x & (1+x)\mathrm{e}^x \end{vmatrix} = (1+x)\mathrm{e}^{2x} - x\,\mathrm{e}^{2x} = \mathrm{e}^{2x} \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}\,.$$

Wronského determinant je různý od nuly, tedy funkce $y_1(x)$ a $y_2(x)$ jsou lineárně nezávislé, tvoří fundamentální systém řešení.

Zpět

Příklad 3.1.6

Ověřte, že funkce $y_1(x) = \mathrm{e}^x$ a $y_2(x) = x\,\mathrm{e}^x$ jsou řešení lineární diferenciální rovnice $y'' - 2y' + y = 0$. Tvoří funkce y_1, y_2 fundamentální systém řešení?

Maple:

```
> res1:=y(x)=exp(x);
```

$$res1 := \mathrm{y}(x) = e^x$$

```
> DR:=(diff(y(x),x$2)-2*diff(y(x),x)+y(x)=0);
```

$$DR := \left(\frac{d^2}{dx^2}\,\mathrm{y}(x)\right) - 2\left(\frac{d}{dx}\,\mathrm{y}(x)\right) + \mathrm{y}(x) = 0$$

```
> odetest(res1,DR);
```

$$0$$

```
> res2:=y(x)=x*exp(x);
```

$$res2 := \mathrm{y}(x) = x\,e^x$$

```
> odetest(res2,DR);
```

$$0$$

```
> with(linalg):
```

Warning, the protected names norm and trace have been redefined and unprotected

```
> det(wronskian([exp(x),x*exp(x)],x));
```

$$(e^x)^2$$

```
> simplify(%);
```

$$e^{(2\,x)}$$

Zpět

Příklad 3.1.6

Ověřte, že funkce $y_1(x) = \mathrm{e}^x$ a $y_2(x) = x\,\mathrm{e}^x$ jsou řešení lineární diferenciální rovnice $y'' - 2y' + y = 0$. Tvoří funkce y_1, y_2 fundamentální systém řešení?

Mathematica:

rovnice = y"[x] − 2y′[x] + y[x] == 0;

rovnice/.{y → Function[x, Exp[x]]}

True

rovnice/.{y → Function[x, xExp[x]]}

$2e^x + 2e^x x - 2\left(e^x + e^x x\right) == 0$

Simplify[%]

True

W = {{Exp[x], xExp[x]}, D[{Exp[x], xExp[x]}, x]}

$\{\{e^x, e^x x\}, \{e^x, e^x + e^x x\}\}$

Simplify[Det[W]]

e^{2x}

Zpět

Partikulární řešení homogenní LDR 2. řádu (počáteční úloha)

- Příklad 3.2.1 Nalezněte řešení lineární diferenciální rovnice $y'' + 9y = 0$, které vyhovuje počátečním podmínkám $y(0) = 1, y'(0) = -3$.
- Příklad 3.2.2 Nalezněte řešení lineární diferenciální rovnice $y'' - y' + \frac{1}{4}\, y = 0$, které vyhovuje počátečním podmínkám $y(0) = 2, y'(0) = \frac{1}{3}$.

Zpět

Příklad 3.2.1

Nalezněte řešení lineární diferenciální rovnice $y'' + 9y = 0$, které vyhovuje počátečním podmínkám $y(0) = 1, y'(0) = -3$.

? Zpět

Příklad 3.2.1

Nalezněte řešení lineární diferenciální rovnice $y'' + 9y = 0$, které vyhovuje počátečním podmínkám $y(0) = 1, y'(0) = -3$.

Výsledek:

$y(x) = \cos 3x - \sin 3x\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$

Zpět

Příklad 3.2.1

Nalezněte řešení lineární diferenciální rovnice $y'' + 9y = 0$, které vyhovuje počátečním podmínkám $y(0) = 1, y'(0) = -3$.

Návod:

Rovnice je lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty tvaru
$k_0 y'' + k_1 y' + k_2 y = 0$. Nejprve najdeme obecné řešení podle návodu v prvním příkladě a pak určíme konstanty C_1, C_2 tak, aby nalezené řešení splňovalo počáteční podmínky.

Zpět

Příklad 3.2.1

Nalezněte řešení lineární diferenciální rovnice $y'' + 9y = 0$, které vyhovuje počátečním podmínkám $y(0) = 1, y'(0) = -3$.

Řešení:

Charakteristická rovnice zadané LDR $y'' + 9y = 0$ je

$$\lambda^2 + 9 = 0.$$

Její kořeny jsou $\lambda_1 = 3\,i$, $\lambda_2 = -3\,i$. (Rovnici řešíme v oboru komplexních čísel, $\lambda = \pm\sqrt{-9}$.) Má-li charakteristická rovnice dva ryze imaginární komplexně sdružené kořeny $\lambda_{1,2} = \pm b\,i$, pak obecné řešení HLDR má tvar

$$y(x) = C_1 \cos bx + C_2 \sin bx\,, \quad x \in \mathbb{R}\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Obecné řešení zadané LDR tedy je

$$y(x) = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x\,, \quad x \in \mathbb{R}\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Nyní určíme konstanty C_1, C_2 tak, aby nalezené řešení vyhovovalo počátečním podmínkám $y(0) = 1, y'(0) = -3$. Spočtěme derivaci obecného řešení $y(x)$: $y'(x) = -3\,C_1 \sin 3x + 3\,C_2 \cos 3x$. Pak po dosazení počátečních podmínek do $y(x)$ a $y'(x)$ dostaneme

$$\begin{array}{rcccl} 1 & = & y(0) & = & C_1 \cos(3\cdot 0) + C_2 \sin(3\cdot 0) \\ -3 & = & y'(0) & = & -3\,C_1 \sin(3\cdot 0) + 3\,C_2 \cos(3\cdot 0) \end{array}$$

Další

Příklad 3.2.1

Nalezněte řešení lineární diferenciální rovnice $y'' + 9y = 0$, které vyhovuje počátečním podmínkám $y(0) = 1, y'(0) = -3$.

Řešení:

Odtud

$$\begin{aligned} 1 &= C_1 \\ -3 &= 3\,C_2 \end{aligned}$$

Hledané řešení má $C_1 = 1$ a $C_2 = -1$, tedy

$$y(x) = \cos 3x - \sin 3x\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Zpět

Příklad 3.2.1

Nalezněte řešení lineární diferenciální rovnice $y'' + 9y = 0$, které vyhovuje počátečním podmínkám $y(0) = 1, y'(0) = -3$.

Maple:

```
> DR:=(diff(y(x),x$2)+9*y(x)=0);
```

$$DR := (\frac{d^2}{dx^2}\,\mathrm{y}(x)) + 9\,\mathrm{y}(x) = 0$$

```
> PP:=y(0)=1,D(y)(0)=-3;
```

$$PP := \mathrm{y}(0) = 1,\ \mathrm{D}(y)(0) = -3$$

```
> dsolve({DR,PP},y(x));
```

$$\mathrm{y}(x) = -\sin(3\,x) + \cos(3\,x)$$

Zpět

Příklad 3.2.1

Nalezněte řešení lineární diferenciální rovnice $y'' + 9y = 0$, které vyhovuje počátečním podmínkám $y(0) = 1, y'(0) = -3$.

Mathematica:

$\mathbf{rovnice = \boldsymbol{y}"[\boldsymbol{x}] + 9\boldsymbol{y}[\boldsymbol{x}] == 0;}$

$\mathbf{pp1 = \boldsymbol{y}[0] == -1; pp2 = \boldsymbol{y}'[0] == -3};$

$\mathbf{reseni = DSolve[\{rovnice, pp1, pp2\}, \boldsymbol{y}[\boldsymbol{x}], \boldsymbol{x}]}$

$\{\{y[x] \to \mathrm{Cos}[3x] - \mathrm{Sin}[3x]\}\}$

Zpět

Příklad 3.2.2

Nalezněte řešení lineární diferenciální rovnice $y'' - y' + \frac{1}{4}\,y = 0$, které vyhovuje počátečním podmínkám $y(0) = 2, y'(0) = \frac{1}{3}$.

? Zpět

Příklad 3.2.2

Nalezněte řešení lineární diferenciální rovnice $y'' - y' + \frac{1}{4}\, y = 0$, které vyhovuje počátečním podmínkám $y(0) = 2, y'(0) = \frac{1}{3}$.

Výsledek:

$$y(x) = 2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - \frac{2}{3}\, x\, \mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Zpět

Příklad 3.2.2

Nalezněte řešení lineární diferenciální rovnice $y'' - y' + \frac{1}{4}\,y = 0$, které vyhovuje počátečním podmínkám $y(0) = 2, y'(0) = \frac{1}{3}$.

Návod:

Rovnice je lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty tvaru $k_0 y'' + k_1 y' + k_2 y = 0$. Nejprve najdeme obecné řešení stejně jako v předchozích příkladech a pak určíme konstanty C_1, C_2 tak, aby nalezené řešení splňovalo počáteční podmínky.

Zpět

Příklad 3.2.2

Nalezněte řešení lineární diferenciální rovnice $y'' - y' + \frac{1}{4}\,y = 0$, které vyhovuje počátečním podmínkám $y(0) = 2, y'(0) = \frac{1}{3}$.

Řešení:

Charakteristická rovnice zadané LDR $y'' - y' + \frac{1}{4}\,y = 0$ je

$$\lambda^2 - \lambda + \frac{1}{4} = 0.$$

Její kořeny jsou $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}$. (Levou stranu rovnice lze podle vzorečku $A^2 + 2AB + b^2 = (A + B)^2$ upravit, tedy $(x - \frac{1}{2})^2 = 0$.) Má-li charakteristická rovnice jeden dvojnásobný reálný kořen λ, pak obecné řešení HLDR má tvar

$$y(x) = C_1 \mathrm{e}^{\lambda x} + C_2\, x\, \mathrm{e}^{\lambda x}\,, \quad x \in \mathbb{R}\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Obecné řešení zadané LDR tedy je

$$y(x) = C_1 \mathrm{e}^{\frac{x}{2}} + C_2\, x\, \mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\,, \quad x \in \mathbb{R}\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Nyní určíme konstanty C_1, C_2 tak, aby nalezené řešení vyhovovalo počátečním podmínkám $y(0) = 2, y'(0) = \frac{1}{3}$. Spočtěme derivaci obecného řešení $y(x)$:

$y'(x) = \frac{1}{2}\, C_1 \mathrm{e}^{\frac{x}{2}} + (C_2 + \frac{1}{2}\, C_2\, x)\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\,.$

Další

Příklad 3.2.2

Nalezněte řešení lineární diferenciální rovnice $y'' - y' + \frac{1}{4}\, y = 0$, které vyhovuje počátečním podmínkám $y(0) = 2, y'(0) = \frac{1}{3}$.

Řešení:

Pak po dosazení počátečních podmínek do $y(x)$ a $y'(x)$ dostaneme

$$\begin{aligned} 2 &= y(0) &&= C_1 \mathrm{e}^{\frac{0}{2}} + C_2 \cdot 0 \cdot \mathrm{e}^{\frac{0}{2}} \\ \tfrac{1}{3} &= y'(0) &&= \tfrac{1}{2}\, C_1 \mathrm{e}^{\frac{0}{2}} + (C_2 + \tfrac{1}{2}\, C_2 \cdot 0)\mathrm{e}^{\frac{0}{2}} \end{aligned}$$

Odtud

$$\begin{aligned} 2 &= C_1 \\ \tfrac{1}{3} &= \tfrac{1}{2}\, C_1 + C_2 \end{aligned}$$

Hledané řešení má $C_1 = 2$ a $C_2 = -\frac{2}{3}$, tedy

$$y(x) = 2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - \frac{2}{3}\, x\, \mathrm{e}^{\frac{x}{2}}, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Zpět

Příklad 3.2.2

Nalezněte řešení lineární diferenciální rovnice $y'' - y' + \frac{1}{4}\,y = 0$, které vyhovuje počátečním podmínkám $y(0) = 2, y'(0) = \frac{1}{3}$.

Maple:

```
> DR:=(diff(y(x),x$2)-diff(y(x),x)+1/4*y(x)=0);
```

$$DR := (\frac{d^2}{dx^2}\,\mathrm{y}(x)) - (\frac{d}{dx}\,\mathrm{y}(x)) + \frac{1}{4}\,\mathrm{y}(x) = 0$$

```
> PP:=y(0)=2,D(y)(0)=1/3;
```

$$PP := \mathrm{y}(0) = 2,\ \mathrm{D}(y)(0) = \frac{1}{3}$$

```
> dsolve({DR,PP},y(x));
```

$$\mathrm{y}(x) = 2\,e^{(\frac{x}{2})} - \frac{2}{3}\,e^{(\frac{x}{2})}\,x$$

Zpět

Příklad 3.2.2

Nalezněte řešení lineární diferenciální rovnice $y'' - y' + \frac{1}{4}\,y = 0$, které vyhovuje počátečním podmínkám $y(0) = 2, y'(0) = \frac{1}{3}$.

Mathematica:

$\mathbf{rovnice = \boldsymbol{y}"[\boldsymbol{x}] - \boldsymbol{y}'[\boldsymbol{x}] + 1/4\boldsymbol{y}[\boldsymbol{x}] == 0;}$

$\mathbf{pp1 = \boldsymbol{y}[0] == 2; pp2 = \boldsymbol{y}'[0] == 1/3;}$

$\mathbf{reseni = DSolve[\{rovnice, pp1, pp2\}, \boldsymbol{y}[\boldsymbol{x}], \boldsymbol{x}]}$

$\left\{\left\{y[x] \to -\frac{2}{3}e^{x/2}(-3 + x)\right\}\right\}$

Zpět

Obecné řešení LDR 2. řádu

- **Příklad 3.3.1** Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice (LDR) $y'' - 3y' - 4y = 3\mathrm{e}^{2x}$.
- **Příklad 3.3.2** Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y'' - 3y' - 4y = 2\sin x$.
- **Příklad 3.3.3** Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y'' - 3y' - 4y = -8\,\mathrm{e}^{x}\cos 2x$.
- **Příklad 3.3.4** Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y'' - 3y' - 4y = 3\mathrm{e}^{2x} + 2\sin x$.
- **Příklad 3.3.5** Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y'' + 2y' = 3 + 4\sin 2x$.
- **Příklad 3.3.6** Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y'' + 4y' + 4y = x^{-2}\mathrm{e}^{-2x}$, $x > 0$.
- **Příklad 3.3.7** Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y'' - y' = \frac{2+x}{x^3}$, $x < 0$.

Zpět

Příklad 3.3.1

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice (LDR) $y'' - 3y' - 4y = 3\mathrm{e}^{2x}$.

?

Zpět

Příklad 3.3.1

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice (LDR) $y'' - 3y' - 4y = 3\mathrm{e}^{2x}$.

Výsledek:

$y(x) = C_1 \mathrm{e}^{-x} + C_2\, \mathrm{e}^{4x} - \frac{1}{2}\, \mathrm{e}^{2x}\,, \quad x \in \mathbb{R}\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}\,.$

Zpět

Příklad 3.3.1

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice (LDR) $y'' - 3y' - 4y = 3\mathrm{e}^{2x}$.

Návod:

Rovnice je nehomogenní lineární diferenciální rovnice (NLDR) s konstantními koeficienty $k_0 y'' + k_1 y' + k_2 y = f(x)\,,\, k_0, k_1, k_2 \in \mathbb{R}\,,\, k_0 \neq 0$. Její řešení je součtem obecného řešení přiřazené HLDR – $y_H(x)$ a partikulárního (jednoho) řešení zadané NLDR – $y_P(x)$, tj. $y(x) = y_H(x) + y_P(x)$. Obecné řešení $y_H(x)$ je diskutováno v prvním odstavci třetí kapitoly. Partikulární řešení $y_P(x)$ můžeme nalézt pomocí tzv. metody variace konstant; v tomto případě je výhodnější tzv. metoda odhadu. Zpět

Příklad 3.3.1

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice (LDR) $y'' - 3y' - 4y = 3\mathrm{e}^{2x}$.

Řešení:

Obecné řešení zadané NLDR má tvar

$$y(x) = y_H(x) + y_P(x)\,,$$

kde $y_H(x)$ je obecné řešení přiřazené HLDR, tj. diferenciální rovnice $y'' - 3y' - 4y = 0$.
Odpovídající charakteristická rovnice je

$$\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0.$$

Její kořeny jsou $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 4$. Obecné řešení přiřazené HLDR tedy je

$$y_H(x) = C_1\mathrm{e}^{-x} + C_2\,\mathrm{e}^{4x}\,, \quad x \in \mathbb{R}\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Ukažme, že pravá strana zadané NLDR $f(x) = 3\mathrm{e}^{2x}$ je tzv. speciální pravá strana

$$\mathrm{e}^{ax}(P(x)\cos bx + Q(x)\sin bx)\,.$$

Položíme-li $a = 2$, $b = 0$, $P(x) = 3$ a $Q(x) = 0$, dostaneme
$\mathrm{e}^{2x}(3\cos 0x + 0\sin 0x) = 3\mathrm{e}^{2x}$.

Další

Příklad 3.3.1

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice (LDR) $y'' - 3y' - 4y = 3\mathrm{e}^{2x}$.

Řešení:

V takovém případě umíme udělat odhad partikulárního (= nějakého, jednoho) řešení zadané NLDR:

$$y_P(x) = x^k \mathrm{e}^{ax}(R(x)\cos bx + S(x)\sin bx)\,,$$

kde $R(x)$, $S(x)$ jsou obecné polynomy stupně $\max\{\mathrm{st}P, \mathrm{st}Q\}$ a konstanty a, b známe z tvaru pravé strany $f(x)$. Je-li číslo $\alpha = a + b\,i = 2 + 0\,i$ kořenem charakteristické rovnice, je hodnota konstanty k rovna násobnosti kořene α. Není-li α kořenem charakteristické rovnice, je $k = 0$. Stupeň polynomu $P(x) = 3$ je $\mathrm{st}P = 0$ a stupeň polynomu $Q(x) = 0$ je $\mathrm{st}Q = 0$. Odtud je $\mathrm{st}R, S = 0$, proto $R(x) = A \in \mathbb{R}$ a $S(x) = B \in \mathbb{R}$. Číslo $\alpha = 2$ není kořenem charakteristické rovnice ($\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 4$), tedy $k = 0$. Máme

$$y_P(x) = x^0 \mathrm{e}^{2x}(A\cos 0x + B\sin 0x) = A\mathrm{e}^{2x}.$$

Zbývá určit konstantu A. Chceme, aby funkce $y_P(x) = A\mathrm{e}^{2x}$ byla řešením zadané NLDR $y'' - 3y' - 4y = 3\mathrm{e}^{2x}$, tedy ji splňovala. Spočtěme $y_P'(x)$ a $y_P''(x)$:

$$y_P'(x) = 2A\mathrm{e}^{2x} \quad \Longrightarrow \quad y_P''(x) = 4A\mathrm{e}^{2x}.$$

Dosaďme do zadané NLDR y_P, y_P' a y_P'' :

$$4A\mathrm{e}^{2x} - 3 \cdot 2A\mathrm{e}^{2x} - 4 \cdot A\mathrm{e}^{2x} = 3\mathrm{e}^{2x}.$$

Další

Příklad 3.3.1

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice (LDR) $y'' - 3y' - 4y = 3\mathrm{e}^{2x}$.

Řešení:

Funkce e^{2x} je kladná, obě strany rovnice vydělíme touto funkcí, pak

$$4A - 6A - 4A = 3 \quad \Longrightarrow \quad A = -\frac{1}{2}.$$

Partikulární řešení zadané NLDR je

$$y_P(x) = -\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{2x}.$$

Obecné řešení rovnice $y'' - 3y' - 4y = 3\mathrm{e}^{2x}$ tedy je

$$y(x) = C_1\mathrm{e}^{-x} + C_2\,\mathrm{e}^{4x} - \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{2x}\,, \quad x \in \mathbb{R}\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Zpět

Příklad 3.3.1

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice (LDR) $y'' - 3y' - 4y = 3\mathrm{e}^{2x}$.

Maple:

```
> DR:=(diff(y(x),x$2)-3*diff(y(x),x)-4*y(x)=3*exp(2*x));
```

$$DR := \left(\frac{d^2}{dx^2}\,\mathrm{y}(x)\right) - 3\left(\frac{d}{dx}\,\mathrm{y}(x)\right) - 4\,\mathrm{y}(x) = 3\,e^{(2\,x)}$$

```
> dsolve(DR,y(x));
```

$$\mathrm{y}(x) = e^{(-x)}\,\_C2 + e^{(4\,x)}\,\_C1 - \frac{1}{2}\,e^{(2\,x)}$$

Zpět

Příklad 3.3.1

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice (LDR) $y'' - 3y' - 4y = 3\mathrm{e}^{2x}$.

Mathematica:

rovnice = *y*"[*x*] − 3*y*′[*x*] − 4*y*[*x*] == 3Exp[2*x*];

reseni = DSolve[rovnice, *y*[*x*], *x*]

$$\left\{\left\{y[x] \to -\frac{e^{2x}}{2} + e^{-x}C[1] + e^{4x}C[2]\right\}\right\}$$

Zpět

Příklad 3.3.2

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y'' - 3y' - 4y = 2\sin x$.

? Zpět

Příklad 3.3.2

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y'' - 3y' - 4y = 2\sin x$.

Výsledek:

$y(x) = C_1 \mathrm{e}^{-x} + C_2\,\mathrm{e}^{4x} + \frac{3}{17}\cos x - \frac{5}{17}\sin x\,, \quad x \in \mathbb{R}\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}\,.$

Zpět

Příklad 3.3.2

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y'' - 3y' - 4y = 2\sin x$.

Návod:

Rovnice je NLDR s konstantními koeficienty
$k_0 y'' + k_1 y' + k_2 y = f(x)$, $k_0, k_1, k_2 \in \mathbb{R}$, $k_0 \neq 0$. Její řešení hledáme podle návodu v příkladě 3.3.1.

Zpět

Příklad 3.3.2

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y'' - 3y' - 4y = 2\sin x$.

Řešení:

Obecné řešení zadané NLDR má tvar

$$y(x) = y_H(x) + y_P(x)\,,$$

kde $y_H(x)$ je obecné řešení přiřazené HLDR, tj. diferenciální rovnice $y'' - 3y' - 4y = 0$. Řešení známe z příkladu 3.3.1, je

$$y_H(x) = C_1 \mathrm{e}^{-x} + C_2\,\mathrm{e}^{4x}\,, \quad x \in \mathbb{R}\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Ukažme, že pravá strana zadané NLDR $f(x) = 2\sin x$ je speciální pravá strana

$$\mathrm{e}^{ax}(P(x)\cos bx + Q(x)\sin bx)\,.$$

Položíme-li $a = 0$, $b = 1$, $P(x) = 0$ a $Q(x) = 2$, dostaneme $\mathrm{e}^{0x}(0 \cdot \cos 1x + 2\sin 1x) = 2\sin x$. Odhad partikulárního řešení je

$$y_P(x) = x^k \mathrm{e}^{ax}(R(x)\cos bx + S(x)\sin bx)\,,$$

kde $a = 0$, $b = 1$. Stupeň polynomu $P(x) = 0$ je $\mathrm{st}P = 0$ a stupeň polynomu $Q(x) = 2$ je $\mathrm{st}Q = 0$. Odtud je $\mathrm{st}R, S = 0$, proto $R(x) = A \in \mathbb{R}$ a $S(x) = B \in \mathbb{R}$. Číslo $\alpha = a + bi = i$ není kořenem charakteristické rovnice ($\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 4$), tedy $k = 0$.

Další

Příklad 3.3.2

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y'' - 3y' - 4y = 2\sin x$.

Řešení:

Máme

$$y_P(x) = x^0 \mathrm{e}^{0x}(A\cos 1x + B\sin 1x) = A\cos x + B\sin x.$$

Určeme konstanty A, B. Funkce $y_P(x) = A\cos x + B\sin x$ musí splňovat zadanou NLDR $y'' - 3y' - 4y = 2\sin x$. Spočtěme $y'_P(x)$ a $y''_P(x)$:

$$y'_P(x) = -A\sin x + B\cos x \quad \Longrightarrow \quad y''_P(x) = -A\cos x - B\sin x.$$

Dosaďme do zadané NLDR y_P, y'_P a y''_P :

$$-A\cos x - B\sin x - 3(-A\sin x + B\cos x) - 4(A\cos x + B\sin x) = 2\sin x.$$

$$\Downarrow$$

$$(-A - 3B - 4A)\cos x + (-B + 3A - 4B)\sin x = 0\cos x + 2\sin x.$$

Aby byla poslední rovnost splněna, musí se výrazy u funkcí $\sin x, \cos x$ na levé a pravá straně rovnosti sobě rovnat:

$$\begin{aligned} -3B - 5A &= 0 \\ 3A - 5B &= 2\,. \end{aligned}$$

Odtud $A = -\frac{3}{5}B$, tedy $-\frac{9}{5}B - 5B = 2 \quad \Longrightarrow \quad B = -\frac{5}{17}$ a $A = \frac{3}{17}$.

Další

Příklad 3.3.2

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y'' - 3y' - 4y = 2\sin x$.

Řešení:

Partikulární řešení zadané NLDR je

$$y_P(x) = \frac{3}{17}\cos x - \frac{5}{17}\sin x.$$

Obecné řešení rovnice $y'' - 3y' - 4y = 2\sin x$ tedy je

$$y(x) = C_1 \mathrm{e}^{-x} + C_2 \mathrm{e}^{4x} + \frac{3}{17}\cos x - \frac{5}{17}\sin x\,, \quad x \in \mathbb{R}\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Zpět

Příklad 3.3.2

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y'' - 3y' - 4y = 2\sin x$.

Maple:

```
> DR:=(diff(y(x),x$2)-3*diff(y(x),x)-4*y(x)=2*sin(x));
```

$$DR := \left(\frac{d^2}{dx^2}\,\mathrm{y}(x)\right) - 3\left(\frac{d}{dx}\,\mathrm{y}(x)\right) - 4\,\mathrm{y}(x) = 2\sin(x)$$

```
> dsolve(DR,y(x));
```

$$\mathrm{y}(x) = e^{(-x)}\,\_C2 + e^{(4\,x)}\,\_C1 + \frac{3}{17}\cos(x) - \frac{5}{17}\sin(x)$$

Zpět

Příklad 3.3.2

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y'' - 3y' - 4y = 2\sin x$.

Mathematica:

$\mathbf{rovnice = y"[x] - 3y'[x] - 4y[x] == 2Sin[x];}$

$\mathbf{reseni = DSolve[rovnice, y[x], x]}$

$\{\{y[x] \to e^{-x}C[1] + e^{4x}C[2] + \frac{1}{17}(3\mathrm{Cos}[x] - 5\mathrm{Sin}[x])\}\}$

Zpět

Příklad 3.3.3

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y'' - 3y' - 4y = -8\,\mathrm{e}^{x}\cos 2x$.

? Zpět

Příklad 3.3.3

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y'' - 3y' - 4y = -8\,\mathrm{e}^{x}\cos 2x$.

Výsledek:

$y(x) = C_1\mathrm{e}^{-x} + C_2\,\mathrm{e}^{4x} + \mathrm{e}^{x}\left(\frac{10}{13}\cos 2x + \frac{2}{13}\sin 2x\right)\,, \quad x \in \mathbb{R}\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}\,.$

Zpět

Příklad 3.3.3

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y'' - 3y' - 4y = -8\,\mathrm{e}^x \cos 2x$.

Návod:

Rovnice je NLDR s konstantními koeficienty
$k_0 y'' + k_1 y' + k_2 y = f(x)\,, k_0, k_1, k_2 \in \mathbb{R}\,, k_0 \neq 0$. Její řešení hledáme podle návodu v příkladě 3.3.1

Zpět

Příklad 3.3.3

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y'' - 3y' - 4y = -8\,\mathrm{e}^x \cos 2x$.

Řešení:

Obecné řešení zadané NLDR má tvar

$$y(x) = y_H(x) + y_P(x)\,,$$

kde $y_H(x)$ je obecné řešení přiřazené HLDR, tj. diferenciální rovnice $y'' - 3y' - 4y = 0$.
Řešení známe z příkladu 1, je

$$y_H(x) = C_1 \mathrm{e}^{-x} + C_2\,\mathrm{e}^{4x}\,, \quad x \in \mathbb{R}\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Ukažme, že pravá strana zadané NLDR $f(x) = -8\,\mathrm{e}^x \cos 2x$ je speciální pravá strana

$$\mathrm{e}^{ax}(P(x)\cos bx + Q(x)\sin bx)\,.$$

Položíme-li $a = 1$, $b = 2$, $P(x) = -8$ a $Q(x) = 0$, dostaneme
$\mathrm{e}^x(-8\cos 2x + 0\sin 2x) = -8\,\mathrm{e}^x \cos 2x$. Odhad partikulárního řešení je

$$y_P(x) = x^k \mathrm{e}^{ax}(R(x)\cos bx + S(x)\sin bx)\,,$$

kde $a = 1$, $b = 2$. Stupeň polynomu $P(x) = -8$ je $\mathrm{st}P = 0$ a stupeň polynomu $Q(x) = 0$ je $\mathrm{st}Q = 0$. Odtud je $\mathrm{st}R, S = 0$, proto $R(x) = A \in \mathbb{R}$ a $S(x) = B \in \mathbb{R}$. Číslo $\alpha = a + bi = 1 + 2i$ není kořenem charakteristické rovnice ($\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 4$), tedy $k = 0$.

Další

Příklad 3.3.3

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y'' - 3y' - 4y = -8\,\mathrm{e}^x \cos 2x$.

Řešení:

Máme $$y_P(x) = x^0 \mathrm{e}^x (A\cos 2x + B\sin 2x) = \mathrm{e}^x (A\cos 2x + B\sin 2x).$$

Určeme konstanty A, B. Funkce $y_P(x) = \mathrm{e}^x (A\cos 2x + B\sin 2x)$ musí splňovat zadanou NLDR $y'' - 3y' - 4y = -8\,\mathrm{e}^x \cos 2x$. Spočtěme $y'_P(x)$ a $y''_P(x)$:

$$y'_P(x) = \mathrm{e}^x (A\cos 2x + B\sin 2x) + \mathrm{e}^x (-2A\sin 2x + 2B\cos 2x)$$

$$\Downarrow$$

$$y''_P(x) = \mathrm{e}^x (A\cos 2x + B\sin 2x) + 2\mathrm{e}^x (-2A\sin 2x + 2B\cos 2x) + \mathrm{e}^x (-4A\cos 2x - 4B\sin 2x).$$

Dosaďme do zadané NLDR y_P, y'_P a y''_P. Levá strana rovnice bude obsahovat mnoho sčítanců. Z důvodu přehlednosti pišme výrazy, které dosazujeme, následujícím způsobem: Na levé straně rovnice se budou vyskytovat násobky funkcí $\mathrm{e}^x \cos 2x$, $\mathrm{e}^x \sin 2x$. Napišme funkce $\mathrm{e}^x \cos 2x$, $\mathrm{e}^x \sin 2x$ pod sebe a připisujme pouze příslušné konstanty, které u funkcí stojí, jak postupně do rovnice dosazujeme y''_P, y'_P a y_P. Aby byla rovnost $y''_P - 3y'_P - 4y_P = -8\,\mathrm{e}^x \cos 2x$ splněna, musí se výrazy u funkcí $\mathrm{e}^x \cos 2x$, $\mathrm{e}^x \sin 2x$ na levé a pravé straně rovnosti sobě rovnat. Vše je zapsáno v následující tabulce.

levá strana	$y'' - 3y' - 4y$	$=$	$-8\,\mathrm{e}^x \cos 2x$	pravá strana
$\mathrm{e}^x \cos 2x$:	$A + 4B - 4A - 3A - 6B - 4A$	$=$	-8	: $\mathrm{e}^x \cos 2x$
$\mathrm{e}^x \sin 2x$:	$B - 4A - 4B - 3B + 6A - 4B$	$=$	0	: $\mathrm{e}^x \sin 2x$

Další

Příklad 3.3.3

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y'' - 3y' - 4y = -8\,\mathrm{e}^x \cos 2x$.

Řešení:

Hledejme řešení soustavy dvou rovnic pro neznámé A, B, které jsme z tabulky získali:

$$\begin{array}{rcl} -10A - 2B & = & -8 \\ 2A - 10B & = & 0 \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{rcl} -10A - 2B & = & -8 \\ 10A - 50B & = & 0 \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{rcl} B & = & \frac{2}{13} \\ A & = & \frac{10}{13} \end{array}$$

Partikulární řešení zadané NLDR je

$$y_P(x) = \mathrm{e}^x \left(\frac{10}{13} \cos 2x + \frac{2}{13} \sin 2x \right) .$$

Obecné řešení rovnice $y'' - 3y' - 4y = -8\,\mathrm{e}^x \cos 2x$ tedy je

$$y(x) = C_1 \mathrm{e}^{-x} + C_2\, \mathrm{e}^{4x} + \mathrm{e}^x \left(\frac{10}{13} \cos 2x + \frac{2}{13} \sin 2x \right) , \quad x \in \mathbb{R} , \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R} .$$

Zpět

Příklad 3.3.3

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y'' - 3y' - 4y = -8\,\mathrm{e}^{x}\cos 2x$.

Maple:

```
> restart;
> DR:=(diff(y(x),x$2)-3*diff(y(x),x)-4*y(x)=-8*exp(x)*cos(2*x));
```

$$DR := (\frac{d^2}{dx^2}\,\mathrm{y}(x)) - 3\,(\frac{d}{dx}\,\mathrm{y}(x)) - 4\,\mathrm{y}(x) = -8\,e^{x}\cos(2\,x)$$

```
> dsolve(DR,y(x));
```

$$\mathrm{y}(x) = e^{(-x)}\,\_C2 + e^{(4\,x)}\,\_C1 + \frac{2}{13}\,e^{x}\,(5\cos(2\,x) + \sin(2\,x))$$

Zpět

Příklad 3.3.3

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y'' - 3y' - 4y = -8\,\mathrm{e}^{x}\cos 2x$.

Mathematica:

$\mathbf{rovnice = \boldsymbol{y}"[\boldsymbol{x}] - 3\boldsymbol{y}'[\boldsymbol{x}] - 4\boldsymbol{y}[\boldsymbol{x}] == -8Exp[\boldsymbol{x}]Cos[2\boldsymbol{x}];}$

$\mathbf{reseni = DSolve[rovnice, \boldsymbol{y}[\boldsymbol{x}], \boldsymbol{x}]}$

$\{\{y[x] \to e^{-x}C[1] + e^{4x}C[2] + \frac{2}{13}e^{x}(5\mathrm{Cos}[2x] + \mathrm{Sin}[2x])\}\}$

Zpět

Příklad 3.3.4

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y'' - 3y' - 4y = 3\mathrm{e}^{2x} + 2\sin x$.

? Zpět

Příklad 3.3.4

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y'' - 3y' - 4y = 3\mathrm{e}^{2x} + 2\sin x\,.$

Výsledek:

$y(x) = C_1\mathrm{e}^{-x} + C_2\,\mathrm{e}^{4x} - \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{2x} + \frac{3}{17}\,\cos x - \frac{5}{17}\,\sin x\,, \quad x \in \mathbb{R}\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}\,.$

Zpět

Příklad 3.3.4

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y'' - 3y' - 4y = 3\mathrm{e}^{2x} + 2\sin x$.

Návod:

Rovnice je NLDR s konstantními koeficienty
$k_0y'' + k_1y' + k_2y = f(x)\,, k_0, k_1, k_2 \in \mathbb{R}\,, k_0 \neq 0$. Použijeme návod z příkladu 1. Pravá strana zadané rovnice však není speciální pravá strana, ale je součtem dvou speciálních pravých stran $f_1(x) + f_2(x)$. Proto hledáme partikulární řešení $y_P(x)$ ve tvaru součtu $y_P(x) = y_{P1}(x) + y_{P2}(x)$, kde $y_{P1}(x)$ je partikulární řešení rovnice
$k_0y'' + k_1y' + k_2y = f_1(x)$ a $y_{P2}(x)$ je partikulární řešení rovnice
$k_0y'' + k_1y' + k_2y = f_2(x)$.

Zpět

Příklad 3.3.4

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y'' - 3y' - 4y = 3\mathrm{e}^{2x} + 2\sin x$.

Řešení:

Obecné řešení zadané NLDR má tvar

$$y(x) = y_H(x) + y_P(x)\,,$$

kde $y_H(x)$ je obecné řešení přiřazené HLDR, tj. diferenciální rovnice $y'' - 3y' - 4y = 0$. Řešení známe z příkladu 1, je

$$y_H(x) = C_1\mathrm{e}^{-x} + C_2\,\mathrm{e}^{4x}\,, \quad x \in \mathbb{R}\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Pravá strana zadané NLDR $f(x) = 3\mathrm{e}^{2x} + 2\sin x$ je součtem dvou speciálních pravých stran $f_1(x) = 3\mathrm{e}^{2x}$, viz Příklad 1 a $f_2(x) = 2\sin x$, viz Příklad 2. Partikulární řešení je součtem partikulárního řešení rovnice $y'' - 3y' - 4y = 3\mathrm{e}^{2x}$ – $y_{P1}(x)$ a partikulárního řešení rovnice $y'' - 3y' - 4y = 2\sin x$ – $y_{P2}(x)$, tj.

$$y_P(x) = y_{P1}(x) + y_{P2}(x)\,.$$

Tyto řešení známe z příkladů 1 a 2. Máme

$$y_P(x) = -\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{2x} + \frac{3}{17}\,\cos x - \frac{5}{17}\,\sin x\,.$$

Další

Příklad 3.3.4

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y'' - 3y' - 4y = 3\mathrm{e}^{2x} + 2\sin x$.

Řešení:

Obecné řešení rovnice $y'' - 3y' - 4y = 3\mathrm{e}^{2x} + 2\sin x$ tedy je

$$y(x) = C_1\mathrm{e}^{-x} + C_2\,\mathrm{e}^{4x} - \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{2x} + \frac{3}{17}\,\cos x - \frac{5}{17}\,\sin x\,, \quad x \in \mathbb{R}\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Zpět

Příklad 3.3.4

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y'' - 3y' - 4y = 3\mathrm{e}^{2x} + 2\sin x$.

Maple:

```
> DR:=(diff(y(x),x$2)-3*diff(y(x),x)-4*y(x)=3*exp(2*x)+2*sin(x));
```

$$DR := (\tfrac{d^2}{dx^2}\,\mathrm{y}(x)) - 3\,(\tfrac{d}{dx}\,\mathrm{y}(x)) - 4\,\mathrm{y}(x) = 3\,e^{(2\,x)} + 2\sin(x)$$

```
> dsolve(DR,y(x));
```

$$\mathrm{y}(x) = e^{(4\,x)}\,\_C2 + e^{(-x)}\,\_C1 - \frac{1}{2}\,e^{(2\,x)} + \frac{3}{17}\cos(x) - \frac{5}{17}\sin(x)$$

Zpět

Příklad 3.3.4

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y'' - 3y' - 4y = 3\mathrm{e}^{2x} + 2\sin x$.

Mathematica:

$\mathbf{rovnice = y"[x] - 3y'[x] - 4y[x] == 3Exp[2x] + 2Sin[x];}$

$\mathbf{reseni = DSolve[rovnice, y[x], x]}$

$\{\{y[x] \rightarrow$
$e^{-x}C[1] + e^{4x}C[2] + \frac{1}{34}\left(-17e^{2x} + 6\mathrm{Cos}[x] - 10\mathrm{Sin}[x]\right)\}\}$

Zpět

Příklad 3.3.5

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y'' + 2y' = 3 + 4\sin 2x$.

? Zpět

Příklad 3.3.5

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y'' + 2y' = 3 + 4\sin 2x$.

Výsledek:

$y(x) = C_1 + C_2\,\mathrm{e}^{-2x} + \frac{3}{2}\,x - \frac{1}{2}\,\cos 2x - \frac{1}{2}\,\sin 2x\,, \quad x \in \mathbb{R}\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}\,.$

Zpět

Příklad 3.3.5

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y'' + 2y' = 3 + 4\sin 2x$.

Návod:

Rovnice je NLDR s konstantními koeficienty
$k_0 y'' + k_1 y' + k_2 y = f(x)\,, k_0, k_1, k_2 \in \mathbb{R}\,, k_0 \neq 0$. Její řešení hledáme podle návodu v příkladě 3.3.4.

Zpět

Příklad 3.3.5

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y'' + 2y' = 3 + 4\sin 2x$.

Řešení:

Obecné řešení zadané NLDR má tvar

$$y(x) = y_H(x) + y_P(x)\,,$$

kde $y_H(x)$ je obecné řešení přiřazené HLDR, tj. diferenciální rovnice $y'' + 2y' = 0$. Odpovídající charakteristická rovnice je

$$\lambda^2 + 2\lambda = 0.$$

Její kořeny jsou $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -2$. Obecné řešení přiřazené HLDR tedy je

$$y_H(x) = C_1 + C_2\,\mathrm{e}^{-2x}\,, \quad x \in \mathbb{R}\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Pravá strana zadané NLDR $f(x) = 3 + 4\sin 2x$ je součtem dvou speciálních pravých stran $f_1(x) = 3$ a $f_2(x) = 4\sin 2x$. Partikulární řešení hledáme ve tvaru

$$y_P(x) = y_{P1}(x) + y_{P2}(x)\,,$$

kde $y_{P1}(x)$ je partikulární řešení rovnice $y'' + 2y' = 3$ a $y_{P2}(x)$ je partikulární řešení rovnice $y'' + 2y' = 4\sin 2x$. Ukažme, že pravé strany těchto rovnic $f_1(x) = 3$ a $f_2(x) = 4\sin 2x$ jsou speciální pravé strany

$$\mathrm{e}^{ax}(P(x)\cos bx + Q(x)\sin bx)\,.$$

Další

Příklad 3.3.5

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y'' + 2y' = 3 + 4\sin 2x$.

Řešení:

Použijeme následující tabulku.

i	$f_i(x)$	a	b	$P(x)$	$Q(x)$	$e^{ax}(P(x)\cos bx + Q(x)\sin bx)$
1	3	0	0	3	0	$e^{0x}(3\cos 0x + 0\sin 0x) = 3$
2	$4\sin 2x$	0	2	0	4	$e^{0x}(0\cos 2x + 4\sin 2x) = 4\sin 2x$

Odhad partikulárních řešení je

$$y_{Pi}(x) = x^k e^{ax}(R(x)\cos bx + S(x)\sin bx) ,$$

kde

i	a	b	$R(x)$	$S(x)$	$\alpha = a + bi$	k	$y_{Pi}(x)$
1	0	0	A	B	0	1	$x^1 e^{0x}(A\cos 0x + B\sin 0x) = Ax$
2	0	2	C	D	$2i$	0	$x^0 e^{0x}(C\cos 2x + D\sin 2x) = C\cos 2x + D\sin 2x$

Určeme konstanty A, C, D. Funkce $y_{P1}(x) = Ax$ musí splňovat rovnost $y'' + 2y' = 3$. Spočtěme $y'_{P1}(x)$ a $y''_{P1}(x)$:

$$y'_{P1}(x) = A \quad \Longrightarrow \quad y''_{P1}(x) = 0 .$$

Další

Příklad 3.3.5

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y'' + 2y' = 3 + 4\sin 2x$.

Řešení:

Dosaďme do rovnice $y'' + 2y' = 3$ y'_{P1} a y''_{P1} :

$$0 + 2A = 3 \quad \Longrightarrow \quad A = \frac{3}{2}.$$

První sčítanec partikulárního řešení je

$$y_{P1}(x) = \frac{3}{2}\,x.$$

Funkce $y_{P2}(x) = C\cos 2x + D\sin 2x$ musí splňovat rovnost $y'' + 2y' = 4\sin 2x$.
Spočtěme $y'_{P2}(x)$ a $y''_{P2}(x)$:

$$y'_{P2}(x) = -2C\sin 2x + 2D\cos 2x \quad \Longrightarrow \quad y''_{P2}(x) = -4C\cos 2x - 4D\sin 2x\,.$$

Dosaďme do rovnice $y'' + 2y' = 4\sin 2x$ y'_{P2} a y''_{P2} :

$$-4C\cos 2x - 4D\sin 2x + 2(-2C\sin 2x + 2D\cos 2x) = 4\sin 2x$$

$$\Downarrow$$

$$(-4C + 4D)\cos 2x + (-4D - 4C)\sin 2x = 0\cos 2x + 4\sin 2x.$$

Další

Příklad 3.3.5

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y'' + 2y' = 3 + 4\sin 2x$.

Řešení:

Aby byla poslední rovnost splněna, musí se výrazy u funkcí $\sin 2x, \cos 2x$ na levé a pravá straně rovnosti sobě rovnat:

$$\begin{aligned} -4C + 4D &= 0 \\ -4D - 4C &= 4\,. \end{aligned}$$

Odtud $D = C$, tedy $-4C - 4C = 4 \quad \Longrightarrow \quad C = -\frac{1}{2}$ a $D = -\frac{1}{2}$. Druhý sčítanec partikulárního řešení je

$$y_{P2}(x) = -\frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{2}\sin 2x\,.$$

Partikulární řešení zadané NLDR je

$$y_P(x) = \frac{3}{2}\,x - \frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{2}\sin 2x.$$

Obecné řešení rovnice $y'' + 2y' = 3 + 4\sin 2x$ tedy je

$$y(x) = C_1 + C_2\,\mathrm{e}^{-2x} + \frac{3}{2}\,x - \frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{2}\sin 2x\,, \quad x \in \mathbb{R}\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Zpět

Příklad 3.3.5

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y'' + 2y' = 3 + 4\sin 2x$.

Maple:

```
> DR:=(diff(y(x),x$2)+2*diff(y(x),x)=3+4*sin(2*x));
```

$$DR := \left(\frac{d^2}{dx^2}\,\mathrm{y}(x)\right) + 2\left(\frac{d}{dx}\,\mathrm{y}(x)\right) = 3 + 4\sin(2\,x)$$

```
> dsolve(DR,y(x));
```

$$\mathrm{y}(x) = -\frac{1}{2}\sin(2\,x) - \frac{1}{2}\cos(2\,x) - \frac{1}{2}\,e^{(-2\,x)}\,\_C1 + \frac{3\,x}{2} + \_C2$$

Zpět

Příklad 3.3.5

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y'' + 2y' = 3 + 4\sin 2x$.

Mathematica:

rovnice = y"[x] + 2y'[x] == 3 + 4 Sin[2x];

reseni = DSolve[rovnice, y[x], x]

$\{\{y[x] \to \frac{3x}{2} - \frac{1}{2}e^{-2x}C[1] + C[2] - \frac{1}{2}\mathrm{Cos}[2x] - \frac{1}{2}\mathrm{Sin}[2x]\}\}$

Zpět

Příklad 3.3.6

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y'' + 4y' + 4y = x^{-2}\mathrm{e}^{-2x}$, $x > 0$.

? Zpět

Příklad 3.3.6

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y'' + 4y' + 4y = x^{-2}\mathrm{e}^{-2x}\,,\ x > 0.$

Výsledek:

$y(x) = \mathrm{e}^{-2x}(C_1 + C_2\,x - \ln x)\,,\quad x \in (0, \infty)\,,\quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}\,.$

Zpět

Příklad 3.3.6

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y'' + 4y' + 4y = x^{-2}\mathrm{e}^{-2x}$, $x > 0$.

Návod:

Rovnice je NLDR s konstantními koeficienty
$k_0 y'' + k_1 y' + k_2 y = f(x)\,, k_0, k_1, k_2 \in \mathbb{R}\,, k_0 \neq 0$. Její řešení hledáme podle návodu v příkladě 3.3.1. V tomto případě partikulární řešení $y_P(x)$ hledáme pomocí metody variace konstant; metodu odhadu nelze použít.

Zpět

Příklad 3.3.6

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y'' + 4y' + 4y = x^{-2}\mathrm{e}^{-2x}$, $x > 0$.

Řešení:

Obecné řešení zadané NLDR má tvar

$$y(x) = y_H(x) + y_P(x)\,,$$

kde $y_H(x)$ je obecné řešení přiřazené HLDR, tj. diferenciální rovnice $y'' + 4y' + 4y = 0$. Odpovídající charakteristická rovnice je

$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0.$$

Její kořeny jsou $\lambda_{1,2} = -2$. Obecné řešení přiřazené HLDR tedy je

$$y_H(x) = C_1\mathrm{e}^{-2x} + C_2\,x\,\mathrm{e}^{-2x}\,, \quad x > 0\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Pravá strana zadané NLDR $f(x) = x^{-2}\mathrm{e}^{-2x}$ není speciální pravá strana

$$\mathrm{e}^{ax}(P(x)\cos bx + Q(x)\sin bx)\,.$$

V takovém případě pro odhad partikulárního řešení použijeme metodu variace konstant, tj. v obecném řešení přiřazené HLDR nahradíme konstanty C_1, C_2 funkcemi. Dostaneme

$$y_P(x) = C_1(x)\mathrm{e}^{-2x} + C_2(x)\,x\,\mathrm{e}^{-2x}\,.$$

Další

Příklad 3.3.6

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y'' + 4y' + 4y = x^{-2}e^{-2x}$, $x > 0$.

Řešení:

Nyní musíme najít funkce $C_1(x), C_2(x)$. Pro derivace těchto funkcí umíme sestavit soustavu rovnic

$$\begin{aligned} C_1'(x)\, y_1(x) + C_2'(x)\, y_2(x) &= 0 \\ C_1'(x)\, y_1'(x) + C_2'(x)\, y_2'(x) &= \frac{f(x)}{k_0}\,, \end{aligned}$$

v maticovém tvaru

$$\begin{bmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_1'(x) \\ C_2'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{f(x)}{k_0} \end{bmatrix}.$$

Matici soustavy tvoří matice z Wronského determinantu funkcí $y_1(x) = e^{-2x}$, $y_2(x) = x\,e^{-2x}$, které tvoří fundamentální systém řešení přiřazené HLDR. Konkrétně

$$\begin{bmatrix} e^{-2x} & x\,e^{-2x} \\ -2e^{-2x} & (1-2x)e^{-2x} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_1'(x) \\ C_2'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ x^{-2}e^{-2x} \end{bmatrix}.$$

Použitím Cramerova pravidla soustavu vyřešíme. Spočtěme determinanty:

$$D = \begin{vmatrix} e^{-2x} & x\,e^{-2x} \\ -2e^{-2x} & (1-2x)e^{-2x} \end{vmatrix} = (1-2x)e^{-4x} + 2xe^{-4x} = e^{-4x},$$

Další

Příklad 3.3.6

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y'' + 4y' + 4y = x^{-2}\mathrm{e}^{-2x}$, $x > 0$.

Řešení:

$$D_1 = \begin{vmatrix} 0 & x\,\mathrm{e}^{-2x} \\ x^{-2}\mathrm{e}^{-2x} & (1-2x)\mathrm{e}^{-2x} \end{vmatrix} = -x^{-2}x\mathrm{e}^{-4x} = -x^{-1}\mathrm{e}^{-4x},$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} \mathrm{e}^{-2x} & 0 \\ -2\mathrm{e}^{-2x} & x^{-2}\mathrm{e}^{-2x} \end{vmatrix} = x^{-2}\mathrm{e}^{-4x}.$$

Pak

$$C_1'(x) = \frac{D_1}{D} = \frac{-x^{-1}\mathrm{e}^{-4x}}{\mathrm{e}^{-4x}} = -\frac{1}{x}\,, \qquad C_2'(x) = \frac{D_2}{D} = \frac{x^{-2}\mathrm{e}^{-4x}}{\mathrm{e}^{-4x}} = \frac{1}{x^2}\,.$$

Tedy

$$C_1(x) = \int -\frac{1}{x}\;\mathrm{d}x = -\ln|x|\,, \qquad C_2(x) = \int \frac{1}{x^2}\;\mathrm{d}x = -\frac{1}{x}\,.$$

Integrační konstanty nepíšeme, neboť hledáme jedno řešení $y_P(x)$, tedy jednu funkci $C_1(x)$ a jednu funkci $C_2(x)$. Partikulární řešení zadané NLDR je

$$y_P(x) = -\ln|x|\,\mathrm{e}^{-2x} - \frac{1}{x}\,x\,\mathrm{e}^{-2x} = -\ln|x|\,\mathrm{e}^{-2x} - \mathrm{e}^{-2x}.$$

Obecné řešení rovnice $y'' + 4y' + 4y = x^{-2}\mathrm{e}^{-2x}$, $x > 0$ tedy je

Zpět

Příklad 3.3.6

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y'' + 4y' + 4y = x^{-2}e^{-2x}$, $x > 0$.

Maple:

```
> DR:=(diff(y(x),x$2)+4*diff(y(x),x)+4*y(x)=1/(x^2)*exp(-2*x));
```

$$DR := (\frac{d^2}{dx^2}\,\mathrm{y}(x)) + 4\,(\frac{d}{dx}\,\mathrm{y}(x)) + 4\,\mathrm{y}(x) = \frac{e^{(-2\,x)}}{x^2}$$

```
> dsolve(DR,y(x));
```

$$\mathrm{y}(x) = e^{(-2\,x)}\,\_C2 + e^{(-2\,x)}\,x\,\_C1 - (\ln(x) + 1)\,e^{(-2\,x)}$$

Zpět

Příklad 3.3.6

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y'' + 4y' + 4y = x^{-2}\mathrm{e}^{-2x}$, $x > 0$.

Mathematica:

rovnice = $\boldsymbol{y}$”[$\boldsymbol{x}$] + 4$\boldsymbol{y}'$[$\boldsymbol{x}$] + 4$\boldsymbol{y}$[$\boldsymbol{x}$] == 1/($\boldsymbol{x}$^2)Exp[−2$\boldsymbol{x}$];

reseni = DSolve[rovnice, $\boldsymbol{y}$[$\boldsymbol{x}$], $\boldsymbol{x}$]

$\{\{y[x] \to e^{-2x}C[1] + e^{-2x}xC[2] - e^{-2x}(1 + \mathrm{Log}[x])\}\}$

Zpět

Příklad 3.3.7

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y'' - y' = \frac{2+x}{x^3}$, $x < 0$.

? Zpět

Příklad 3.3.7

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y'' - y' = \frac{2+x}{x^3}\,,\ x < 0\,.$

Výsledek:

$y(x) = C_1 + C_2\,\mathrm{e}^x + \frac{1}{x}\,, \quad x \in (-\infty, 0)\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}\,.$

Zpět

Příklad 3.3.7

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y'' - y' = \frac{2+x}{x^3}\,,\ x < 0\,.$

Návod:

Rovnice je NLDR s konstantními koeficienty
$k_0y'' + k_1y' + k_2y = f(x)\,, k_0, k_1, k_2 \in \mathbb{R}\,, k_0 \neq 0$. Její řešení hledáme podle návodu v příkladě 3.3.1. V tomto případě partikulární řešení $y_P(x)$ hledáme pomocí metody variace konstant; metodu odhadu nelze použít.

Zpět

Příklad 3.3.7

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y'' - y' = \frac{2+x}{x^3}$, $x < 0$.

Řešení:

Obecné řešení zadané NLDR má tvar

$$y(x) = y_H(x) + y_P(x)\,,$$

kde $y_H(x)$ je obecné řešení přiřazené HLDR, tj. diferenciální rovnice $y'' - y' = 0$.
Odpovídající charakteristická rovnice je

$$\lambda^2 - \lambda = 0.$$

Její kořeny jsou $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$. Obecné řešení přiřazené HLDR tedy je

$$y_H(x) = C_1 + C_2 \mathrm{e}^x\,, \quad x < 0\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Pravá strana zadané NLDR $f(x) = \frac{2+x}{x^3}$ není speciální pravá strana

$$\mathrm{e}^{ax}(P(x)\cos bx + Q(x)\sin bx)\,.$$

V takovém případě pro odhad partikulárního řešení použijeme metodu variace konstant, tj. v obecném řešení přiřazené HLDR nahradíme konstanty C_1, C_2 funkcemi. Dostaneme

$$y_P(x) = C_1(x) + C_2(x)\mathrm{e}^x\,.$$

Další

Příklad 3.3.7

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y'' - y' = \frac{2+x}{x^3}$, $x < 0$.

Řešení:

Nyní musíme najít funkce $C_1(x), C_2(x)$. Pro derivace těchto funkcí umíme sestavit soustavu rovnic

$$\begin{aligned} C_1'(x)\, y_1(x) + C_2'(x)\, y_2(x) &= 0 \\ C_1'(x)\, y_1'(x) + C_2'(x)\, y_2'(x) &= \frac{f(x)}{k_0}\, , \end{aligned}$$

v maticovém tvaru

$$\begin{bmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_1'(x) \\ C_2'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{f(x)}{k_0} \end{bmatrix}.$$

Matici soustavy tvoří matice z Wronského determinantu funkcí $y_1(x) = 1$, $y_2(x) = \mathrm{e}^x$, které tvoří fundamentální systém řešení přiřazené HLDR. Konkrétně

$$\begin{bmatrix} 1 & \mathrm{e}^x \\ 0 & \mathrm{e}^x \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_1'(x) \\ C_2'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2+x}{x^3} \end{bmatrix}.$$

Použitím Cramerova pravidla soustavu vyřešíme. Spočtěme determinanty:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & \mathrm{e}^x \\ 0 & \mathrm{e}^x \end{vmatrix} = \mathrm{e}^x, \qquad D_1 = \begin{vmatrix} 0 & \mathrm{e}^x \\ \frac{2+x}{x^3} & \mathrm{e}^x \end{vmatrix} = -\frac{2+x}{x^3}\,\mathrm{e}^x, \qquad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{2+x}{x^3} \end{vmatrix} = \frac{2+x}{x^3}.$$

Další

Příklad 3.3.7

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y'' - y' = \frac{2+x}{x^3}$, $x < 0$.

Řešení:

Pak

$$C_1'(x) = \frac{D_1}{D} = \frac{-\frac{2+x}{x^3}\,\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x} = -\frac{2+x}{x^3}\,, \qquad C_2'(x) = \frac{D_2}{D} = \frac{\frac{2+x}{x^3}}{\mathrm{e}^x} = \frac{2+x}{x^3}\,\mathrm{e}^{-x}\,.$$

Tedy

$$\begin{aligned}
C_1(x) &= \int -\frac{2+x}{x^3}\,\mathrm{d}x = \int \left(-\frac{2}{x^3} - \frac{1}{x^2}\right)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}\,,\\
C_2(x) &= \int \frac{2+x}{x^3}\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{2}{x^3}\,\mathrm{e}^{-x} + \frac{1}{x^2}\,\mathrm{e}^{-x}\right)\,\mathrm{d}x\\
&= \left| \begin{array}{ll} u'(x) = \frac{2}{x^3}\,, & u(x) = -\frac{1}{x^2}\\ v(x) = \mathrm{e}^{-x}, & v'(x) = -\mathrm{e}^{-x} \end{array} \right| = -\frac{1}{x^2}\,\mathrm{e}^{-x} - \int \frac{1}{x^2}\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x + \int \frac{1}{x^2}\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x\\
&= -\frac{1}{x^2}\,\mathrm{e}^{-x}\,.
\end{aligned}$$

Integrační konstanty nepíšeme, neboť hledáme jedno řešení $y_P(x)$, tedy jednu funkci $C_1(x)$ a jednu funkci $C_2(x)$. Partikulární řešení zadané NLDR je

$$y_P(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\,\mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{x} = \frac{1}{x}.$$

Další

Příklad 3.3.7

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y'' - y' = \frac{2+x}{x^3}$, $x < 0$.

Řešení:

Obecné řešení rovnice $y'' - y' = \frac{2+x}{x^3}$, $x < 0$ tedy je

$$y(x) = C_1 + C_2\,\mathrm{e}^x + \frac{1}{x}\,, \quad x \in (-\infty, 0)\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Definičním oborem je interval $(-\infty, 0)$, na kterém je pravá strana rovnice definovaná a spojitá.

Zpět

Příklad 3.3.7

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y'' - y' = \frac{2+x}{x^3}\,,\ x < 0\,.$

Maple:

```
> DR:=(diff(y(x),x$2)-diff(y(x),x)=(2+x)/(x^3));
```

$$DR := \left(\frac{d^2}{dx^2}\,\mathrm{y}(x)\right) - \left(\frac{d}{dx}\,\mathrm{y}(x)\right) = \frac{2+x}{x^3}$$

```
> dsolve(DR,y(x));
```

$$\mathrm{y}(x) = \frac{1}{x} + e^x\,\_C1 + \_C2$$

Zpět

Příklad 3.3.7

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y'' - y' = \frac{2+x}{x^3}$, $x < 0$.

Mathematica:

rovnice = $\boldsymbol{y}$"[$\boldsymbol{x}$] − $\boldsymbol{y}'$[$\boldsymbol{x}$] == (2 + $\boldsymbol{x}$)/($\boldsymbol{x}$^3);

reseni = DSolve[rovnice, $\boldsymbol{y}$[$\boldsymbol{x}$], $\boldsymbol{x}$]

$\{\{y[x] \to \frac{1}{x} + e^x C[1] + C[2]\}\}$

Zpět

Partikulární řešení LDR 2. řádu (počáteční úloha)

- **Příklad 3.4.1** Nalezněte řešení lineární diferenciální rovnice $y'' + y' - 2y = 2x$, které vyhovuje počátečním podmínkám $y(0) = 0, y'(0) = 1$.
- **Příklad 3.4.2** Je funkce $y(x) = -\frac{3}{4}\, x \cos 2x$, $x \in \mathbb{R}$ řešením diferenciální rovnice $y'' + 4y = 3 \sin 2x$, které vyhovuje počátečním podmínkám $y(0) = 0$, $y'(0) = -\frac{3}{4}$?
- **Příklad 3.4.3** Nalezněte řešení lineární diferenciální rovnice $2y'' + 8y = \frac{1}{\sin^3 2x}$, které vyhovuje počátečním podmínkám $y(\frac{\pi}{4}) = \frac{15}{16}$, $y'(\frac{\pi}{4}) = 4$.

Zpět

Příklad 3.4.1

Nalezněte řešení lineární diferenciální rovnice $y'' + y' - 2y = 2x$, které vyhovuje počátečním podmínkám $y(0) = 0, y'(0) = 1$.

? Zpět

Příklad 3.4.1

Nalezněte řešení lineární diferenciální rovnice $y'' + y' - 2y = 2x$, které vyhovuje počátečním podmínkám $y(0) = 0, y'(0) = 1$.

Výsledek:

$y(x) = -\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-2x} + \mathrm{e}^{x} - x - \frac{1}{2}, \quad x \in \mathbb{R}\,.$

Zpět

Příklad 3.4.1

Nalezněte řešení lineární diferenciální rovnice $y'' + y' - 2y = 2x$, které vyhovuje počátečním podmínkám $y(0) = 0, y'(0) = 1$.

Návod:

Rovnice je NLDR s konstantními koeficienty
$k_0 y'' + k_1 y' + k_2 y = f(x)$, $k_0, k_1, k_2 \in \mathbb{R}$, $k_0 \neq 0$. Nejprve najdeme obecné řešení stejně jako v předchozích příkladech a pak určíme konstanty C_1, C_2 tak, aby nalezené řešení splňovalo počáteční podmínky.

Zpět

Příklad 3.4.1

Nalezněte řešení lineární diferenciální rovnice $y'' + y' - 2y = 2x$, které vyhovuje počátečním podmínkám $y(0) = 0, y'(0) = 1$.

Řešení:

Obecné řešení zadané NLDR má tvar

$$y(x) = y_H(x) + y_P(x)\,,$$

kde $y_H(x)$ je obecné řešení přiřazené HLDR, tj. diferenciální rovnice $y'' + y' - 2y = 0$. Odpovídající charakteristická rovnice je

$$\lambda^2 + \lambda - 2\lambda = 0.$$

Její kořeny jsou $\lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = 1$. Obecné řešení přiřazené HLDR tedy je

$$y_H(x) = C_1\,\mathrm{e}^{-2x} + C_2\,\mathrm{e}^{x}\,, \quad x \in \mathbb{R}\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Ukažme, že pravá strana zadané NLDR $f(x) = 2x$ je speciální pravá strana

$$\mathrm{e}^{ax}(P(x)\cos bx + Q(x)\sin bx)\,.$$

Položíme-li $a = 0,\ b = 0,\ P(x) = 2x$ a $Q(x) = 0$, dostaneme $\mathrm{e}^{0x}(2x\cos 0x + 0\sin 0x) = 2x$. Odhad partikulárního řešení je

$$y_P(x) = x^k\mathrm{e}^{ax}(R(x)\cos bx + S(x)\sin bx)\,,$$

kde $a = 0,\ b = 0$. Stupeň polynomu $P(x) = 2x$ je $\mathrm{st}P = 1$ a stupeň polynomu $Q(x) = 0$ je $\mathrm{st}Q = 0$. Odtud je $\mathrm{st}R, S = 1$, proto $R(x) = Ax + B$ a $S(x) = Cx + D$. Číslo $\alpha = a + bi = 0$ není kořenem charakteristické rovnice ($\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 1$), tedy $k = 0$.

Další

Příklad 3.4.1

Nalezněte řešení lineární diferenciální rovnice $y'' + y' - 2y = 2x$, které vyhovuje počátečním podmínkám $y(0) = 0, y'(0) = 1$.

Řešení:

Máme

$$y_P(x) = x^0 e^{0x}((Ax + B)\cos 0x + (Cx + D)\sin 0x) = Ax + B.$$

Určeme konstanty A, B. Funkce $y_P(x) = Ax + B$ musí splňovat zadanou NLDR $y'' + y' - 2y = 2x$. Spočtěme $y_P'(x)$ a $y_P''(x)$:

$$y_P'(x) = A \quad \Longrightarrow \quad y_P''(x) = 0$$

Dosaďme do zadané NLDR y_P, y_P' a y_P'':

$$0 + A - 2(Ax + B) = 2x \quad \Longrightarrow \quad A - 2B - 2Ax = 2x$$

Polynomy na obou stranách rovnice se rovnají, jestliže se rovnají koeficienty u stejných mocnin proměnné x na levé a pravé straně, tj.

$$\begin{aligned} A - 2B &= 0 \\ -2A &= 2 \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} A &= -1 \\ B &= -\tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

Partikulární řešení zadané NLDR je

$$y_P(x) = -x - \frac{1}{2}.$$

Další

Příklad 3.4.1

Nalezněte řešení lineární diferenciální rovnice $y'' + y' - 2y = 2x$, které vyhovuje počátečním podmínkám $y(0) = 0, y'(0) = 1$.

Řešení:

Obecné řešení rovnice $y'' + y' - 2y = 2x$ tedy je

$$y(x) = C_1 \mathrm{e}^{-2x} + C_2\,\mathrm{e}^{x} - x - \frac{1}{2}\,, \quad x \in \mathbb{R}\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Nyní určíme konstanty C_1, C_2 tak, aby nalezené řešení vyhovovalo počátečním podmínkám $y(0) = 0, y'(0) = 1$. Spočtěme derivaci obecného řešení $y(x)$: $y'(x) = -2C_1\mathrm{e}^{-2x} + C_2\,\mathrm{e}^{x} - 1$. Pak po dosazení počátečních podmínek do $y(x)$ a $y'(x)$ dostaneme

$$\begin{aligned} 0 &= y(0) = C_1\mathrm{e}^{-2\cdot 0} + C_2\,\mathrm{e}^{0} - 0 - \tfrac{1}{2} \\ 1 &= y'(0) = -2C_1\mathrm{e}^{-2\cdot 0} + C_2\,\mathrm{e}^{0} - 1 \end{aligned}$$

Odtud

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2} &= C_1 + C_2 \\ 2 &= -2C_1 + C_2 \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} 1 &= 2C_1 + 2C_2 \\ 2 &= -2C_1 + C_2 \end{aligned}$$

Hledané řešení má $C_2 = 1$ a $C_1 = -\frac{1}{2}$, tedy

$$y(x) = -\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-2x} + \mathrm{e}^{x} - x - \frac{1}{2}\,, \quad x \in \mathbb{R}\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Zpět

Příklad 3.4.1

Nalezněte řešení lineární diferenciální rovnice $y'' + y' - 2y = 2x$, které vyhovuje počátečním podmínkám $y(0) = 0, y'(0) = 1$.

Maple:

```
> DR:=(diff(y(x),x$2)+diff(y(x),x)-2*y(x)=2*x);
```

$$DR := (\frac{d^2}{dx^2}\,\mathrm{y}(x)) + (\frac{d}{dx}\,\mathrm{y}(x)) - 2\,\mathrm{y}(x) = 2\,x$$

```
> PP:=y(0)=0,D(y)(0)=1;
```

$$PP := \mathrm{y}(0) = 0,\ \mathrm{D}(y)(0) = 1$$

```
> dsolve({DR,PP},y(x));
```

$$\mathrm{y}(x) = e^x - \frac{1}{2}\,e^{(-2\,x)} - \frac{1}{2} - x$$

Zpět

Příklad 3.4.1

Nalezněte řešení lineární diferenciální rovnice $y'' + y' - 2y = 2x$, které vyhovuje počátečním podmínkám $y(0) = 0, y'(0) = 1$.

Mathematica:

$\mathbf{rovnice = y"[x] + y'[x] - 2y[x] == 2x;}$

$\mathbf{pp1 = y[0] == 0; pp2 = y'[0] == 1;}$

$\mathbf{reseni = DSolve[\{rovnice, pp1, pp2\}, y[x], x]}$

$\{\{y[x] \to \frac{1}{2}e^{-2x}\left(-1 - e^{2x} + 2e^{3x} - 2e^{2x}x\right)\}\}$

$\mathbf{Simplify[\%]}$

$\left\{\left\{y[x] \to -\frac{1}{2} - \frac{e^{-2x}}{2} + e^{x} - x\right\}\right\}$

Zpět

Příklad 3.4.2

Je funkce $y(x) = -\frac{3}{4}\, x \cos 2x,\ x \in \mathbb{R}$ řešením diferenciální rovnice $y'' + 4y = 3 \sin 2x$, které vyhovuje počátečním podmínkám $y(0) = 0\,,\ y'(0) = -\frac{3}{4}$?

? Zpět

Příklad 3.4.2

Je funkce $y(x) = -\frac{3}{4}\,x\cos 2x,\ x \in \mathbb{R}$ řešením diferenciální rovnice $y'' + 4y = 3\sin 2x$, které vyhovuje počátečním podmínkám $y(0) = 0\,,\ y'(0) = -\frac{3}{4}$?

Výsledek:

Ano, je řešením dané počáteční úlohy.

Zpět

Příklad 3.4.2

Je funkce $y(x) = -\frac{3}{4}\, x \cos 2x,\ x \in \mathbb{R}$ řešením diferenciální rovnice $y'' + 4y = 3 \sin 2x$, které vyhovuje počátečním podmínkám $y(0) = 0$, $y'(0) = -\frac{3}{4}$?

Návod:

Vypočteme $y''(x)$ a do diferenciální rovnice dosadíme za $y''(x)$ a $y(x)$. Levá strana rovnice se musí rovnat pravé pro všechna reálná x a musí být splněny počáteční podmínky.

Zpět

Příklad 3.4.2

Je funkce $y(x) = -\frac{3}{4}\, x \cos 2x$, $x \in \mathbb{R}$ řešením diferenciální rovnice $y'' + 4y = 3\sin 2x$, které vyhovuje počátečním podmínkám $y(0) = 0$, $y'(0) = -\frac{3}{4}$?

Řešení:

Ověříme, zda jsou splněny počáteční podmínky.

$$y(0) = -\frac{3}{4} \cdot 0 \cdot \cos 0 = 0$$

Spočteme $y'(x)$:

$$y'(x) = -\frac{3}{4}\cos 2x + \frac{6}{4}\, x \sin 2x$$

$$\Downarrow$$

$$y'(0) = -\frac{3}{4}\cos 0 + \frac{6}{4} \cdot 0 \cdot \sin 0 = -\frac{3}{4}$$

Dále zkoumejme, zda je daná funkce řešením příslušné rovnice. Spočteme $y''(x)$:

$$y''(x) = \frac{6}{4}\sin 2x + \frac{6}{4}\sin 2x + \frac{12}{4}\, x\cos 2x = 3\sin 2x + 3x\cos 2x.$$

Levá strava rovnice je

$$L := y'' + 4y = 3\sin 2x + 3x\cos 2x + 4\left(-\frac{3}{4}\, x\cos 2x\right) = 3\sin 2x$$

a pravá strana rovnice je

$$P := 3\sin 2x.$$

Ukázali jsme, že $L = P$ pro všechna reálná x. Funkce $y(x) = -\frac{3}{4}\, x\cos 2x$ je řešením dané počáteční úlohy.

Zpět

Příklad 3.4.2

Je funkce $y(x) = -\frac{3}{4}\,x\cos 2x,\ x \in \mathbb{R}$ řešením diferenciální rovnice $y'' + 4y = 3\sin 2x$, které vyhovuje počátečním podmínkám $y(0) = 0\,,\ y'(0) = -\frac{3}{4}$?

Maple:

```
> res:=y(x)=-3/4*x*cos(2*x);
```

$$res := \mathrm{y}(x) = -\frac{3}{4}\,x\cos(2\,x)$$

```
> DR:=(diff(y(x),x$2)+4*y(x)=3*sin(2*x));
```

$$DR := \left(\tfrac{d^2}{dx^2}\,\mathrm{y}(x)\right) + 4\,\mathrm{y}(x) = 3\sin(2\,x)$$

```
> odetest(res,DR);
```

$$0$$

```
> y:=x->-3/4*x*cos(2*x);
```

$$y := x \to -\frac{3}{4}\,x\cos(2\,x)$$

```
> y(0);
```

$$0$$

```
> D(y)(0);
```

$$\frac{-3}{4}$$

Zpět

Příklad 3.4.2

Je funkce $y(x) = -\frac{3}{4}\, x \cos 2x$, $x \in \mathbb{R}$ řešením diferenciální rovnice $y'' + 4y = 3 \sin 2x$, které vyhovuje počátečním podmínkám $y(0) = 0$, $y'(0) = -\frac{3}{4}$?

Mathematica:

rovnice = y"$[x]$ + 4$y[x]$ == 3Sin[2x];

reseni = Function[x, −3/4xCos[2x]]

Function $\left[x, -\frac{3}{4}x\mathrm{Cos}[2x]\right]$

rovnice/.{y → reseni}

True

y[0] == 0/.{y → reseni}

True

y'[0] == −3/4/.{y → reseni}

True

Zpět

Příklad 3.4.3

Nalezněte řešení lineární diferenciální rovnice $2y'' + 8y = \frac{1}{\sin^3 2x}$, které vyhovuje počátečním podmínkám $y(\frac{\pi}{4}) = \frac{15}{16}$, $\quad y'(\frac{\pi}{4}) = 4.$

? Zpět

Příklad 3.4.3

Nalezněte řešení lineární diferenciální rovnice $2y'' + 8y = \frac{1}{\sin^3 2x}$, které vyhovuje počátečním podmínkám $y(\frac{\pi}{4}) = \frac{15}{16}$, $y'(\frac{\pi}{4}) = 4.$

Výsledek:

$$y(x) = -2\cos 2x + \sin 2x + \frac{2\cos^2 2x - 1}{16\sin 2x}\,, \quad x \in (0, \tfrac{\pi}{2})\,.$$

Zpět

Příklad 3.4.3

Nalezněte řešení lineární diferenciální rovnice $2y'' + 8y = \frac{1}{\sin^3 2x}$, které vyhovuje počátečním podmínkám $y(\frac{\pi}{4}) = \frac{15}{16}$, $\quad y'(\frac{\pi}{4}) = 4$.

Návod:

Rovnice je NLDR s konstantními koeficienty
$k_0 y'' + k_1 y' + k_2 y = f(x)\,, k_0, k_1, k_2 \in \mathbb{R}\,, k_0 \neq 0$. Nejprve najdeme obecné řešení stejně jako v příkladě 3.4.1 a pak určíme konstanty C_1, C_2 tak, aby nalezené řešení splňovalo počáteční podmínky.

Zpět

Příklad 3.4.3

Nalezněte řešení lineární diferenciální rovnice $2y'' + 8y = \frac{1}{\sin^3 2x}$, které vyhovuje počátečním podmínkám $y(\frac{\pi}{4}) = \frac{15}{16}$, $y'(\frac{\pi}{4}) = 4$.

Řešení:

Obecné řešení zadané NLDR má tvar

$$y(x) = y_H(x) + y_P(x)\,,$$

kde $y_H(x)$ je obecné řešení přiřazené HLDR, tj. diferenciální rovnice $2y'' + 8y = 0$. Odpovídající charakteristická rovnice je

$$2\lambda^2 + 8 = 0.$$

Její kořeny jsou $\lambda_1 = 2i$, $\lambda_2 = -2i$. Obecné řešení přiřazené HLDR tedy je

$$y_H(x) = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Pravá strana zadané NLDR $f(x) = \frac{1}{\sin^3 2x}$ není speciální pravá strana

$$\mathrm{e}^{ax}(P(x)\cos bx + Q(x)\sin bx)\,.$$

V takovém případě pro odhad partikulárního řešení použijeme metodu variace konstant, tj. v obecném řešení přiřazené HLDR nahradíme konstanty C_1, C_2 funkcemi. Dostaneme

$$y_P(x) = C_1(x)\cos 2x + C_2(x)\sin 2x\,.$$

Nyní musíme najít funkce $C_1(x), C_2(x)$. Pro derivace těchto funkcí umíme sestavit soustavu rovnic

$$\begin{aligned} C_1'(x)\,y_1(x) + C_2'(x)\,y_2(x) &= 0 \\ C_1'(x)\,y_1'(x) + C_2'(x)\,y_2'(x) &= \frac{f(x)}{k_0}\,, \end{aligned}$$

Další

Příklad 3.4.3

Nalezněte řešení lineární diferenciální rovnice $2y'' + 8y = \frac{1}{\sin^3 2x}$, které vyhovuje počátečním podmínkám $y(\frac{\pi}{4}) = \frac{15}{16}$, $\quad y'(\frac{\pi}{4}) = 4$.

Řešení:

v maticovém tvaru

$$\begin{bmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_1'(x) \\ C_2'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{f(x)}{k_0} \end{bmatrix}.$$

Matici soustavy tvoří matice z Wronského determinantu funkcí $y_1(x) = \cos 2x$, $y_2(x) = \sin 2x$, které tvoří fundamentální systém řešení přiřazené HLDR. Konkrétně

$$\begin{bmatrix} \cos 2x & \sin 2x \\ -2\sin 2x & 2\cos 2x \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_1'(x) \\ C_2'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sin^3 2x} \end{bmatrix}.$$

Použitím Cramerova pravidla soustavu vyřešíme. Spočtěme determinanty:

$$D = \begin{vmatrix} \cos 2x & \sin 2x \\ -2\sin 2x & 2\cos 2x \end{vmatrix} = 2\cos^2 2x + 2\sin^2 2x = 2$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 0 & \sin 2x \\ \frac{1}{2\sin^3 2x} & 2\cos 2x \end{vmatrix} = -\frac{\sin 2x}{2\sin^3 2x} = -\frac{1}{2\sin^2 2x}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} \cos 2x & 0 \\ -2\sin 2x & \frac{1}{2\sin^3 2x} \end{vmatrix} = \frac{\cos 2x}{2\sin^3 2x}.$$

Další

Příklad 3.4.3

Nalezněte řešení lineární diferenciální rovnice $2y'' + 8y = \frac{1}{\sin^3 2x}$, které vyhovuje počátečním podmínkám $y(\frac{\pi}{4}) = \frac{15}{16}$, $y'(\frac{\pi}{4}) = 4$.

Řešení:

Pak

$$C_1'(x) = \frac{D_1}{D} = \frac{-\frac{1}{2\sin^2 2x}}{2} = -\frac{1}{4\sin^2 2x}\,, \qquad C_2'(x) = \frac{D_2}{D} = \frac{\frac{\cos 2x}{2\sin^3 2x}}{2} = \frac{\cos 2x}{4\sin^3 2x}\,.$$

Tedy

$$C_1(x) = \frac{1}{4}\int \frac{-1}{\sin^2 2x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\,\frac{\operatorname{cotg} 2x}{2} = \frac{1}{8}\,\frac{\cos 2x}{\sin 2x}\,,$$

$$C_2(x) = \frac{1}{4}\int \frac{\cos 2x}{\sin^3 2x}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} \sin 2x = t \\ 2\cos 2x\ \mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{array} \right| = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}t}{t^3} = -\frac{1}{16}\,\frac{1}{t^2} = -\frac{1}{16}\,\frac{1}{\sin^2 2x}\,.$$

Integrační konstanty nepíšeme, neboť hledáme jedno řešení $y_P(x)$, tedy jednu funkci $C_1(x)$ a jednu funkci $C_2(x)$. Partikulární řešení zadané NLDR je

$$y_P(x) = \frac{1}{8}\,\frac{\cos 2x}{\sin 2x}\cos 2x - \frac{1}{16}\,\frac{1}{\sin^2 2x}\sin 2x = \frac{2\cos^2 2x - 1}{16\sin 2x}.$$

Obecné řešení rovnice $2y'' + 8y = \frac{1}{\sin^3 2x}$ tedy je

$$y(x) = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x + \frac{2\cos^2 2x - 1}{16\sin 2x}\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Další

Příklad 3.4.3

Nalezněte řešení lineární diferenciální rovnice $2y'' + 8y = \frac{1}{\sin^3 2x}$, které vyhovuje počátečním podmínkám $y(\frac{\pi}{4}) = \frac{15}{16}$, $y'(\frac{\pi}{4}) = 4$.

Řešení:

Definičními obory jsou intervaly $I_k = (k\,\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + k\,\frac{\pi}{2})$, $k \in \mathbb{Z}$, na kterých je pravá strana rovnice definovaná a spojitá.
Nyní určíme konstanty C_1, C_2 tak, aby nalezené řešení vyhovovalo počátečním podmínkám $y(\frac{\pi}{4}) = \frac{15}{16}$, $y'(\frac{\pi}{4}) = 4$. Spočtěme derivaci obecného řešení $y(x)$:

$$y'(x) = -2\,C_1 \sin 2x + 2\,C_2 \cos 2x + \frac{1}{16}\,\frac{-8 \cos 2x \sin 2x \sin 2x - (2\cos^2 2x - 1)2\cos 2x}{\sin^2 2x}.$$

Pak po dosazení počátečních podmínek do $y(x)$ a $y'(x)$ dostaneme

$$\begin{aligned}
\frac{15}{16} &= y(\tfrac{\pi}{4}) &&= C_1 \cos\tfrac{\pi}{2} + C_2 \sin\tfrac{\pi}{2} + \frac{2\cos^2\frac{\pi}{2} - 1}{16 \sin\frac{\pi}{2}} \\
4 &= y'(\tfrac{\pi}{4}) &&= -2\,C_1 \sin\tfrac{\pi}{2} + 2\,C_2 \cos\tfrac{\pi}{2} + \frac{1}{16}\,\frac{-8\cos\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2} - (2\cos^2\frac{\pi}{2} - 1)2\cos\frac{\pi}{2}}{\sin^2\frac{\pi}{2}}
\end{aligned}$$

Odtud

$$\begin{aligned}
1 &= C_2 \\
4 &= -2C_1
\end{aligned}$$

Hledané řešení má $C_1 = -2$ a $C_2 = 1$, tedy

$$y(x) = -2\cos 2x + \sin 2x + \frac{2\cos^2 2x - 1}{16 \sin 2x}\,, \quad x \in (0, \tfrac{\pi}{2})\,.$$

Z intervalů I_k jsme vybrali vzhledem k počátečním podmínkám ten, ve kterém leží číslo $\frac{\pi}{4}$.

Příklad 3.4.3

Nalezněte řešení lineární diferenciální rovnice $2y'' + 8y = \frac{1}{\sin^3 2x}$, které vyhovuje počátečním podmínkám $y(\frac{\pi}{4}) = \frac{15}{16}$, $\quad y'(\frac{\pi}{4}) = 4$.

Maple:

```
> DR:=(2*diff(y(x),x$2)+8*y(x)=(1)/((sin(2*x))^3));
```

$$DR := 2\left(\frac{d^2}{dx^2}\,\mathrm{y}(x)\right) + 8\,\mathrm{y}(x) = \frac{1}{\sin(2\,x)^3}$$

```
> PP:=y(Pi/4)=15/16,D(y)(Pi/4)=4;
```

$$PP := \mathrm{y}(\frac{\pi}{4}) = \frac{15}{16},\ \mathrm{D}(y)(\frac{\pi}{4}) = 4$$

```
> dsolve({DR,PP},y(x));
```

$$\mathrm{y}(x) = \sin(2\,x) - 2\cos(2\,x) + \frac{1}{16}\,\frac{-1 + 2\cos(2\,x)^2}{\sin(2\,x)}$$

Zpět

Příklad 3.4.3

Nalezněte řešení lineární diferenciální rovnice $2y'' + 8y = \frac{1}{\sin^3 2x}$, které vyhovuje počátečním podmínkám $y(\frac{\pi}{4}) = \frac{15}{16}$, $\quad y'(\frac{\pi}{4}) = 4$.

Mathematica:

rovnice = 2y"[x] + 8y[x] == 1/(Sin[2x]^3);

pp1 = y[Pi/4]==15/16; pp2 = y′[Pi/4] == 4;

reseni = DSolve[{rovnice, pp1, pp2}, y[x], x]

$\{\{y[x] \to \frac{1}{16}(-32\text{Cos}[2x] + \text{Cos}[2x]\text{Cot}[2x] + 15\text{Sin}[2x])\}\}$

Použijeme-li goniometrické vzorce dostaneme po úpravě stejný výsledek jako v řešení a v MAPLE.

Zpět

Partikulární řešení LDR 2. řádu (okrajová úloha)

- **Příklad 3.5.1** Najděte partikulární řešení diferenciální rovnice $y'' + 2y' + y = \mathrm{e}^{-x}$ vyhovující okrajovým podmínkám $y(0) = 0,\ y(2) = 0\,.$
- **Příklad 3.5.2** Řešte okrajovou úlohu $y''(t) = -\pi^2 y(t)\,, \quad y(0) = 0, \quad y\left(\frac{1}{2}\right) = -3.$ (může se jednat o linearizovaný model kyvadla, kde řešením je funkce úhlového vychýlení y, které vyhovuje LDR a daným okrajovým podmínkám)
- **Příklad 3.5.3** Řešte okrajovou úlohu $y''(t) + \pi^2 y(t) = 0\,, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1\,.$
- **Příklad 3.5.4** Řešte okrajovou úlohu $y'' + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 y = -x\,, \quad y(0) = 0,\ y(1) = 0\,.$

Zpět

Příklad 3.5.1

Najděte partikulární řešení diferenciální rovnice $y'' + 2y' + y = \mathrm{e}^{-x}$ vyhovující okrajovým podmínkám $y(0) = 0,\ y(2) = 0$.

? Zpět

Příklad 3.5.1

Najděte partikulární řešení diferenciální rovnice $y'' + 2y' + y = \mathrm{e}^{-x}$ vyhovující okrajovým podmínkám $y(0) = 0,\ y(2) = 0$.

Výsledek:

$y(x) = -x\,\mathrm{e}^{-x} + \frac{1}{2}\,x^2\,\mathrm{e}^{-x}, \quad x \in \mathbb{R}$.

Zpět

Příklad 3.5.1

Najděte partikulární řešení diferenciální rovnice $y'' + 2y' + y = \mathrm{e}^{-x}$ vyhovující okrajovým podmínkám $y(0) = 0,\ y(2) = 0$.

Návod:

Najdeme všechna řešení homogenní rovnice příslušné k zadané LDR 2. řádu ve tvaru $y_H = C_1\,\varphi_1 + C_2\,\varphi_2$, kde $\varphi_{1,2}$ tvoří fundamentální systém prostoru řešení HLDR. Dále vypočítáme jedno (libovolné) partikulární řešení y_p pro rovnici s pravou stranou.
Vyjádříme obecné řešení (stejně jako u počátečních úloh) jako součet
$y_{ON} = C_1\,\varphi_1 + C_2\,\varphi_2 + y_p$.
Hledané partikulární řešení y okrajové úlohy musí splňovat okrajové podmínky.
Stanovíme (pokud to lze) koeficienty C_1 a C_2 pro vyjádření hledaného partikulárního řešení okrajové úlohy.

Zpět

Příklad 3.5.1

Najděte partikulární řešení diferenciální rovnice $y'' + 2y' + y = \mathrm{e}^{-x}$ vyhovující okrajovým podmínkám $y(0) = 0,\ y(2) = 0$.

Řešení:

Řešíme nejdříve příslušnou HLDR s konstantními koeficienty. Charakteristická rovnice $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$ má jeden dvojnásobný kořen $\lambda_{1,2} = -1$, tedy řešení HLDR je tvaru $y_H = C_1 \mathrm{e}^{-x} + C_2\, x\, \mathrm{e}^{-x}$.
Partikulární řešení NLDR budeme hledat v odhadnutém tvaru $y_p = A\, x^2\, \mathrm{e}^{-x}$. Po vyjádření derivací y_p'', y_p' a dosazení do zadané rovnice dostáváme $A = \frac{1}{2}$, tedy $y_p = \frac{1}{2}\, x^2\, \mathrm{e}^{-x}$.
Obecné řešení je tedy: $y_{ON} = C_1 \mathrm{e}^{-x} + C_2\, x\, \mathrm{e}^{-x} + \frac{1}{2}\, x^2\, \mathrm{e}^{-x}$.
Hledané partikulární řešení musí splňovat zadané okrajové podmínky. Tedy

$$C_1 \mathrm{e}^0 + 0 + 0 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad C_1 = 0$$

$$C_1 \mathrm{e}^{-2} + C_2\, 2\, \mathrm{e}^{-2} + \frac{1}{2}\, 2^2\, \mathrm{e}^{-2} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad C_2 = -1.$$

Řešení okrajové úlohy je tedy: $y(x) = -x\, \mathrm{e}^{-x} + \frac{1}{2}\, x^2\, \mathrm{e}^{-x}, \quad x \in \mathbb{R}$.

Zpět

Příklad 3.5.1

Najděte partikulární řešení diferenciální rovnice $y'' + 2y' + y = \mathrm{e}^{-x}$ vyhovující okrajovým podmínkám $y(0) = 0,\ y(2) = 0$.

Maple:

```
> rovnice1:=diff(y(x),x$2)+2*diff(y(x),x)+y(x)=exp(-x);
```

$$\mathit{rovnice1} := \left(\frac{d^2}{dx^2}\,\mathrm{y}(x)\right) + 2\left(\frac{d}{dx}\,\mathrm{y}(x)\right) + \mathrm{y}(x) = e^{(-x)}$$

```
> podminky1:=y(0)=0,y(2)=0;
```

$$\mathit{podminky1} := \mathrm{y}(0) = 0,\ \mathrm{y}(2) = 0$$

S těmito podmínkami má úloha jednoznačné řešení:

```
> reseni:=dsolve({rovnice1,podminky1},y(x));
```

$$\mathit{reseni} := \mathrm{y}(x) = -e^{(-x)}\,x + \frac{1}{2}\,x^2\,e^{(-x)}$$

Správnost výpočtu ověříme dosazením obecného řešení do původní rovnice.

```
> subs(reseni,{rovnice1,podminky1});
```

$$\{\mathrm{y}(2) = 0,\ \mathrm{y}(0) = 0,$$
$$\left(\frac{d^2}{dx^2}\left(-e^{(-x)}\,x + \frac{1}{2}\,x^2\,e^{(-x)}\right)\right) + 2\left(\frac{d}{dx}\left(-e^{(-x)}\,x + \frac{1}{2}\,x^2\,e^{(-x)}\right)\right) - e^{(-x)}\,x + \frac{1}{2}\,x^2\,e^{(-x)} = e^{(-x)}$$
$$\}$$

```
> simplify(%);
```

$$\{\mathrm{y}(2) = 0,\ \mathrm{y}(0) = 0,\ e^{(-x)} = e^{(-x)}\}$$

Další

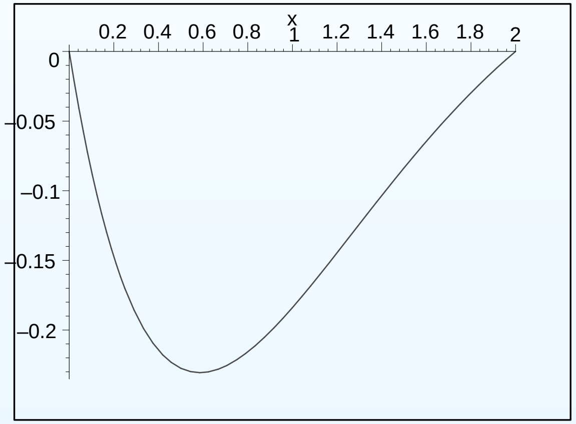
Příklad 3.5.1

Najděte partikulární řešení diferenciální rovnice $y'' + 2y' + y = \mathrm{e}^{-x}$ vyhovující okrajovým podmínkám $y(0) = 0,\ y(2) = 0$.

Maple:

Nakreslíme graf partikulárního řešení na intervalu $\langle 0, 2\rangle$.

```
> assign(reseni);
> plot(y(x),x=0..2);
```




```
> unassign(y);
```

Zpět

Příklad 3.5.1

Najděte partikulární řešení diferenciální rovnice $y'' + 2y' + y = \mathrm{e}^{-x}$ vyhovující okrajovým podmínkám $y(0) = 0,\ y(2) = 0\,.$

Mathematica:

rovnice = y"[x] + 2y'[x] + y[x]==Exp[$-x$];

podminka1 = y[0]==0;

podminka2 = y[2]==0;

S těmito podmínkami má úloha jednoznačné řešení:

reseni = DSolve[{rovnice, podminka1, podminka2}, y, x][[1]]

$\left\{y \to \text{Function}\left[\{x\}, \frac{1}{2}e^{-x}(-2+x)x\right]\right\}$

Správnost výpočtu ověříme dosazením obecného řešení do původní rovnice a okrajových podmínek.

Simplify[{rovnice, podminka1, podminka2}/.reseni]

{True, True, True}

Nakreslíme graf partikulárního řešení na intervalu $\langle 0, 2\rangle$.

rp = (y/.reseni)[x]

$\frac{1}{2}e^{-x}(-2+x)x$

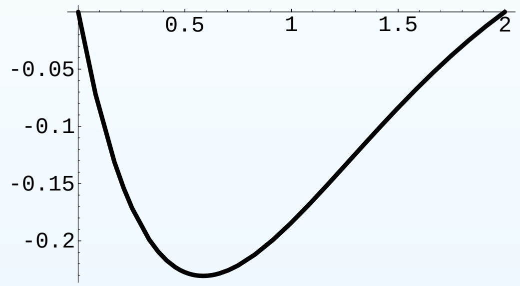
Další

Příklad 3.5.1

Najděte partikulární řešení diferenciální rovnice $y'' + 2y' + y = \mathrm{e}^{-x}$ vyhovující okrajovým podmínkám $y(0) = 0,\ y(2) = 0$.

Mathematica:

Plot[rp, {x, 0, 2}, PlotStyle → {Thickness[0.01]}];



Zpět

Příklad 3.5.2

Řešte okrajovou úlohu $y''(t) = -\pi^2 y(t)\,, \quad y(0) = 0, \quad y\left(\frac{1}{2}\right) = -3$. (může se jednat o linearizovaný model kyvadla, kde řešením je funkce úhlového vychýlení y, které vyhovuje LDR a daným okrajovým podmínkám)

?

Zpět

Příklad 3.5.2

Řešte okrajovou úlohu $y''(t) = -\pi^2 y(t)\,, \quad y(0) = 0, \quad y\left(\frac{1}{2}\right) = -3$. (může se jednat o linearizovaný model kyvadla, kde řešením je funkce úhlového vychýlení y, které vyhovuje LDR a daným okrajovým podmínkám)

Výsledek:

Řešením je funkce $y(t) = -3\sin(\pi t)\,.$

Zpět

Příklad 3.5.2

Řešte okrajovou úlohu $y''(t) = -\pi^2 y(t)\,,\quad y(0) = 0,\quad y\left(\frac{1}{2}\right) = -3$. (může se jednat o linearizovaný model kyvadla, kde řešením je funkce úhlového vychýlení y, které vyhovuje LDR a daným okrajovým podmínkám)

Návod:

Najdeme všechna řešení homogenní rovnice příslušné k zadané LDR 2. řádu ve tvaru $y_H = C_1\,\varphi_1 + C_2\,\varphi_2$, kde $\varphi_{1,2}$ tvoří fundamentální systém prostoru řešení HLDR. Vyjádříme obecné řešení (stejně jako u počátečních úloh) $y_{ON} = y_H = C_1\,\varphi_1 + C_2\,\varphi_2$. Hledané partikulární řešení y okrajové úlohy musí splňovat okrajové podmínky. Stanovíme (pokud to lze) koeficienty C_1 a C_2 pro vyjádření hledaného partikulárního řešení okrajové úlohy.

Zpět

Příklad 3.5.2

Řešte okrajovou úlohu $y''(t) = -\pi^2 y(t)\,, \quad y(0) = 0, \quad y\left(\frac{1}{2}\right) = -3$. (může se jednat o linearizovaný model kyvadla, kde řešením je funkce úhlového vychýlení y, které vyhovuje LDR a daným okrajovým podmínkám)

Řešení:

Jedná se o řešení HLDR s konstantními koeficienty. Charakteristická rovnice $\lambda^2 + \pi^2 = 0$ má komplexně sdružené kořeny $\lambda_{1,2} = \pm i\,\pi$.
Obecné řešení je tedy: $y_{ON} = y_H = C_1 \cos \pi\, t + C_2 \sin \pi\, t$.
Hledané partikulární řešení musí splňovat zadané okrajové podmínky. Tedy

$$C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad C_1 = 0$$

$$C_1 \cos \frac{\pi}{2} + C_2 \sin \frac{\pi}{2} = -3 \qquad \Rightarrow \qquad C_2 = -3.$$

Řešení okrajové úlohy je tedy: $y(t) = -3\sin(\pi t)$.

Zpět

Příklad 3.5.2

Řešte okrajovou úlohu $y''(t) = -\pi^2 y(t)$, $\quad y(0) = 0, \quad y\left(\frac{1}{2}\right) = -3$. (může se jednat o linearizovaný model kyvadla, kde řešením je funkce úhlového vychýlení y, které vyhovuje LDR a daným okrajovým podmínkám)

Maple:

```
> rovnice2:=diff(y(x),x$2)=-Pi^2*y(x);
```

$$rovnice2 := \frac{d^2}{dx^2}\,\mathrm{y}(x) = -\pi^2\,\mathrm{y}(x)$$

```
> reseni:=dsolve({rovnice2},y(x));
```

$$reseni := \{\mathrm{y}(x) = \_C1\,\sin(\pi\,x) + \_C2\,\cos(\pi\,x)\}$$

```
> podminky2:=y(0)=0, y(1/2)=-3;
```

$$podminky2 := \mathrm{y}(0) = 0,\ \mathrm{y}(\frac{1}{2}) = -3$$

S těmito podmínkami má úloha jednoznačné řešení:

```
> reseni:=dsolve({rovnice2,podminky2},y(x));
```

$$reseni := \mathrm{y}(x) = -3\sin(\pi\,x)$$

Správnost výpočtu ověříme dosazením obecného řešení do původní rovnice.

```
> subs(reseni,{rovnice2,podminky2});
```

$$\{\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,(-3\sin(\pi\,x)) = 3\,\pi^2\sin(\pi\,x),\ \mathrm{y}(0) = 0,\ \mathrm{y}(\frac{1}{2}) = -3\}$$

```
> simplify(%);
```

$$\{\mathrm{y}(0) = 0,\ \mathrm{y}(\frac{1}{2}) = -3,\ 3\,\pi^2\sin(\pi\,x) = 3\,\pi^2\sin(\pi\,x)\}$$

Další

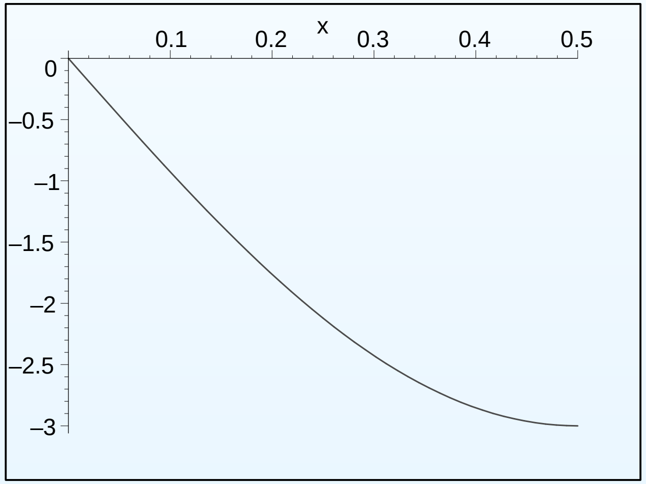
Příklad 3.5.2

Řešte okrajovou úlohu $y''(t) = -\pi^2 y(t)\,, \quad y(0) = 0, \quad y\left(\frac{1}{2}\right) = -3$. (může se jednat o linearizovaný model kyvadla, kde řešením je funkce úhlového vychýlení y, které vyhovuje LDR a daným okrajovým podmínkám)

Maple:

Nakreslíme graf partikulárního řešení na intervalu $\langle 0, 1/2 \rangle$.

```
> assign(reseni);
> plot(y(x),x=0..1/2,thickness=3);
```




```
> unassign(y);
```

Zpět

Příklad 3.5.2

Řešte okrajovou úlohu $y''(t) = -\pi^2 y(t)$, $\quad y(0) = 0, \quad y\left(\frac{1}{2}\right) = -3$. (může se jednat o linearizovaný model kyvadla, kde řešením je funkce úhlového vychýlení y, které vyhovuje LDR a daným okrajovým podmínkám)

Mathematica:

rovnice = y”[x]== − Pi^2y[x];

podminka1 = y[0]==0;

podminka2 = y[1/2] == −3;

S těmito podmínkami má úloha jednoznačné řešení:

reseni = DSolve[{rovnice, podminka1, podminka2}, y, x][[1]]

$\{y \to \text{Function}[\{x\}, -3\text{Sin}[\pi x]]\}$

Správnost výpočtu ověříme dosazením obecného řešení do původní rovnice.

Simplify[{rovnice, podminka1, podminka2}/.reseni]

{True, True, True}

Nakreslíme graf partikulárního řešení na intervalu $\langle 0, 1/2\rangle$.

rp = (y/.reseni)[x]

$-3\text{Sin}[\pi x]$

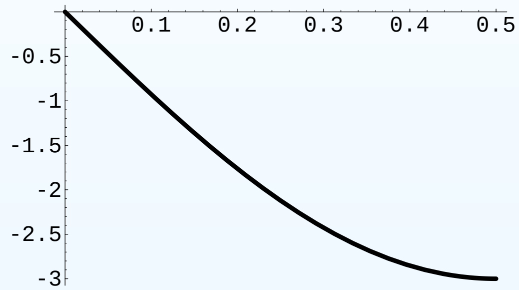
Další

Příklad 3.5.2

Řešte okrajovou úlohu $y''(t) = -\pi^2 y(t)\,, \quad y(0) = 0, \quad y\left(\frac{1}{2}\right) = -3$. (může se jednat o linearizovaný model kyvadla, kde řešením je funkce úhlového vychýlení y, které vyhovuje LDR a daným okrajovým podmínkám)

Mathematica:

Plot[rp, {x, 0, 1/2}, PlotStyle → {Thickness[0.01]}];



Zpět

Příklad 3.5.3

Řešte okrajovou úlohu $y''(t) + \pi^2 y(t) = 0\,, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1\,.$

? Zpět

Příklad 3.5.3

Řešte okrajovou úlohu $y''(t) + \pi^2 y(t) = 0\,, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1\,.$

Výsledek:

Okrajová úloha nemá řešení.

Zpět

Příklad 3.5.3

Řešte okrajovou úlohu $y''(t) + \pi^2 y(t) = 0\,, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1\,.$

Návod:

Najdeme všechna řešení homogenní rovnice příslušné k zadané LDR 2. řádu ve tvaru $y_H = C_1\,\varphi_1 + C_2\,\varphi_2$, kde $\varphi_{1,2}$ tvoří fundamentální systém prostoru řešení HLDR.
Vyjádříme obecné řešení (stejně jako u počátečních úloh) $y_{ON} = y_H = C_1\,\varphi_1 + C_2\,\varphi_2$.
Hledané partikulární řešení y okrajové úlohy musí splňovat okrajové podmínky.
Stanovíme (pokud to lze) koeficienty C_1 a C_2 pro vyjádření hledaného partikulárního řešení okrajové úlohy.

Zpět

Příklad 3.5.3

Řešte okrajovou úlohu $y''(t) + \pi^2 y(t) = 0\,, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1\,.$

Řešení:

Jedná se o řešení HLDR s konstantními koeficienty. Charakteristická rovnice $\lambda^2 + \pi^2 = 0$ má komplexně sdružené kořeny $\lambda_{1,2} = \pm i\,\pi\,.$
Obecné řešení je tedy: $y_{ON} = y_H = C_1 \cos \pi\, t + C_2 \sin \pi\, t\,.$
Hledané partikulární řešení musí splňovat zadané okrajové podmínky. Tedy

$$C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 = 0$$

$$C_1 \cos \pi + C_2 \sin \pi = 1$$

Tato soustava pro C_1, C_2 nemá řešení. Okrajová úloha je tedy neřešitelná.

Zpět

Příklad 3.5.3

Řešte okrajovou úlohu $y''(t) + \pi^2 y(t) = 0\,, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1\,.$

Maple:

```
> rovnice3:=diff(y(x),x$2)+Pi^2*y(x) = 0;
```

$$rovnice3 := (\frac{d^2}{dx^2}\,\mathrm{y}(x)) + \pi^2\,\mathrm{y}(x) = 0$$

```
> podminky3:=y(0)=0,y(1)=1;
```

$$podminky3 := \mathrm{y}(0) = 0,\ \mathrm{y}(1) = 1$$

Jedná se o stejnou HLDR jako v předchozím příkladě,

```
> reseni:=dsolve({rovnice3},y(x));
```

$$reseni := \{\mathrm{y}(x) = \_C1\,\sin(\pi\,x) + \_C2\,\cos(\pi\,x)\}$$

ale jinou okrajovou úlohu. S podmínkami $y(0) = 0,\ y(1) = 1$ úloha nemá řešení:

```
> reseni:=dsolve({rovnice3,podminky3},y(x));
```

$$reseni :=$$

Zpět

Příklad 3.5.3

Řešte okrajovou úlohu $y''(t) + \pi^2 y(t) = 0\,, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1\,.$

Mathematica:

rovnice = y"[x]== − Pi^2y[x];

podminka1 = y[0]==0;

podminka2 = y[1] == 1;

Jedná se o stejnou HLDR jako v předchozím příkladě,

reseni = DSolve[rovnice, y, x]
$\{\{y \to \text{Function}[\{x\}, C[1]\text{Cos}[\pi x] + C[2]\text{Sin}[\pi x]]\}\}$

ale jinou okrajovou úlohu.
S podmínkami $y(0) = 0,\ y(1) = 1$ úloha nemá řešení:

reseni = DSolve[{rovnice, podminka1, podminka2}, y, x]

DSolve::bvnul : For some branches of the general solution,
the given boundary conditions lead to an empty solution. More. . .

{}

Zpět

Příklad 3.5.4

Řešte okrajovou úlohu $y'' + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 y = -x\,, \quad y(0) = 0,\ y(1) = 0\,.$

? Zpět

Příklad 3.5.4

Řešte okrajovou úlohu $y'' + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 y = -x\,, \quad y(0) = 0,\ y(1) = 0\,.$

Výsledek:

Řešením je funkce $y(x) = \dfrac{4}{\pi^2}\,\sin\left(\dfrac{\pi x}{2}\right) - \dfrac{4x}{\pi^2}\,.$

Zpět

Příklad 3.5.4

Řešte okrajovou úlohu $y'' + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 y = -x\,, \quad y(0) = 0,\ y(1) = 0\,.$

Návod:

Najdeme všechna řešení homogenní rovnice příslušné k zadané LDR 2. řádu ve tvaru $y_H = C_1\,\varphi_1 + C_2\,\varphi_2$, kde $\varphi_{1,2}$ tvoří fundamentální systém prostoru řešení HLDR. Dále vypočítáme jedno (libovolné) partikulární řešení y_p pro rovnici s pravou stranou.
Vyjádříme obecné řešení (stejně jako u počátečních úloh) jako součet $y_{ON} = C_1\,\varphi_1 + C_2\,\varphi_2 + y_p\,.$
Hledané partikulární řešení y okrajové úlohy musí splňovat okrajové podmínky.
Stanovíme (pokud to lze) koeficienty C_1 a C_2 pro vyjádření hledaného partikulárního řešení okrajové úlohy.

Zpět

Příklad 3.5.4

Řešte okrajovou úlohu $y'' + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 y = -x\,, \quad y(0) = 0,\ y(1) = 0\,.$

Řešení:

Řešíme nejdříve příslušnou HLDR s konstantními koeficienty. Charakteristická rovnice $\lambda^2 + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = 0$ má komplexně sdružené kořeny $\lambda_{1,2} = \pm i\,\dfrac{\pi}{2}$, tedy řešení HLDR je tvaru $y_H = C_1 \cos\dfrac{\pi}{2}\,x + C_2 \sin\dfrac{\pi}{2}\,x\,.$

Partikulární řešení NLDR budeme hledat v odhadnutém tvaru $y_p = A\,x + B$. Po vyjádření derivací y_p'', y_p' a dosazení do zadané rovnice dostáváme

$A = -\dfrac{4}{\pi^2}$, $B = 0$, tedy $y_p = -\dfrac{4}{\pi^2}\,x\,.$

Obecné řešení je tedy: $y_{ON} = C_1 \cos\dfrac{\pi}{2}\,x + C_2 \sin\dfrac{\pi}{2}\,x - \dfrac{4}{\pi^2}\,x\,.$

Hledané partikulární řešení musí splňovat zadané okrajové podmínky. Tedy

$$C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 - 0 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad C_1 = 0$$

$$C_1 \cos\frac{\pi}{2} + C_2 \sin\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi^2} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad C_2 = \frac{4}{\pi^2}$$

Řešení okrajové úlohy je tedy: $y(x) = \dfrac{4}{\pi^2} \sin\left(\dfrac{\pi x}{2}\right) - \dfrac{4x}{\pi^2}\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$

Zpět

Příklad 3.5.4

Řešte okrajovou úlohu $y'' + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 y = -x\,, \quad y(0) = 0,\ y(1) = 0\,.$

Maple:

```
> rovnice4:=diff(y(x),x$2)+(Pi/2)^2*y(x) = -x;
```

$$rovnice4 := \left(\frac{d^2}{dx^2}\,\mathrm{y}(x)\right) + \frac{1}{4}\,\pi^2\,\mathrm{y}(x) = -x$$

```
> podminky4:=y(0)=0,y(1)=0;
```

$$podminky4 := \mathrm{y}(0) = 0,\ \mathrm{y}(1) = 0$$

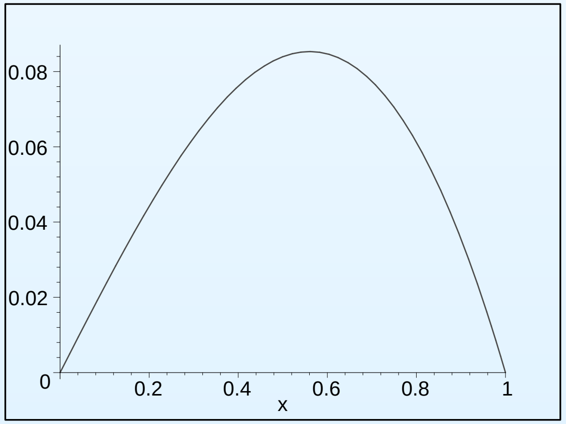
S těmito podmínkami má úloha jednoznačné řešení:

```
> reseni:=dsolve({rovnice4,podminky4},y(x));
```

$$reseni := \mathrm{y}(x) = \frac{4\sin(\dfrac{\pi\,x}{2})}{\pi^2} - \frac{4\,x}{\pi^2}$$

Následuje graf partikulárního řešení na intervalu $\langle 0, 1\rangle$

```
> assign(reseni);
> assign(reseni);plot(y(x),x=0..1,thickness=3);unassign(y);
```



Zpět

Příklad 3.5.4

Řešte okrajovou úlohu $y'' + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 y = -x\,, \quad y(0) = 0,\ y(1) = 0\,.$

Mathematica:

rovnice = y"[x] + (Pi/2)^2y[x]== − x;

podminka1 = y[0]==0;

podminka2 = y[1] == 0;

S těmito podmínkami má úloha jednoznačné řešení:

reseni = DSolve[{rovnice, podminka1, podminka2}, y, x][[1]]

$$\left\{y \to \text{Function}\left[\{x\}, \frac{-4x + 4\text{Sin}\left[\frac{\pi x}{2}\right] + \pi^2\text{Sin}\left[\frac{\pi x}{2}\right]}{\pi^2}\right]\right\}$$

Simplify[{rovnice, podminka1, podminka2}/.reseni]

{True, True, True}

Následuje graf partikulárního řešení na intervalu $\langle 0, 1\rangle$

rp = (y/.reseni)[x]

$$\frac{-4x + 4\text{Sin}\left[\frac{\pi x}{2}\right] + \pi^2\text{Sin}\left[\frac{\pi x}{2}\right]}{\pi^2}$$

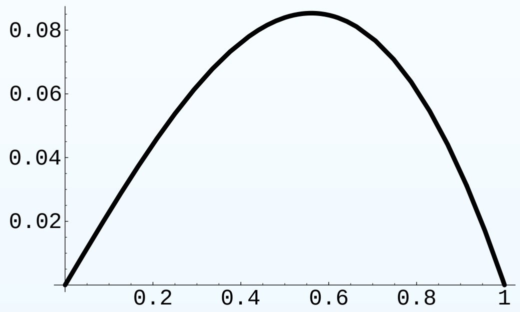
Další

Příklad 3.5.4

Řešte okrajovou úlohu $y'' + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 y = -x\,, \quad y(0) = 0,\ y(1) = 0\,.$

Mathematica:

Plot[rp, {x, 0, 1}, PlotStyle → {Thickness[0.01]}];



Zpět

LDR vyšších řádů, metoda snížení řádu

- **Příklad 3.6.1** Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice (LDR) $y''' + 3y'' - 4y' = 0\,.$
- **Příklad 3.6.2** Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y''' + y = 0\,.$
- **Příklad 3.6.3** Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y''' - 9y'' + 27y' - 27y = 0\,.$
- **Příklad 3.6.4** Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y^{(4)} + 16y'' = 0\,.$
- **Příklad 3.6.5** Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y''' - y = x\,.$
- **Příklad 3.6.6** Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y^{(4)} + 2y'' + y = 3\sin x - 5\cos x\,.$
- **Příklad 3.6.7** Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $xy'' - y' = x^2 \mathrm{e}^x\,,\ x > 0\,.$

Zpět

Příklad 3.6.1

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice (LDR) $y''' + 3y'' - 4y' = 0$.

Zpět

Příklad 3.6.1

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice (LDR) $y''' + 3y'' - 4y' = 0\,.$

Výsledek:

$y(x) = C_1 + C_2\,\mathrm{e}^{x} + C_3\,\mathrm{e}^{-4x}\,, \quad x \in \mathbb{R}\,, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}\,.$

Zpět

Příklad 3.6.1

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice (LDR) $y''' + 3y'' - 4y' = 0$.

Návod:

Rovnice je homogenní lineární diferenciální rovnice (HLDR) s konstantními koeficienty tvaru $k_0 y''' + k_1 y'' + k_2 y' + k_3 y = 0$, $k_0, k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}$, $k_0 \neq 0$. Její řešení hledáme ve tvaru $y = \mathrm{e}^{\lambda x}$, kde $\lambda \in \mathbb{R}$. Konstantu λ určíme tak, aby funkce $y = \mathrm{e}^{\lambda x}$ splňovala zadanou rovnici. Proto musí být λ kořenem charakteristické rovnice
$k_0 \lambda^3 + k_1 \lambda^2 + k_2 \lambda + k_3 = 0$.

Zpět

Příklad 3.6.1

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice (LDR) $y''' + 3y'' - 4y' = 0$.

Řešení:

Charakteristická rovnice zadané LDR $y''' + 3y'' - 4y' = 0$ je

$$\lambda^3 + 3\lambda^2 - 4\lambda = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\lambda\,(\lambda^2 + 3\lambda - 4) = 0.$$

Její kořeny jsou $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -4$. Má-li charakteristická rovnice tři různé reálné kořeny $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, pak obecné řešení HLDR má tvar

$$y(x) = C_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 x} + C_2\,\mathrm{e}^{\lambda_2 x} + C_3\,\mathrm{e}^{\lambda_3 x}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$$

Obecné řešení zadané LDR tedy je

$$y(x) = C_1 + C_2\,\mathrm{e}^{x} + C_3\,\mathrm{e}^{-4x}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$$

Zpět

Příklad 3.6.1

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice (LDR) $y''' + 3y'' - 4y' = 0$.

Maple:

```
> DR:=(diff(y(x),x$3)+3*diff(y(x),x$2)-4*diff(y(x),x)=0);
```

$$DR := \left(\frac{d^3}{dx^3}\, \mathrm{y}(x)\right) + 3\left(\frac{d^2}{dx^2}\, \mathrm{y}(x)\right) - 4\left(\frac{d}{dx}\, \mathrm{y}(x)\right) = 0$$

```
> dsolve(DR,y(x));
```

$$\mathrm{y}(x) = \_C1 + \_C2\, e^{(-4\,x)} + \_C3\, e^{x}$$

```
> restart;
```

Zpět

Příklad 3.6.1

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice (LDR) $y''' + 3y'' - 4y' = 0$.

Mathematica:

rovnice = y"'[x] + 3y"[x] − 4y'[x] == 0;

reseni = DSolve[rovnice, y[x], x]

$\{\{y[x] \to -\frac{1}{4}e^{-4x}C[1] + e^{x}C[2] + C[3]\}\}$

Poznámka: Výsledek je totožný s předchozími výsledky, protože konstantu $-\frac{1}{4}$ můžeme zahrnout do konstanty $C[1]$.

Zpět

Příklad 3.6.2

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y''' + y = 0$.

? Zpět

Příklad 3.6.2

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y''' + y = 0\,.$

Výsledek:

$$y(x) = C_1\,\mathrm{e}^{-x} + C_2\,\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\,\cos(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\,x) + C_3\,\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\,\sin(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\,x)\,, \quad x \in \mathbb{R}\,, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}\,.$$

Zpět

Příklad 3.6.2

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y''' + y = 0$.

Návod:

Rovnice je LDR s konstantními koeficienty tvaru $k_0 y''' + k_1 y'' + k_2 y' + k_3 y = 0$ a její řešení hledáme podle návodu v předchozím příkladě.

Zpět

Příklad 3.6.2

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y''' + y = 0$.

Řešení:

Charakteristická rovnice zadané LDR $y''' + y = 0$ je

$$\lambda^3 + 1 = 0.$$

Rozložme podle vzorce $A^3 + B^3 = (A + B) \cdot (A^2 - AB + B^2)$ levou stranu rovnice na součin:

$$(\lambda + 1)(\lambda^2 - \lambda + 1) = 0.$$

Její kořeny jsou $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\, i$, $\lambda_3 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\, i$. Má-li charakteristická rovnice jeden reálný kořen λ_1 a dva imaginární komplexně sdružené kořeny $\lambda_2 = a + b\, i, \lambda_3 = a - b\, i$, pak obecné řešení HLDR má tvar

$$y(x) = C_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 x} + C_2 \mathrm{e}^{ax} \cos bx + C_3\, \mathrm{e}^{ax} \sin bx\,, \quad x \in \mathbb{R}\,, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}\,.$$

Obecné řešení zadané LDR tedy je

$$y(x) = C_1\, \mathrm{e}^{-x} + C_2\, \mathrm{e}^{\frac{x}{2}} \cos(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\, x) + C_3\, \mathrm{e}^{\frac{x}{2}} \sin(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\, x)\,, \quad x \in \mathbb{R}\,, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}\,.$$

Zpět

Příklad 3.6.2

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y''' + y = 0$.

Maple:

```
> DR:=(diff(y(x),x$3)+y(x)=0);
```

$$DR := \left(\frac{d^3}{dx^3}\,\mathrm{y}(x)\right) + \mathrm{y}(x) = 0$$

```
> dsolve(DR,y(x));
```

$$\mathrm{y}(x) = \_C1\,e^{(-x)} + \_C2\,e^{(\frac{x}{2})}\sin\left(\frac{\sqrt{3}\,x}{2}\right) + \_C3\,e^{(\frac{x}{2})}\cos\left(\frac{\sqrt{3}\,x}{2}\right)$$

Zpět

Příklad 3.6.2

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y''' + y = 0$.

Mathematica:

rovnice = *y*'''[*x*] + *y*[*x*] == 0;

reseni = DSolve[rovnice, *y*[*x*], *x*]

$$\left\{\left\{y[x] \to e^{-x}C[1] + e^{x/2}C[3]\mathrm{Cos}\left[\frac{\sqrt{3}x}{2}\right] + e^{x/2}C[2]\mathrm{Sin}\left[\frac{\sqrt{3}x}{2}\right]\right\}\right\}$$

Zpět

Příklad 3.6.3

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y''' - 9y'' + 27y' - 27y = 0$.

Příklad 3.6.3

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y''' - 9y'' + 27y' - 27y = 0$.

Výsledek:

$y(x) = C_1\,\mathrm{e}^{3x} + C_2\,x\,\mathrm{e}^{3x} + C_3\,x^2\,\mathrm{e}^{3x}\,, \quad x \in \mathbb{R}\,, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}\,.$

Zpět

Příklad 3.6.3

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y''' - 9y'' + 27y' - 27y = 0$.

Návod:

Rovnice je LDR s konstantními koeficienty tvaru $k_0 y''' + k_1 y'' + k_2 y' + k_3 y = 0$ a její řešení hledáme podle návodu v prvním příkladě.

Zpět

Příklad 3.6.3

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y''' - 9y'' + 27y' - 27y = 0\,.$

Řešení:

Charakteristická rovnice zadané LDR $y''' - 9y'' + 27y' - 27y = 0$ je

$$\lambda^3 - 9\lambda^2 + 27\lambda - 27 = 0.$$

Levou stranu rovnice upravíme podle vzorce $A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3 = (A - B)^3$:

$$(\lambda - 3)^3 = 0.$$

Má jeden trojnásobný kořen $\lambda = 3$. Má-li charakteristická rovnice jeden reálný kořen λ násobnosti tři, pak obecné řešení HLDR má tvar

$$y(x) = C_1 \mathrm{e}^{\lambda x} + C_2\, x\, \mathrm{e}^{\lambda x} + C_3\, x^2\, \mathrm{e}^{\lambda x}\,, \quad x \in \mathbb{R}\,, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}\,.$$

Obecné řešení zadané LDR tedy je

$$y(x) = C_1\, \mathrm{e}^{3x} + C_2\, x\, \mathrm{e}^{3x} + C_3\, x^2\, \mathrm{e}^{3x}\,, \quad x \in \mathbb{R}\,, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}\,.$$

Zpět

Příklad 3.6.3

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y''' - 9y'' + 27y' - 27y = 0\,.$

Maple:

```
> DR:=(diff(y(x),x$3)-9*diff(y(x),x$2)+27*diff(y(x),x)-27*y(x)=0);
```

$$DR := (\frac{d^3}{dx^3}\,\mathrm{y}(x)) - 9\,(\frac{d^2}{dx^2}\,\mathrm{y}(x)) + 27\,(\frac{d}{dx}\,\mathrm{y}(x)) - 27\,\mathrm{y}(x) = 0$$

```
> dsolve(DR,y(x));
```

$$\mathrm{y}(x) = \_C1\; e^{(3\,x)} + \_C2\; e^{(3\,x)}\,x + \_C3\; e^{(3\,x)}\,x^2$$

Zpět

Příklad 3.6.3

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y''' - 9y'' + 27y' - 27y = 0\,.$

Mathematica:

$\mathbf{rovnice = y"'[x] - 9y"[x] + 27y'[x] - 27y[x] == 0;}$

$\mathbf{reseni = DSolve[rovnice, y[x], x]}$

$\{\{y[x] \to e^{3x}C[1] + e^{3x}xC[2] + e^{3x}x^2C[3]\}\}$

Zpět

Příklad 3.6.4

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y^{(4)} + 16y'' = 0$.

? Zpět

Příklad 3.6.4

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y^{(4)} + 16y'' = 0\,.$

Výsledek:

$y(x) = C_1 + C_2 x + C_3 \cos 4x + C_4 \sin 4x\,, \quad x \in \mathbb{R}\,, \quad C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}\,.$

Zpět

Příklad 3.6.4

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y^{(4)} + 16y'' = 0\,.$

Návod:

Rovnice je LDR s konstantními koeficienty řádu 4. Její řešení hledáme analogicky jako v předchozích příkladech.

Zpět

Příklad 3.6.4

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y^{(4)} + 16y'' = 0$.

Řešení:

Charakteristická rovnice zadané LDR $y^{(4)} + 16y'' = 0$ je

$$\lambda^4 + 16\lambda^2 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\lambda^2(\lambda^2 + 16) = 0.$$

Její kořeny jsou $\lambda_{1,2} = 0$, $\lambda_3 = 4\,i$, $\lambda_4 = -4\,i$. Má-li charakteristická rovnice jeden dvojnásobný reálný kořen λ a dva ryze imaginární komplexně sdružené kořeny $\lambda_{3,4} = \pm b\,i$, pak obecné řešení HLDR má tvar

$$y(x) = C_1 \mathrm{e}^{\lambda x} + C_2\, x\, \mathrm{e}^{\lambda x} + C_3 \cos bx + C_4\, \sin bx\,, \quad x \in \mathbb{R}\,, \quad C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}\,.$$

Obecné řešení zadané LDR tedy je

$$y(x) = C_1 + C_2 x + C_3 \cos 4x + C_4 \sin 4x\,, \quad x \in \mathbb{R}\,, \quad C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}\,.$$

Zpět

Příklad 3.6.4

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y^{(4)} + 16y'' = 0$.

Maple:

```
> DR:=(diff(y(x),x$4)+16*diff(y(x),x$2)=0);
```

$$DR := \left(\frac{d^4}{dx^4}\,\mathrm{y}(x)\right) + 16\left(\frac{d^2}{dx^2}\,\mathrm{y}(x)\right) = 0$$

```
> dsolve(DR,y(x));
```

$$\mathrm{y}(x) = \_C1 + \_C2\,x + \_C3\,\sin(4\,x) + \_C4\,\cos(4\,x)$$

Zpět

Příklad 3.6.4

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y^{(4)} + 16y'' = 0$.

Mathematica:

rovnice = $\boldsymbol{y}$"" [$\boldsymbol{x}$] + 16$\boldsymbol{y}$" [$\boldsymbol{x}$] == 0;

reseni = DSolve[rovnice, $\boldsymbol{y}$[$\boldsymbol{x}$], $\boldsymbol{x}$]

$\{\{y[x] \to C[3] + xC[4] - \frac{1}{16}C[1]\mathrm{Cos}[4x] - \frac{1}{16}C[2]\mathrm{Sin}[4x]\}\}$

Poznámka: Výsledek je totožný s předchozími výsledky, protože konstantu $-\frac{1}{16}$ můžeme zahrnout do konstanty $C[1]$ a $C[2]$.

Zpět

Příklad 3.6.5

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y''' - y = x$.

Příklad 3.6.5

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y''' - y = x$.

Výsledek:

$$y(x) = C_1 e^x + C_2\, e^{-\frac{x}{2}} \cos(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\, x) + C_3\, e^{-\frac{x}{2}} \sin(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\, x) - x\,, \quad x \in \mathbb{R}\,, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}\,.$$

Zpět

Příklad 3.6.5

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y''' - y = x$.

Návod:

Rovnice je NLDR s konstantními koeficienty 3. řádu $k_0 y''' + k_1 y'' + k_2 y' + k_3 y = f(x)$, $k_0, k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}, k_0 \neq 0$. Její řešení je součtem obecného řešení přiřazené HLDR – $y_H(x)$ a partikulárního (jednoho) řešení zadané NLDR – $y_P(x)$, tj. $y(x) = y_H(x) + y_P(x)$. Obecné řešení $y_H(x)$ je diskutováno v předchozích příkladech. Partikulární řešení $y_P(x)$ můžeme nalézt pomocí tzv. metody variace konstant; v tomto případě je výhodnější tzv. metoda odhadu.

Zpět

Příklad 3.6.5

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y''' - y = x$.

Řešení:

Obecné řešení zadané NLDR má tvar

$$y(x) = y_H(x) + y_P(x)\,,$$

kde $y_H(x)$ je obecné řešení přiřazené HLDR, tj. diferenciální rovnice $y''' - y = 0$. Odpovídající charakteristická rovnice je

$$\lambda^3 - 1 = 0.$$

Rozložme podle vzorce $A^3 - B^3 = (A - B)\cdot(A^2 + AB + B^2)$ levou stranu rovnice na součin:

$$(\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda + 1) = 0.$$

Její kořeny jsou $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,i$, $\lambda_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\,i$. Obecné řešení přiřazené HLDR tedy je

$$y(x) = C_1\,\mathrm{e}^{x} + C_2\,\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\cos(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\,x) + C_3\,\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\sin(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\,x)\,, \quad x \in \mathbb{R}\,, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}\,.$$

Ukažme, že pravá strana zadané NLDR $f(x) = x$ je tzv. speciální pravá strana

$$\mathrm{e}^{a\,x}(P(x)\cos bx + Q(x)\sin bx)\,.$$

Další

Příklad 3.6.5

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y''' - y = x$.

Řešení:

Položíme-li $a = 0$, $b = 0$, $P(x) = x$ a $Q(x) = 0$, dostaneme $\mathrm{e}^{0x}(x\cos 0x + 0\sin 0x) = x$. V takovém případě umíme udělat odhad partikulárního řešení zadané NLDR:

$$y_P(x) = x^k \mathrm{e}^{ax}(R(x)\cos bx + S(x)\sin bx)\,,$$

kde $R(x)$, $S(x)$ jsou obecné polynomy stupně $\max\{\mathrm{st}P, \mathrm{st}Q\}$ a konstanty a, b známe z tvaru pravé strany $f(x)$. Je-li číslo $\alpha = a + b\,i = 0 + 0\,i$ kořenem charakteristické rovnice, je hodnota konstanty k rovna násobnosti tohoto kořene α. Není-li α kořenem charakteristické rovnice, je $k = 0$. Stupeň polynomu $P(x) = x$ je $\mathrm{st}P = 1$ a stupeň polynomu $Q(x) = 0$ je $\mathrm{st}Q = 0$. Odtud je $\mathrm{st}R, S = 1$, proto $R(x) = Ax + B$ a $S(x) = Cx + D$. Číslo $\alpha = 0$ není kořenem charakteristické rovnice ($\lambda_1 = 1, \lambda_{2,3} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\,i$), tedy $k = 0$. Máme

$$y_P(x) = x^0 \mathrm{e}^{0x}((Ax + B)\cos 0x + (Cx + D)\sin 0x) = Ax + B.$$

Zbývá určit konstanty A, B. Chceme, aby funkce $y_P(x) = Ax + B$ byla řešením zadané NLDR $y''' - y = x$, tedy ji splňovala. Spočtěme $y_P'''(x)$:

$$y_P'(x) = A \quad \Longrightarrow \quad y_P''(x) = y_P'''(x) = 0.$$

Další

Příklad 3.6.5

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y''' - y = x$.

Řešení:

Dosaďme do zadané NLDR y_P a y_P''' :

$$0 - (Ax + B) = x.$$

Polynomy na obou stranách rovnice se rovnají, jestliže se rovnají koeficienty u stejných mocnin proměnné x na levé a pravé straně, tj.

$$\begin{array}{rcl} -A & = & 1 \\ B & = & 0 \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{rcl} A & = & -1 \\ B & = & 0 \end{array}$$

Partikulární řešení zadané NLDR je

$$y_P(x) = -x\,.$$

Obecné řešení rovnice $y''' - y = x$ tedy je

$$y(x) = C_1 \mathrm{e}^{x} + C_2\,\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} \cos(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\,x) + C_3\,\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} \sin(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\,x) - x\,, \quad x \in \mathbb{R}\,, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}\,.$$

Zpět

Příklad 3.6.5

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y''' - y = x$.

Maple:

```
> DR:=(diff(y(x),x$3)-y(x)=x);
```

$$DR := \left(\frac{d^3}{dx^3}\,\mathrm{y}(x)\right) - \mathrm{y}(x) = x$$

```
> dsolve(DR,y(x));
```

$$\mathrm{y}(x) = -x + \_C1\, e^x + \_C2\, e^{\left(-\frac{x}{2}\right)} \sin\left(\frac{\sqrt{3}\, x}{2}\right) + \_C3\, e^{\left(-\frac{x}{2}\right)} \cos\left(\frac{\sqrt{3}\, x}{2}\right)$$

Zpět

Příklad 3.6.5

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y''' - y = x$.

Mathematica:

rovnice = $y'''[x] - y[x] == x$;

reseni = DSolve[rovnice, $y[x]$, x]

$\{\{y[x] \to -x + e^{x} C[1] + e^{-x/2} C[2] \mathrm{Cos}\left[\frac{\sqrt{3}x}{2}\right] + e^{-x/2} C[3] \mathrm{Sin}\left[\frac{\sqrt{3}x}{2}\right]\}\}$

Zpět

Příklad 3.6.6

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y^{(4)} + 2y'' + y = 3\sin x - 5\cos x$.

Zpět

Příklad 3.6.6

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y^{(4)} + 2y'' + y = 3\sin x - 5\cos x$.

Výsledek:

$$y(x) = \cos x \left(C_1 + C_3\, x + \frac{5}{8}\, x^2 \right) + \sin x \left(C_2 + C_4\, x - \frac{3}{8}\, x^2 \right) \,,$$

$x \in \mathbb{R}\,, \quad C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}\,.$

Zpět

Příklad 3.6.6

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y^{(4)} + 2y'' + y = 3\sin x - 5\cos x$.

Návod:

Rovnice je NLDR s konstantními koeficienty 4. řádu. Její řešení hledáme podle návodu v předchozím příkladě.

Zpět

Příklad 3.6.6

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y^{(4)} + 2y'' + y = 3\sin x - 5\cos x$.

Řešení:

Obecné řešení zadané NLDR má tvar

$$y(x) = y_H(x) + y_P(x)\,,$$

kde $y_H(x)$ je obecné řešení přiřazené HLDR, tj. diferenciální rovnice $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$. Odpovídající charakteristická rovnice je

$$\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$(\lambda^2 + 1)^2 = 0.$$

Má dva dvojnásobné kořeny $\lambda_{1,2} = i$, $\lambda_{3,4} = -i$. Má-li charakteristická rovnice dva dvojnásobné ryze imaginární komplexně sdružené kořeny $\lambda_{1,2,3,4} = \pm b\,i$, pak obecné řešení HLDR má tvar

$$y(x) = C_1\cos bx + C_2\sin bx + C_3\,x\,\cos bx + C_4\,x\,\sin bx\,, \quad x \in \mathbb{R}\,, \quad C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}\,.$$

Obecné řešení zadané LDR tedy je

$$y(x) = C_1\cos x + C_2\sin x + C_3\,x\,\cos x + C_4\,x\,\sin x\,, \quad x \in \mathbb{R}\,, \quad C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}\,.$$

Další

Příklad 3.6.6

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y^{(4)} + 2y'' + y = 3\sin x - 5\cos x\,.$

Řešení:

Ukažme, že pravá strana zadané NLDR $f(x) = 3\sin x - 5\cos x$ je speciální pravá strana

$$\mathrm{e}^{ax}(P(x)\cos bx + Q(x)\sin bx)\,.$$

Položíme-li $a = 0,\ b = 1,\ P(x) = -5$ a $Q(x) = 3$, dostaneme
$\mathrm{e}^{0x}(-5\cos x + 3\sin x) = 3\sin x - 5\cos x$. Odhad partikulárního řešení je

$$y_P(x) = x^k \mathrm{e}^{ax}(R(x)\cos bx + S(x)\sin bx)\,,$$

kde $a = 0,\ b = 1$. Stupeň polynomu $P(x) = -5$ je $\mathrm{st}P = 0$ a stupeň polynomu $Q(x) = 3$ je $\mathrm{st}Q = 0$. Odtud je $\mathrm{st}R, S = 0$, proto $R(x) = A \in \mathbb{R}$ a $S(x) = B \in \mathbb{R}$. Číslo $\alpha = a + bi = i$ je dvojnásobným kořenem charakteristické rovnice, tedy $k = 2$. Máme

$$y_P(x) = x^2 \mathrm{e}^{0x}(A\cos x + B\sin x) = x^2(A\cos x + B\sin x).$$

Určeme konstanty A, B. Funkce $y_P(x) = x^2(A\cos x + B\sin x)$ musí splňovat zadanou NLDR $y^{(4)} + 2y'' + y = 3\sin x - 5\cos x$. Spočtěme $y_P''(x)$ a $y_P^{(4)}(x)$:

$$y_P'(x) = 2x(A\cos x + B\sin x) + x^2(-A\sin x + B\cos x)$$

$$\Downarrow$$

$$y_P''(x) = 2(A\cos x + B\sin x) + 4x(-A\sin x + B\cos x) + x^2(-A\cos x - B\sin x).$$

$$\Downarrow$$

Další

Příklad 3.6.6

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y^{(4)} + 2y'' + y = 3\sin x - 5\cos x$.

Řešení:

$$y_P'''(x) = 6(-A\sin x + B\cos x) + 6x(-A\cos x - B\sin x) + x^2(A\sin x - B\cos x).$$
$$\Downarrow$$
$$y_P^{(4)}(x) = 12(-A\cos x - B\sin x) + 8x(A\sin x - B\cos x) + x^2(A\cos x + B\sin x).$$

Dosaďme do zadané NLDR y_P, y_P'' a $y_P^{(4)}$. Levá strana rovnice bude obsahovat mnoho sčítanců. Z důvodu přehlednosti pišme výrazy, které dosazujeme, následujícím způsobem: Na levé straně rovnice se budou vyskytovat násobky funkcí $\sin x$, $\cos x$, $x\sin x$, $x\cos x$, $x^2\sin x$, $x^2\cos x$. Napišme tyto funkce pod sebe a připisujme pouze příslušné konstanty, které u funkcí stojí, jak postupně do rovnice dosazujeme $y_P^{(4)}$, y_P'' a y_P. Aby byla rovnost $y_P^{(4)} + 2y_P'' + y_P = 3\sin x - 5\cos x$ splněna, musí se výrazy u funkcí $\sin x$, $\cos x$ na levé a pravé straně rovnosti sobě rovnat. Vše je zapsáno v následující tabulce.

levá strana	$y^{(4)} + 2y'' + y$	$=$	$3\sin x - 5\cos x$	pravá strana
$\sin x$:	$-12B + 4B$	$=$	3	: $\sin x$
$\cos x$:	$-12A + 4A$	$=$	-5	: $\cos x$
$x\sin x$:	$8A - 8A$	$=$	0	: $x\sin x$
$x\cos x$:	$-8B + 8B$	$=$	0	: $x\cos x$
$x^2\sin x$:	$B - 2B + B$	$=$	0	: $x^2\sin x$
$x^2\cos x$:	$A - 2A + A$	$=$	0	: $x^2\cos x$

Další

Příklad 3.6.6

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y^{(4)} + 2y'' + y = 3\sin x - 5\cos x$.

Řešení:

Hledejme řešení soustavy dvou rovnic pro neznámé A, B, které jsme z tabulky získali:

$$\begin{aligned} -8B &= 3 \\ -8A &= -5 \end{aligned} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{aligned} B &= -\tfrac{3}{8} \\ A &= \tfrac{5}{8} \end{aligned}$$

Partikulární řešení zadané NLDR je

$$y_P(x) = x^2 \left(\frac{5}{8} \cos x - \frac{3}{8} \sin x \right).$$

Obecné řešení rovnice $y^{(4)} + 2y'' + y = 3\sin x - 5\cos x$ tedy je

$$\begin{aligned} y(x) &= C_1 \cos x + C_2 \sin x + C_3\, x \cos x + C_4\, x \sin x + x^2 \left(\tfrac{5}{8} \cos x - \tfrac{3}{8} \sin x \right) \\ &= \cos x \left(C_1 + C_3\, x + \tfrac{5}{8}\, x^2 \right) + \sin x \left(C_2 + C_4\, x - \tfrac{3}{8}\, x^2 \right), \quad x \in \mathbb{R}, \quad C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Zpět

Příklad 3.6.6

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y^{(4)} + 2y'' + y = 3\sin x - 5\cos x$.

Maple:

```
> DR:=(diff(y(x),x$4)+2*diff(y(x),x$2)+y(x)=3*sin(x)-5*cos(x));
```

$$DR := (\frac{d^4}{dx^4}\,\mathrm{y}(x)) + 2\,(\frac{d^2}{dx^2}\,\mathrm{y}(x)) + \mathrm{y}(x) = 3\sin(x) - 5\cos(x)$$

```
> dsolve(DR,y(x));
```

$$\mathrm{y}(x) = (-\frac{3}{8}\,x^2 + \frac{3}{8} - \frac{5}{4}\,x)\sin(x) + (\frac{5}{8}\,x^2 - \frac{35}{32} - \frac{3}{4}\,x)\cos(x) + \_C1\sin(x) + \_C2\cos(x) + \_C3\sin(x)\,x + \_C4\cos(x)\,x$$

Možná komentář, že to je zbytečně dlouhý zápis obecného řešení.

Zpět

Příklad 3.6.6

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y^{(4)} + 2y'' + y = 3\sin x - 5\cos x$.

Mathematica:

$\mathbf{rovnice = y'''' [x] + 2y'' [x] + y[x] == 3Sin[x] - 5Cos[x];}$

$\mathbf{reseni = DSolve[rovnice, y[x], x]}$

$\{\{y[x] \to C[1]\mathrm{Cos}[x] + xC[2]\mathrm{Cos}[x] + C[3]\mathrm{Sin}[x] + xC[4]\mathrm{Sin}[x] + \frac{1}{16}\left(-12x\mathrm{Cos}[x] + 10x^2\mathrm{Cos}[x] - 20\mathrm{Cos}[x]^3 + 12x\mathrm{Cos}[x]^3 - 5\mathrm{Cos}[x]\mathrm{Cos}[2x] - 6x\mathrm{Cos}[x]\mathrm{Cos}[2x] - 20x\mathrm{Sin}[x] - 6x^2\mathrm{Sin}[x] - 12\mathrm{Cos}[x]^2\mathrm{Sin}[x] - 20x\mathrm{Cos}[x]^2\mathrm{Sin}[x] - 3\mathrm{Cos}[2x]\mathrm{Sin}[x] + 10x\mathrm{Cos}[2x]\mathrm{Sin}[x] + 9\mathrm{Cos}[x]\mathrm{Sin}[2x] - 15\mathrm{Sin}[x]\mathrm{Sin}[2x]\right)\}\}$

$\mathbf{r1 = Simplify[reseni]}$

$\left\{\left\{y[x] \to \frac{1}{16}\left(\left(-25 + 10x^2 + 16C[1] + 2x(-3 + 8C[2])\right)\mathrm{Cos}[x] + \left(3 - 6x^2 + 16C[3] + 2x(-15 + 8C[4])\right)\mathrm{Sin}[x]\right)\right\}\right\}$

Poznámka: Výsledek je totožný s předchozími výsledky, protože konstanty můžeme volit následovně $C_1 = \frac{1}{16}(-25 + 16C[1])$, $C_3 = 2(-3 + 8C[2])$, $C_2 = \frac{1}{16}(3 + 16C[3])$ a $C_4 = 2(-15 + 8C[4])$.

Zpět

Příklad 3.6.7

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $xy'' - y' = x^2 e^x$, $x > 0$.

Zpět

Příklad 3.6.7

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $xy'' - y' = x^2 \mathrm{e}^x$, $x > 0$.

Výsledek:

$$y(x) = C_1 + C_2 \frac{x^2}{2} + x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x, \quad x \in (0, \infty), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Zpět

Příklad 3.6.7

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $xy'' - y' = x^2 \mathrm{e}^x$, $x > 0$.

Návod:

Rovnice je NLDR 2. řádu. Její koeficiety nejsou konstantní funkce (x u y'') , proto neumíme nalézt obecné řešení přiřazené HLDR, ani partikulární řešení zadané NLDR. Vzhledem k tomu, že se v rovnici nevyskytuje funkce y, je výhodné zavést substituci $y'(x) = z(x)$. Dostaneme tak NLDR 1. řádu, kterou umíme vyřešit, viz. Sbírka řešených příkladů k Matematice I, Diferenciální rovnice 1. řádu, LDR 1. řádu. Postup se nazývá metoda snížení řádu.

Zpět

Příklad 3.6.7

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $xy'' - y' = x^2 \mathrm{e}^x$, $x > 0$.

Řešení:

Zadaná NLDR je 2. řádu s nekonstantními koeficienty, tedy neumíme nalézt obecné řešení přiřazené HLDR, ani partikulární řešení zadané NLDR. Protože se v rovnici nevyskytuje funkce y, zavedeme substituci $y'(x) = z(x)$. Pak $y''(x) = z'(x)$. Dosaďme do zadané NLDR za y' a y'':

$$xz' - z = x^2 \mathrm{e}^x, \quad x > 0 .$$

Substitucí jsme snížili řád rovnice. Nová diferenciální rovnice je NLDR 1. řádu. Obě strany rovnice vydělíme funkcí x:

$$z' - \frac{1}{x} z = x \, \mathrm{e}^x, \quad x > 0 .$$

Její obecné řešení má tvar

$$z(x) = z_H(x) + z_P(x) ,$$

kde $z_H(x)$ je obecné řešení přiřazené HLDR, tj. diferenciální rovnice

$$z' - \frac{1}{x} z = 0.$$

Platí, že $z_H(x) = C\varphi(x)$, kde $\varphi(x)$ je jedno nenulové řešení přiřazené HLDR. Hledejme ho pomocí metody separace proměnných:

Další

Příklad 3.6.7

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $xy'' - y' = x^2 \mathrm{e}^x$, $x > 0$.

Řešení:

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x}\,z \quad\Rightarrow\quad \int \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z = \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \quad\Rightarrow\quad \ln|z| = \ln|x| \quad\Rightarrow\quad |z| = |x| \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \text{např.} \quad z = \varphi(x) = x.$$

Integrační konstantu jsme nepsali, protože hledáme jedno řešení $\varphi(x)$. Tedy

$$z_H(x) = C\,x.$$

Partikulární řešení NLDR $z' - \frac{1}{x}\,z = x\,\mathrm{e}^x$ hledáme ve tvaru součinu

$$z_P(x) = C(x)\,\varphi(x) = C(x)\,x,$$

kde $C(x)$ je neznámá funkce, tj. v $z_H(x)$ nahradíme konstantu C funkcí $C(x)$. Zbývá určit funkci $C(x)$. Chceme, aby $z_P(x)$ splňovalo rovnost $z' - \frac{1}{x}\,z = x\,\mathrm{e}^x$. Proto spočteme $z'_P(x)$: $z'_P(x) = C'(x)\,x + C(x)$ a dosadíme z'_P a z_P do rovnice.

$$z' - \frac{1}{x}\,z = x\,\mathrm{e}^x \quad\Rightarrow\quad C'(x)\,x + C(x) - \frac{1}{x}\,C(x)\,x = x\,\mathrm{e}^x \quad\Rightarrow\quad C'(x) = \mathrm{e}^x$$

$$\Rightarrow \quad C(x) = \int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \quad\Rightarrow\quad C(x) = \mathrm{e}^x$$

Integrační konstantu nepíšeme, neboť hledáme jedno řešení $z_P(x)$, tedy jednu funkci $C(x)$.

Další

Příklad 3.6.7

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $xy'' - y' = x^2 e^x$, $x > 0$.

Řešení:

Partikulární řešení rovnice $z' - \frac{1}{x} z = x e^x$ je

$$z_P(x) = e^x \cdot x = xe^x .$$

Její obecné řešení je tedy

$$z(x) = C x + xe^x .$$

Vzhledem k tomu, že $z(x) = y'(x)$, je

$$\begin{aligned} y(x) &= \int (C x + xe^x)\,dx = C\,\frac{x^2}{2} + \int xe^x\,dx = \left| \begin{array}{ll} u'(x) = e^x, & u(x) = e^x \\ v(x) = x, & v'(x) = 1 \end{array} \right| \\ &= C\,\frac{x^2}{2} + xe^x - \int e^x\,dx = C\,\frac{x^2}{2} + xe^x - e^x + D \\ &= C_1 + C_2\,\frac{x^2}{2} + xe^x - e^x, \quad x \in (0, \infty), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R} . \end{aligned}$$

Definičním oborem je interval $(0, \infty)$, na kterém je pravá strana rovnice a koeficienty rovnice definované a spojité. Konstanty jsme přejmenovali pouze proto, aby bylo vidět, že obecné řešení zadané NLDR má opět tvar

$$y(x) = y_H(x) + y_P(x) ,$$

kde obecné řešení přiřazené HLDR $y_H(x)$ je lineární kombinací dvou lineárně nezávislých řešení přiřazené HLDR.

Zpět

Příklad 3.6.7

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $xy'' - y' = x^2 \mathrm{e}^x \,, \; x > 0 \,.$

Maple:

```
> DR:=(x*diff(y(x),x$2)-diff(y(x),x)=x^2*exp(x));
```

$$DR := x\left(\frac{d^2}{dx^2}\,\mathrm{y}(x)\right) - \left(\frac{d}{dx}\,\mathrm{y}(x)\right) = x^2\,e^x$$

```
> dsolve(DR,y(x));
```

$$\mathrm{y}(x) = x\,e^x - e^x + \frac{x^2\,\_C1}{2} + \_C2$$

Zpět

Příklad 3.6.7

Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $xy'' - y' = x^2 e^x$, $x > 0$.

Mathematica:

rovnice = x y"[x] − y'[x] == x^2Exp[x];

reseni = DSolve[rovnice, y[x], x]

$\{\{y[x] \to e^x(-1 + x) + \frac{1}{2}x^2 C[1] + C[2]\}\}$

Zpět

Soustavy diferenciálních rovnic 1. řádu

- Autonomní lineární soustavy
- Eulerova metoda

Zpět

Autonomní lineární soustavy

- **Příklad 4.1.1** Nalezněte obecné řešení soustavy lineárních diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= x + y \\ y' &= 4x + y \end{aligned} .$$

- **Příklad 4.1.2** Nalezněte řešení soustavy lineárních diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= 3x + 6y \\ y' &= -x - 2y \end{aligned} ,$$

  které vyhovuje počáteční podmínce $x(0) = 2,\ y(0) = 1$.

- **Příklad 4.1.3** Nalezněte obecné řešení soustavy lineárních diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= -x - 4y \\ y' &= x - y \end{aligned} .$$

- **Příklad 4.1.4** Nalezněte řešení soustavy lineárních diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= -x - y \\ y' &= 5x + y \end{aligned} ,$$

  které vyhovuje počáteční podmínce $x(0) = 1,\ y(0) = -1$.

Zpět

Příklad 4.1.1

Nalezněte obecné řešení soustavy lineárních diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= x + y \\ y' &= 4x + y \end{aligned}.$$

? Zpět

Příklad 4.1.1

Nalezněte obecné řešení soustavy lineárních diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= x + y \\ y' &= 4x + y \end{aligned} \; .$$

Výsledek:

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1\,\mathrm{e}^{-t} + C_2\,\mathrm{e}^{3t} \\ y(t) &= -2\,C_1\,\mathrm{e}^{-t} + 2\,C_2\,\mathrm{e}^{3t} \end{aligned} \qquad t \in \mathbb{R}\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Zpět

Příklad 4.1.1

Nalezněte obecné řešení soustavy lineárních diferenciálních rovnic

$$\begin{array}{rcl} x' & = & x + y \\ y' & = & 4x + y \end{array} .$$

Návod:

Řešení soustavy dvou lineárních diferenciálních rovnic 1. řádu s konstantními koeficienty hledáme ve tvaru

$$\vec{z}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \mathrm{e}^{\lambda t} \cdot \vec{h}\,,$$

kde λ je vlastní číslo matice soustavy a $\vec{h}$ je vlastní vektor příslušný k vlastnímu číslu λ.

Zpět

Příklad 4.1.1

Nalezněte obecné řešení soustavy lineárních diferenciálních rovnic

$$\begin{array}{rcl} x' & = & x+y \\ y' & = & 4x+y \end{array}.$$

Řešení:

Položme

$$\vec{z}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \vec{z}\,'(t) = \begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix}.$$

Přepišme zadanou autonomní soustavu pomocí matic:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \vec{z}\,' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \vec{z}\,.$$

Matice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

se nazývá matice soustavy. Řešení této soustavy hledáme ve tvaru

$$\vec{z}(t) = \mathrm{e}^{\lambda t} \cdot \vec{h}\,,$$

kde λ je vlastní číslo matice A a $\vec{h}$ je vlastní vektor příslušný k vlastnímu číslu λ.
Číslo λ tedy řeší tzv. charakteristickou rovnici matice A:

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

a k němu příslušný vlastní vektor $\vec{h}$ je pak řešením soustavy

$$(A - \lambda E)\,\vec{h} = \vec{0}\,.$$

Další

Příklad 4.1.1

Nalezněte obecné řešení soustavy lineárních diferenciálních rovnic

$$\begin{array}{rcl} x' & = & x + y \\ y' & = & 4x + y \end{array}.$$

Řešení:

Charakteristická rovnice matice A je

$$\det\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Longrightarrow$$

$$(1-\lambda)(1-\lambda) - 4 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0.$$

Její kořeny jsou $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 3$. (Pro chytřejší poznámka: Kvadratická rovnice je v normovaném tvaru, kořeny lze určit z jejich vlastností $\lambda_1 + \lambda_2 = 2$, $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = -3$.) Vlastní vektor příslušný k $\lambda_1 = -1$ musí splňovat rovnost

$$(A - (-1)E)\,\vec{h} = \vec{0}\,.$$

$$\Downarrow$$

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) \cdot \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{array}{r} 2h_1 + h_2 = 0 \\ 4h_1 + 2h_2 = 0 \end{array}$$

Další

Příklad 4.1.1

Nalezněte obecné řešení soustavy lineárních diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= x + y \\ y' &= 4x + y \end{aligned} \; .$$

Řešení:

První rovnice předchozí soustavy je násobkem druhé rovnice (vždy to tak musí být), proto má soustava nekonečně mnoho řešení (h_1, h_2). Protože hledáme jeden vlastní vektor příslušný k $\lambda_1 = -1$, chceme jedno libovolné řešení. Zvolíme např. $h_1 = 1$, pak z první rovnice $2 \cdot 1 + h_2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad h_2 = -2$. Vlastní vektor příslušný k $\lambda_1 = -1$ je

$$\vec{h}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Vlastní vektor příslušný k $\lambda_2 = 3$ musí splňovat rovnost

$$(A - 3\,E)\,\vec{h} = \vec{0}\,.$$

$$\Downarrow$$

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned} -2h_1 + h_2 &= 0 \\ 4h_1 - 2h_2 &= 0 \end{aligned}$$

Zvolíme např. $h_1 = 1$, pak z první rovnice $-2 \cdot 1 + h_2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad h_2 = 2$. Vlastní vektor příslušný k $\lambda_2 = 3$ je

$$\vec{h}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Další

Příklad 4.1.1

Nalezněte obecné řešení soustavy lineárních diferenciálních rovnic

$$\begin{array}{rcl} x' & = & x+y \\ y' & = & 4x+y \end{array} .$$

Řešení:

Má-li charakteristická rovnice matice soustavy dvou lineárních diferenciálních rovnic dva různé reálné kořeny λ_1, λ_2, pak obecné řešení této soustavy má tvar

$$\vec{z}(t) = C_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 t} \cdot \vec{h}_1 + C_2 \, \mathrm{e}^{\lambda_2 t} \cdot \vec{h}_2 \,, \quad t \in \mathbb{R} \,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R} \,,$$

kde $\vec{h}_1, \vec{h}_2$ jsou příslušné vlastní vektory k λ_1, λ_2. Obecné řešení zadané soustavy lineárních diferenciálních rovnic tedy je

$$\vec{z}(t) = C_1 \mathrm{e}^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + C_2 \, \mathrm{e}^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} , \quad t \in \mathbb{R} \,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R} \,.$$

Rozepišme ho po složkách:

$$\begin{array}{rcl} x(t) & = & C_1 \, \mathrm{e}^{-t} + C_2 \, \mathrm{e}^{3t} \\ y(t) & = & -2 \, C_1 \, \mathrm{e}^{-t} + 2 \, C_2 \, \mathrm{e}^{3t} \,. \end{array}$$

Zpět

Příklad 4.1.1

Nalezněte obecné řešení soustavy lineárních diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= x + y \\ y' &= 4x + y \end{aligned}.$$

Maple:

```
> DR1:=(diff(x(t),t)=x(t)+y(t));
```

$$DR1 := \frac{d}{dt}\,\mathrm{x}(t) = \mathrm{x}(t) + \mathrm{y}(t)$$

```
> DR2:=(diff(y(t),t)=4*x(t)+y(t));
```

$$DR2 := \frac{d}{dt}\,\mathrm{y}(t) = 4\,\mathrm{x}(t) + \mathrm{y}(t)$$

```
> dsolve({DR1,DR2},{x(t),y(t)});
```

$$\{\mathrm{x}(t) = \_C1\, e^{(-t)} + \_C2\, e^{(3\,t)},\ \mathrm{y}(t) = -2\,\_C1\, e^{(-t)} + 2\,\_C2\, e^{(3\,t)}\}$$

Zpět

Příklad 4.1.1

Nalezněte obecné řešení soustavy lineárních diferenciálních rovnic

$$\begin{array}{rcl} x' & = & x+y \\ y' & = & 4x+y \end{array}.$$

Mathematica:

$\mathbf{rovnice1} = \boldsymbol{x'[t] == x[t] + y[t];}$

$\mathbf{rovnice2} = \boldsymbol{y'[t] == 4x[t] + y[t];}$

$\mathbf{reseni = DSolve[\{rovnice1, rovnice2\}, \{x[t], y[t]\}, t]}$

$$\left\{\left\{x[t] \to \frac{1}{2}e^{-t}\left(1+e^{4t}\right)C[1] + \frac{1}{4}e^{-t}\left(-1+e^{4t}\right)C[2],\right.\right.$$
$$\left.\left. y[t] \to e^{-t}\left(-1+e^{4t}\right)C[1] + \frac{1}{2}e^{-t}\left(1+e^{4t}\right)C[2]\right\}\right\}$$

Komentář:výsledek je stejný jako náš výsledek, který jsme vypočetli v řešení. Stačí zvolit $C_1 = \frac{1}{2}C[1] - \frac{1}{4}C[2]$ a $C_2 = \frac{1}{2}C[1] + \frac{1}{4}C[2]$

Zpět

Příklad 4.1.2

Nalezněte řešení soustavy lineárních diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= 3x + 6y \\ y' &= -x - 2y \end{aligned},$$

které vyhovuje počáteční podmínce $x(0) = 2,\ y(0) = 1.$

? Zpět

Příklad 4.1.2

Nalezněte řešení soustavy lineárních diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= 3x + 6y \\ y' &= -x - 2y \end{aligned} ,$$

které vyhovuje počáteční podmínce $x(0) = 2,\; y(0) = 1.$

Výsledek:

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= -10 + 12\,\mathrm{e}^{t} \\ y(t) &= 5 - 4\,\mathrm{e}^{t} \end{aligned}\right. \qquad t \in \mathbb{R}\,.$$

Zpět

Příklad 4.1.2

Nalezněte řešení soustavy lineárních diferenciálních rovnic

$$\begin{array}{rcl} x' & = & 3x+6y \\ y' & = & -x-2y \end{array},$$

které vyhovuje počáteční podmínce $x(0)=2,\ y(0)=1.$

Návod:

Nejprve najdeme obecné řešení soustavy podle návodu v předchozím příkladě a pak určíme konstanty C_1, C_2 tak, aby nalezené řešení splňovalo počáteční podmínku.

Zpět

Příklad 4.1.2

Nalezněte řešení soustavy lineárních diferenciálních rovnic

$$\begin{array}{rcl} x' & = & 3x + 6y \\ y' & = & -x - 2y \end{array},$$

které vyhovuje počáteční podmínce $x(0) = 2, \; y(0) = 1$.

Řešení:

Položme

$$\vec{z}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \vec{z}\,'(t) = \begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix}.$$

Přepišme zadanou autonomní soustavu pomocí matic:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \vec{z}\,' = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \vec{z}\,.$$

Maticí soustavy je

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Řešení této soustavy hledáme ve tvaru

$$\vec{z}(t) = \mathrm{e}^{\lambda t} \cdot \vec{h}\,,$$

kde λ je vlastní číslo matice A a $\vec{h}$ je vlastní vektor příslušný k vlastnímu číslu λ. Číslo λ tedy řeší tzv. charakteristickou rovnici matice A:

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

a k němu příslušný vlastní vektor $\vec{h}$ je pak řešením soustavy $(A - \lambda E)\,\vec{h} = \vec{0}$.

Další

Příklad 4.1.2

Nalezněte řešení soustavy lineárních diferenciálních rovnic

$$\begin{array}{rcl} x' & = & 3x + 6y \\ y' & = & -x - 2y \end{array},$$

které vyhovuje počáteční podmínce $x(0) = 2,\ y(0) = 1.$

Řešení:

Charakteristická rovnice matice A je

$$\det\left(\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} - \lambda\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 0 \quad\Longrightarrow\quad \begin{vmatrix} 3-\lambda & 6 \\ -1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad\Longrightarrow$$

$$(3-\lambda)(-2-\lambda) + 6 = 0 \quad\Longrightarrow\quad \lambda^2 - \lambda = 0 \quad\Longrightarrow\quad \lambda\,(\lambda - 1) = 0.$$

Její kořeny jsou $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 1$. Vlastní vektor příslušný k $\lambda_1 = 0$ musí splňovat rovnost

$$(A - 0\cdot E)\,\vec{h} = \vec{0}\,.$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{array}{c} 3h_1 + 6h_2 = 0 \\ -h_1 - 2h_2 = 0 \end{array}$$

První rovnice předchozí soustavy je násobkem druhé rovnice (vždy to tak musí být), proto má soustava nekonečně mnoho řešení (h_1, h_2). Protože hledáme jeden vlastní vektor příslušný k $\lambda_1 = 0$, chceme jedno libovolné řešení. Zvolíme např. $h_2 = 1$, pak z druhé rovnice $-h_1 - 2\cdot 1 = 0 \quad\Longrightarrow\quad h_1 = -2.$

Další

Příklad 4.1.2

Nalezněte řešení soustavy lineárních diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= 3x + 6y \\ y' &= -x - 2y \end{aligned},$$

které vyhovuje počáteční podmínce $x(0) = 2,\ y(0) = 1$.

Řešení:

Vlastní vektor příslušný k $\lambda_1 = 0$ je

$$\vec{h}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Vlastní vektor příslušný k $\lambda_2 = 1$ musí splňovat rovnost

$$(A - 1 \cdot E)\,\vec{h} = \vec{0}\,.$$

$$\Downarrow$$

$$\left(\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned} 2h_1 + 6h_2 &= 0 \\ -h_1 - 3h_2 &= 0 \end{aligned}$$

Zvolíme např. $h_2 = 1$, pak z druhé rovnice $-h_1 - 3 \cdot 1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad h_1 = -3$. Vlastní vektor příslušný k $\lambda_2 = 1$ je

$$\vec{h}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Další

Příklad 4.1.2

Nalezněte řešení soustavy lineárních diferenciálních rovnic

$$\begin{array}{rcl} x' & = & 3x + 6y \\ y' & = & -x - 2y \end{array},$$

které vyhovuje počáteční podmínce $x(0) = 2,\ y(0) = 1$.

Řešení:

Obecné řešení zadané soustavy lineárních diferenciálních rovnic tedy je

$$\vec{z}(t) = C_1 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2\,\mathrm{e}^t \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Rozepišme ho po složkách:

$$\begin{array}{rcl} x(t) & = & -2\,C_1 - 3\,C_2\,\mathrm{e}^t \\ y(t) & = & C_1 + C_2\,\mathrm{e}^t\,. \end{array}$$

Nyní určíme konstanty C_1, C_2 tak, aby nalezené řešení vyhovovalo počáteční podmínce $x(0) = 2,\ y(0) = 1$. Po dosazení počátečních podmínek do obecného řešení dostaneme

$$\begin{array}{rcl} 2 & = & -2\,C_1 - 3\,C_2 \\ 1 & = & C_1 + C_2 \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{rcl} 2 & = & -2\,C_1 - 3\,C_2 \\ 2 & = & 2\,C_1 + 2\,C_2 \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{rcl} C_2 & = & -4 \\ C_1 & = & 5 \end{array}$$

Hledané řešení tedy je

$$\begin{array}{rcl} x(t) & = & -10 + 12\,\mathrm{e}^t \\ y(t) & = & 5 - 4\,\mathrm{e}^t \end{array} \qquad t \in \mathbb{R}\,.$$

Rovnice jsou parametrickými rovnicemi trajektorie nalezeného řešení (rovinné křivky).

Zpět

Příklad 4.1.2

Nalezněte řešení soustavy lineárních diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= 3x + 6y \\ y' &= -x - 2y \end{aligned},$$

které vyhovuje počáteční podmínce $x(0) = 2,\ y(0) = 1.$

Maple:

```
> DR1:=(diff(x(t),t)=3*x(t)+6*y(t));
```

$$DR1 := \frac{d}{dt}\,\mathrm{x}(t) = 3\,\mathrm{x}(t) + 6\,\mathrm{y}(t)$$

```
> DR2:=(diff(y(t),t)=-x(t)-2*y(t));
```

$$DR2 := \frac{d}{dt}\,\mathrm{y}(t) = -\mathrm{x}(t) - 2\,\mathrm{y}(t)$$

```
> PP:=x(0)=2,y(0)=1;
```

$$PP := \mathrm{x}(0) = 2,\ \mathrm{y}(0) = 1$$

```
> dsolve({DR1,DR2,PP},{x(t),y(t)});
```

$$\{\mathrm{x}(t) = -10 + 12\,e^t,\ \mathrm{y}(t) = -4\,e^t + 5\}$$

Zpět

Příklad 4.1.2

Nalezněte řešení soustavy lineárních diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= 3x + 6y \\ y' &= -x - 2y \end{aligned},$$

které vyhovuje počáteční podmínce $x(0) = 2,\ y(0) = 1.$

Mathematica:

rovnice1 = $\boldsymbol{x'[t] == 3x[t] + 6y[t]}$;

rovnice2 = $\boldsymbol{y'[t] == -x[t] - 2y[t]}$;
pp1 = $\boldsymbol{x[0] == 2}$;
pp2 = $\boldsymbol{y[0] == 1}$;

reseni = DSolve[{rovnice1, rovnice2, pp1, pp2},{$\boldsymbol{x[t], y[t]}$}, $\boldsymbol{t}$]

$\{\{x[t] \to 2\left(-5 + 6e^{t}\right), y[t] \to 5 - 4e^{t}\}\}$

Zpět

Příklad 4.1.3

Nalezněte obecné řešení soustavy lineárních diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= -x - 4y \\ y' &= x - y \end{aligned}.$$

Zpět

Příklad 4.1.3

Nalezněte obecné řešení soustavy lineárních diferenciálních rovnic

$$\begin{array}{rcl} x' & = & -x - 4y \\ y' & = & x - y \end{array} \quad .$$

Výsledek:

$$\begin{array}{rcl} x(t) & = & -2\,C_1\,\mathrm{e}^{-t}\sin 2t + 2\,C_2\,\mathrm{e}^{-t}\cos 2t \\ y(t) & = & C_1\,\mathrm{e}^{-t}\cos 2t + C_2\,\mathrm{e}^{-t}\sin 2t \end{array} \qquad t \in \mathbb{R}\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Zpět

Příklad 4.1.3

Nalezněte obecné řešení soustavy lineárních diferenciálních rovnic

$$\begin{array}{rcl} x' &=& -x-4y \\ y' &=& x-y \end{array}.$$

Návod:

Řešení hledáme podle návodu v příkladě 4.1.1. Zpět

Příklad 4.1.3

Nalezněte obecné řešení soustavy lineárních diferenciálních rovnic

$$\begin{array}{rcl} x' & = & -x-4y \\ y' & = & x-y \end{array}.$$

Řešení:

Položme

$$\vec{z}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \vec{z}\,'(t) = \begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix}.$$

Přepišme zadanou autonomní soustavu pomocí matic:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \vec{z}\,' = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \vec{z}\,.$$

Maticí soustavy je

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Řešení této soustavy hledáme ve tvaru

$$\vec{z}(t) = \mathrm{e}^{\lambda t} \cdot \vec{h}\,,$$

kde λ je vlastní číslo matice A a $\vec{h}$ je vlastní vektor příslušný k vlastnímu číslu λ. Číslo λ tedy řeší tzv. charakteristickou rovnici matice A:

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

a k němu příslušný vlastní vektor $\vec{h}$ je pak řešením soustavy

$$(A - \lambda E)\,\vec{h} = \vec{0}\,.$$

Další

Příklad 4.1.3

Nalezněte obecné řešení soustavy lineárních diferenciálních rovnic

$$\begin{array}{rcl} x' & = & -x-4y \\ y' & = & x-y \end{array}.$$

Řešení:

Charakteristická rovnice matice A je

$$\det\left(\begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 0 \quad\Longrightarrow\quad \begin{vmatrix} -1-\lambda & -4 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad\Longrightarrow$$

$$(-1-\lambda)(-1-\lambda)+4=0 \quad\Longrightarrow\quad \lambda^2+2\lambda+5=0.$$

Její kořeny jsou $\lambda_1 = -1+2\,i$, $\lambda_2 = -1-2\,i$. (Kořeny kvadratické rovnice hledáme v oboru komplexních čísel, nalezneme je pomocí vzorečku $\lambda_{1,2} = \frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot1\cdot5}}{2\cdot1}$.)

Vlastní vektor příslušný k $\lambda_1 = -1+2\,i$ musí splňovat rovnost

$$(A-(-1+2\,i)E)\,\vec{h} = \vec{0}\,.$$

$$\Downarrow$$

$$\left(\begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1+2\,i & 0 \\ 0 & -1+2\,i \end{bmatrix}\right)\cdot\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad\Longrightarrow\quad \begin{bmatrix} -2\,i & -4 \\ 1 & -2\,i \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned} -2\,i\,h_1 - 4h_2 &= 0 \\ h_1 - 2\,i\,h_2 &= 0 \end{aligned}$$

První rovnice předchozí soustavy je násobkem druhé rovnice (vždy to tak musí být), proto má soustava nekonečně mnoho řešení (h_1, h_2).

Další

Příklad 4.1.3

Nalezněte obecné řešení soustavy lineárních diferenciálních rovnic

$$\begin{array}{rcl} x' & = & -x-4y \\ y' & = & x-y \end{array} .$$

Řešení:

Protože hledáme jeden vlastní vektor příslušný k $\lambda_1 = -1 + 2\,i$, chceme jedno libovolné řešení v oboru komplexních čísel. Zvolíme např. $h_2 = 1$, pak z druhé rovnice $h_1 - 2\,i \cdot 1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad h_1 = 2\,i$. Vlastní vektor příslušný k $\lambda_1 = -1 + 2\,i$ je

$$\vec{h}_1 = \begin{bmatrix} 2\,i \\ 1 \end{bmatrix} .$$

Má-li charakteristická rovnice matice soustavy dvou lineárních diferenciálních rovnic dva imaginární komplexně sdružené kořeny $\lambda_1 = a + b\,i, \lambda_2 = a - b\,i$, pak obecné řešení této soustavy má tvar

$$\vec{z}(t) = C_1 \operatorname{Re}(\mathrm{e}^{\lambda_1 t}\vec{h}_1) + C_2 \operatorname{Im}(\mathrm{e}^{\lambda_1 t}\vec{h}_1)\,, \quad t \in \mathbb{R}\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}\,,$$

kde $\vec{h}_1$ je příslušný vlastní vektor k λ_1. Hledejme reálnou a imaginární část komplexního řešení:

$$\vec{z}_1(t) = \mathrm{e}^{\lambda_1 t}\vec{h}_1 = \mathrm{e}^{(-1+2\,i)t} \begin{bmatrix} 2\,i \\ 1 \end{bmatrix} .$$

Použijeme vzorec $\mathrm{e}^{(a+b\,i)t} = \mathrm{e}^{a\,t}(\cos bt + i\,\sin bt)$. Pak

$$\vec{z}_1(t) = (\mathrm{e}^{-t}\cos 2t + i\,\mathrm{e}^{-t}\sin 2t) \begin{bmatrix} 2\,i \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\,i\,\mathrm{e}^{-t}\cos 2t + 2\,i \cdot i\,\mathrm{e}^{-t}\sin 2t \\ \mathrm{e}^{-t}\cos 2t + i\,\mathrm{e}^{-t}\sin 2t \end{bmatrix}$$

Další

Příklad 4.1.3

Nalezněte obecné řešení soustavy lineárních diferenciálních rovnic

$$\begin{array}{rcl} x' & = & -x - 4y \\ y' & = & x - y \end{array} .$$

Řešení:

$$= \begin{bmatrix} i\,2\,\mathrm{e}^{-t}\cos 2t - 2\,\mathrm{e}^{-t}\sin 2t \\ \mathrm{e}^{-t}\cos 2t + i\,\mathrm{e}^{-t}\sin 2t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\,\mathrm{e}^{-t}\sin 2t \\ \mathrm{e}^{-t}\cos 2t \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 2\,\mathrm{e}^{-t}\cos 2t \\ \mathrm{e}^{-t}\sin 2t \end{bmatrix} .$$

Reálná a imaginární část komplexního řešení $\vec{z}_1(t)$ je

$$\mathrm{Re}\,\vec{z}_1(t) = \begin{bmatrix} -2\,\mathrm{e}^{-t}\sin 2t \\ \mathrm{e}^{-t}\cos 2t \end{bmatrix} = \mathrm{e}^{-t}\begin{bmatrix} -2\sin 2t \\ \cos 2t \end{bmatrix} \quad \mathrm{Im}\,\vec{z}_1(t) = \begin{bmatrix} 2\,\mathrm{e}^{-t}\cos 2t \\ \mathrm{e}^{-t}\sin 2t \end{bmatrix} = \mathrm{e}^{-t}\begin{bmatrix} 2\cos 2t \\ \sin 2t \end{bmatrix} .$$

Obecné řešení zadané soustavy lineárních diferenciálních rovnic tedy je

$$\vec{z}(t) = C_1\,\mathrm{e}^{-t}\begin{bmatrix} -2\sin 2t \\ \cos 2t \end{bmatrix} + C_2\,\mathrm{e}^{-t}\begin{bmatrix} 2\cos 2t \\ \sin 2t \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R} .$$

Rozepišme ho po složkách:

$$\begin{array}{rcl} x(t) & = & -2\,C_1\,\mathrm{e}^{-t}\sin 2t + 2\,C_2\,\mathrm{e}^{-t}\cos 2t \\ y(t) & = & C_1\,\mathrm{e}^{-t}\cos 2t + C_2\,\mathrm{e}^{-t}\sin 2t . \end{array}$$

Zpět

Příklad 4.1.3

Nalezněte obecné řešení soustavy lineárních diferenciálních rovnic

$$\begin{array}{rcl} x' & = & -x-4y \\ y' & = & x-y \end{array}.$$

Maple:

```
> DR1:=(diff(x(t),t)=-x(t)-4*y(t));
```

$$DR1 := \frac{d}{dt}\,\mathrm{x}(t) = -\mathrm{x}(t) - 4\,\mathrm{y}(t)$$

```
> DR2:=(diff(y(t),t)=x(t)-y(t));
```

$$DR2 := \frac{d}{dt}\,\mathrm{y}(t) = \mathrm{x}(t) - \mathrm{y}(t)$$

```
> dsolve({DR1,DR2},{x(t),y(t)});
```

$$\{\mathrm{y}(t) = -\frac{1}{2}\,e^{(-t)}\,(\_C1\,\cos(2\,t) - \_C2\,\sin(2\,t)),\ \mathrm{x}(t) = e^{(-t)}\,(\_C1\,\sin(2\,t) + \_C2\,\cos(2\,t))\}$$

Zpět

Příklad 4.1.3

Nalezněte obecné řešení soustavy lineárních diferenciálních rovnic

$$\begin{array}{rcl} x' & = & -x - 4y \\ y' & = & x - y \end{array} .$$

Mathematica:

$\mathbf{rovnice1 = x'[t] == -x[t] - 4y[t];}$

$\mathbf{rovnice2 = y'[t] == x[t] - y[t];}$

$\mathbf{reseni = DSolve[\{rovnice1, rovnice2\}, \{x[t], y[t]\}, t]}$

$\{\{x[t] \to e^{-t} C[1] \mathrm{Cos}[2t] - 2e^{-t} C[2] \mathrm{Sin}[2t],$
$y[t] \to e^{-t} C[2] \mathrm{Cos}[2t] + \frac{1}{2} e^{-t} C[1] \mathrm{Sin}[2t]\}\}$

Zpět

Příklad 4.1.4

Nalezněte řešení soustavy lineárních diferenciálních rovnic

$$\begin{array}{rcl} x' & = & -x - y \\ y' & = & 5x + y \end{array},$$

které vyhovuje počáteční podmínce $x(0) = 1,\ y(0) = -1.$

? Zpět

Příklad 4.1.4

Nalezněte řešení soustavy lineárních diferenciálních rovnic

$$\begin{array}{rcl} x' &=& -x-y \\ y' &=& 5x+y \end{array},$$

které vyhovuje počáteční podmínce $x(0)=1,\ y(0)=-1.$

Výsledek:

$$\left.\begin{array}{rcl} x(t) &=& \cos 2t \\ y(t) &=& 2\sin 2t - \cos 2t \end{array}\right. \qquad t \in \mathbb{R}\,.$$

Zpět

Příklad 4.1.4

Nalezněte řešení soustavy lineárních diferenciálních rovnic

$$\begin{array}{rcl} x' & = & -x-y \\ y' & = & 5x+y \end{array},$$

které vyhovuje počáteční podmínce $x(0)=1,\ y(0)=-1.$

Návod:

Nejprve najdeme obecné řešení soustavy podle návodu v příkladě 4.1.1 a pak určíme konstanty C_1, C_2 tak, aby nalezené řešení splňovalo počáteční podmínku.

Zpět

Příklad 4.1.4

Nalezněte řešení soustavy lineárních diferenciálních rovnic

$$\begin{array}{rcl} x' & = & -x-y \\ y' & = & 5x+y \end{array},$$

které vyhovuje počáteční podmínce $x(0)=1,\ y(0)=-1$.

Řešení:

Položme $\vec{z}(t)=\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \implies \vec{z}\,'(t)=\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix}$.

Přepišme zadanou autonomní soustavu pomocí matic:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \implies \vec{z}\,'=\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}\vec{z}\,.$$

Maticí soustavy je

$$A=\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Řešení této soustavy hledáme ve tvaru $\vec{z}(t)=\mathrm{e}^{\lambda t}\cdot\vec{h}$, kde λ je vlastní číslo matice A a $\vec{h}$ je vlastní vektor příslušný k vlastnímu číslu λ. Číslo λ tedy řeší tzv. charakteristickou rovnici matice A:

$$\det(A-\lambda E)=0$$

a k němu příslušný vlastní vektor $\vec{h}$ je pak řešením soustavy $(A-\lambda E)\,\vec{h}=\vec{0}\,.$

Charakteristická rovnice matice A je

$$\det\left(\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}-\lambda\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)=0 \implies \begin{vmatrix} -1-\lambda & -1 \\ 5 & 1-\lambda \end{vmatrix}=0 \implies$$

$$(-1-\lambda)(1-\lambda)+5=0 \implies \lambda^2+4=0.$$

Další

Příklad 4.1.4

Nalezněte řešení soustavy lineárních diferenciálních rovnic

$$\begin{array}{rcl} x' & = & -x-y \\ y' & = & 5x+y \end{array},$$

které vyhovuje počáteční podmínce $x(0)=1,\ y(0)=-1$.

Řešení:

Její kořeny jsou $\lambda_1 = 2\,i,\ \lambda_2 = -2\,i$. Vlastní vektor příslušný k $\lambda_1 = 2\,i$ musí splňovat rovnost

$$(A - 2\,i\,E)\,\vec{h} = \vec{0}\,.$$

$$\Downarrow$$

$$\left(\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2\,i & 0 \\ 0 & 2\,i \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{bmatrix} -1-2\,i & -1 \\ 5 & 1-2\,i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{array}{c} (-1-2\,i)\,h_1 - h_2 = 0 \\ 5\,h_1 + (1-2\,i)\,h_2 = 0 \end{array}$$

První rovnice předchozí soustavy je násobkem druhé rovnice (vždy to tak musí být), proto má soustava nekonečně mnoho řešení (h_1, h_2). Protože hledáme jeden vlastní vektor příslušný k $\lambda_1 = 2\,i$, chceme jedno libovolné řešení v oboru komplexních čísel. Zvolíme např. $h_1 = 1$, pak z první rovnice $(-1-2\,i)\cdot 1 - h_2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad h_2 = -1-2\,i$.

Vlastní vektor příslušný k $\lambda_1 = 2\,i$ je $\quad \vec{h}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1-2\,i \end{bmatrix}$.

Má-li charakteristická rovnice matice soustavy dvou lineárních diferenciálních rovnic dva imaginární komplexně sdružené kořeny $\lambda_{1,2} = \pm b\,i$, pak obecné řešení této soustavy má tvar

$$\vec{z}(t) = C_1\,\mathrm{Re}(\mathrm{e}^{\lambda_1 t}\vec{h}_1) + C_2\,\mathrm{Im}(\mathrm{e}^{\lambda_1 t}\vec{h}_1)\,, \quad t \in \mathbb{R}\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}\,,$$

kde $\vec{h}_1$ je příslušný vlastní vektor k λ_1.

Další

Příklad 4.1.4

Nalezněte řešení soustavy lineárních diferenciálních rovnic

$$\begin{array}{rcl} x' & = & -x-y \\ y' & = & 5x+y \end{array},$$

které vyhovuje počáteční podmínce $x(0)=1,\ y(0)=-1$.

Řešení:

Hledejme reálnou a imaginární část komplexního řešení:

$$\vec{z}_1(t) = \mathrm{e}^{\lambda_1 t}\vec{h}_1 = \mathrm{e}^{2\,i\,t}\begin{bmatrix} 1 \\ -1-2\,i \end{bmatrix}.$$

Použijeme vzorec $\mathrm{e}^{b\,i\,t} = \cos bt + i\,\sin bt$. Pak

$$\vec{z}_1(t) = (\cos 2t + i\,\sin 2t)\begin{bmatrix} 1 \\ -1-2\,i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 2t + i\,\sin 2t \\ -\cos 2t + 2\,\sin 2t + i\,(-\sin 2t - 2\,\cos 2t) \end{bmatrix}$$

Reálná a imaginární část komplexního řešení $\vec{z}_1(t)$ je

$$\mathrm{Re}\,\vec{z}_1(t) = \begin{bmatrix} \cos 2t \\ 2\,\sin 2t - \cos 2t \end{bmatrix} \quad \mathrm{Im}\,\vec{z}_1(t) = \begin{bmatrix} \sin 2t \\ -2\,\cos 2t - \sin 2t \end{bmatrix}.$$

Obecné řešení zadané soustavy lineárních diferenciálních rovnic tedy je

$$\vec{z}(t) = C_1\begin{bmatrix} \cos 2t \\ 2\,\sin 2t - \cos 2t \end{bmatrix} + C_2\begin{bmatrix} \sin 2t \\ -2\,\cos 2t - \sin 2t \end{bmatrix}, \quad t\in\mathbb{R}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Další

Příklad 4.1.4

Nalezněte řešení soustavy lineárních diferenciálních rovnic

$$\begin{array}{rcl} x' & = & -x - y \\ y' & = & 5x + y \end{array},$$

které vyhovuje počáteční podmínce $x(0) = 1,\ y(0) = -1$.

Řešení:

Rozepišme ho po složkách:

$$\begin{array}{rcl} x(t) & = & C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t \\ y(t) & = & 2\,C_1 \sin 2t - C_1 \cos 2t - 2\,C_2 \cos 2t - C_2 \sin 2t\,. \end{array}$$

Nyní určíme konstanty C_1, C_2 tak, aby nalezené řešení vyhovovalo počáteční podmínce $x(0) = 1,\ y(0) = -1$. Po dosazení počátečních podmínek do obecného řešení dostaneme

$$\begin{array}{rcccl} 1 & = & x(0) & = & C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 \\ -1 & = & y(0) & = & 2\,C_1 \sin 0 - C_1 \cos 0 - 2\,C_2 \cos 0 - C_2 \sin 0 \end{array}$$

Odtud

$$\begin{array}{rcl} 1 & = & C_1 \\ -1 & = & -C_1 - 2\,C_2 \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{rcl} C_1 & = & 1 \\ C_2 & = & 0 \end{array}$$

Hledané řešení tedy je

$$\begin{array}{rcl} x(t) & = & \cos 2t \\ y(t) & = & 2 \sin 2t - \cos 2t \end{array} \qquad t \in \mathbb{R}\,.$$

Rovnice jsou parametrickými rovnicemi trajektorie nalezeného řešení (rovinné křivky).

Zpět

Příklad 4.1.4

Nalezněte řešení soustavy lineárních diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= -x - y \\ y' &= 5x + y \end{aligned},$$

které vyhovuje počáteční podmínce $x(0) = 1,\ y(0) = -1$.

Maple:

```
> DR1:=(diff(x(t),t)=-x(t)-y(t));
```

$$DR1 := \frac{d}{dt}\,\mathrm{x}(t) = -\mathrm{x}(t) - \mathrm{y}(t)$$

```
> DR2:=(diff(y(t),t)=5*x(t)+y(t));
```

$$DR2 := \frac{d}{dt}\,\mathrm{y}(t) = 5\,\mathrm{x}(t) + \mathrm{y}(t)$$

```
> PP:=x(0)=1,y(0)=-1;
```

$$PP := \mathrm{x}(0) = 1,\ \mathrm{y}(0) = -1$$

```
> dsolve({DR1,DR2,PP},{x(t),y(t)});
```

$$\{\mathrm{x}(t) = \cos(2\,t),\ \mathrm{y}(t) = 2\sin(2\,t) - \cos(2\,t)\}$$

Zpět

Příklad 4.1.4

Nalezněte řešení soustavy lineárních diferenciálních rovnic

$$\begin{array}{rcl} x' & = & -x-y \\ y' & = & 5x+y \end{array},$$

které vyhovuje počáteční podmínce $x(0) = 1,\ y(0) = -1.$

Mathematica:

rovnice1 = $x'[t] == -x[t] - y[t]$;
rovnice2 = $y'[t] == 5x[t] + y[t]$;

pp1 = $x[0] == 1$;
pp2 = $y[0] == -1$;

reseni = DSolve[{rovnice1, rovnice2, pp1, pp2}, {$x[t]$, $y[t]$}, t]

$\{\{x[t] \to \mathrm{Cos}[2t], y[t] \to -\mathrm{Cos}[2t] + 2\mathrm{Sin}[2t]\}\}$

Zpět

Eulerova metoda

- **Příklad 4.2.1** Pomocí Eulerovy metody nalezněte přibližnou hodnotu řešení autonomní soustavy diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= xy \\ y' &= x - y\,, \end{aligned}$$

  které vyhovuje počáteční podmínce $x(0) = 1$, $y(0) = 2$, v bodě $t = 2$. Použijte krok $h = 0,5$.

- **Příklad 4.2.2** Pomocí Eulerovy metody nalezněte přibližnou hodnotu řešení neautonomní soustavy diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= x \cdot y \cdot t \\ y' &= x - y + t\,, \end{aligned}$$

  které vyhovuje počáteční podmínce $x(1) = 1$, $y(1) = 2$, v bodě $t = 2$. Použijte krok $h = 0,25$.

- **Příklad 4.2.3** Pomocí Eulerovy metody nalezněte přibližnou hodnotu řešení neautonomní soustavy diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= x + 2t \\ y' &= \frac{x}{y}\,, \end{aligned}$$

  které vyhovuje počáteční podmínce $x(0) = 4$, $y(0) = 5$, v bodě $t = -1$. Použijte krok $h = 0,25$.

Příklad 4.2.1

Pomocí Eulerovy metody nalezněte přibližnou hodnotu řešení autonomní soustavy diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= xy \\ y' &= x - y\,, \end{aligned}$$

které vyhovuje počáteční podmínce $x(0) = 1$, $y(0) = 2$, v bodě $t = 2$. Použijte krok $h = 0,5$.

? Zpět

Příklad 4.2.1

Pomocí Eulerovy metody nalezněte přibližnou hodnotu řešení autonomní soustavy diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= xy \\ y' &= x - y\,, \end{aligned}$$

které vyhovuje počáteční podmínce $x(0) = 1$, $y(0) = 2$, v bodě $t = 2$. Použijte krok $h = 0,5$.

Výsledek:

$$\begin{aligned} x(2) &\doteq 15,18 \\ y(2) &\doteq 4,59 \end{aligned}\,.$$

Zpět

Příklad 4.2.1

Pomocí Eulerovy metody nalezněte přibližnou hodnotu řešení autonomní soustavy diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= xy \\ y' &= x - y\,, \end{aligned}$$

které vyhovuje počáteční podmínce $x(0) = 1$, $y(0) = 2$, v bodě $t = 2$. Použijte krok $h = 0,5$.

Návod:

Přibližnou hodnotu řešení hledáme pomocí iteračních vzorců

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i + h \cdot f(x_i, y_i) \\ y_{i+1} &= y_i + h \cdot g(x_i, y_i) \end{aligned}\,,$$

přičemž $x_0 = 1\,,\ y_0 = 2\,,\ h = 0,5\,,\ f(x_i, y_i) = x_i\,y_i\,,\ g(x_i, y_i) = x_i - y_i$.

Zpět

Příklad 4.2.1

Pomocí Eulerovy metody nalezněte přibližnou hodnotu řešení autonomní soustavy diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= xy \\ y' &= x - y\,, \end{aligned}$$

které vyhovuje počáteční podmínce $x(0) = 1$, $y(0) = 2$, v bodě $t = 2$. Použijte krok $h = 0,5$.

Řešení:

Zadanou soustavu diferenciálních rovnic neumíme analyticky vyřešit. Pomocí Eulerovy metody však můžeme získat přibližné hodnoty řešení počáteční úlohy v konečném počtu tzv. uzlových bodů $t_0, t_1, \ldots, t_n$ z definičního oboru řešení. Použijeme iterační vzorce

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i + h \cdot f(x_i, y_i) \\ y_{i+1} &= y_i + h \cdot g(x_i, y_i) \end{aligned}\,,$$

kde $f(x_i, y_i) = x_i\, y_i$, $g(x_i, y_i) = x_i - y_i$, $x_0 = x(0) = 1$ a $y_0 = y(0) = 2$. Dvojice (x_i, y_i) je aproximací řešení v bodě t_i, tedy $x(t_i) \doteq x_i$ a $y(t_i) \doteq y_i$. Uzlové body t_i jsou dány krokem $h = 0,5$. Platí $t_i = t_{i-1} + 0,5 = t_0 + i \cdot 0,5$. V bodě t_0 je dána počáteční podmínka, tedy $t_0 = 0$, $t_1 = 0,5$, $t_2 = 1$ atd. Počet kroků lze určit z předchozího vztahu pro uzlové body, přičemž předpokládáme, že bod t_i je poslední, v něm hledáme přibližnou hodnotu řešení, tj.

$$i = \frac{t_i - t_0}{0,5} = \frac{2 - 0}{0,5} = 4\,.$$

Další

Příklad 4.2.1

Pomocí Eulerovy metody nalezněte přibližnou hodnotu řešení autonomní soustavy diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= xy \\ y' &= x - y\,, \end{aligned}$$

které vyhovuje počáteční podmínce $x(0) = 1$, $y(0) = 2$, v bodě $t = 2$. Použijte krok $h = 0,5$.

Řešení:

Výpočty v jednotlivých krocích zaznamenáme do tabulky. V prvním sloupci je pořadí kroku i, ve druhém sloupci je bod t_i, ve kterém hledáme aproximaci řešení, ve třetím sloupci je x_i, aproximace hodnoty $x(t_i)$, ve čtvrtém sloupci je y_i, aproximace hodnoty $y(t_i)$, v pátém sloupci je „pomocný" výpočet $h \cdot f(x_i, y_i)$ a v šestém sloupci je „pomocný" výpočet $h \cdot g(x_i, y_i)$.

i	t_i	x_i	y_i	$0,5 \cdot x_i\, y_i$	$0,5 \cdot (x_i - y_i)$
0	0	1	2	1	-0,5
1	0,5	2	1,5	1,5	0,25
2	1	3,5	1,75	3,06	0,88
3	1,5	6,56	2,62	8,61	1,97
4	2	15,18	4,59		

Přibližná hodnota řešení dané počáteční úlohy v bodě $t = 2$ je $x_4 = 15,18$; $y_4 = 4,59$; tedy $x(2) \doteq 15,18$; $y(2) \doteq 4,59$.

Zpět

Příklad 4.2.1

Pomocí Eulerovy metody nalezněte přibližnou hodnotu řešení autonomní soustavy diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= xy \\ y' &= x - y\,, \end{aligned}$$

které vyhovuje počáteční podmínce $x(0) = 1,\ y(0) = 2$, v bodě $t = 2$. Použijte krok $h = 0,5$.

Maple:

```
> DR1:=(diff(x(t),t)=x(t)*y(t));
```

$$DR1 := \frac{d}{dt}\,\mathrm{x}(t) = \mathrm{x}(t)\,\mathrm{y}(t)$$

```
> DR2:=(diff(y(t),t)=x(t)-y(t));
```

$$DR2 := \frac{d}{dt}\,\mathrm{y}(t) = \mathrm{x}(t) - \mathrm{y}(t)$$

```
> PP:=x(0)=1,y(0)=2;
```

$$PP := \mathrm{x}(0) = 1,\ \mathrm{y}(0) = 2$$

```
> dsolve({DR1,DR2,PP},{x(t),y(t)},numeric,
method=classical[foreuler],output=array([0,0.5,1,1.5,2]),stepsize=0.5) :
> evalf(%,3);
```

$$\left[\begin{array}{c} [t,\ \mathrm{x}(t),\ \mathrm{y}(t)] \\ \left[\begin{array}{ccc} 0. & 1. & 2. \\ 0.5 & 2. & 1.50 \\ 1. & 3.50 & 1.75 \\ 1.5 & 6.56 & 2.62 \\ 2. & 15.2 & 4.59 \end{array}\right] \end{array}\right]$$

Zpět

Příklad 4.2.1

Pomocí Eulerovy metody nalezněte přibližnou hodnotu řešení autonomní soustavy diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= xy \\ y' &= x - y\,, \end{aligned}$$

které vyhovuje počáteční podmínce $x(0) = 1$, $y(0) = 2$, v bodě $t = 2$. Použijte krok $h = 0,5$.

Mathematica:

Mathematice nemá program na vypočet řešení soustavy diferencialnich rovnic pomocí Eulerovy metody (pro řešení používá přesnější metody). Můžeme si ale jednoduchý program na Eulerovu metodu pro soustavu dvou diferenciálních rovnic napsat:

```
EulerMetod[f1, f2, x0, y0, a, b, h]:=Module[{n, v, x1, y1, x2, y2},
t = a;
n = (b − a)/h;
v = {{"t", "x", "y"}, {a, x0, y0}};
x1 = x0; y1 = y0;
For[i = 1, i ≤ n, {x2 = x1 + hf1[t, x1, y1]; y2 = y1 + hf2[t, x1, y1];
v = Join[v, {{t + h, x2, y2}}]; x1 = x2; y1 = y2; t = t + h; i = i + 1}];
Print[MatrixForm[v]]]
```

Nyní použijeme program EulerMetod na náš příklad.

Další

Příklad 4.2.1

Pomocí Eulerovy metody nalezněte přibližnou hodnotu řešení autonomní soustavy diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= xy \\ y' &= x - y\,, \end{aligned}$$

které vyhovuje počáteční podmínce $x(0) = 1$, $y(0) = 2$, v bodě $t = 2$. Použijte krok $h = 0,5$.

Mathematica:

f1[t_, x_, y_]:=xy;
f2[t_, x_, y_]:=$x - y$;

$\boldsymbol{a = 0; b = 2; h = 0.5;}$

x0 = 1; y0 = 2;

EulerMetod[f1, f2, x0, y0, a, b, h]

$$\begin{pmatrix} t & x & y \\ 0 & 1 & 2 \\ 0.5 & 2. & 1.5 \\ 1. & 3.5 & 1.75 \\ 1.5 & 6.5625 & 2.625 \\ 2. & 15.1758 & 4.59375 \end{pmatrix}$$

Zpět

Příklad 4.2.2

Pomocí Eulerovy metody nalezněte přibližnou hodnotu řešení neautonomní soustavy diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= x \cdot y \cdot t \\ y' &= x - y + t\,, \end{aligned}$$

které vyhovuje počáteční podmínce $x(1) = 1$, $y(1) = 2$, v bodě $t = 2$. Použijte krok $h = 0,25$.

Zpět

Příklad 4.2.2

Pomocí Eulerovy metody nalezněte přibližnou hodnotu řešení neautonomní soustavy diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= x \cdot y \cdot t \\ y' &= x - y + t\,, \end{aligned}$$

které vyhovuje počáteční podmínce $x(1) = 1$, $y(1) = 2$, v bodě $t = 2$. Použijte krok $h = 0,25$.

Výsledek:

$$\begin{aligned} x(2) &\doteq 9,53 \\ y(2) &\doteq 3,52 \end{aligned}.$$

Zpět

Příklad 4.2.2

Pomocí Eulerovy metody nalezněte přibližnou hodnotu řešení neautonomní soustavy diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= x \cdot y \cdot t \\ y' &= x - y + t \,, \end{aligned}$$

které vyhovuje počáteční podmínce $x(1) = 1$, $y(1) = 2$, v bodě $t = 2$. Použijte krok $h = 0,25$.

Návod:

Přibližnou hodnotu řešení hledáme pomocí iteračních vzorců

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i + h \cdot f(t_i, x_i, y_i) \\ y_{i+1} &= y_i + h \cdot g(t_i, x_i, y_i) \end{aligned} \,,$$

přičemž $x_0 = 1\,,\ y_0 = 2\,,\ h = 0,25\,,\ f(x_i, y_i) = x_i\, y_i\, t_i\,,\ g(x_i, y_i) = x_i - y_i + t_i.$

Zpět

Příklad 4.2.2

Pomocí Eulerovy metody nalezněte přibližnou hodnotu řešení neautonomní soustavy diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= x \cdot y \cdot t \\ y' &= x - y + t\,, \end{aligned}$$

které vyhovuje počáteční podmínce $x(1) = 1$, $y(1) = 2$, v bodě $t = 2$. Použijte krok $h = 0,25$.

Řešení:

Zadanou soustavu diferenciálních rovnic neumíme analyticky vyřešit. Pomocí Eulerovy metody však můžeme získat přibližné hodnoty řešení počáteční úlohy v konečném počtu tzv. uzlových bodů $t_0, t_1, \ldots, t_n$ z definičního oboru řešení. Použijeme iterační vzorce

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i + h \cdot f(x_i, y_i) \\ y_{i+1} &= y_i + h \cdot g(x_i, y_i) \end{aligned}\,,$$

kde $f(x_i, y_i) = x_i\, y_i\, t$, $g(x_i, y_i) = x_i - y_i + t$, $x_0 = x(1) = 1$ a $y_0 = y(1) = 2$. Dvojice (x_i, y_i) je aproximací řešení v bodě t_i, tedy $x(t_i) \doteq x_i$ a $y(t_i) \doteq y_i$. Uzlové body t_i jsou dány krokem $h = 0,25$. Platí $t_i = t_{i-1} + 0,25 = t_0 + i \cdot 0,25$. V bodě t_0 je dána počáteční podmínka, tedy $t_0 = 1$, $t_1 = 1,25$, $t_2 = 1,5$ atd. Počet kroků lze určit z předchozího vztahu pro uzlové body, přičemž předpokládáme, že bod t_i je poslední, v něm hledáme přibližnou hodnotu řešení, tj.

$$i = \frac{t_i - t_0}{0,25} = \frac{2-1}{0,25} = 4\,.$$

Další

Příklad 4.2.2

Pomocí Eulerovy metody nalezněte přibližnou hodnotu řešení neautonomní soustavy diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= x \cdot y \cdot t \\ y' &= x - y + t\,, \end{aligned}$$

které vyhovuje počáteční podmínce $x(1) = 1$, $y(1) = 2$, v bodě $t = 2$. Použijte krok $h = 0,25$.

Řešení:

Výpočty v jednotlivých krocích zaznamenáme do tabulky. V prvním sloupci je pořadí kroku i, ve druhém sloupci je bod t_i, ve kterém hledáme aproximaci řešení, ve třetím sloupci je x_i, aproximace hodnoty $x(t_i)$, ve čtvrtém sloupci je y_i, aproximace hodnoty $y(t_i)$, v pátém sloupci je „pomocný“ výpočet $h \cdot f(x_i, y_i)$ a v šestém sloupci je „pomocný“ výpočet $h \cdot g(x_i, y_i)$.

i	t_i	x_i	y_i	$0,25 \cdot x_i\, y_i\, t$	$0,25 \cdot (x_i - y_i + t)$
0	1	1	2	0,5	0
1	1,25	1,5	2	0,94	0,19
2	1,5	2,44	2,19	2,00	0,44
3	1,75	4,44	2,63	5,10	0,89
4	2	9,53	3,52		

Přibližná hodnota řešení dané počáteční úlohy v bodě $t = 2$ je $x_4 = 9,53$; $y_4 = 3,52$; tedy $x(2) \doteq 9,53$; $y(2) \doteq 3,52$.

Zpět

Příklad 4.2.2

Pomocí Eulerovy metody nalezněte přibližnou hodnotu řešení neautonomní soustavy diferenciálních rovnic

$$
\begin{aligned}
x' &= x \cdot y \cdot t \\
y' &= x - y + t\,,
\end{aligned}
$$

které vyhovuje počáteční podmínce $x(1) = 1$, $y(1) = 2$, v bodě $t = 2$. Použijte krok $h = 0,25$.

Maple:

```
> DR1:=(diff(x(t),t)=x(t)*y(t)*t);
```

$$DR1 := \frac{d}{dt}\,\mathrm{x}(t) = \mathrm{x}(t)\,\mathrm{y}(t)\,t$$

```
> DR2:=(diff(y(t),t)=x(t)-y(t)+t);
```

$$DR2 := \frac{d}{dt}\,\mathrm{y}(t) = \mathrm{x}(t) - \mathrm{y}(t) + t$$

```
> PP:=x(1)=1,y(1)=2;
```

$$PP := \mathrm{x}(1) = 1,\ \mathrm{y}(1) = 2$$

```
> dsolve({DR1,DR2,PP},{x(t),y(t)},numeric,
method=classical[foreuler],output=array([1,1.25,1.5,1.75,2]),stepsize=
0.25):
> evalf(%,3);
```

$$\begin{bmatrix} [t,\ \mathrm{x}(t),\ \mathrm{y}(t)] \\ \begin{bmatrix} 1. & 1. & 2. \\ 1.25 & 1.50 & 2. \\ 1.5 & 2.44 & 2.19 \\ 1.75 & 4.44 & 2.62 \\ 2. & 9.53 & 3.52 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

Zpět

Příklad 4.2.2

Pomocí Eulerovy metody nalezněte přibližnou hodnotu řešení neautonomní soustavy diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= x \cdot y \cdot t \\ y' &= x - y + t\,, \end{aligned}$$

které vyhovuje počáteční podmínce $x(1) = 1$, $y(1) = 2$, v bodě $t = 2$. Použijte krok $h = 0,25$.

Mathematica:

Pro výpočet použijeme program EulerMetod z příkladu 4.2.1

f1[t_, x_, y_]:=xyt;
f2[t_, x_, y_]:=$x - y + t$;

$a = 1; b = 2; h = 0.25;$

x0 = 1; y0 = 2;

EulerMetod[f1, f2, x0, y0, a, b, h]

$$\begin{pmatrix} t & x & y \\ 1 & 1 & 2 \\ 1.25 & 1.5 & 2 \\ 1.5 & 2.4375 & 2.1875 \\ 1.75 & 4.43701 & 2.625 \\ 2. & 9.53264 & 3.5155 \end{pmatrix}$$

Zpět

Příklad 4.2.3

Pomocí Eulerovy metody nalezněte přibližnou hodnotu řešení neautonomní soustavy diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= x + 2t \\ y' &= \frac{x}{y}\,, \end{aligned}$$

které vyhovuje počáteční podmínce $x(0) = 4$, $y(0) = 5$, v bodě $t = -1$. Použijte krok $h = 0,25$.

? Zpět

Příklad 4.2.3

Pomocí Eulerovy metody nalezněte přibližnou hodnotu řešení neautonomní soustavy diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= x + 2t \\ y' &= \frac{x}{y}\,, \end{aligned}$$

které vyhovuje počáteční podmínce $x(0) = 4$, $y(0) = 5$, v bodě $t = -1$. Použijte krok $h = 0,25$.

Výsledek:

$$\begin{aligned} x(2) &\doteq 1,90 \\ y(2) &\doteq 4,40 \end{aligned} .$$

Zpět

Příklad 4.2.3

Pomocí Eulerovy metody nalezněte přibližnou hodnotu řešení neautonomní soustavy diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= x + 2t \\ y' &= \frac{x}{y}, \end{aligned}$$

které vyhovuje počáteční podmínce $x(0) = 4$, $y(0) = 5$, v bodě $t = -1$. Použijte krok $h = 0,25$.

Návod:

Přibližnou hodnotu řešení hledáme pomocí iteračních vzorců

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i - h \cdot f(t_i, x_i, y_i) \\ y_{i+1} &= y_i - h \cdot g(t_i, x_i, y_i) \end{aligned},$$

přičemž $x_0 = 4$, $y_0 = 5$, $h = 0,25$, $f(x_i, y_i) = x_i + 2t_i$, $g(x_i, y_i) = \dfrac{x_i}{y_i}$.

Zpět

Příklad 4.2.3

Pomocí Eulerovy metody nalezněte přibližnou hodnotu řešení neautonomní soustavy diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= x + 2t \\ y' &= \frac{x}{y}\,, \end{aligned}$$

které vyhovuje počáteční podmínce $x(0) = 4$, $y(0) = 5$, v bodě $t = -1$. Použijte krok $h = 0,25$.

Řešení:

Pomocí Eulerovy metody získáme přibližné hodnoty řešení počáteční úlohy v konečném počtu tzv. uzlových bodů $t_0, t_1, \ldots, t_n$ z definičního oboru řešení. Použijeme iterační vzorce

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i - h \cdot f(x_i, y_i) \\ y_{i+1} &= y_i - h \cdot g(x_i, y_i) \end{aligned}\,,$$

kde $f(x_i, y_i) = x_i + 2t$, $g(x_i, y_i) = \frac{x_i}{y_i}$, $x_0 = x(0) = 4$ a $y_0 = y(0) = 5$. Ve vzorcích je narozdíl od předchozích příkladů znaménko mínus a to proto, že hledáme přibližnou hodnotu řešení v bodě menším než je bod, ve kterém je dána počáteční podmínka. Dvojice (x_i, y_i) je aproximací řešení v bodě t_i, tedy $x(t_i) \doteq x_i$ a $y(t_i) \doteq y_i$. Uzlové body t_i jsou dány krokem $h = 0,25$. Platí $t_i = t_{i-1} - 0,25 = t_0 - i \cdot 0,25$. V bodě t_0 je dána počáteční podmínka, tedy $t_0 = 0$, $t_1 = -0,25$, $t_2 = -0,5$ atd. Počet kroků lze určit z předchozího vztahu pro uzlové body, přičemž předpokládáme, že bod t_i je poslední, v něm hledáme přibližnou hodnotu řešení, tj.

$$i = \frac{t_0 - t_i}{0,25} = \frac{0 - (-1)}{0,25} = 4\,.$$

Další

Příklad 4.2.3

Pomocí Eulerovy metody nalezněte přibližnou hodnotu řešení neautonomní soustavy diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= x + 2t \\ y' &= \frac{x}{y}\,, \end{aligned}$$

které vyhovuje počáteční podmínce $x(0) = 4$, $y(0) = 5$, v bodě $t = -1$. Použijte krok $h = 0,25$.

Řešení:

Výpočty v jednotlivých krocích zaznamenáme do tabulky. V prvním sloupci je pořadí kroku i, ve druhém sloupci je bod t_i, ve kterém hledáme aproximaci řešení, ve třetím sloupci je x_i, aproximace hodnoty $x(t_i)$, ve čtvrtém sloupci je y_i, aproximace hodnoty $y(t_i)$, v pátém sloupci je „pomocný“ výpočet $h \cdot f(x_i, y_i)$ a v šestém sloupci je „pomocný“ výpočet $h \cdot g(x_i, y_i)$.

i	t_i	x_i	y_i	$0,25\,(x_i + 2t)$	$0,25\,\frac{x_i}{y_i}$
0	0	4	5	1	0,2
1	-0,25	3	4,8	0,63	0,16
2	-0,5	2,38	4,64	0,34	0,13
3	-0,75	2,03	4,52	0,13	0,11
4	-1	1,90	4,40		

Přibližná hodnota řešení dané počáteční úlohy v bodě $t = -1$ je $x_4 = 1,90$; $y_4 = 4,40$; tedy $x(-1) \doteq 1,90$; $y(-1) \doteq 4,40$.

Zpět

Příklad 4.2.3

Pomocí Eulerovy metody nalezněte přibližnou hodnotu řešení neautonomní soustavy diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= x + 2t \\ y' &= \frac{x}{y}, \end{aligned}$$

které vyhovuje počáteční podmínce $x(0) = 4$, $y(0) = 5$, v bodě $t = -1$. Použijte krok $h = 0,25$.

Maple:

```
> DR1:=(diff(x(t),t)=x(t)+2*t);
```

$$DR1 := \frac{d}{dt}\,\mathrm{x}(t) = \mathrm{x}(t) + 2\,t$$

```
> DR2:=(diff(y(t),t)=x(t)/y(t));
```

$$DR2 := \frac{d}{dt}\,\mathrm{y}(t) = \frac{\mathrm{x}(t)}{\mathrm{y}(t)}$$

```
> PP:=x(0)=4,y(0)=5;
```

$$PP := \mathrm{x}(0) = 4,\ \mathrm{y}(0) = 5$$

```
> dsolve({DR1,DR2,PP},{x(t),y(t)},numeric,
method=classical[foreuler],output=array([-1,-0.75,-0.5,-0.25,0]),steps
ize=0.25):
> evalf(%,3);
```

$$\left[\begin{array}{c} [t,\ \mathrm{x}(t),\ \mathrm{y}(t)] \\ \left[\begin{array}{ccc} -1. & 1.90 & 4.40 \\ -0.75 & 2.03 & 4.52 \\ -0.5 & 2.38 & 4.64 \\ -0.25 & 3. & 4.80 \\ 0. & 4. & 5. \end{array}\right] \end{array}\right]$$

Příklad 4.2.3

Pomocí Eulerovy metody nalezněte přibližnou hodnotu řešení neautonomní soustavy diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= x + 2t \\ y' &= \frac{x}{y}, \end{aligned}$$

které vyhovuje počáteční podmínce $x(0) = 4$, $y(0) = 5$, v bodě $t = -1$. Použijte krok $h = 0,25$.

Mathematica:

Pro výpočet použijeme program EulerMetod z prikladu 4.2.1

```
f1[t_, x_, y_]:=x + 2 t;
f2[t_, x_, y_]:=x/y;

a = 0; b = -1; h = -0.25;

x0 = 4; y0 = 5;

EulerMetod[f1, f2, x0, y0, a, b, h]
```

$$\begin{pmatrix} t & x & y \\ 0 & 4 & 5 \\ -0.25 & 3. & 4.8 \\ -0.5 & 2.375 & 4.64375 \\ -0.75 & 2.03125 & 4.51589 \\ -1. & 1.89844 & 4.40344 \end{pmatrix}$$

Zpět

Funkce více proměnných, jejich spojitost a limita

- Definiční obor funkce více proměnných
- Graf funkce dvou proměnných
- Limita funkce dvou proměnných

Zpět

Definiční obor funkce více proměnných

- **Příklad 5.1.1** Určete a nakreslete definiční obor funkce
$$f(x,y) = \arcsin\,(2x-y) + \arccos\,(x-2y)\,.$$
Napište a zdůvodněte, které z následujících vlastností $\mathcal{D}(f)$ má a které nemá: otevřená, uzavřená, souvislá, konvexní, omezená. Určete hranici $\mathcal{D}(f)$. Je funkce $f(x,y)$ na svém definičním oboru omezená?

- **Příklad 5.1.2** Určete a nakreslete definiční obor funkce
$$f(x,y) = \ln\frac{x^2}{2x-y},$$
určete jeho hranici a nakreslete vrstevnici, která prochází bodem $A=(1,1)$.

- **Příklad 5.1.3** Najděte a nakreslete definiční obor funkce
$$f(x,y) = \sqrt{x-\sqrt{y}}.$$
Které vrstevnice procházejí body $A=(1,1),\ B=(5,1),\ C=(4,0)$? Nakreslete je do obrázku.

Zpět

Příklad 5.1.1

Určete a nakreslete definiční obor funkce

$$f(x, y) = \arcsin\,(2x - y) + \arccos\,(x - 2y)\,.$$

Napište a zdůvodněte, které z následujících vlastností $\mathcal{D}(f)$ má a které nemá: otevřená, uzavřená, souvislá, konvexní, omezená. Určete hranici $\mathcal{D}(f)$. Je funkce $f(x, y)$ na svém definičním oboru omezená?

? Zpět

Příklad 5.1.1

Určete a nakreslete definiční obor funkce

$$f(x,y) = \arcsin\,(2x-y) + \arccos\,(x-2y)\,.$$

Napište a zdůvodněte, které z následujících vlastností $\mathcal{D}(f)$ má a které nemá: otevřená, uzavřená, souvislá, konvexní, omezená. Určete hranici $\mathcal{D}(f)$. Je funkce $f(x,y)$ na svém definičním oboru omezená?

Výsledek:

$$\mathcal{D}(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 2x-1 \le y \le 2x+1\} \ \cap\ \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \frac{x-1}{2} \le y \le \frac{x+1}{2}\} =$$

$$= \text{ rovnoběžník } ABCD,\ A = [-1,-1],\ B = \left[\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right],\ C = [1,1],\ D = \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right].$$

$$\mathcal{H} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ y = \frac{x-1}{2}, x \in \langle -1, \frac{1}{3}\rangle\} \ \cup\ \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, y = 2x-1, x \in \langle \frac{1}{3}, 1\rangle\} \ \cup$$

$$\cup\ \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ y = \frac{x+1}{2}, x \in \langle -\frac{1}{3}, 1\rangle\} \ \cup\ \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, y = 2x+1, x \in \langle -1, -\frac{1}{3}\rangle\}.$$

$\mathcal{D}(f)$ je uzavřená, souvislá, konvexní a omezená množina, není otevřená. Funkce $f(x,y)$ je na svém definičním oboru omezená.

Zpět

Příklad 5.1.1

Určete a nakreslete definiční obor funkce

$$f(x,y) = \arcsin(2x-y) + \arccos(x-2y)\,.$$

Napište a zdůvodněte, které z následujících vlastností $\mathcal{D}(f)$ má a které nemá: otevřená, uzavřená, souvislá, konvexní, omezená. Určete hranici $\mathcal{D}(f)$. Je funkce $f(x,y)$ na svém definičním oboru omezená?

Návod:

Využijeme znalosti definičního oboru cyklometrických funkcí arcsin a arccos. Obě tyto funkce jsou na svém definičním oboru omezené, tedy i jejich součet je funkce omezená na svém definičním oboru. Hranice $\mathcal{D}(f)$ patří do definičního oboru, je tedy $\mathcal{D}(f)$ uzavřená množina, není otevřená. Zbývá rozhodnout, zda libovolné dva body $\mathcal{D}(f)$ lze spojit úsečkou, která celá leží v $\mathcal{D}(f)$ (konvexnost) a zda pro libovolné dva body $\mathcal{D}(f)$ existuje lomená čára, která je spojuje a leží celá v $\mathcal{D}(f)$ (souvislost). Abychom dokázali omezenost, musíme najít číslo $K > 0$, takové, že vzdálenost libovolného bodu $\mathcal{D}(f)$ od počátku je menší nebo rovna K.

Zpět

Příklad 5.1.1

Určete a nakreslete definiční obor funkce

$$f(x, y) = \arcsin(2x - y) + \arccos(x - 2y).$$

Napište a zdůvodněte, které z následujících vlastností $\mathcal{D}(f)$ má a které nemá: otevřená, uzavřená, souvislá, konvexní, omezená. Určete hranici $\mathcal{D}(f)$. Je funkce $f(x, y)$ na svém definičním oboru omezená?

Řešení:

Funkce $\arcsin(t)$ a $\arccos(t)$ jsou definovány pro $t \in \langle -1, 1\rangle$, tedy musí být

$$-1 \le 2x - y \le 1, \quad -1 \le x - 2y \le 1.$$

Nerovnosti vyřešíme a dostaneme

$$\mathcal{D}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ 2x - 1 \le y \le 2x + 1\} \ \cap\ \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \frac{x-1}{2} \le y \le \frac{x+1}{2}\}.$$

Jde o rovnoběžník $ABCD$,

$$A = [-1, -1],\ B = \left[\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right],\ C = [1, 1],\ D = \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right].$$

Hranice definičního oboru je tvořena úsečkami AB, BC, CD a DA. Všechny tyto úsečky leží v definičním oboru, množina $\mathcal{D}(f)$ je tedy uzavřená a není otevřená.

Další

Příklad 5.1.1

Určete a nakreslete definiční obor funkce

$$f(x,y) = \arcsin\,(2x-y) + \arccos\,(x-2y)\,.$$

Napište a zdůvodněte, které z následujících vlastností $\mathcal{D}(f)$ má a které nemá: otevřená, uzavřená, souvislá, konvexní, omezená. Určete hranici $\mathcal{D}(f)$. Je funkce $f(x,y)$ na svém definičním oboru omezená?

Řešení:

Spojnice libovolných dvou bodů $\mathcal{D}(f)$ leží celá v $\mathcal{D}(f)$, $\mathcal{D}(f)$ je tedy konvexní, a protože libovolné dva body $\mathcal{D}(f)$ lze spojit lomenou čarou, která celá leží v $\mathcal{D}(f)$, $\mathcal{D}(f)$ je tedy souvislá.
Protože "nejvzdálenějšími" body od počátku jsou body A a C a jejich vzdálenost od počátku je $\rho(A,0) = \rho(C,0) = \sqrt{2}$, kde $0 = [0,0] \in \mathbb{R}^2$ je počátek souřadnic, je vzdálenost libovolného bodu $\mathcal{D}(f)$ od počátku menší nebo rovna $\sqrt{2}$. Položíme $K = \sqrt{2}$. Pak $\rho(X,0) \leq K\ \forall\ X = [x,y] \in \mathcal{D}(f)$, množina $\mathcal{D}(f)$ je tedy omezená.
Protože obor hodnot funkce $\mathcal{H}(\arcsin t) = \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$ a obor hodnot funkce $\mathcal{H}(\arccos t) = \langle 0, \pi \rangle$, jsou obě tyto funkce omezené a tedy i jejich součet je funkce omezená na svém definičním oboru.

Zpět

Příklad 5.1.1

Určete a nakreslete definiční obor funkce

$$f(x,y) = \arcsin\,(2x-y) + \arccos\,(x-2y)\,.$$

Napište a zdůvodněte, které z následujících vlastností $\mathcal{D}(f)$ má a které nemá: otevřená, uzavřená, souvislá, konvexní, omezená. Určete hranici $\mathcal{D}(f)$. Je funkce $f(x,y)$ na svém definičním oboru omezená?

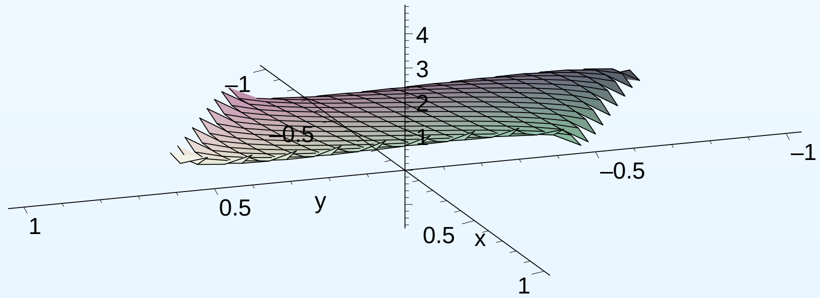
Maple:

```
> with(plots):
> f:=(x,y)->arcsin(2*x-y)+arccos(x-2*y);
```

$$f := (x,\, y) \to \arcsin(2\,x - y) + \arccos(x - 2\,y)$$

Pro představu si nakreslíme graf dané funkce.

```
> plot3d(arcsin(2*x-y)+arccos(x-2*y), x=-1.0..1.0,
y=-1..1,axes=normal,numpoints=400,orientation=[70,45]);
```



Pro definiční obor musí platit: $-1 <= 2x-y <= 1$, $-1 <= x-2y <= 1$, Vypočteme souřadnice bodů A, B, C, D, kde bod A je průsečík přímek $y = 2x+1$ a $y = 0.5(x-1)$, bod B průsečík přímek $y = 2x+1$ a $y = 0.5(x-1)$, bod C průsečík přímek $y = 2x-1$ a $y = 0.5(x+1)$, bod D průsečík přímek $y = 2x+1$ a $y = 0.5(x+1)$.

Další

Příklad 5.1.1

Určete a nakreslete definiční obor funkce

$$f(x,y) = \arcsin\,(2x-y) + \arccos\,(x-2y)\,.$$

Napište a zdůvodněte, které z následujících vlastností $\mathcal{D}(f)$ má a které nemá: otevřená, uzavřená, souvislá, konvexní, omezená. Určete hranici $\mathcal{D}(f)$. Je funkce $f(x,y)$ na svém definičním oboru omezená?

Maple:

Definičním oborem fce f je rovnoběžník $ABCD$, hranice je tvořena úsečkami AB, BC, CD, DA a leží celá v definičním oboru f.

```
> xA:=solve(2*x+1=0.5*(x-1));
```

$$xA := -1.$$

```
> yA:=2*xA+1;
```

$$yA := -1.$$

```
> xB:=solve(2*x-1=0.5*(x-1));
```

$$xB := 0.3333333333$$

```
> yB:=2*xB-1;
```

$$yB := -0.3333333334$$

```
> xC:=solve(2*x-1=0.5*(x+1));
```

$$xC := 1.$$

```
> yC:=2*xC-1;
```

$$yC := 1.$$

```
> xD:=solve(2*x+1=0.5*(x+1));
```

$$xD := -0.3333333333$$

Další

Příklad 5.1.1

Určete a nakreslete definiční obor funkce

$$f(x,y) = \arcsin\,(2x-y) + \arccos\,(x-2y)\,.$$

Napište a zdůvodněte, které z následujících vlastností $\mathcal{D}(f)$ má a které nemá: otevřená, uzavřená, souvislá, konvexní, omezená. Určete hranici $\mathcal{D}(f)$. Je funkce $f(x,y)$ na svém definičním oboru omezená?

Maple:

```
> yD:=2*xD+1;
```

$$yD := 0.3333333334$$

```
> a1:=contourplot(arcsin(2*x-y)+arccos(x-2*y),x=-1.5..1.5,
y=-1..1,axes=normal,grid=[50,50],filled=true, coloring=[yellow,green]):
> a2:=implicitplot(0.5*(x-1)=y,x=-1.5..1.5,
y=-2..2,axes=normal,grid=[50,50],color=black):
> a3:=implicitplot(2*x+1=y,x=-1.5..1.5,
y=-2..2,axes=normal,grid=[50,50],color=black):
> a4:=implicitplot(2*x-1=y,x=-1.5..1.5,
y=-2..2,axes=normal,grid=[50,50],color=black):
> a5:=implicitplot(0.5*(x+1)=y,x=-1.5..1.5,
y=-2..2,axes=normal,grid=[50,50],color=black):
> a6:=PLOT(POINTS([-1,-1],[1/3,-1/3],[1,1],[-1/3,1/3], SYMBOL(BOX)),
TEXT([-1,-1],‘‘ A‘‘,ALIGNBELOW,ALIGNRIGHT), TEXT([1/3,-1/3],‘‘
B‘‘,ALIGNBELOW,ALIGNRIGHT), TEXT([1,1],‘‘ C‘‘,ALIGNBELOW,ALIGNRIGHT),
TEXT([-1/3,1/3],‘‘ D‘‘,ALIGNBELOW,ALIGNRIGHT)):
> a7:=PLOT(CURVES([[-1,-1],[1/3,-1/3],[1,1],[-1/3,1/3],
[-1,-1]],THICKNESS(4),COLOR(RGB, .5607, .7372, 0.0))):
```

Další

Příklad 5.1.1

Určete a nakreslete definiční obor funkce

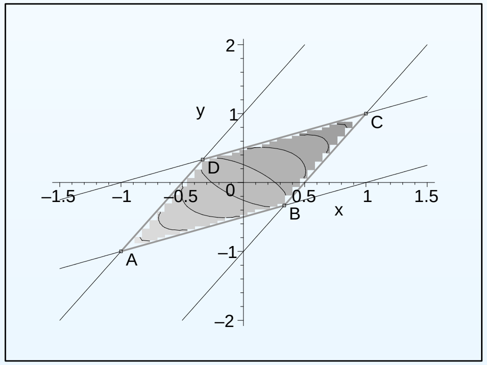
$$f(x,y) = \arcsin(2x-y) + \arccos(x-2y)\,.$$

Napište a zdůvodněte, které z následujících vlastností $\mathcal{D}(f)$ má a které nemá: otevřená, uzavřená, souvislá, konvexní, omezená. Určete hranici $\mathcal{D}(f)$. Je funkce $f(x,y)$ na svém definičním oboru omezená?

Maple:

Nakreslení celého definičního oboru:

```
> display({a1,a2,a3,a4,a5,a6,a7});
```



Zpět

Příklad 5.1.1

Určete a nakreslete definiční obor funkce

$$f(x, y) = \arcsin(2x - y) + \arccos(x - 2y)\,.$$

Napište a zdůvodněte, které z následujících vlastností $\mathcal{D}(f)$ má a které nemá: otevřená, uzavřená, souvislá, konvexní, omezená. Určete hranici $\mathcal{D}(f)$. Je funkce $f(x, y)$ na svém definičním oboru omezená?

Mathematica:

f[x_, y_] = ArcSin[2x − y] + ArcCos[x − 2y];

Simplify[−1<=2x − y]

$y \leq 1 + 2x$

<< Algebra`InequalitySolve`

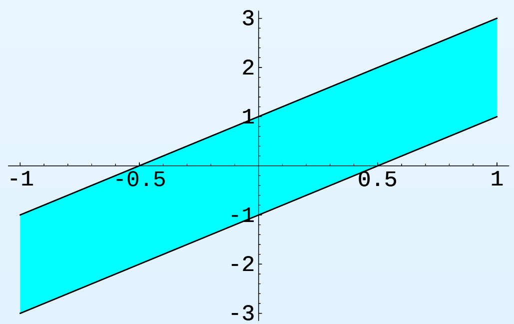
Určení definičního oboru funkce $\arcsin(2x - y)$.

InequalitySolve[−1<=2x − y ≤ 1, y]

$-1 + 2x \leq y \leq 1 + 2x$

<< Graphics`FilledPlot`

g1 = FilledPlot[{−1 + 2x, 1 + 2x}, {x, −1, 1}];



Další

Příklad 5.1.1

Určete a nakreslete definiční obor funkce

$$f(x,y) = \arcsin\,(2x-y) + \arccos\,(x-2y)\,.$$

Napište a zdůvodněte, které z následujících vlastností $\mathcal{D}(f)$ má a které nemá: otevřená, uzavřená, souvislá, konvexní, omezená. Určete hranici $\mathcal{D}(f)$. Je funkce $f(x,y)$ na svém definičním oboru omezená?

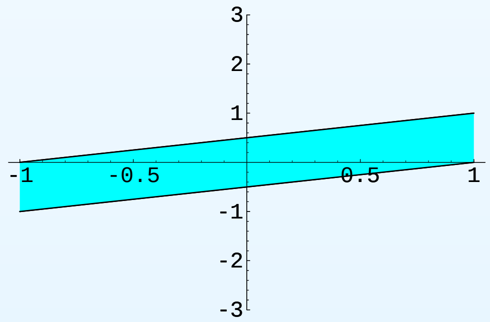
Mathematica:

Určení definičního oboru funkce $\arccos(x-2y)$.

$\mathbf{InequalitySolve[-1<=x-2y \leq 1, y]}$

$-\frac{1}{2} + \frac{x}{2} \leq y \leq \frac{1}{2} + \frac{x}{2}$

$\mathbf{g2 = FilledPlot\left[\left\{-\frac{1}{2}+\frac{x}{2}, +\frac{1}{2}+\frac{x}{2}\right\}, \{x,-1,1\}, PlotRange \to \{-3,3\}\right];}$



Určení definičního oboru funkce $f(x,y)$.

$\mathbf{Solve\left[1+2x==\frac{1}{2}+\frac{x}{2}, x\right]}$
$\mathbf{Solve\left[1+2x==-\frac{1}{2}+\frac{x}{2}, x\right]}$

Další

Příklad 5.1.1

Určete a nakreslete definiční obor funkce

$$f(x,y) = \arcsin\,(2x-y) + \arccos\,(x-2y)\,.$$

Napište a zdůvodněte, které z následujících vlastností $\mathcal{D}(f)$ má a které nemá: otevřená, uzavřená, souvislá, konvexní, omezená. Určete hranici $\mathcal{D}(f)$. Je funkce $f(x,y)$ na svém definičním oboru omezená?

Mathematica:

$\mathbf{Solve}\left[-1+2x==-\frac{1}{2}+\frac{x}{2},x\right]$
$\mathbf{Solve}\left[-1+2x==\frac{1}{2}+\frac{x}{2},x\right]$

$\left\{\left\{x\to-\frac{1}{3}\right\}\right\}$

$\{\{x\to-1\}\}$

$\left\{\left\{x\to\frac{1}{3}\right\}\right\}$

$\{\{x\to1\}\}$

Definiční obor je kosodélník $A_1B_1C_1D_1$

$\mathbf{B1=\{x,1+2x\}/.\left\{x\to-\frac{1}{3}\right\};}$
$\mathbf{A1=\{x,1+2x\}/.\{x\to-1\};}$
$\mathbf{D1=\{x,-1+2x\}/.\left\{x\to\frac{1}{3}\right\};}$
$\mathbf{C1=\{x,-1+2x\}/.\{x\to1\};}$
$\mathbf{lichob=\{A1,B1,C1,D1\}}$

$\left\{\{-1,-1\},\left\{-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right\},\{1,1\},\left\{\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right\}\right\}$

r1 = Graphics[{RGBColor[0, 1, 0], Polygon[lichob]}];

Zakreslíme si množinu všech bodů definičního oboru:

Další

Příklad 5.1.1

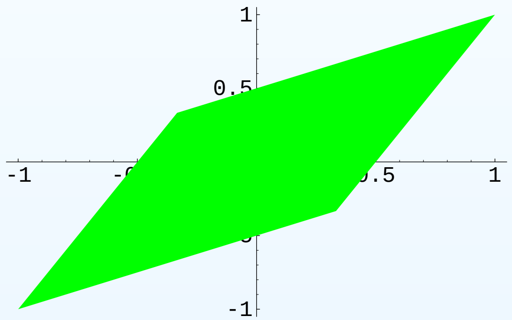
Určete a nakreslete definiční obor funkce

$$f(x, y) = \arcsin\,(2x - y) + \arccos\,(x - 2y)\,.$$

Napište a zdůvodněte, které z následujících vlastností $\mathcal{D}(f)$ má a které nemá: otevřená, uzavřená, souvislá, konvexní, omezená. Určete hranici $\mathcal{D}(f)$. Je funkce $f(x, y)$ na svém definičním oboru omezená?

Mathematica:

Show[r1, Axes → True];



Zpět

Příklad 5.1.2

Určete a nakreslete definiční obor funkce

$$f(x, y) = \ln \frac{x^2}{2x - y},$$

určete jeho hranici a nakreslete vrstevnici, která prochází bodem $A = (1, 1)$.

? Zpět

Příklad 5.1.2

Určete a nakreslete definiční obor funkce

$$f(x,y) = \ln \frac{x^2}{2x-y},$$

určete jeho hranici a nakreslete vrstevnici, která prochází bodem $A = (1,1)$.

Výsledek:

$$\mathcal{D}(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x \neq 0,\ y < 2x\}.$$

$$\mathcal{H} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x = 0,\ y < 0\}\ \cup\ \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ y = 2x\}.$$

Bodem A prochází $0-$vrstevnice $y = -x^2 + 2x,\ x \neq 0$.

Zpět

Příklad 5.1.2

Určete a nakreslete definiční obor funkce

$$f(x,y) = \ln \frac{x^2}{2x-y},$$

určete jeho hranici a nakreslete vrstevnici, která prochází bodem $A = (1,1)$.

Návod:

Nejprve určíme přirozený definiční obor funkce. Využijeme to, že známe definiční obor přirozeného logaritmu. Vrstevnici najdeme tak, že nejprve vypočteme příslušnou z_0 souřadnici bodu A a pak dopočteme odpovídající z_0-vrstevnici.

Zpět

Příklad 5.1.2

Určete a nakreslete definiční obor funkce

$$f(x,y) = \ln \frac{x^2}{2x-y},$$

určete jeho hranici a nakreslete vrstevnici, která prochází bodem $A = (1,1)$.

Řešení:

Definiční obor:
Argument logaritmu musí být kladné číslo, zlomek je kladný, je-li čitatel i jmenovatel kladný nebo záporný. Protože v čitateli je x^2 a $x^2 \geq 0\ \forall x \in \mathbb{R}$, musíme vyloučit $x = 0$ a požadovat, aby $2x - y > 0$. Tedy

$$\frac{x^2}{2x-y} > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x \neq 0 \ \wedge \ y < 2x \quad \Longrightarrow$$

$$\mathcal{D}(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x \neq 0,\ y < 2x\}.$$

Hranice definičního oboru je tvořena přímkou $y = 2x$ a zápornou částí osy y:

$$\mathcal{H} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x = 0,\ y < 0\} \ \cup\ \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ y = 2x\}.$$

Obrázek je nakreslen v části Maple.
Vrstevnice:
Vrstevnice grafu funkce je křivka v rovině xy, kterou dostaneme tak, že provedeme řez grafu funkce rovinou $z = z_0$ a křivku, kterou tak dostaneme, promítneme do roviny xy. Známe-li bod na vrstevnici, musíme nejprve spočítat na jaké vrstevnici daný bod leží, tj. jakou má zetovou souřadnici z_0. V našem případě dostaneme:

$$A = (1,1): \quad z_0 = \ln \frac{1^2}{2-1} \quad \Longrightarrow \quad z_0 = 0.$$

Další

Příklad 5.1.2

Určete a nakreslete definiční obor funkce

$$f(x, y) = \ln \frac{x^2}{2x - y},$$

určete jeho hranici a nakreslete vrstevnici, která prochází bodem $A = (1, 1)$.

Řešení:

Nyní pro $z_0 = 0$ najdeme rovnici vrstevnice, které odpovídá toto z_0:

$$\ln \frac{x^2}{2x - y} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{x^2}{2x - y} = 1 \quad \Longleftrightarrow y = -x^2 + 2x.$$

Vrstevnice je tedy parabola $y = -(x - 1)^2 + 1$. Pozor, nesmíme zapomenout, že bod $(0, 0)$, který leží na této parabole, nepatří do definičního oboru a musíme ho proto vynechat. Nulová vrstevnice $\mathcal{K}_A$, která prochází bodem A, je tedy

$$\mathcal{K}_A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ y = -x^2 + 2x,\ x \neq 0\}.$$

Je nakreslena v části Maple.

Zpět

Příklad 5.1.2

Určete a nakreslete definiční obor funkce

$$f(x,y) = \ln \frac{x^2}{2x-y},$$

určete jeho hranici a nakreslete vrstevnici, která prochází bodem $A = (1,1)$.

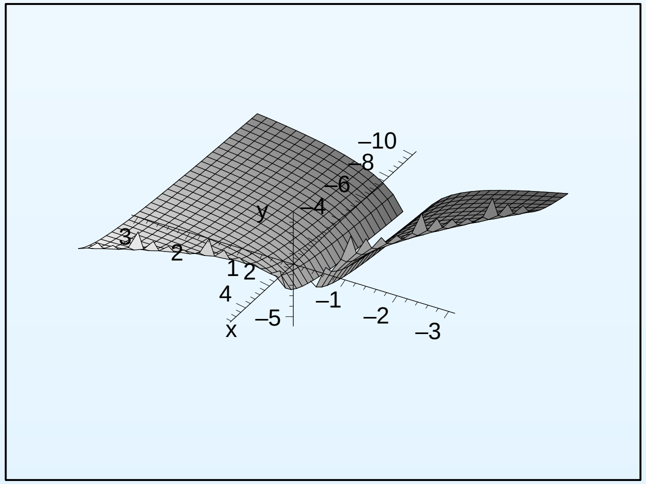
Maple:

```
> with(plots):
> f:=(x,y)->ln(xˆ2/(2*x-y));
```

$$f := (x,\ y) \to \ln(\frac{x^2}{2\,x-y})$$

Pro představu si nakreslíme graf dané funkce.

```
> plot3d(ln(xˆ2/(2*x-y)), x=-3..3,
y=-10..5,axes=normal,numpoints=1000,orientation=[120,30]);
```



Další

Příklad 5.1.2

Určete a nakreslete definiční obor funkce

$$f(x,y) = \ln \frac{x^2}{2x-y},$$

určete jeho hranici a nakreslete vrstevnici, která prochází bodem $A = (1,1)$.

Maple:

Vypočteme z-souřadnici bodu A

```
> f(1,1);
```

$$0$$

Bod A leží na 0-vrstevnici (Maple vypočte tuto křivku v parametrickém tvaru):

```
> solve(ln(x^2/(2*x-y))=0);
```

$$\{y = -x^2 + 2\,x,\ x = x\}$$

Nyní si nakreslíme definiční obor dané funkce. Silněji je znázorněna 0-vrstevnice. Hranici definičního oboru tvoří přímka $y = 2x$ a polopřímka $x = 0$, $y <= 0$. Hranice do definičního oboru nepatří.

```
> a1:=contourplot(ln(x^2/(2*x-y)),x=-3..0,y=-10..0,axes=normal,
grid=[60,60],filled=true,coloring=[yellow,green]):
> a2:=contourplot(ln(x^2/(2*x-y)),x=0..3,y=-10..5,axes=normal,
grid=[60,60],filled=true,coloring=[yellow,green]):
> a3:=contourplot(ln(x^2/(2*x-y)),x=-3..0,y=-10..5,axes=normal,
grid=[100,100],contours=[0],thickness=3,color=blue):
> a4:=contourplot(ln(x^2/(2*x-y)),x=0..3,y=-10..5,axes=normal,
grid=[100,100],contours=[0],thickness=3,color=blue):
```

Další

Příklad 5.1.2

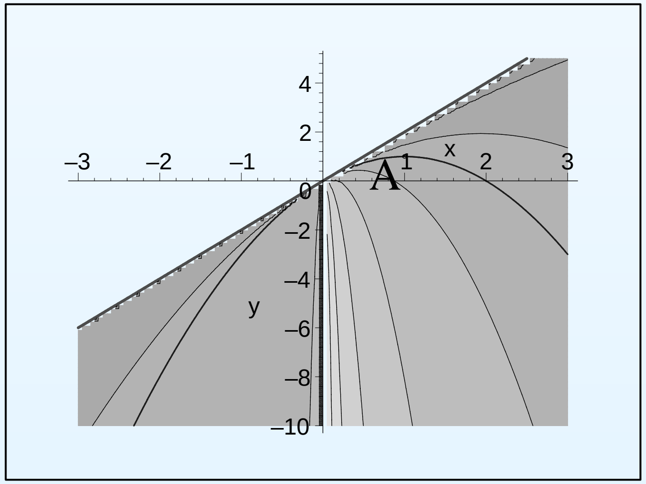
Určete a nakreslete definiční obor funkce

$$f(x, y) = \ln \frac{x^2}{2x - y},$$

určete jeho hranici a nakreslete vrstevnici, která prochází bodem $A = (1, 1)$.

Maple:

```
> a5:=implicitplot(x=0,x=-3..3,y=-10..0,axes=normal,thickness=2,
color=red):
> a6:=implicitplot(y=2*x,x=-3..3,y=-10..5,axes=normal,grid=[50,50],
thickness=5,color=red):
> a7:=PLOT(POINTS([1,1],SYMBOL(CIRCLE)), TEXT([1,1],''
A'',ALIGNBELOW,ALIGNLEFT,FONT(SYMBOL,20))):
> display({a1,a2,a3,a4,a5,a6,a7});
```




```
> b1:=plot(-x^2+2*x,x=-3..3,y=-4..4,color=blue):
```

Další

Příklad 5.1.2

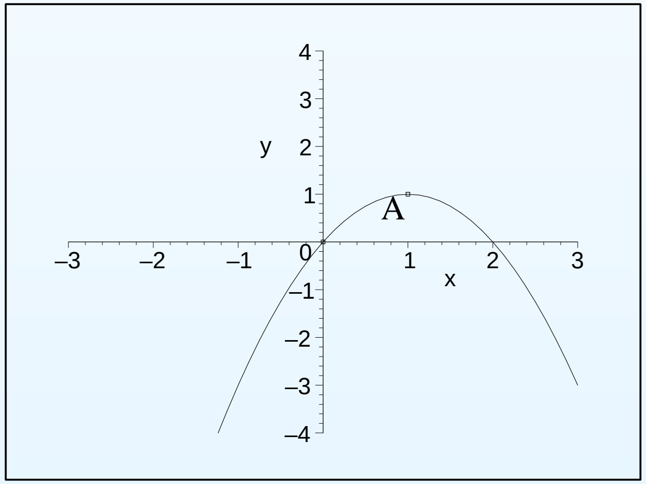
Určete a nakreslete definiční obor funkce

$$f(x,y) = \ln \frac{x^2}{2x-y},$$

určete jeho hranici a nakreslete vrstevnici, která prochází bodem $A = (1,1)$.

Maple:

```
> b2:=PLOT(POINTS([0,0],SYMBOL(BOX))):
> b3:=PLOT(POINTS([1,1],SYMBOL(BOX)), TEXT([1,1],''
A'',ALIGNBELOW,ALIGNLEFT,FONT(SYMBOL,15))):
> display({b1,b2,b3});
```



Zpět

Příklad 5.1.2

Určete a nakreslete definiční obor funkce

$$f(x,y) = \ln \frac{x^2}{2x-y},$$

určete jeho hranici a nakreslete vrstevnici, která prochází bodem $A = (1,1)$.

Mathematica:

$\boldsymbol{f[\mathrm{x\_}, \mathrm{y\_}] = \mathrm{Log}[(x\char`^2)/(2x-y)]}$

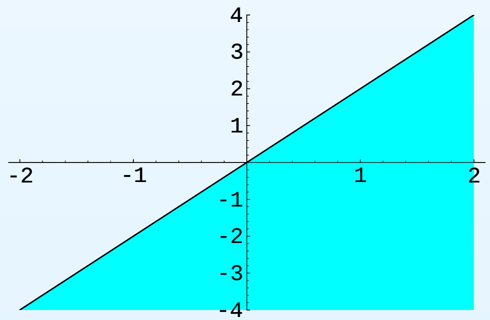
$\mathrm{Log}\left[\frac{x^2}{2x-y}\right]$

Určíme a nakreslíme definiční obor funkce:

$\boldsymbol{\mathrm{InequalitySolve}[(2x-y)>0, y]}$

$y < 2x$

$\boldsymbol{\mathrm{g1} = \mathrm{FilledPlot}[\{2x, -9999\}, \{x, -2, 2\}, \mathrm{PlotRange} \to \{-4, 4\}];}$



Další

Příklad 5.1.2

Určete a nakreslete definiční obor funkce

$$f(x,y) = \ln \frac{x^2}{2x-y},$$

určete jeho hranici a nakreslete vrstevnici, která prochází bodem $A = (1,1)$.

Mathematica:

Určíme $z-$tovou souřadnici vrstevnice:

$\mathbf{zA = \boldsymbol{f}[1,1]}$

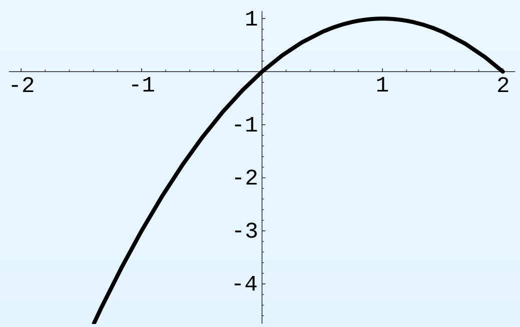
0

Vypočteme předpis pro vrstevnici a zakreslíme ji do definičního oboru:

$\mathbf{Solve[\boldsymbol{f}[\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}] == zA, \boldsymbol{y}]}$

$\{\{y \to 2x - x^2\}\}$

$\mathbf{g2 = Plot[2\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}\hat{}2, \{\boldsymbol{x}, -2, 2\}, PlotStyle \to \{Thickness[0.008]\}];}$



Další

Příklad 5.1.2

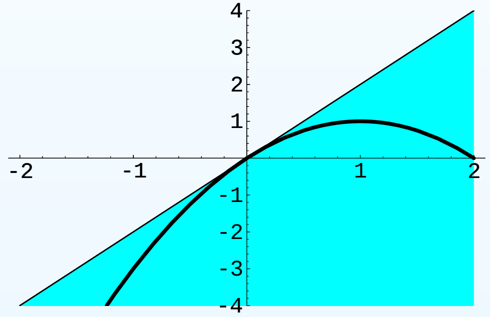
Určete a nakreslete definiční obor funkce

$$f(x,y) = \ln \frac{x^2}{2x-y},$$

určete jeho hranici a nakreslete vrstevnici, která prochází bodem $A = (1,1)$.

Mathematica:

Show[{g1, g2}];



Zpět

Příklad 5.1.3

Najděte a nakreslete definiční obor funkce

$$f(x,y) = \sqrt{x - \sqrt{y}}.$$

Které vrstevnice procházejí body $A = (1,1),\ B = (5,1),\ C = (4,0)$? Nakreslete je do obrázku.

? Zpět

Příklad 5.1.3

Najděte a nakreslete definiční obor funkce

$$f(x,y)=\sqrt{x-\sqrt{y}}.$$

Které vrstevnice procházejí body $A=(1,1),\ B=(5,1),\ C=(4,0)$? Nakreslete je do obrázku.

Výsledek:

$$\mathcal{D}(f)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x\geq\sqrt{y},\ y\geq 0\}.$$

Bodem A prochází $0-$vrstevnice $y=x^2,\ x\geq 0$;
body B a C prochází $2-$vrstevnice $y=(x-4)^2,\ x\geq 4$.

Zpět

Příklad 5.1.3

Najděte a nakreslete definiční obor funkce

$$f(x,y) = \sqrt{x - \sqrt{y}}.$$

Které vrstevnice procházejí body $A = (1,1),\ B = (5,1),\ C = (4,0)$? Nakreslete je do obrázku.

Návod:

Nejprve určíme přirozený definiční obor funkce. Využijeme to, že známe definiční obor odmocniny. Vrstevnice najdeme tak, že nejprve vypočteme příslušnou z_0 souřadnici každého bodu a pak dopočteme odpovídající z_0-vrstevnici.

Zpět

Příklad 5.1.3

Najděte a nakreslete definiční obor funkce

$$f(x,y) = \sqrt{x - \sqrt{y}}.$$

Které vrstevnice procházejí body $A = (1,1)$, $B = (5,1)$, $C = (4,0)$? Nakreslete je do obrázku.

Řešení:

Definiční obor:
Pod odmocninou musí být nezáporné číslo, tj.

$$y \geq 0 \quad \wedge \quad x - \sqrt{y} \;\geq\; 0 \quad \Longrightarrow$$

$$D(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\; x \geq \sqrt{y},\; y \geq 0\}.$$

Obrázek je nakreslen v části Maple.
Vrstevnice:
Vrstevnice grafu funkce je křivka v rovině xy, kterou dostaneme tak, že provedeme řez grafu funkce rovinou $z = z_0$ a křivku, kterou tak dostaneme, promítneme do roviny xy. Známe-li bod na vrstevnici, musíme nejprve spočítat na jaké vrstevnici daný bod leží, tj. jakou má zetovou souřadnici z_0. V našem případě dostaneme:

$$\begin{array}{llll}
\text{Bod A=(1,1):} & z_0 = \sqrt{1 - \sqrt{1}} & \Longrightarrow & z_0 = 0 \\
\text{Bod B=(5,1):} & z_0 = \sqrt{5 - \sqrt{1}} & \Longrightarrow & z_0 = 2 \\
\text{Bod C=(4,0):} & z_0 = \sqrt{4 - \sqrt{0}} & \Longrightarrow & z_0 = 2
\end{array}$$

Další

Příklad 5.1.3

Najděte a nakreslete definiční obor funkce

$$f(x,y) = \sqrt{x - \sqrt{y}}.$$

Které vrstevnice procházejí body $A = (1,1),\ B = (5,1),\ C = (4,0)$? Nakreslete je do obrázku.

Řešení:

Nyní pro vypočtená z_0 najdeme rovnici křivky = vrstevnice, které odpovídá toto z_0.

$$z_0 = 0: \quad \begin{aligned} 0 &= \sqrt{x - \sqrt{y}} \\ x - \sqrt{y} &= 0 \\ 0 \le \sqrt{y} &= x \\ y = x^2&,\ x \ge 0 \end{aligned} \qquad \mathcal{K}_A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ y = x^2 \wedge x \ge 0\}$$

$$z_0 = 2: \quad \begin{aligned} 2 &= \sqrt{x - \sqrt{y}} \\ x - \sqrt{y} &= 4 \\ 0 \le \sqrt{y} &= x - 4 \\ y = (x-4)^2&,\ x \ge 4 \end{aligned} \qquad \mathcal{K}_{B,C} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ y = (x-4)^2 \wedge x \ge 4\}$$

Nulová vrstevnice $\mathcal{K}_A$, která prochází bodem A, i 2−vrstevnice $K_{B,C}$, která prochází body $B,\ C$ jsou zakresleny do obrázku v části Maple.

Zpět

Příklad 5.1.3

Najděte a nakreslete definiční obor funkce

$$f(x,y) = \sqrt{x - \sqrt{y}}.$$

Které vrstevnice procházejí body $A = (1,1)$, $B = (5,1)$, $C = (4,0)$? Nakreslete je do obrázku.

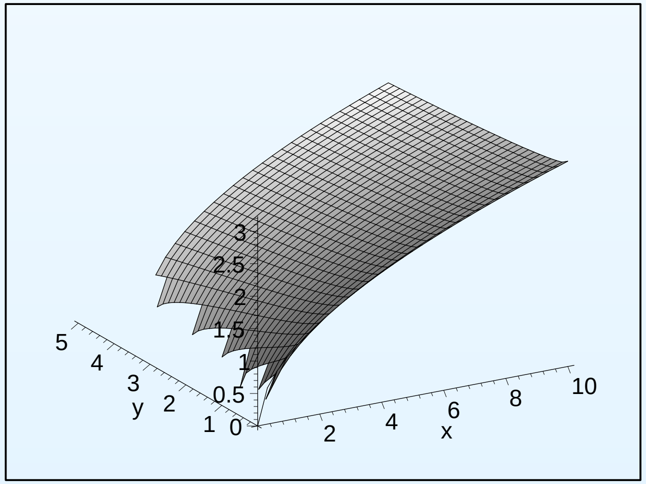
Maple:

```
> with(plots):
> f:=(x,y)->sqrt(x-sqrt(y));
```

$$f := (x,\ y) \to \sqrt{x - \sqrt{y}}$$

Pro představu si nakreslíme graf dané funkce.

```
> plot3d(sqrt(x-sqrt(y)), x=0..10,
y=0..5,axes=normal,numpoints=1000,orientation=[240,60]);
```



Vypočteme z-souřadnice bodů A,B,C

Další

Příklad 5.1.3

Najděte a nakreslete definiční obor funkce

$$f(x,y) = \sqrt{x - \sqrt{y}}.$$

Které vrstevnice procházejí body $A = (1,1)$, $B = (5,1)$, $C = (4,0)$? Nakreslete je do obrázku.

Maple:

```
> f(1,1);
```

$$0$$

```
> f(5,1);
```

$$2$$

```
> f(4,0);
```

$$2$$

Bod A leží na 0-vrstevnici (Maple vypočte tuto křivku v parametrickém tvaru):

```
> solve(sqrt(x-sqrt(y))=0);
```

$$\{y = y,\ x = \sqrt{y}\}$$

Body B,C leží na 2-vrstevnici (opět v parametrickém tvaru):

```
> solve(sqrt(x-sqrt(y))=2);
```

$$\{y = (x-4)^2,\ x = x\}$$

Nyní si nakreslíme definiční obor dané funkce. Silněji jsou znázorněny obě vrstevnice. Nulová vrstevnice a kladná část osy x tvoří hranici definičního oboru a patří do něj.

```
> a1:=contourplot(sqrt(x-sqrt(y)),x=0..8,y=0..5,axes=boxed,grid=[50,50]
,filled=true,coloring=[yellow,green]):
```

Další

Příklad 5.1.3

Najděte a nakreslete definiční obor funkce

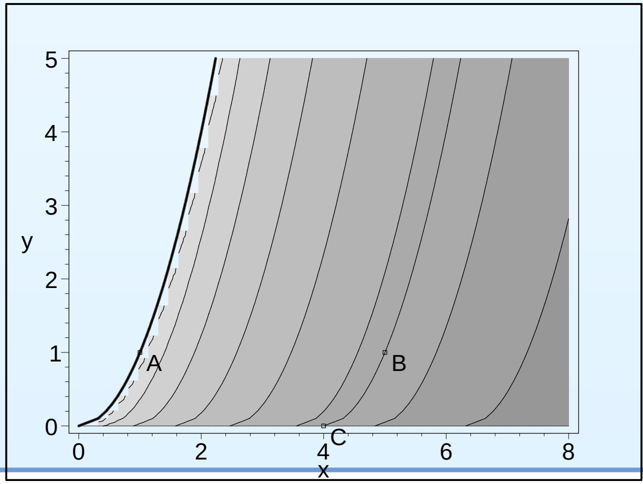
$$f(x,y) = \sqrt{x - \sqrt{y}}.$$

Které vrstevnice procházejí body $A = (1,1)$, $B = (5,1)$, $C = (4,0)$? Nakreslete je do obrázku.

Maple:

```
> a2:=contourplot(sqrt(x-sqrt(y)),x=0..8,y=0..5,axes=boxed,grid=[50,50]
,contours=[2],thickness=2,color=black):
> a3:=implicitplot(x=sqrt(y),x=0..8,y=0..5,axes=boxed,grid=[50,50],thic
kness=3,color=black):
> a4:=implicitplot(y=0,x=0..8,y=0..5,axes=boxed,thickness=2,color=red):

> a5:=implicitplot(x=sqrt(y),x=0..8,y=0..5,axes=boxed,grid=[50,50],thic
kness=5,color=red):
> a6:=PLOT(POINTS([1,1],[5,1],[4,0],SYMBOL(BOX)), TEXT([1,1],''
A'',ALIGNBELOW,ALIGNRIGHT), TEXT([5,1],'' B'',ALIGNBELOW,ALIGNRIGHT),
TEXT([4,0],'' C'',ALIGNBELOW,ALIGNRIGHT)):
> display({a1,a2,a3,a4,a5,a6});
```



Zpět

Příklad 5.1.3

Najděte a nakreslete definiční obor funkce

$$f(x,y)=\sqrt{x-\sqrt{y}}.$$

Které vrstevnice procházejí body $A=(1,1),\ B=(5,1),\ C=(4,0)$? Nakreslete je do obrázku.

Mathematica:

$\boldsymbol{f[\mathrm{x\_}, \mathrm{y\_}] = \mathrm{Sqrt}[x - \mathrm{Sqrt}[y]]}$

$\sqrt{x-\sqrt{y}}$

Určení a nakreslení definičního oboru:

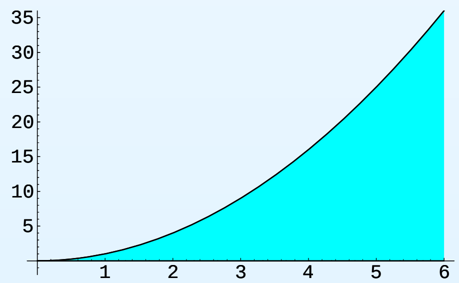
$\boldsymbol{\mathrm{InequalitySolve}[x - \mathrm{Sqrt}[y]{>}{=}0, x]}$

$x \geq \sqrt{y}$

$\boldsymbol{\mathrm{InequalitySolve}\left[(x)\hat{\ }2 \geq \left(\sqrt{y}\right)\hat{\ }2, y\right]}$

$y \leq x^2$

$\boldsymbol{\mathrm{g1} = \mathrm{FilledPlot}[\{x\hat{\ }2, 0\}, \{x, 0, 6\}, \mathrm{PlotRange} \to \{-2, 36\}];}$



Další

Příklad 5.1.3

Najděte a nakreslete definiční obor funkce

$$f(x,y)=\sqrt{x-\sqrt{y}}.$$

Které vrstevnice procházejí body $A=(1,1)$, $B=(5,1)$, $C=(4,0)$? Nakreslete je do obrázku.

Mathematica:

Určení a nakreslení vrstevnic:

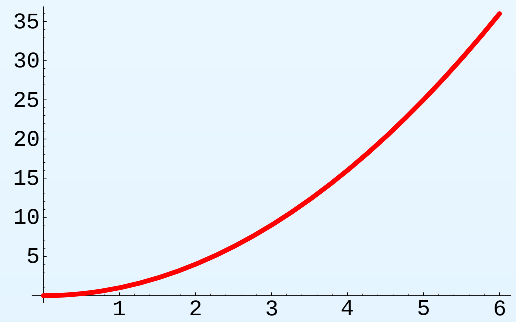
$\mathbf{zA = \boldsymbol{f}[1,1]}$

0

$\mathbf{Solve[\boldsymbol{f}[\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}] == zA, \boldsymbol{y}]}$

$\{\{y\to x^2\}\}$

$\mathbf{g2 = Plot[\boldsymbol{x}\hat{}2, \{\boldsymbol{x}, 0, 6\},}$
$\mathbf{PlotStyle \to \{Thickness[0.01], RGBColor[1,0,0]\}];}$



$\mathbf{zB = \boldsymbol{f}[5,1]}$

2

Další

Příklad 5.1.3

Najděte a nakreslete definiční obor funkce

$$f(x, y) = \sqrt{x - \sqrt{y}}.$$

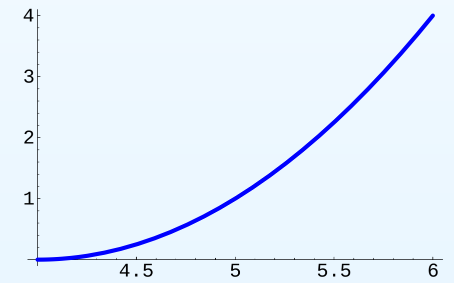
Které vrstevnice procházejí body $A = (1, 1)$, $B = (5, 1)$, $C = (4, 0)$? Nakreslete je do obrázku.

Mathematica:

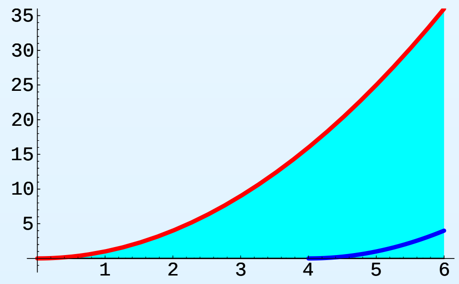
Solve[f[x, y] == zB, y]

$\{\{y \to 16 - 8x + x^2\}\}$

g3 = Plot[16 − 8x + x^2, {x, 2, 3},
PlotStyle → {Thickness[0.01], RGBColor[0, 0, 1]}];



Show[{g1, g2, g3}];



Zpět

Graf funkce dvou proměnných

- Příklad 5.2.1 Vyšetřete graf funkce

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}\,,$$

  metodou řezu.
- Příklad 5.2.2 Určete vrstevnice funkce $f(x, y) = \frac{1}{x^2+y^2+1}$ pro dané $z_0 = \frac{1}{2},\ \frac{1}{5}$.

Zpět

Příklad 5.2.1

Vyšetřete graf funkce

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}\,,$$

metodou řezu.

? Zpět

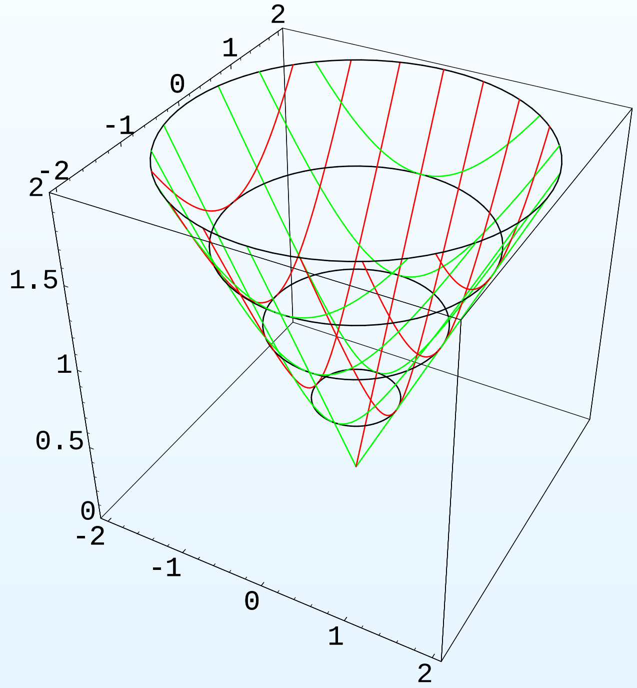
Příklad 5.2.1

Vyšetřete graf funkce

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}\,,$$

metodou řezu.

Výsledek:



Zpět

Příklad 5.2.1

Vyšetřete graf funkce

$$f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}\,,$$

metodou řezu.

Návod:

Nakreslíme si postupně řezy rovinami $z = z_0$, $y = y_0$, $x = x_0$, pro různé hodnoty konstant x_0 , x_0 , z_0 .

Zpět

Příklad 5.2.1

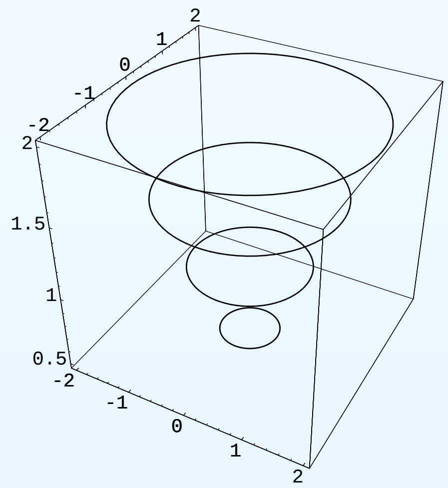
Vyšetřete graf funkce

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}\,,$$

metodou řezu.

Řešení:

Nakreslíme si nejdříve řezy rovinami $z = z_0$ pro $z_0 = 0.5, 1.0, 1.5, 2.0$.
V rovině $z_0 = 0.5$ dostanu kružnici popsanou rovnicí $x^2 + y^2 = 0.25$.
V rovině $z_0 = 1.0$ dostanu kružnici popsanou rovnicí $x^2 + y^2 = 1.0$.
V rovině $z_0 = 1.5$ dostanu kružnici popsanou rovnicí $x^2 + y^2 = 2.25$.
V rovině $z_0 = 0.5$ dostanu kružnici popsanou rovnicí $x^2 + y^2 = 4$.
Všechny řezy si zakreslíme.



Další

Příklad 5.2.1

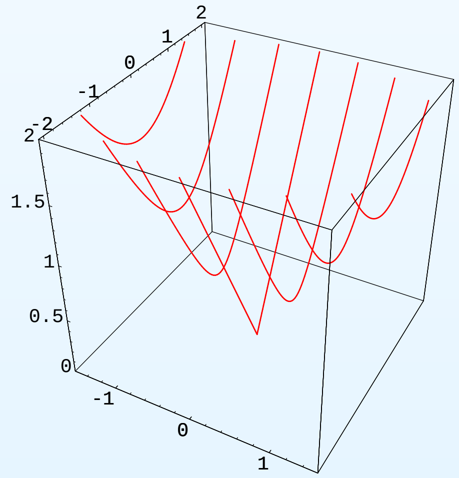
Vyšetřete graf funkce

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}\,,$$

metodou řezu.

Řešení:

Nyní si nakreslíme řezy rovinami $y = y_0$ pro $y_0 = 0.0, \pm 0.5, \pm 1.0, \pm 1.5, \pm 2.0$.
V rovinách $y_0 = \pm 0.0$ dostanu křivky popsané funkcí $z = |x|$.
V rovinách $y_0 = \pm 0.5$ dostanu hyperboly popsané funkcí $z = \sqrt{0.25 + x^2}$.
V rovinách $y_0 = \pm 1.0$ dostanu hyperboly popsané funkcí $z = \sqrt{1.0 + x^2}$.
V rovinách $y_0 = \pm 1.5$ dostanu hyperboly popsané funkcí $z = \sqrt{2.25 + x^2}$.
V rovinách $y_0 = \pm 2.0$ dostanu hyperboly popsané funkcí $z = \sqrt{4.0 + x^2}$.
Všechny řezy si zakreslíme.



Další

Příklad 5.2.1

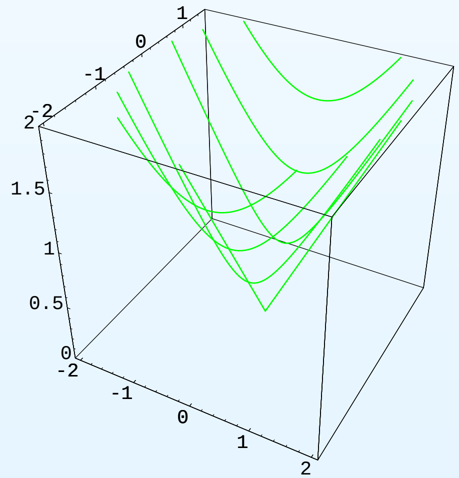
Vyšetřete graf funkce

$$f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}\,,$$

metodou řezu.

Řešení:

Nakonec si nakreslíme řezy rovinami $x = x_0$ pro $x_0 = 0.0, \pm 0.5, \pm 1.0, \pm 1.5, \pm 2.0$.
V rovinách $x_0 = \pm 0.0$ dostanu křivky popsané funkcí $z = |y|$.
V rovinách $x_0 = \pm 0.5$ dostanu hyperboly popsané funkcí $z = \sqrt{0.25 + y^2}$.
V rovinách $y_0 = \pm 1.0$ dostanu hyperboly popsané funkcí $z = \sqrt{1.0 + y^2}$.
V rovinách $y_0 = \pm 1.5$ dostanu hyperboly popsané funkcí $z = \sqrt{2.25 + y^2}$.
V rovinách $y_0 = \pm 2.0$ dostanu hyperboly popsané funkcí $z = \sqrt{4.0 + y^2}$.
Všechny řezy si zakreslíme.



Další

Příklad 5.2.1

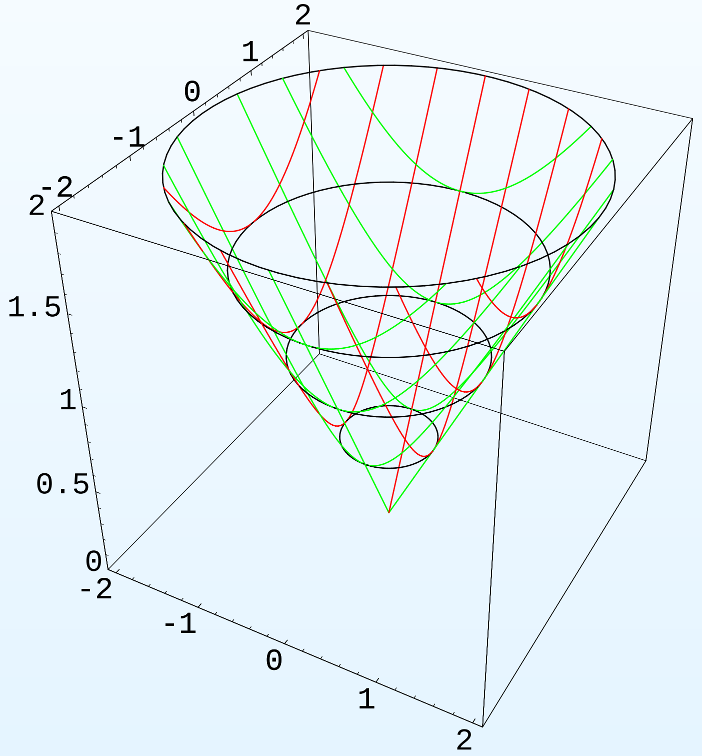
Vyšetřete graf funkce

$$f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}\,,$$

metodou řezu.

Řešení:

Abychom dostali přehled o grafu naší funkce, zakreslíme všechny řezy do jednoho obrázku



Zpět

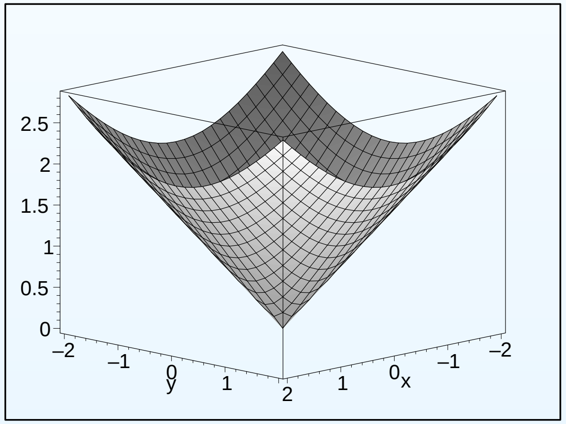
Příklad 5.2.1

Vyšetřete graf funkce
$$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}\,,$$
metodou řezu.

Maple:

Graf nebudeme vyšetřovat metodou řezu, ale nakreslíme si ho přímo.

```
> plot3d(sqrt(x^2+y^2),x=-2..2,y=-2..2,axes='boxed',orientation=[45,75]
);
```



Zpět

Příklad 5.2.1

Vyšetřete graf funkce

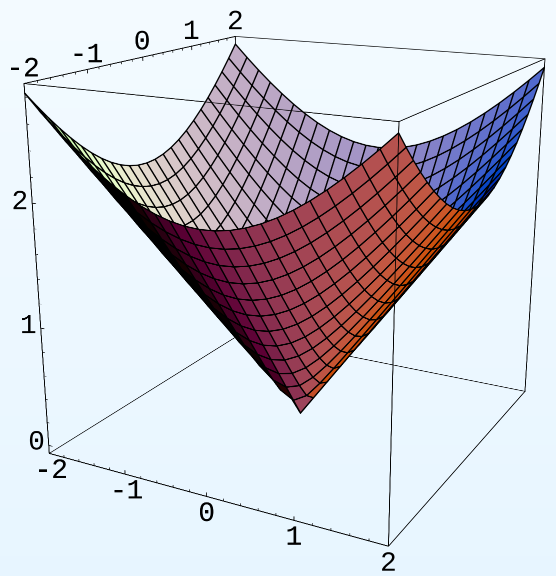
$$f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}\,,$$

metodou řezu.

Mathematica:

Graf nebudeme vyšetřovat metodou řezu, ale nakreslíme si ho přímo.

Plot3D[Sqrt[x^2 + y^2], {x, −2, 2}, {y, −2, 2},BoxRatios → {1, 1, 1}, ViewPoint->{1.5, −2.8, 1.0}];



Zpět

Příklad 5.2.2

Určete vrstevnice funkce $f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2+1}$ pro dané $z_0 = \frac{1}{2},\ \frac{1}{5}$.

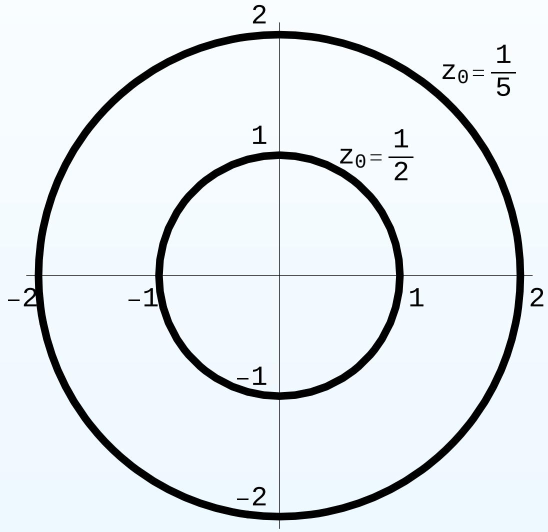
? Zpět

Příklad 5.2.2

Určete vrstevnice funkce $f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2+1}$ pro dané $z_0 = \frac{1}{2},\ \frac{1}{5}$.

Výsledek:

$\mathrm{D}(f) = \mathbb{R}^2$,



Zpět

Příklad 5.2.2

Určete vrstevnice funkce $f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2+1}$ pro dané $z_0 = \frac{1}{2},\ \frac{1}{5}$.

Návod:

Nakreslete křivky, jejíž body splňují rovnici:

a) $$\frac{1}{2} = \frac{1}{x^2+y^2+1}$$

b) $$\frac{1}{5} = \frac{1}{x^2+y^2+1}.$$

Zpět

Příklad 5.2.2

Určete vrstevnice funkce $f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2+1}$ pro dané $z_0 = \frac{1}{2},\ \frac{1}{5}$.

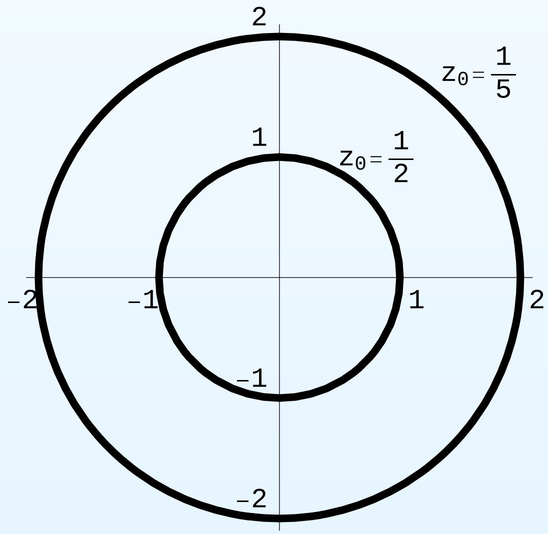
Řešení:

Nakreslíme křivky, jejíž body splnůjí rovnici:

a) $\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{x^2+y^2+1} \Rightarrow x^2 + y^2 = 1$

b) $\dfrac{1}{5} = \dfrac{1}{x^2+y^2+1} \Rightarrow x^2 + y^2 = 4.$

Vrstevnice jsou tedy kružnice o poloměru 1 a 2.



Zpět

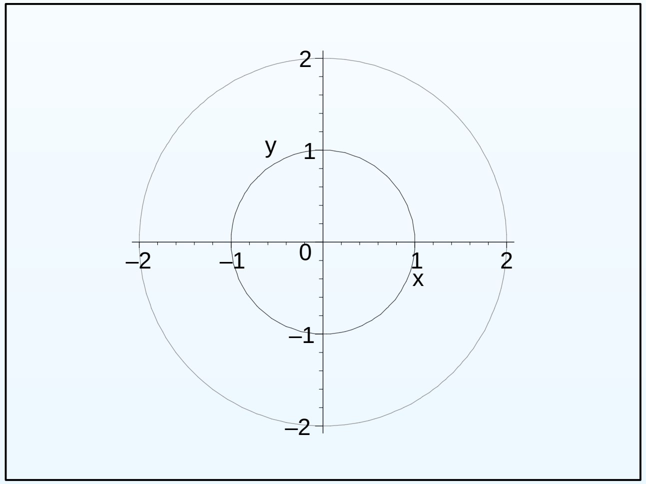
Příklad 5.2.2

Určete vrstevnice funkce $f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2+1}$ pro dané $z_0 = \frac{1}{2}, \frac{1}{5}$.

Maple:

Nakreslíme přímo vrstevnice pro $z_0 = \frac{1}{2}$ a $z_0 = \frac{1}{5}$.

```
> plots[contourplot](1/(x^2+y^2+1),x=-2..2,y=-2..2,contours =
[1/2,1/5],scaling=constrained);
```



Zpět

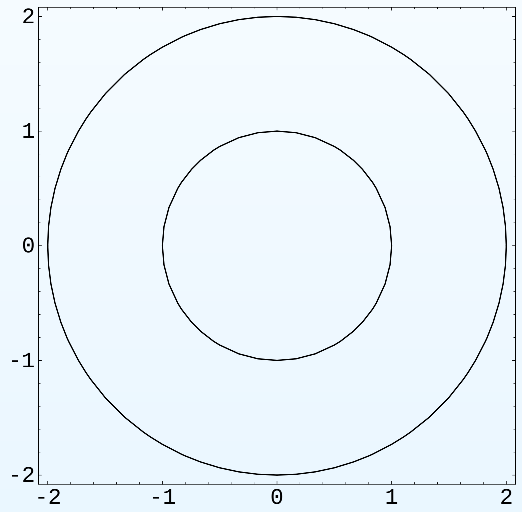
Příklad 5.2.2

Určete vrstevnice funkce $f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2+1}$ pro dané $z_0 = \frac{1}{2},\ \frac{1}{5}$.

Mathematica:

Nakreslíme přímo vrstevnice pro $z_0 = \frac{1}{2}$ a $z_0 = \frac{1}{5}$.

ContourPlot[1/(x^2 + y^2 + 1), {x, −2, 2}, {y, −2, 2},
Contours → {1/2, 1/5}, ContourShading → False];



Zpět

Limita funkce dvou proměnných

- Příklad 5.3.1 Vypočtěte $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2-\sqrt{x\,y+4}}{x\,y}$.
- Příklad 5.3.2 Vypočtěte $\lim\limits_{(x,y)\to(2,2)} \dfrac{x^4-y^4}{x^2-y^2}$.
- Příklad 5.3.3 Vypočtěte $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x\,y(x+y)}{x^2+y^2}$.
- Příklad 5.3.4 Vypočtěte $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{y}{x-y}$.

Zpět

Příklad 5.3.1

Vypočtěte $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2-\sqrt{x\,y+4}}{x\,y}$.

? Zpět

Příklad 5.3.1

Vypočtěte $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2-\sqrt{x\,y+4}}{x\,y}$.

Výsledek:

$-\dfrac{1}{4}$.

Zpět

Příklad 5.3.1

Vypočtěte $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2-\sqrt{x\,y+4}}{x\,y}$.

Návod:

Limita je typu „$\frac{0}{0}$“. Rozšíříme funkci výrazem $2+\sqrt{x\,y+4}$, upravíme a pak limitu vypočteme.

Zpět

Příklad 5.3.1

Vypočtěte $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2-\sqrt{x\,y+4}}{x\,y}$.

Řešení:

Limita je typu „$\frac{0}{0}$“. Rozšíříme funkci výrazem $2+\sqrt{x\,y+4}$.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2-\sqrt{x\,y+4}}{x\,y} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{-x\,y}{x\,y(2+\sqrt{x\,y+4})} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} -\frac{1}{2+\sqrt{x\,y+4}} = -\frac{1}{4}\,.$$

Zpět

Příklad 5.3.1

Vypočtěte $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2-\sqrt{x\,y+4}}{x\,y}$.

Maple:

S limitami to je v MAPLE horší. Často nám limitu nespočte.

```
> limit((2-sqrt(x*y+4))/(x*y),{x=0,y=0});
```

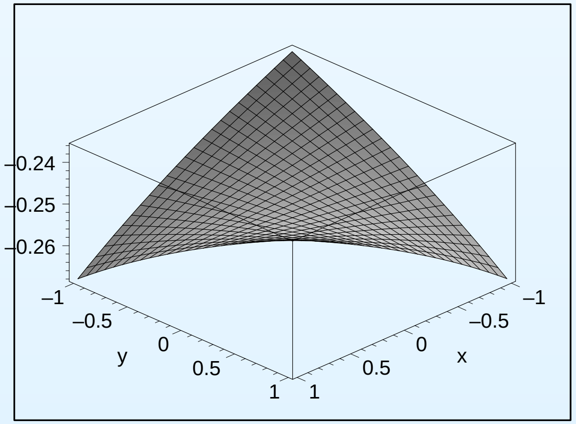
$$\mathrm{limit}\left(\frac{2-\sqrt{x\,y+4}}{x\,y},\ \{y=0,\ x=0\}\right)$$

```
> limit(expand((2-sqrt(x*y+4))*(2+sqrt(x*y+4)))/(x*y*(2+sqrt(x*y+4))),
{x=0,y=0});
```

$$\mathrm{limit}\left(-\frac{1}{2+\sqrt{x\,y+4}},\ \{y=0,\ x=0\}\right)$$

Zda limita existuje zjistíme z obrázku. Potom můžeme vypočítat limity postupně podle x a potom podle y.

```
> plot3d(expand((2-sqrt(x*y+4))*(2+sqrt(x*y+4)))/(x*y*(2+sqrt(x*y+4))),
x=-1..1,y=-1..1,axes=box);
```



Další

Příklad 5.3.1

Vypočtěte $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2-\sqrt{x\,y+4}}{x\,y}$.

Maple:

```
>   limit(limit((2-sqrt(x*y+4))/(x*y),x=0),y=0);
```

$$\frac{-1}{4}$$

Zpět

Příklad 5.3.1

Vypočtěte $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2-\sqrt{x\,y+4}}{x\,y}$.

Mathematica:

Nejdříve funkci upravíme:

Expand[(2 − Sqrt[xy + 4])(2 + Sqrt[xy + 4])]/(xy(2 + Sqrt[x ∗ y + 4]))

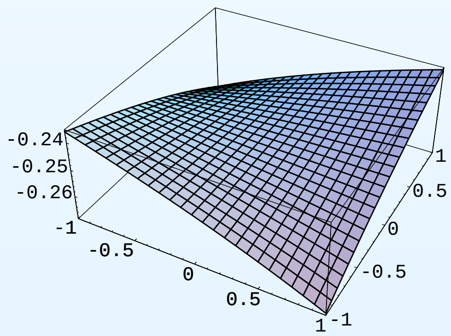
$-\frac{1}{2+\sqrt{4+x\,y}}$

f[x_, y_] = −1/(2 + (xy + 4)^(1/2))

$-\frac{1}{2+\sqrt{4+x\,y}}$

Ověříme si, zda limita existuje

Plot3D[f[x, y], {x, −1, 1}, {y, −1, 1}];



Další

Příklad 5.3.1

Vypočtěte $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2-\sqrt{x\,y+4}}{x\,y}$.

Mathematica:

Vypočteme limity postupně podle x a potom podle y.

Limit[Limit[*f*[*x*, *y*], *x* → 0], *y* → 0]

$-\frac{1}{4}$

Zpět

Příklad 5.3.2

Vypočtěte $\lim\limits_{(x,y)\to(2,2)} \dfrac{x^4 - y^4}{x^2 - y^2}$.

? Zpět

Příklad 5.3.2

Vypočtěte $\lim\limits_{(x,y)\to(2,2)} \dfrac{x^4 - y^4}{x^2 - y^2}$.

Výsledek:

8 .

Zpět

Příklad 5.3.2

Vypočtěte $\lim\limits_{(x,y)\to(2,2)} \dfrac{x^4 - y^4}{x^2 - y^2}$.

Návod:

Limita je typu „$\frac{0}{0}$“. Pokrátíme zlomek výrazem $x^2 - y^2$.

Zpět

Příklad 5.3.2

Vypočtěte $\lim\limits_{(x,y)\to(2,2)} \dfrac{x^4 - y^4}{x^2 - y^2}$.

Řešení:

Limita je typu „$\frac{0}{0}$“. Pokrátíme zlomek výrazem $x^2 - y^2$.

$$\lim_{(x,y)\to(2,2)} \frac{x^4 - y^4}{x^2 - y^2} = \lim_{(x,y)\to(2,2)} \frac{(x^2 - y^2)(x^2 + y^2)}{x^2 - y^2} = \lim_{(x,y)\to(2,2)} x^2 + y^2 = 8\,.$$

Zpět

Příklad 5.3.2

Vypočtěte $\lim\limits_{(x,y)\to(2,2)} \dfrac{x^4 - y^4}{x^2 - y^2}$.

Maple:

```
> limit((x^4-y^4)/(x^2-y^2),{x=2,y=2});
```

$$8$$

Zpět

Příklad 5.3.2

Vypočtěte $\lim\limits_{(x,y)\to(2,2)} \dfrac{x^4 - y^4}{x^2 - y^2}$.

Mathematica:

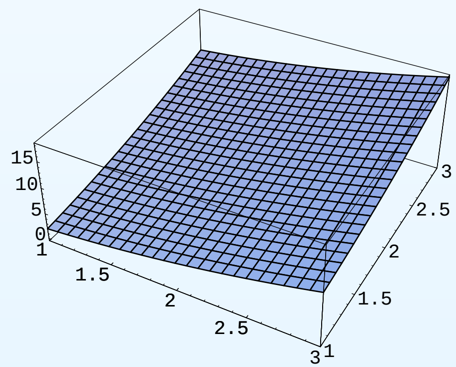
Nejdříve funkci upravíme:

$\boldsymbol{f[x\_, y\_] = \mathrm{Simplify}[(x\wedge 4 - y\wedge 4)/(x\wedge 2 - y\wedge 2)]}$

$x^2 + y^2$

Ověříme si, zda limita existuje

$\boldsymbol{\mathrm{Plot3D}[f[x, y], \{x, 1, 3\}, \{y, 1, 3\}];}$



Vypočteme limity postupně podle x a potom podle y.

$\boldsymbol{\mathrm{Limit}[\mathrm{Limit}[f[x, y], x \to 2], y \to 2]}$

8

Zpět

Příklad 5.3.3

Vypočtěte $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x\,y(x+y)}{x^2+y^2}$.

? Zpět

Příklad 5.3.3

Vypočtěte $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x\,y(x+y)}{x^2+y^2}$.

Výsledek:

0 .

Zpět

Příklad 5.3.3

Vypočtěte $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\,y(x+y)}{x^2+y^2}$.

Návod:

Při výpočtu limity přejdeme k polárním souřadnicím

$$\begin{array}{rcl} x & = & r\,\cos t \\ y & = & r\,\sin t \quad r \in \langle 0, \infty\rangle\,,\ t \in \langle 0, \pi\rangle \end{array} .$$

Zpět

Příklad 5.3.3

Vypočtěte $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x\,y(x+y)}{x^2+y^2}$.

Řešení:

Při výpočtu limity přejdeme k polárním souřadnicím

$$\begin{aligned} x &= r\,\cos t \\ y &= r\,\sin t \quad r \in \langle 0,\infty\rangle\,,\; t \in \langle 0,\pi\rangle \end{aligned} .$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\,y(x+y)}{x^2+y^2} = \lim_{(r,t)\to(0,t)} \frac{r\,\cos t\, r\,\sin t(r\,\cos t\,+\,r\,\sin t)}{r^2} =$$

$$= \lim_{(r,t)\to(0,t)} r\,\cos t\,\sin t(\cos t\,+\,\sin t) = 0\,.$$

Zpět

Příklad 5.3.3

Vypočtěte $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x\,y(x+y)}{x^2+y^2}$.

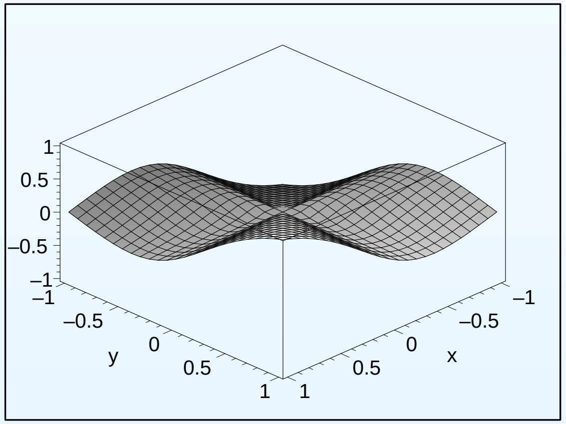
Maple:

```
>
>   limit(x*y*(x+y)/(x^2+y^2),{x=0,y=0});
```

$$\mathrm{limit}\left(\frac{x\,y\,(x+y)}{x^2+y^2},\ \{y=0,\ x=0\}\right)$$

Opět musíme zjistit, zda limita existuje a pak vypočítat limity postupně podle x a potom podle y.

```
>   plot3d(x*y*(x+y)/(x^2+y^2),x=-1..1,y=-1..1,axes=box);
```




```
>   limit(limit(x*y*(x+y)/(x^2+y^2),x=0),y=0);
```

$$0$$

Zpět

Příklad 5.3.3

Vypočtěte $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x\,y(x+y)}{x^2+y^2}$.

Mathematica:

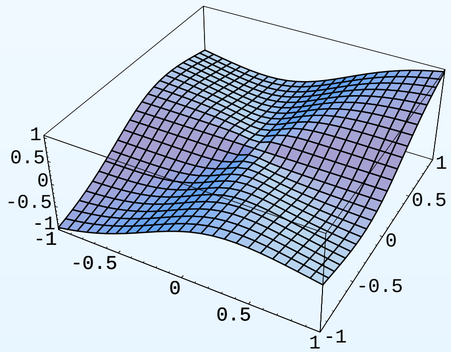
Nejdříve definujeme funkci:

f[x_, y_] = $xy(x+y)/(x$^2 + y^2)

$\frac{x\,y\,(x+y)}{x^2+y^2}$

Ověříme si, zda limita existuje

Plot3D[$f[x, y]$, {x, −1, 1}, {y, −1, 1}],



Vypočteme limity postupně podle x a potom podle y.

Limit[Limit[$f[x, y]$, $x \to 0$], $y \to 0$]

0

Zpět

Příklad 5.3.4

Vypočtěte $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{y}{x-y}$.

? Zpět

Příklad 5.3.4

Vypočtěte $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{y}{x-y}$.

Výsledek:

Limita neexistuje.

Zpět

Příklad 5.3.4

Vypočtěte $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{y}{x-y}$.

Návod:

Při výpočtu limity přejdeme k polárním souřadnicím

$$\begin{array}{lcl} x & = & r\,\cos t \\ y & = & r\,\sin t \quad r \in \langle 0, \infty\rangle\,,\ t \in \langle 0, \pi\rangle \end{array} \quad .$$

Zpět

Příklad 5.3.4

Vypočtěte $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{y}{x-y}$.

Řešení:

Při výpočtu limity přejdeme k polárním souřadnicím

$$\begin{aligned} x &= r\,\cos t \\ y &= r\,\sin t \quad r \in \langle 0, \infty\rangle\,,\; t \in \langle 0, \pi\rangle \end{aligned} \quad .$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y}{x-y} = \lim_{(r,t)\to(0,t)} \frac{r\,\sin t}{r\,\cos t\,-\,r\,\cos t} = \lim_{(r,t)\to(0,t)} \frac{\sin t}{\cos t\,-\,\cos t} = \frac{\sin t}{\cos t\,-\,\cos t}$$

Limita závisí na t, je pro každé t jiná. Limita neexistuje.

Zpět

Příklad 5.3.4

Vypočtěte $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{y}{x-y}$.

Maple:

```
> limit(y/(x-y),{x=0,y=0});
```

$$undefined$$

Zpět

Příklad 5.3.4

Vypočtěte $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{y}{x-y}$.

Mathematica:

Nejdříve definujeme funkci:

$\boldsymbol{f[\mathrm{x\_}, \mathrm{y\_}] = y/(x-y)}$

$\frac{y}{x-y}$

Spočteme limity podle x a y, potom podle y a x.

Limit[Limit[$f[x, y]$, $x \to 0$], $y \to 0$]==Limit[Limit[$f[x, y]$, $y \to 0$], $x \to 0$]

False

Limity jsou různé, původní limita tedy neexistuje.

Zpět

Derivace funkcí více proměnných

- Parciální derivace
- Derivace ve směru
- Derivování složených funkcí
- Taylorův polynom a totální diferenciál
- Newtonova metoda

Zpět

Parciální derivace

- **Příklad 6.1.1** Pomocí definice parciální derivace vypočtěte $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ a $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ funkce $f(x,y) = 2x + 3y^2$.
- **Příklad 6.1.2** Vypočtěte parciální derivace funkce $f(x,y) = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$.
- **Příklad 6.1.3** Vypočtěte parciální derivace 1. a 2. řádu funkce $f(x,y) = \ln(x - 2y)$.
- **Příklad 6.1.4** Vypočtěte gradient funkce $f(x,y,z) = 3\,x^2 + \mathrm{e}^{-xy^2} - z$ v bodě A = [0, 2 , 0]
- **Příklad 6.1.5** Objem kužele V je funkcí poloměru podstavy r a výšky kužele h . Vyjádřete parciální derivace $\frac{\partial V}{\partial r}$ a $\frac{\partial V}{\partial h}$. Co tyto derivace popisují?
- **Příklad 6.1.6** Ověřte, že funkce $u(x,t) = \mathrm{e}^{-a^2 t}\sin x$ je řešením následující rovnice, tzv. rovnice vedení tepla:
  $$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,, \quad t > 0\,, \quad a \in \mathbb{R}\,.$$

Zpět

Příklad 6.1.1

Pomocí definice parciální derivace vypočtěte $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ a $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ funkce $f(x, y) = 2x + 3y^2$.

? Zpět

Příklad 6.1.1

Pomocí definice parciální derivace vypočtěte $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ a $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ funkce $f(x,y) = 2x + 3y^2\,.$

Výsledek:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2\,, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 6y\,.$$

Zpět

Příklad 6.1.1

Pomocí definice parciální derivace vypočtěte $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ a $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ funkce $f(x,y) = 2x + 3y^2$.

Návod:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h}\,, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x,y+h) - f(x,y)}{h}\,.$$

Zpět

Příklad 6.1.1

Pomocí definice parciální derivace vypočtěte $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ a $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ funkce $f(x,y) = 2x + 3y^2$.

Řešení:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{\left(2(x+h) + 3y^2\right) - \left(2x + 3y^2\right)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2h}{h} = 2\,,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{\left(2x + 3(y+h)^2\right) - \left(2x + 3y^2\right)}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\left(2x + 3y^2 + 6yh + 3h^2\right) - 2x - 3y^2}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{6yh + 3h^2}{h} = \lim_{h\to 0}(6y + 3h) = 6y\,.$$

Zpět

Příklad 6.1.1

Pomocí definice parciální derivace vypočtěte $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ a $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ funkce $f(x,y) = 2x + 3y^2$.

Maple:

```
> f := (x,y) -> 2*x+3*y^2;
```

$$f := (x,\, y) \to 2\,x + 3\,y^2$$

```
> fx:=limit((f(x+h,y)-f(x,y))/h, h = 0);
```

$$fx := 2$$

```
> fy:=limit((f(x,y+h)-f(x,y))/h, h = 0);
```

$$fy := 6\,y$$

Porovnáme s výpočtem pomocí příkazu diff

```
> diff(f(x,y),x) ;
```

$$2$$

nebo pomocí příkazu D[1]

```
> D[1](f)(x,y);
```

$$2$$

Podobně pro proměnnou y:

```
> diff(f(x,y),y);
```

$$6\,y$$

Další

Příklad 6.1.1

Pomocí definice parciální derivace vypočtěte $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ a $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ funkce $f(x,y) = 2x + 3y^2$.

Maple:

nebo pomocí příkazu D[2]

```
> D[2](f)(x,y);
```

$$6\,y$$

Zpět

Příklad 6.1.1

Pomocí definice parciální derivace vypočtěte $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ a $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ funkce $f(x,y) = 2x + 3y^2$.

Mathematica:

$\boldsymbol{f[\mathbf{x\_}, \mathbf{y\_}] = 2\ x - 3y\hat{}2}$

$2x - 3y^2$

$\mathbf{Limit}[(\boldsymbol{f[x+h, y] - f[x,y])/h, h \to 0}]$

2

$\mathbf{Limit}[(\boldsymbol{f[x, y+h] - f[x,y])/h, h \to 0}]$

$-6y$

Porovnáme s výpočtem derivace pomocí příkazu D.

$\boldsymbol{D[f[x,y], x]}$

2

$\boldsymbol{D[f[x,y], y]}$

$-6y$

Zpět

Příklad 6.1.2

Vypočtěte parciální derivace funkce $f(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$.

Příklad 6.1.2

Vypočtěte parciální derivace funkce $f(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$.

Výsledek:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2}\,, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}\,, \quad \text{pro } x \neq 0\,.$$

Zpět

Příklad 6.1.2

Vypočtěte parciální derivace funkce $f(x,y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$.

Návod:

Parciální derivace lze počítat pouze v bodech náležejících do definičního oboru $D(f)$. Při výpočtu derivace $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ považujeme proměnnou y za konstantní. Obdobně vypočteme derivaci $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$.

Zpět

Příklad 6.1.2

Vypočtěte parciální derivace funkce $f(x,y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$.

Řešení:

$D(f) = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2, x \neq 0\}$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2} \cdot y \cdot \left(\frac{-1}{x^2}\right) = -\frac{y}{\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)x^2} = -\frac{y}{x^2+y^2}\,,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2+y^2}\,.$$

Zpět

Příklad 6.1.2

Vypočtěte parciální derivace funkce $f(x,y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$.

Maple:

```
> f := (x,y) -> arctan(y/x);
```

$$f := (x,\, y) \to \arctan(\frac{y}{x})$$

Parciální derivace je možno spočítat buď:

```
> fx:= diff(f(x,y),x) ;
```

$$fx := -\frac{y}{x^2\,(1+\frac{y^2}{x^2})}$$

```
> simplify(%);
```

$$-\frac{y}{x^2+y^2}$$

nebo pomocí příkazu D[ ]:

```
> fy:=D[2](f)(x,y);
```

$$fy := \frac{1}{x\,(1+\frac{y^2}{x^2})}$$

```
> simplify(%);
```

$$\frac{x}{x^2+y^2}$$

Zpět

Příklad 6.1.2

Vypočtěte parciální derivace funkce $f(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$.

Mathematica:

f[x_, y_] = ArcTan[y/x];

Výpočet $\dfrac{\partial f}{x}(x, y)$

fx = D[f[x, y], x]

$-\frac{y}{x^2\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)}$

Simplify[fx]

$-\frac{y}{x^2+y^2}$

Výpočet $\dfrac{\partial f}{y}(x, y)$

fy = D[f[x, y], y]

$\frac{1}{x\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)}$

Simplify[fy]

$\frac{x}{x^2+y^2}$

Zpět

Příklad 6.1.3

Vypočtěte parciální derivace 1. a 2. řádu funkce $f(x, y) = \ln(x - 2y)$.

? Zpět

Příklad 6.1.3

Vypočtěte parciální derivace 1. a 2. řádu funkce $f(x, y) = \ln(x - 2y)$.

Výsledek:

$D(f) = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2,\ x > 2y\}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{x - 2y}\,, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\frac{2}{x - 2y}\,,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = -\frac{1}{(x - 2y)^2}\,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = -\frac{4}{(x - 2y)^2}\,,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{2}{(x - 2y)^2}\,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{2}{(x - 2y)^2}\,.$$

Zpět

Příklad 6.1.3

Vypočtěte parciální derivace 1. a 2. řádu funkce $f(x,y)=\ln(x-2y)$.

Návod:

Parciální derivace lze počítat pouze v bodech náležejících do definičního oboru $D(f)$. Při výpočtu derivace $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ považujeme proměnnou y za konstantní. Obdobně vypočteme derivaci $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$. Parciální derivace 2. řádu počítáme podle vzorce $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)=\dfrac{\partial}{\partial y}(x,y)\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right)$ (značíme $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)$, pro $x=y$). Smíšené derivace jsou totožné, je-li $f\in C^2$.

Zpět

Příklad 6.1.3

Vypočtěte parciální derivace 1. a 2. řádu funkce $f(x,y) = \ln(x-2y)$.

Řešení:

$D(f) = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2,\ x > 2y\}$,
geometricky je $D(f)$ dolní polorovina pod přímkou $y = \frac{1}{2}x$, bez uvedené přímky.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{x-2y} \cdot 1\,, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{x-2y} \cdot (-2)\,,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -\frac{1}{(x-2y)^2} \cdot 1 = -\frac{1}{(x-2y)^2}\,,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = (-2)(-1)\frac{-2}{(x-2y)^2} = -\frac{4}{(x-2y)^2}\,,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -\frac{1}{(x-2y)^2} \cdot (-2) = \frac{2}{(x-2y)^2}\,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = -\frac{(-2)}{(x-2y)^2} \cdot 1 = \frac{2}{(x-2y)^2}$$

. Vidíme, že smíšené derivace jsou totožné.

Zpět

Příklad 6.1.3

Vypočtěte parciální derivace 1. a 2. řádu funkce $f(x, y) = \ln(x - 2y)$.

Maple:

```
> f := (x,y) -> ln(x-2*y);
```

$$f := (x, y) \to \ln(x - 2y)$$

Parciální derivace 1. řádu:

```
> fx:= diff(f(x,y),x) ;
```

$$fx := \frac{1}{x - 2y}$$

```
> fy:= diff(f(x,y),y);
```

$$fy := -\frac{2}{x - 2y}$$

Parciální derivace 2. řádu:

```
> fxx:= diff(f(x,y),x$2);
```

$$fxx := -\frac{1}{(x - 2y)^2}$$

```
> fyy:= diff(f(x,y),y$2);
```

$$fyy := -\frac{4}{(x - 2y)^2}$$

včetně smíšených derivací, které jsou totožné:

```
> fxy:= diff(f(x,y),x,y);
```

$$fxy := \frac{2}{(x - 2y)^2}$$

Další

Příklad 6.1.3

Vypočtěte parciální derivace 1. a 2. řádu funkce $f(x, y) = \ln(x - 2y)$.

Maple:

```
> fyx:= diff(f(x,y),y,x);
```

$$fyx := \frac{2}{(x - 2\,y)^2}$$

Zpět

Příklad 6.1.3

Vypočtěte parciální derivace 1. a 2. řádu funkce $f(x, y) = \ln(x - 2y)$.

Mathematica:

$\boldsymbol{f[\mathrm{x\_}, \mathrm{y\_}] = \mathrm{Log}[x - 2y];}$

Výpočet prvních derivací:

$\boldsymbol{\mathrm{fx} = D[f[x, y], x]}$

$\frac{1}{x-2y}$

$\boldsymbol{\mathrm{fy} = D[f[x, y], y]}$

$-\frac{2}{x-2y}$

Výpočet druhých derivací:

$\boldsymbol{\mathrm{fxx} = D[f[x, y], \{x, 2\}]}$

$-\frac{1}{(x-2y)^2}$

$\boldsymbol{\mathrm{fxy} = D[f[x, y], x, y]}$

$\frac{2}{(x-2y)^2}$

$\boldsymbol{\mathrm{fyy} = D[f[x, y], \{y, 2\}]}$

$-\frac{4}{(x-2y)^2}$

Zpět

Příklad 6.1.4

Vypočtěte gradient funkce $f(x,y,z) = 3\,x^2 + \mathrm{e}^{-xy^2} - z$ v bodě A $= [\,0,\,2\,,\,0\,]$

= ? Zpět

Příklad 6.1.4

Vypočtěte gradient funkce $f(x, y, z) = 3\,x^2 + \mathrm{e}^{-xy^2} - z$ v bodě A $= [\ 0,\ 2\ ,\ 0\ ]$

Výsledek:

grad $f(A) = (-4, 0, -1)$

Zpět

Příklad 6.1.4

Vypočtěte gradient funkce $f(x,y,z) = 3\,x^2 + \mathrm{e}^{-xy^2} - z$ v bodě A $= [\ 0,\ 2\ ,\ 0\,]$

Návod:

$$\operatorname{grad} f(x,y,z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z), \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) \right)$$

Zpět

Příklad 6.1.4

Vypočtěte gradient funkce $f(x,y,z) = 3\,x^2 + \mathrm{e}^{-x\,y^2} - z$ v bodě A = [0, 2 , 0]

Řešení:

$D(f) = \mathbb{R}^3$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 6\,x - y^2 \mathrm{e}^{-x\,y^2}\,, \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(\,0,2,0\,) = -4\,,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = -2\,x\,y\,\mathrm{e}^{-x\,y^2}\,, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(\,0,2,0\,) = 0\,,$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = -1\,, \qquad \frac{\partial f}{\partial z}(\,0,2,0\,) = -1\,.$$

Tedy $\operatorname{grad} f(A) = (-4, 0, -1)\,.$

Zpět

Příklad 6.1.4

Vypočtěte gradient funkce $f(x,y,z) = 3\,x^2 + \mathrm{e}^{-xy^2} - z$ v bodě $\mathrm{A} = [\,0,\ 2\ ,\ 0\,]$

Maple:

```
> f:=(x,y,z)-> 3*x^2+exp(-x*y^2)-z;
```

$$f := (x,\ y,\ z) \rightarrow 3\,x^2 + e^{(-x\,y^2)} - z$$

Gradient je vektor parciálních derivací

```
> [diff(f(x,y,z),x),diff(f(x,y,z),y),diff(f(x,y,z),z)];
```

$$[6\,x - y^2\,e^{(-x\,y^2)},\ -2\,x\,y\,e^{(-x\,y^2)},\ -1]$$

který lze vypočítat přímo pomocí příkazu grad:

```
> with(linalg,grad):
> gradf:= grad(f(x,y,z),[x,y,z]);
```

$$\mathit{gradf} := \left[6\,x - y^2\,e^{(-x\,y^2)},\ -2\,x\,y\,e^{(-x\,y^2)},\ -1\right]$$

Nakonec dosadíme souřadnice bodu A:

```
> gradfvA:=subs(x=0,y=2,z=0,grad(f(x,y,z),[x,y,z]));
```

$$\mathit{gradfvA} := [-4\,e^0,\ 0,\ -1]$$

```
> simplify(%);
```

$$[-4,\ 0,\ -1]$$

Zpět

Příklad 6.1.4

Vypočtěte gradient funkce $f(x,y,z) = 3\,x^2 + \mathrm{e}^{-xy^2} - z$ v bodě A $= [\,0,\ 2\ ,\ 0\,]$

Mathematica:

```
f[x_, y_, z_] = 3x^2 + Exp[-xy^2] - z;
<< Calculus`VectorAnalysis`
Grad[f[x, y, z], Cartesian[x, y, z]]
```

$\left\{6x - e^{-xy^2}y^2, -2e^{-xy^2}xy, -1\right\}$

```
grad = Grad[f[x, y, z], Cartesian[x, y, z]]
gradA = grad/.{x → 0, y → 2, z → 0}
```

$\{-4, 0, -1\}$

Zpět

Příklad 6.1.5

Objem kužele V je funkcí poloměru podstavy r a výšky kužele h. Vyjádřete parciální derivace $\frac{\partial V}{\partial r}$ a $\frac{\partial V}{\partial h}$. Co tyto derivace popisují?

? Zpět

Příklad 6.1.5

Objem kužele V je funkcí poloměru podstavy r a výšky kužele h. Vyjádřete parciální derivace $\frac{\partial V}{\partial r}$ a $\frac{\partial V}{\partial h}$. Co tyto derivace popisují?

Výsledek:

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{2\pi r h}{3}, \quad \frac{\partial V}{\partial h} = \frac{\pi r^2}{3}.$$

Zpět

Příklad 6.1.5

Objem kužele V je funkcí poloměru podstavy r a výšky kužele h. Vyjádřete parciální derivace $\frac{\partial V}{\partial r}$ a $\frac{\partial V}{\partial h}$. Co tyto derivace popisují?

Návod:

Při výpočtu derivace $\frac{\partial V}{\partial r}$ považujeme proměnnou h za konstantní. Obdobně pro derivaci $\frac{\partial V}{\partial h}$ považujeme proměnnou r za konstantní.

Zpět

Příklad 6.1.5

Objem kužele V je funkcí poloměru podstavy r a výšky kužele h. Vyjádřete parciální derivace $\frac{\partial V}{\partial r}$ a $\frac{\partial V}{\partial h}$. Co tyto derivace popisují?

Řešení:

$$V(r,h) = \frac{\pi r^2 h}{3}, \quad \frac{\partial V}{\partial r} = \frac{2\pi r h}{3}, \quad \frac{\partial V}{\partial h} = \frac{\pi r^2}{3}$$

Derivace $\dfrac{\partial V}{\partial r}$ popisuje rychlost změny objemu kužele v závislosti na změně poloměru, za předpokladu, že je výška kužele konstantní. Derivace $\dfrac{\partial V}{\partial h}$ popisuje rychlost změny objemu kužele v závislosti na změně výšky, za předpokladu, že je poloměr konstantní.

Zpět

Příklad 6.1.5

Objem kužele V je funkcí poloměru podstavy r a výšky kužele h. Vyjádřete parciální derivace $\frac{\partial V}{\partial r}$ a $\frac{\partial V}{\partial h}$. Co tyto derivace popisují?

Maple:

Objem kužele:

```
> V:=(r,h)-> Pi*r^2*h/3;
```

$$V := (r,\, h) \to \frac{1}{3}\,\pi\, r^2\, h$$

Parciální derivace objemu kužele dle poloměru a výšky:

```
> Vr:= diff(V(r,h),r) ;
```

$$Vr := \frac{2\,\pi\, r\, h}{3}$$

```
> Vh:= diff(V(r,h),h) ;
```

$$Vh := \frac{\pi\, r^2}{3}$$

Zpět

Příklad 6.1.5

Objem kužele V je funkcí poloměru podstavy r a výšky kužele h. Vyjádřete parciální derivace $\frac{\partial V}{\partial r}$ a $\frac{\partial V}{\partial h}$. Co tyto derivace popisují?

Mathematica:

Objem kužele:

V[r_, h_] = Pi r^2 h/3;

Parciální derivace objemu kužele dle poloměru a výšky:

Vr = D[V[r, h], r]

$\frac{2h\pi r}{3}$

Vh = D[V[r, h], h]

$\frac{\pi r^2}{3}$

Zpět

Příklad 6.1.6

Ověřte, že funkce $u(x,t) = \mathrm{e}^{-a^2 t} \sin x$ je řešením následující rovnice, tzv. rovnice vedení tepla:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad a \in \mathbb{R}.$$

? Zpět

Příklad 6.1.6

Ověřte, že funkce $u(x,t) = \mathrm{e}^{-a^2 t} \sin x$ je řešením následující rovnice, tzv. rovnice vedení tepla:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,, \quad t > 0\,, \quad a \in \mathbb{R}\,.$$

Výsledek:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -a^2 \,\mathrm{e}^{-a^2 t} \sin x\,.$$

Zpět

Příklad 6.1.6

Ověřte, že funkce $u(x,t) = \mathrm{e}^{-a^2 t} \sin x$ je řešením následující rovnice, tzv. rovnice vedení tepla:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,, \quad t > 0\,, \quad a \in \mathbb{R}\,.$$

Návod:

Porovnáme parciální derivace na obou stranách rovnice.

Zpět

Příklad 6.1.6

Ověřte, že funkce $u(x,t) = \mathrm{e}^{-a^2 t} \sin x$ je řešením následující rovnice, tzv. rovnice vedení tepla:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Řešení:

$D(u) = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -a^2\, \mathrm{e}^{-a^2 t} \sin x, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \mathrm{e}^{-a^2 t} \cos x,$$

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a^2 \cdot \mathrm{e}^{-a^2 t} \cdot (-1) \sin x = -a^2\, \mathrm{e}^{-a^2 t} \sin x.$$

Funkce je tedy řešením rovnice na celém $D(u)$.

Zpět

Příklad 6.1.6

Ověřte, že funkce $u(x,t) = \mathrm{e}^{-a^2 t} \sin x$ je řešením následující rovnice, tzv. rovnice vedení tepla:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,, \quad t > 0\,, \quad a \in \mathbb{R}\,.$$

Maple:

```
> u := (x,t) -> exp(-a^2*t)*sin(x);
```

$$u := (x,\, t) \to e^{(-a^2\, t)} \sin(x)$$

Vyjádříme $\frac{\partial}{\partial t}\, u$

```
> ut := diff(u(x,t),t);
```

$$ut := -a^2\, e^{(-a^2\, t)} \sin(x)$$

a spočítáme $a^2\, (\frac{\partial^2}{\partial x^2}\, u)$:

```
> Prstr := a^2*diff(u(x,t),x$2);
```

$$Prstr := -a^2\, e^{(-a^2\, t)} \sin(x)$$

Tedy daná funkce řeší rovnici vedení tepla.

Zpět

Příklad 6.1.6

Ověřte, že funkce $u(x,t) = \mathrm{e}^{-a^2 t} \sin x$ je řešením následující rovnice, tzv. rovnice vedení tepla:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,, \quad t > 0\,, \quad a \in \mathbb{R}\,.$$

Mathematica:

u[x, t] = Exp[−a^2t]Sin[x];

Ověření, že funkce splňuje rovnici vedení tepla.

rovnice = D[u[x, t], t] == a^2D[u[x, t], {x, 2}]

True

Zpět

Derivace ve směru

- Příklad 6.2.1 Pomocí definice vypočtěte derivaci funkce $f(x,y)=\dfrac{x}{y}$ v bodě $B=[4,-1]$ ve směru vektoru $\vec{u}=(-2,3)$.
- Příklad 6.2.2 Vypočtěte směrovou derivaci funkce $f(x,y)=\dfrac{x}{y}$ v bodě $B=[4,-1]$ ve směru vektoru $\vec{u}=(-2,3)$ s pomocí gradientu funkce.
- Příklad 6.2.3 Vypočtěte směrovou derivaci funkce $f(x,y,z)=\cos(xy)+\ln z^2$ v bodě $B=[\pi,1,1]$ ve směru vektoru $\vec{u}=(1,1,1)$ s pomocí gradientu funkce.

Zpět

Příklad 6.2.1

Pomocí definice vypočtěte derivaci funkce $f(x, y) = \dfrac{x}{y}$ v bodě $B = [4, -1]$ ve směru vektoru $\vec{u} = (-2, 3)$.

? Zpět

Příklad 6.2.1

Pomocí definice vypočtěte derivaci funkce $f(x,y) = \dfrac{x}{y}$ v bodě $B = [4, -1]$ ve směru vektoru $\vec{u} = (-2, 3)$.

Výsledek:

$Df(B, \vec{a}) = -10\dfrac{\sqrt{13}}{13}$, kde $\vec{a} = \dfrac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$.

Zpět

Příklad 6.2.1

Pomocí definice vypočtěte derivaci funkce $f(x,y)=\dfrac{x}{y}$ v bodě $B=[4,-1]$ ve směru vektoru $\vec{u}=(-2,3)$.

Návod:

$$Df(B,\vec{a})=\lim_{h\to 0}\frac{f(B+h\vec{a})-f(B)}{h}\,,\qquad \text{kde } \|\vec{a}\|=1\,.$$

Zpět

Příklad 6.2.1

Pomocí definice vypočtěte derivaci funkce $f(x,y)=\dfrac{x}{y}$ v bodě $B=[4,-1]$ ve směru vektoru $\vec{u}=(-2,3)$.

Řešení:

Ověříme, že $B\in D(f)=\{[x,y]\in\mathbb{R}^2,\ y\neq 0\}$,

vypočteme odpovídající jednotkový vektor $\vec{a}=\dfrac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}=\dfrac{\vec{u}}{\sqrt{13}}=\dfrac{\sqrt{13}}{13}(-2,3)$, a dále

$$B+h\vec{a}=[4,-1]+h\frac{\sqrt{13}}{13}(-2,3)=\left[4-\frac{2h\sqrt{13}}{13},-1+\frac{3h\sqrt{13}}{13}\right].$$

Podle definice dostáváme

$$Df(B,\vec{a})=\lim_{h\to 0}\frac{f(B+h\vec{a})-f(B)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{4-\frac{2h\sqrt{13}}{13}}{-1+\frac{3h\sqrt{13}}{13}}-\dfrac{4}{-1}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{10h\sqrt{13}}{-13+3h\sqrt{13}}}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{10\sqrt{13}}{-13+3h\sqrt{13}}=-\frac{10\sqrt{13}}{13}.$$

Zpět

Příklad 6.2.1

Pomocí definice vypočtěte derivaci funkce $f(x,y)=\dfrac{x}{y}$ v bodě $B=[4,-1]$ ve směru vektoru $\vec{u}=(-2,3)$.

Maple:

```
> with(linalg):
> f := (x,y) -> x/y;
```

$$f := (x,\ y) \to \frac{x}{y}$$

```
> BOD := vector([4,-1]);
```

$$BOD := [4,\ -1]$$

```
> u := vector([-2,3]);
```

$$u := [-2,\ 3]$$

Vektor je třeba nejdříve "normovat":

```
> a := vector([-2,3])/norm(u,frobenius);
```

$$a := \frac{1}{13}\,[-2,\ 3]\,\sqrt{13}$$

Můžeme použít jiný příkaz pro normalizaci:

```
> a := normalize(u);
```

$$a := \left[-\frac{2\sqrt{13}}{13},\ \frac{3\sqrt{13}}{13}\right]$$

```
> Dfa := Limit('(f(BOD+h*a)-f(BOD))/h',h=0);
```

$$Dfa := \lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{f}(BOD + h\,a) - \mathrm{f}(BOD)}{h}$$

Další

Příklad 6.2.1

Pomocí definice vypočtěte derivaci funkce $f(x,y)=\dfrac{x}{y}$ v bodě $B=[4,-1]$ ve směru vektoru $\vec{u}=(-2,3)$.

Maple:

```
> P := evalm(BOD+h*a);
```

$$P := \left[4-\frac{2\,h\,\sqrt{13}}{13},\; -1+\frac{3\,h\,\sqrt{13}}{13}\right]$$

```
> Dfa := Limit((f(P[1],P[2])-f(BOD[1],BOD[2]))/h,h=0);
```

$$Dfa := \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{4-\dfrac{2\,h\,\sqrt{13}}{13}}{-1+\dfrac{3\,h\,\sqrt{13}}{13}}+4}{h}$$

```
> Dfa := Limit(simplify((f(P[1],P[2])-f(BOD[1],BOD[2]))/h),h=0);
```

$$Dfa := \lim_{h\to 0}\frac{10\,\sqrt{13}}{-13+3\,h\,\sqrt{13}}$$

Nyní se limita, tj. derivace ve směru v v bodě BOD , vypočítá:

```
> Dfa_BOD := limit((f(P[1],P[2])-f(BOD[1],BOD[2]))/h,h=0);
```

$$Dfa\_BOD := -\frac{10\,\sqrt{13}}{13}$$

Zpět

Příklad 6.2.1

Pomocí definice vypočtěte derivaci funkce $f(x,y) = \dfrac{x}{y}$ v bodě $B = [4,-1]$ ve směru vektoru $\vec{u} = (-2,3)$.

Mathematica:

$\boldsymbol{f}$**[x_, y_] =** $\boldsymbol{x/y}$**;**

BOD = {4, −1}; $\boldsymbol{u}$ **= {−2, 3};**

Normování vektoru:

$\boldsymbol{v}$ **=** $\boldsymbol{u}$**/Norm[**$\boldsymbol{u}$**]**

$\left\{-\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}}\right\}$

Výpočet derivace ve směru:

Limit[($\boldsymbol{f}$**[BOD[[1]] +** $\boldsymbol{hv}$**[[1]], BOD[[2]] +** $\boldsymbol{hv}$**[[2]]]−** $\boldsymbol{f}$**[BOD[[1]], BOD[[2]]])/**$\boldsymbol{h}$**,** $\boldsymbol{h}$ **→ 0]**

$-\frac{10}{\sqrt{13}}$

Zpět

Příklad 6.2.2

Vypočtěte směrovou derivaci funkce $f(x,y) = \dfrac{x}{y}$ v bodě $B = [4, -1]$ ve směru vektoru $\vec{u} = (-2, 3)$ s pomocí gradientu funkce.

? Zpět

Příklad 6.2.2

Vypočtěte směrovou derivaci funkce $f(x,y) = \dfrac{x}{y}$ v bodě $B = [4,-1]$ ve směru vektoru $\vec{u} = (-2,3)$ s pomocí gradientu funkce.

Výsledek:

$$Df(B,\vec{a}) = -10\frac{\sqrt{13}}{13}\,, \qquad \text{kde} \;\; \vec{a} = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}\,.$$

Zpět

Příklad 6.2.2

Vypočtěte směrovou derivaci funkce $f(x,y) = \dfrac{x}{y}$ v bodě $B = [4,-1]$ ve směru vektoru $\vec{u} = (-2,3)$ s pomocí gradientu funkce.

Návod:

$$Df(B,\vec{a}) = \mathrm{grad} f(B) \cdot \vec{a}\,, \qquad \text{kde } \|\vec{a}\| = 1\,.$$

Zpět

Příklad 6.2.2

Vypočtěte směrovou derivaci funkce $f(x,y)=\dfrac{x}{y}$ v bodě $B=[4,-1]$ ve směru vektoru $\vec{u}=(-2,3)$ s pomocí gradientu funkce.

Řešení:

$D(f)=\{[x,y]\in\mathbb{R}^2,\ y\neq 0\},\ f\in C^1(G)$, kde $G=\{[x,y]\in\mathbb{R}^2\,, y<0\}, B\in G$.

Odpovídající jednotkový vektor je $\vec{a}=\dfrac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}=\dfrac{\vec{u}}{\sqrt{13}}=\dfrac{\sqrt{13}}{13}(-2,3)$.

Ze znalosti gradientu $\operatorname{grad} f(x,y)=\left(\dfrac{1}{y},-\dfrac{x}{y^2}\right)$ a ze známého vzorce

$Df(B,\vec{a})=\operatorname{grad} f(B)\cdot\vec{a}$ dostáváme

$$Df(B,\vec{a})=\frac{\sqrt{13}}{13}\left(\frac{1}{-1},-\frac{4}{(-1)^2}\right)\cdot(-2,3)=\frac{\sqrt{13}}{13}(2-12)=-10\frac{\sqrt{13}}{13}\,.$$

Zpět

Příklad 6.2.2

Vypočtěte směrovou derivaci funkce $f(x,y) = \dfrac{x}{y}$ v bodě $B = [4,-1]$ ve směru vektoru $\vec{u} = (-2,3)$ s pomocí gradientu funkce.

Maple:

```
> with(linalg):
> f := (x,y) -> x/y;
```

$$f := (x,\ y) \to \frac{x}{y}$$

v bodě:

```
> BOD := vector([4,-1]);
```

$$BOD := [4,\ -1]$$

```
> u := vector([-2,3]);
```

$$u := [-2,\ 3]$$

```
> a := normalize(u);
```

$$a := \left[-\frac{2\sqrt{13}}{13},\ \frac{3\sqrt{13}}{13}\right]$$

Ze znalosti gradientu a ze známého vzorce:

```
> vzorec := innerprod(grad(f(x,y),[x,y]), a);
```

$$vzorec := -\frac{\sqrt{13}\,(2\,y + 3\,x)}{13\,y^2}$$

Další

Příklad 6.2.2

Vypočtěte směrovou derivaci funkce $f(x,y) = \frac{x}{y}$ v bodě $B = [4,-1]$ ve směru vektoru $\vec{u} = (-2,3)$ s pomocí gradientu funkce.

Maple:

dostaneme přímo derivaci ve směru v v bodě BOD:

```
>   der_ve_smeru:= subs({x=BOD[1],y=BOD[2]},vzorec);
```

$$der\_ve\_smeru := -\frac{10\sqrt{13}}{13}$$

Zpět

Příklad 6.2.2

Vypočtěte směrovou derivaci funkce $f(x,y)=\dfrac{x}{y}$ v bodě $B=[4,-1]$ ve směru vektoru $\vec{u}=(-2,3)$ s pomocí gradientu funkce.

Mathematica:

$\boldsymbol{f[\mathrm{x\_},\mathrm{y\_}]=x/y;}$

$\mathbf{grad}=\boldsymbol{\{D[f[x,y],x],D[f[x,y],y]\}}$

$\left\{\frac{1}{y},-\frac{x}{y^2}\right\}$

$\mathbf{gradB}=\mathbf{grad/.}\boldsymbol{\{x\to 4,y\to -1\}}$

$\{-1,-4\}$

$\boldsymbol{u=\{-2,3\};}$

Normavání vektoru:

$\boldsymbol{v=u/}\mathbf{Norm}\boldsymbol{[u]}$

$\left\{-\frac{2}{\sqrt{13}},\frac{3}{\sqrt{13}}\right\}$

Výpočet derivace ve směru pomocí gradientu:

$\mathbf{DerVeSmeru}=\mathbf{gradB.}\boldsymbol{v}$

$-\frac{10}{\sqrt{13}}$

Zpět

Příklad 6.2.3

Vypočtěte směrovou derivaci funkce $f(x,y,z) = \cos(xy) + \ln z^2$ v bodě $B = [\pi, 1, 1]$ ve směru vektoru $\vec{u} = (1,1,1)$ s pomocí gradientu funkce.

? Zpět

Příklad 6.2.3

Vypočtěte směrovou derivaci funkce $f(x,y,z) = \cos(xy) + \ln z^2$ v bodě $B = [\pi, 1, 1]$ ve směru vektoru $\vec{u} = (1,1,1)$ s pomocí gradientu funkce.

Výsledek:

$$Df(B,\vec{v}) = 2\frac{\sqrt{3}}{3}\,, \qquad \text{kde} \ \ \vec{v} = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}\,.$$

Zpět

Příklad 6.2.3

Vypočtěte směrovou derivaci funkce $f(x,y,z) = \cos(xy) + \ln z^2$ v bodě $B = [\pi, 1, 1]$ ve směru vektoru $\vec{u} = (1,1,1)$ s pomocí gradientu funkce.

Návod:

$$Df(B, \vec{v}) = \operatorname{grad} f(B) \cdot \vec{v}\,, \qquad \text{kde } \|\vec{v}\| = 1\,.$$

Zpět

Příklad 6.2.3

Vypočtěte směrovou derivaci funkce $f(x, y, z) = \cos(xy) + \ln z^2$ v bodě $B = [\pi, 1, 1]$ ve směru vektoru $\vec{u} = (1, 1, 1)$ s pomocí gradientu funkce.

Řešení:

$D(f) = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3,\ z \neq 0\}$, $f \in C^1(G)$, kde $G = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3, z > 0\}$,

$B \in G$.

Odpovídající jednotkový vektor je $\vec{v} = \dfrac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = \dfrac{\vec{u}}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}(1, 1, 1)$.

Ze znalosti gradientu $\operatorname{grad} f(x, y, z) = \left(-y\sin(xy), -x\sin(xy), \dfrac{2}{z}\right)$ a ze vzorce

$Df(B, \vec{v}) = \operatorname{grad} f(B) \cdot \vec{a}$ dostáváme

$$Df(B, \vec{v}) = \frac{\sqrt{3}}{3}(-\sin(\pi), -\pi\sin(\pi), 2) \cdot (1, 1, 1) = \frac{\sqrt{3}}{3}(0 + 0 + 2) = 2\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Zpět

Příklad 6.2.3

Vypočtěte směrovou derivaci funkce $f(x,y,z) = \cos(xy) + \ln z^2$ v bodě $B = [\pi, 1, 1]$ ve směru vektoru $\vec{u} = (1,1,1)$ s pomocí gradientu funkce.

Maple:

```
> with(linalg):
> f := (x,y,z) -> cos(x*y)+ ln(z^2);
```

$$f := (x,\ y,\ z) \to \cos(x\,y) + \ln(z^2)$$

```
> BOD := vector([Pi,1,1]);
```

$$BOD := [\pi,\ 1,\ 1]$$

```
> u := vector([1,1,1]);
```

$$a := [1,\ 1,\ 1]$$

```
> v := normalize(u);
```

$$v := \left[\frac{\sqrt{3}}{3},\ \frac{\sqrt{3}}{3},\ \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$$

Ze znalosti gradientu a ze známého vzorce:

```
> vzorec := innerprod(grad(f(x,y,z),[x,y,z]), v);
```

$$vzorec := -\frac{1}{3}\,\frac{\sqrt{3}\,(\sin(x\,y)\,y\,z + \sin(x\,y)\,x\,z - 2)}{z}$$

dostaneme přímo derivaci ve směru v v bodě BOD:

```
> der_ve_smeru:= subs({x=BOD[1],y=BOD[2],z=BOD[3]},vzorec);
```

$$der\_ve\_smeru := -\frac{1}{3}\,\sqrt{3}\,(\sin(\pi) + \sin(\pi)\,\pi - 2)$$

Další

Příklad 6.2.3

Vypočtěte směrovou derivaci funkce $f(x, y, z) = \cos(xy) + \ln z^2$ v bodě $B = [\pi, 1, 1]$ ve směru vektoru $\vec{u} = (1, 1, 1)$ s pomocí gradientu funkce.

Maple:

```
> simplify(%);
```

$$\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Zpět

Příklad 6.2.3

Vypočtěte směrovou derivaci funkce $f(x,y,z) = \cos(xy) + \ln z^2$ v bodě $B = [\pi, 1, 1]$ ve směru vektoru $\vec{u} = (1,1,1)$ s pomocí gradientu funkce.

Mathematica:

$\boldsymbol{f[x\_, y\_, z\_] = \mathrm{Cos}[xy] + \mathrm{Log}[z\hat{\ }2];}$

<< Calculus`VectorAnalysis`

$\boldsymbol{\mathrm{grad} = \mathrm{Grad}[f[x,y,z], \mathrm{Cartesian}[x,y,z]]}$

$\left\{-y\mathrm{Sin}[xy], -x\mathrm{Sin}[xy], \frac{2}{z}\right\}$

Výpočet gradientu:

$\boldsymbol{\mathrm{gradB} = \mathrm{grad}/.\{x \to \mathrm{Pi}, y \to 1, z \to 1\}}$

$\{0,0,2\}$

Definice a normování vektoru:

$\boldsymbol{u = \{1,1,1\};}$
$\boldsymbol{v = u/\mathrm{Norm}[u]}$

$\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$

Výpočet směrové derivace pomocí gradientu:

$\boldsymbol{\mathrm{DerVeSmeru} = \mathrm{gradB}.v}$

$\frac{2}{\sqrt{3}}$

Zpět

Derivování složených funkcí

- Příklad 6.3.1 Napište derivaci $f'(t)$ funkce $f(t) = g(x,y)$, kde $x = \mathrm{e}^t$ a $y = \sin t$, $g \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Pro konkrétní funkci $g(x,y) = xy^2 + 3yx^3$ vypočtěte $f'(0)$.
- Příklad 6.3.2 Je dána funkce $g(x,y) = x^2 + y^2$, kde $x(r,\varphi) = r\cos\varphi$ a $y(r,\varphi) = r\sin\varphi$. Vypočtěte parciální derivace funkce $f(r,\varphi) = g(x(r,\varphi), y(r,\varphi))$.
- Příklad 6.3.3 Napište smíšenou parciální derivaci druhého řádu funkce $f(r,s) = h(x,y)$, kde $x(r,s) = r^2 + s^2$ a $y(r,s) = 5rs$, $h \in C^2(\mathbb{R}^2)$.

Zpět

Příklad 6.3.1

Napište derivaci $f'(t)$ funkce $f(t) = g(x,y)$, kde $x = \mathrm{e}^t$ a $y = \sin t$, $g \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Pro konkrétní funkci $g(x,y) = xy^2 + 3yx^3$ vypočtěte $f'(0)$.

= ? Zpět

Příklad 6.3.1

Napište derivaci $f'(t)$ funkce $f(t) = g(x,y)$, kde $x = \mathrm{e}^t$ a $y = \sin t$, $g \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Pro konkrétní funkci $g(x,y) = xy^2 + 3yx^3$ vypočtěte $f'(0)$.

Výsledek:

$$f'(t) = \frac{\partial g}{\partial x}(x,y)\,\mathrm{e}^t + \frac{\partial g}{\partial y}(x,y)\,\cos t\,, \qquad f'(0) = 3\,.$$

Zpět

Příklad 6.3.1

Napište derivaci $f'(t)$ funkce $f(t) = g(x, y)$, kde $x = \mathrm{e}^t$ a $y = \sin t$, $g \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Pro konkrétní funkci $g(x, y) = xy^2 + 3yx^3$ vypočtěte $f'(0)$.

Návod:

$$f' = \frac{\partial g}{\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial t}$$

Zpět

Příklad 6.3.1

Napište derivaci $f'(t)$ funkce $f(t) = g(x, y)$, kde $x = \mathrm{e}^t$ a $y = \sin t$, $g \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Pro konkrétní funkci $g(x, y) = xy^2 + 3yx^3$ vypočtěte $f'(0)$.

Řešení:

$$f'(t) = \frac{\partial g}{\partial x}(x, y)\,\frac{\partial x}{\partial t}(t) + \frac{\partial g}{\partial y}(x, y)\,\frac{\partial y}{\partial t}(t) = \frac{\partial g}{\partial x}(x, y)\,\mathrm{e}^t + \frac{\partial g}{\partial y}(x, y)\,\cos t\,.$$

Konkrétní funkce $g(x, y) = xy^2 + 3yx^3$ má parciální derivace

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = y^2 + 9yx^2\,, \qquad \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 2xy + 3x^3\,.$$

Pro $t = 0$ je $x = 1$, $y = 0$ a $\dfrac{\partial g}{\partial x}(1, 0) = 0$, $\dfrac{\partial g}{\partial y}(1, 0) = 3$,

tedy $f'(0) = 0 \cdot \mathrm{e}^0 + 3 \cdot \cos(0) = 3$.

Zpět

Příklad 6.3.1

Napište derivaci $f'(t)$ funkce $f(t) = g(x,y)$, kde $x = \mathrm{e}^t$ a $y = \sin t$, $g \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Pro konkrétní funkci $g(x,y) = xy^2 + 3yx^3$ vypočtěte $f'(0)$.

Maple:

Připravíme formální vzorec derivování složené funkce tzv. vzorec řetězového derivování

```
> ft := 'gx'*'xt' + 'gy'*'yt';
```

$$ft := gx\,xt + gy\,yt$$

Zadáme vnější funkci a spočítáme parciální derivace

```
> g := x*y^2 + 3*y*x^3;
```

$$g := x\,y^2 + 3\,y\,x^3$$

```
> gx := diff(g,x); gy := diff(g,y);
```

$$gx := y^2 + 9\,y\,x^2$$

$$gy := 2\,x\,y + 3\,x^3$$

Zadáme vnitřní funkce

```
> x := exp(t); y := sin(t);
```

$$x := e^t$$

$$y := \sin(t)$$

a derivujeme každou z nich podle t

```
> xt := diff(exp(t),t); yt := diff(sin(t),t);
```

$$xt := e^t$$

$$yt := \cos(t)$$

Další

Příklad 6.3.1

Napište derivaci $f'(t)$ funkce $f(t) = g(x,y)$, kde $x = \mathrm{e}^t$ a $y = \sin t$, $g \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Pro konkrétní funkci $g(x,y) = xy^2 + 3yx^3$ vypočtěte $f'(0)$.

Maple:

Do vzorce pro řetězového derivování dosadíme připravené derivace v $t = 0$

```
> ftv0 := simplify( subs(t=0,ft) );
```

$$ftv0 := 3$$

Zpět

Příklad 6.3.1

Napište derivaci $f'(t)$ funkce $f(t) = g(x, y)$, kde $x = \mathrm{e}^t$ a $y = \sin t$, $g \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Pro konkrétní funkci $g(x, y) = xy^2 + 3yx^3$ vypočtěte $f'(0)$.

Mathematica:

g[a_, b_] = ab^2 + 3ba^3;
x[t_] = Exp[t];
y[t_] = Sin[t];

Vypočteme složenou funkci:

f[t_] = g[x[t], y[t]]

$3e^{3t}\mathrm{Sin}[t] + e^t\mathrm{Sin}[t]^2$

Spočteme přímo derivaci **derf[t_] = D[f[t], t]**

$3e^{3t}\mathrm{Cos}[t] + 9e^{3t}\mathrm{Sin}[t] + 2e^t\mathrm{Cos}[t]\mathrm{Sin}[t] + e^t\mathrm{Sin}[t]^2$

derf[0]

3

Zpět

Příklad 6.3.2

Je dána funkce $g(x, y) = x^2 + y^2$, kde $x(r, \varphi) = r\cos\varphi$ a $y(r, \varphi) = r\sin\varphi$. Vypočtěte parciální derivace funkce $f(r, \varphi) = g(x(r, \varphi), y(r, \varphi))$.

? Zpět

Příklad 6.3.2

Je dána funkce $g(x,y) = x^2 + y^2$, kde $x(r,\varphi) = r\cos\varphi$ a $y(r,\varphi) = r\sin\varphi$. Vypočtěte parciální derivace funkce $f(r,\varphi) = g(x(r,\varphi), y(r,\varphi))$.

Výsledek:

$$\frac{\partial f}{\partial r}(r,\varphi) = 2r\,, \qquad \frac{\partial f}{\partial \varphi}(r,\varphi) = 0\,.$$

Zpět

Příklad 6.3.2

Je dána funkce $g(x,y) = x^2 + y^2$, kde $x(r,\varphi) = r\cos\varphi$ a $y(r,\varphi) = r\sin\varphi$. Vypočtěte parciální derivace funkce $f(r,\varphi) = g(x(r,\varphi), y(r,\varphi))$.

Návod:

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial g}{\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial g}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial r}\,, \qquad \frac{\partial f}{\partial \varphi} = \frac{\partial g}{\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial g}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial \varphi}\,,$$

nebo vyjdeme přímo z rovnosti $f(r,\varphi) = (x(r,\varphi))^2 + (y(r,\varphi))^2$.

Zpět

Příklad 6.3.2

Je dána funkce $g(x,y) = x^2 + y^2$, kde $x(r,\varphi) = r\cos\varphi$ a $y(r,\varphi) = r\sin\varphi$. Vypočtěte parciální derivace funkce $f(r,\varphi) = g(x(r,\varphi), y(r,\varphi))$.

Řešení:

$f(r,\varphi) = g\,(\,x(r,t), y(r,t)\,) = g(r\cos t, r\sin t)$

$\dfrac{\partial f}{\partial r} = \dfrac{\partial g}{\partial x}\,\dfrac{\partial x}{\partial r} + \dfrac{\partial g}{\partial y}\,\dfrac{\partial y}{\partial r} \;\Rightarrow\; \dfrac{\partial f}{\partial r}(r,\varphi) = 2x\,\cos\varphi + 2y\,\sin\varphi =$
$= 2r\cos\varphi\cos\varphi + 2r\sin\varphi\sin\varphi = 2r,$

$\dfrac{\partial f}{\partial \varphi} = \dfrac{\partial g}{\partial x}\,\dfrac{\partial x}{\partial \varphi} + \dfrac{\partial g}{\partial y}\,\dfrac{\partial y}{\partial \varphi} \;\Rightarrow\; \dfrac{\partial f}{\partial \varphi}(r,\varphi) = 2x\,(-r\sin\varphi) + 2y\,r\cos\varphi =$
$= 2r\cos\varphi\,(-r\sin\varphi) + 2r\sin\varphi\,r\cos\varphi = 0\,.$

Pro kontrolu určíme přímo předpis složené funkce $f(r,\varphi) = (r\cos\varphi)^2 + (r\sin\varphi))^2 = r^2$. Tedy

$$\frac{\partial f}{\partial r}(r,\varphi) = 2r\,, \qquad \frac{\partial f}{\partial \varphi}(r,\varphi) = 0\,.$$

Zpět

Příklad 6.3.2

Je dána funkce $g(x,y) = x^2 + y^2$, kde $x(r,\varphi) = r\cos\varphi$ a $y(r,\varphi) = r\sin\varphi$. Vypočtěte parciální derivace funkce $f(r,\varphi) = g(x(r,\varphi), y(r,\varphi))$.

Maple:

Připravíme formální vzorec derivování složené funkce.
$r :=' r' : Phi :=' Phi' : x :=' x' : y :=' y'$: tzv. vzorec řetězového derivování

```
> fr := 'gx'*'xr' + 'gy'*'yr';
```

$$fr := gx\,xr + gy\,yr$$

```
> fp := 'gx'*'xp' + 'gy'*'yp';
```

$$fp := gx\,xp + gy\,yp$$

Zadáme vnější funkci a spočítáme parciální derivace

```
> g := x^2 + y^2;
```

$$g := x^2 + y^2$$

```
> gx := diff(g,x); gy := diff(g,y);
```

$$gx := 2\,x$$

$$gy := 2\,y$$

Zadáme vnitřní funkce

```
> x := r*cos(Phi); y := r*sin(Phi);
```

$$x := r\cos(\Phi)$$

$$y := r\sin(\Phi)$$

a derivujeme každou z nich podle r a Φ

Další

Příklad 6.3.2

Je dána funkce $g(x,y) = x^2 + y^2$, kde $x(r,\varphi) = r\cos\varphi$ a $y(r,\varphi) = r\sin\varphi$. Vypočtěte parciální derivace funkce $f(r,\varphi) = g(x(r,\varphi), y(r,\varphi))$.

Maple:

```
> xr := diff(r*cos(Phi),r); yr := diff(r*sin(Phi),r);
```

$$xr := \cos(\Phi)$$

$$yr := \sin(\Phi)$$

```
> xp := diff(r*cos(Phi),Phi); yp := diff(r*sin(Phi),Phi);
```

$$xp := -r\sin(\Phi)$$

$$yp := r\cos(\Phi)$$

Do vzorce pro řetězové derivování dosadíme připravené derivace

```
> fr := simplify(fr );
```

$$fr := 2\,r$$

```
> fp := simplify(fp );
```

$$fp := 0$$

Nebo vypočteme přímo parciální derivace složené funkce:

```
> f:= (r,Phi) -> (r*cos(Phi))^2 +(r*sin(Phi))^2 ;
```

$$f := (r,\ \Phi) \to r^2\cos(\Phi)^2 + r^2\sin(\Phi)^2$$

```
> Dfr:= diff(f(r,Phi),r);
```

$$Dfr := 2\,r\cos(\Phi)^2 + 2\,r\sin(\Phi)^2$$

Další

Příklad 6.3.2

Je dána funkce $g(x,y) = x^2 + y^2$, kde $x(r,\varphi) = r\cos\varphi$ a $y(r,\varphi) = r\sin\varphi$. Vypočtěte parciální derivace funkce $f(r,\varphi) = g(x(r,\varphi), y(r,\varphi))$.

Maple:

```
> simplify(Dfr );
```

$$2\,r$$

```
> Dfr:= diff(f(r,Phi),Phi);
```

$$Dfr := 0$$

Zpět

Příklad 6.3.2

Je dána funkce $g(x,y) = x^2 + y^2$, kde $x(r,\varphi) = r\cos\varphi$ a $y(r,\varphi) = r\sin\varphi$. Vypočtěte parciální derivace funkce $f(r,\varphi) = g(x(r,\varphi), y(r,\varphi))$.

Mathematica:

$\boldsymbol{g[\mathrm{a\_}, \mathrm{b\_}] = a\hat{\ }2 + b\hat{\ }2;}$
$\boldsymbol{x[\mathrm{r\_}, \varphi\_] = r\mathrm{Cos}[\varphi];}$
$\boldsymbol{y[\mathrm{r\_}, \varphi] = r\mathrm{Sin}[\varphi];}$

Vypočteme složenou funkci:

$\boldsymbol{f[\mathrm{r\_}, \varphi\_] = g[x[r,\varphi], y[r,\varphi]]}$

$r^2\mathrm{Cos}[\varphi]^2 + r^2\mathrm{Sin}[\varphi]^2$

Spočteme přímo derivace

$\boldsymbol{\mathrm{derfr}[\mathrm{r\_}, \varphi\_] = D[f[r,\varphi], r]}$

$2r\mathrm{Cos}[\varphi]^2 + 2r\mathrm{Sin}[\varphi]^2$

Simplify[%]

$2r$

$\boldsymbol{\mathrm{derfphi}[\mathrm{r\_}, \varphi\_] = D[f[r,\varphi], \varphi]}$

0

Zpět

Příklad 6.3.3

Napište smíšenou parciální derivaci druhého řádu funkce $f(r,s) = h(x,y)$, kde $x(r,s) = r^2 + s^2$ a $y(r,s) = 5rs$, $h \in C^2(\mathbb{R}^2)$.

Zpět

Příklad 6.3.3

Napište smíšenou parciální derivaci druhého řádu funkce $f(r,s) = h(x,y)$, kde $x(r,s) = r^2 + s^2$ a $y(r,s) = 5rs$, $h \in C^2(\mathbb{R}^2)$.

Výsledek:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r \partial s}(r,s) = \frac{\partial^2 f}{\partial s \partial r}(r,s) =$$

$$= 4rs\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,y) + 10(r^2+s^2)\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}(x,y) + 25rs\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}(x,y) + 5\,\frac{\partial h}{\partial y}(x,y).$$

Zpět

Příklad 6.3.3

Napište smíšenou parciální derivaci druhého řádu funkce $f(r,s) = h(x,y)$, kde $x(r,s) = r^2 + s^2$ a $y(r,s) = 5rs$, $h \in C^2(\mathbb{R}^2)$.

Návod:

$\dfrac{\partial f}{\partial r} = \dfrac{\partial h}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial r} + \dfrac{\partial h}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial r}$, parciální derivace 2. řádu počítáme podle vzorce

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial r \partial s} = \dfrac{\partial}{\partial s}\left(\dfrac{\partial f}{\partial r}\right)$. Smíšené derivace 2. řádu jsou totožné, je-li $f \in C^2$.

Zpět

Příklad 6.3.3

Napište smíšenou parciální derivaci druhého řádu funkce $f(r,s) = h(x,y)$, kde $x(r,s) = r^2 + s^2$ a $y(r,s) = 5rs$, $h \in C^2(\mathbb{R}^2)$.

Řešení:

$$f(r,s) = h\,(\,x(r,s), y(r,s)\,) = h(r^2+s^2, 5rs)$$

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial h}{\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial h}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial r} \;\Rightarrow\; \frac{\partial f}{\partial r}(r,s) = \frac{\partial h}{\partial x}(x,y)\,2r + \frac{\partial h}{\partial y}(x,y)\,5s\,,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r \partial s}(r,s) = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial h}{\partial x}(x,y)2r + \frac{\partial h}{\partial y}(x,y)5s\right) =$$

$$= \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,y)\,2s + \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}(x,y)\,5r\right)2r + \left(\frac{\partial^2 h}{\partial y \partial x}(x,y)2s + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}(x,y)5r\right)5s + \frac{\partial h}{\partial y}(x,y)\,5 =$$

$$= 4rs\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,y) + 10(r^2+s^2)\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}(x,y) + 25rs\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}(x,y) + 5\,\frac{\partial h}{\partial y}(x,y)\,.$$

Zpět

Příklad 6.3.3

Napište smíšenou parciální derivaci druhého řádu funkce $f(r,s) = h(x,y)$, kde $x(r,s) = r^2 + s^2$ a $y(r,s) = 5rs$, $h \in C^2(\mathbb{R}^2)$.

Maple:

Zadáme vnitřní funkce:

```
> x := r^2+s^2; y := 5*r*s;
```

$$x := r^2 + s^2$$

$$y := 5\,r\,s$$

Zadáme formálně vnější funkci

```
> f :='f': f := h(x,y);
```

$$f := \mathrm{h}(r^2 + s^2,\ 5\,r\,s)$$

Připravíme si formálně požadovanou druhou derivaci

```
> fs := Diff(f,s): frs := Diff(fs,r);
```

$$frs := \frac{\partial^2}{\partial r\,\partial s}\,\mathrm{h}(r^2 + s^2,\ 5\,r\,s)$$

```
> fs :=diff(f,s);
```

$$fs := 2\,\mathrm{D}_1(h)(r^2 + s^2,\ 5\,r\,s)\,s + 5\,\mathrm{D}_2(h)(r^2 + s^2,\ 5\,r\,s)\,r$$

kde $\mathrm{D}_1(h)$, resp. $\mathrm{D}_2(h)$, znamená maplovský zápis pro první parciální derivaci podle první resp. druhé proměnné. Následujícím příkazem dostaváme hledanou smíšenou derivaci druhého řádu:

Další

Příklad 6.3.3

Napište smíšenou parciální derivaci druhého řádu funkce $f(r,s) = h(x,y)$, kde $x(r,s) = r^2 + s^2$ a $y(r,s) = 5rs$, $h \in C^2(\mathbb{R}^2)$.

Maple:

```
> frs := simplify(diff(diff(f,s),r));
```

$$frs := 4\,s\,\mathrm{D}_{1,\,1}(h)(r^2+s^2,\,5\,r\,s)\,r + 10\,\mathrm{D}_{1,\,2}(h)(r^2+s^2,\,5\,r\,s)\,s^2 + 10\,\mathrm{D}_{1,\,2}(h)(r^2+s^2,\,5\,r\,s)\,r^2 + 25\,r\,\mathrm{D}_{2,\,2}(h)(r^2+s^2,\,5\,r\,s)\,s + 5\,\mathrm{D}_2(h)(r^2+s^2,\,5\,r\,s)$$

kde např. $\mathrm{D}_{1,\,2}(h)$ znamená maplovský zápis pro smíšenou druhou parciální derivaci funkce h .

Zpět

Příklad 6.3.3

Napište smíšenou parciální derivaci druhého řádu funkce $f(r,s) = h(x,y)$, kde $x(r,s) = r^2 + s^2$ a $y(r,s) = 5rs$, $h \in C^2(\mathbb{R}^2)$.

Mathematica:

x[r_, s_] = r^2 + s^2;
y[r_, s_] = 5rs;

Nejdříve definujeme složenou funkci f

f[r_, s_] = h[x[r, s], y[r, s]]

$h\left[r^2 + s^2, 5rs\right]$

Nyní spočteme první a druhé derivace.

derfr[r_, s_] = D[f[r, s], r]

$5sh^{(0,1)}\left[r^2 + s^2, 5rs\right] + 2rh^{(1,0)}\left[r^2 + s^2, 5rs\right]$

derfs[r_, s_] = D[f[r, s], s]

$5rh^{(0,1)}\left[r^2 + s^2, 5rs\right] + 2sh^{(1,0)}\left[r^2 + s^2, 5rs\right]$

derfrr[r_, s_] = D[f[r, s], {r, 2}]

$2h^{(1,0)}\left[r^2 + s^2, 5rs\right] + 5s\left(5sh^{(0,2)}\left[r^2 + s^2, 5rs\right] + 2rh^{(1,1)}\left[r^2 + s^2, 5rs\right]\right) +$
$2r\left(5sh^{(1,1)}\left[r^2 + s^2, 5rs\right] + 2rh^{(2,0)}\left[r^2 + s^2, 5rs\right]\right)$

Další

Příklad 6.3.3

Napište smíšenou parciální derivaci druhého řádu funkce $f(r,s) = h(x,y)$, kde $x(r,s) = r^2 + s^2$ a $y(r,s) = 5rs$, $h \in C^2(\mathbb{R}^2)$.

Mathematica:

derfrs[r_, s_] = *D*[*f*[*r*, *s*], *r*, *s*]

$$5h^{(0,1)}\left[r^2+s^2,5rs\right]+5s\left(5rh^{(0,2)}\left[r^2+s^2,5rs\right]+2sh^{(1,1)}\left[r^2+s^2,5rs\right]\right)+$$
$$2r\left(5rh^{(1,1)}\left[r^2+s^2,5rs\right]+2sh^{(2,0)}\left[r^2+s^2,5rs\right]\right)$$

derfss[r_, s_] = *D*[*f*[*r*, *s*], {*s*, 2}]

$$2h^{(1,0)}\left[r^2+s^2,5rs\right]+5r\left(5rh^{(0,2)}\left[r^2+s^2,5rs\right]+2sh^{(1,1)}\left[r^2+s^2,5rs\right]\right)+$$
$$2s\left(5rh^{(1,1)}\left[r^2+s^2,5rs\right]+2sh^{(2,0)}\left[r^2+s^2,5rs\right]\right)$$

Zde $h^{(1,1)}$ značí druhou derivaci funkce h podle první a podle druhé proměnné. Podobně ostatní symboly $h^{(2,0)}$, $h^{(1,0)}$,...

Zpět

Taylorův polynom a totální diferenciál

- Příklad 6.4.1 Najděte Taylorův polynom druhého stupně funkce $f(x, y) = x\,\mathrm{e}^y$, který aproximuje funkci f v okolí bodu $[x_0, y_0] = [2, 0]$.
- Příklad 6.4.2 Napište Taylorův polynom 2. stupně pro funkci $f(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$ v bodě $[x_0, y_0] = [1, 0]$ a pomocí něho vypočtěte přibližně hodnotu $f(1, 1; 0, 1)$.
- Příklad 6.4.3 Vypočtěte přibližnou hodnotu $\dfrac{1}{3,05^2 + 0,05}$ pomocí Taylorova polynomu druhého stupně.
- Příklad 6.4.4 Napište formálně totální diferenciál funkce: $f(x, y) = y^2 \sin x$ v bodě $[x_0, y_0]$.
- Příklad 6.4.5 Vypočtěte totální diferenciál funkce $f(x, y) = \sqrt{9x^2 + y^2}$ v bodě $[2, 8]$ pro přírůstky $dx = -0,05, dy = 0,08$.

Zpět

Příklad 6.4.1

Najděte Taylorův polynom druhého stupně funkce $f(x,y) = x\,\mathrm{e}^y$, který aproximuje funkci f v okolí bodu $[x_0, y_0] = [2, 0]$.

? Zpět

Příklad 6.4.1

Najděte Taylorův polynom druhého stupně funkce $f(x, y) = x\,\mathrm{e}^y$, který aproximuje funkci f v okolí bodu $[x_0, y_0] = [2, 0]$.

Výsledek:

$$T_2(x, y) = x + 2y + (x - 2)y + y^2.$$

Zpět

Příklad 6.4.1

Najděte Taylorův polynom druhého stupně funkce $f(x,y) = x\,\mathrm{e}^y$, který aproximuje funkci f v okolí bodu $[x_0, y_0] = [2, 0]$.

Návod:

Taylorův polynom druhého stupně T_2 v okolí bodu $[x_0, y_0]$ je definovaný vztahem

$$T_2(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)+$$

$$+\tfrac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)(x-x_0)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)(y-y_0)^2\right) .$$

Zpět

Příklad 6.4.1

Najděte Taylorův polynom druhého stupně funkce $f(x,y) = x\,\mathrm{e}^y$, který aproximuje funkci f v okolí bodu $[x_0, y_0] = [2, 0]$.

Řešení:

Do vzorce pro $T_2(x,y)$ dosadíme funkční hodnotu $f(x_0, y_0)$ a hodnoty parciálních derivací funkce f v bodě $[x_0, y_0] = [2, 0]$.

$f(2,0) = 2$,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \mathrm{e}^y \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(2,0) = 1\,,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x\,\mathrm{e}^y \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(2,0) = 2\,,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2,0) = 0\,,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \mathrm{e}^y \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(2,0) = 1\,,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x\,\mathrm{e}^y \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(2,0) = 2\,.$$

$$T_2(x,y) = 2 + 1\cdot(x-2) + 2\cdot(y-0) + \frac{1}{2!}\left(0\cdot(x-2)^2 + 2\cdot 1\cdot(x-2)(y-0) + 2\cdot(y-0)^2\right) =$$
$$= 2 + (x-2) + 2y + (x-2)y + y^2 = x + 2y + (x-2)y + y^2\,.$$

Tento polynom aproximuje funkci f v okolí bodu $[x_0, y_0] = [2, 0]$.

Zpět

Příklad 6.4.1

Najděte Taylorův polynom druhého stupně funkce $f(x,y) = x\,\mathrm{e}^y$, který aproximuje funkci f v okolí bodu $[x_0, y_0] = [2, 0]$.

Maple:

```
> f:=(x,y)->x*exp(y);
```

$$f := (x,\ y) \to x\,e^y$$

Příkaz mtaylor, narozdíl od příkazu taylor pro funkci jedné proměnné, neobsahuje zbytek.

```
> mtaylor(f(x,y),[x=2,y=0],2+1);
```

$$2\,y + x + y^2 + (x-2)\,y$$

Je možno vyjádřit jednotlivé koeficienty rozvoje:
Hodnota f $[x_0,\ y_0]$

```
> coeftayl(f(x,y),[x,y]=[2,0],[0,0]);
```

$$2$$

Koeficient u $(x - x_0)\,(y - y_0)^0$

```
> coeftayl(f(x,y),[x,y]=[2,0],[1,0]);
```

$$1$$

Koeficient u $(x - x_0)^0\,(y - y_0)$

```
> coeftayl(f(x,y),[x,y]=[2,0],[0,1]);
```

$$2$$

Koeficient u $(x - x_0)^2\,(y - y_0)^0$

```
> coeftayl(f(x,y),[x,y]=[2,0],[2,0]);
```

$$0$$

Další

Příklad 6.4.1

Najděte Taylorův polynom druhého stupně funkce $f(x,y) = x\,\mathrm{e}^y$, který aproximuje funkci f v okolí bodu $[x_0, y_0] = [2, 0]$.

Maple:

Koeficient u $(x - x_0)\,(y - y_0)$

```
> coeftayl(f(x,y),[x,y]=[2,0],[1,1]);
```

$$1$$

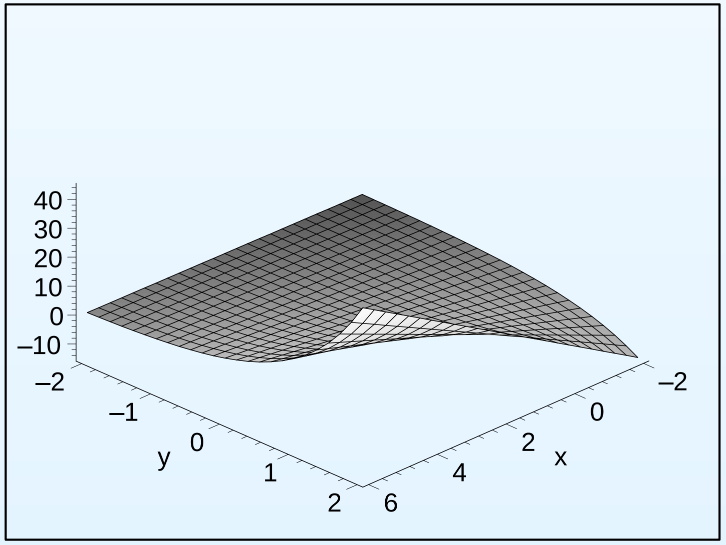
Koeficient u $(x - x_0)^0\,(y - y_0)^2$

```
> coeftayl(f(x,y),[x,y]=[2,0],[0,2]);
```

$$1$$

Průběh funkce v okolí bodu $[x_0,\ y_0]$ lze ukázat pomocí grafu

```
> with(plots):plot3d(f(x,y),x=-2..6,y=-2..2,axes=framed);
```



Další

Příklad 6.4.1

Najděte Taylorův polynom druhého stupně funkce $f(x, y) = x\,\mathrm{e}^y$, který aproximuje funkci f v okolí bodu $[x_0, y_0] = [2, 0]$.

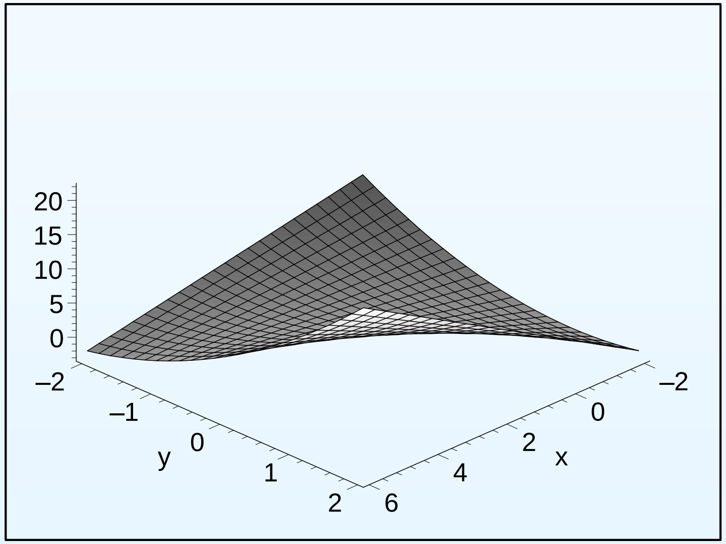
Maple:

Průběh aproximujícího Taylorova polynomu v okolí bodu $[x_0,\ y_0]$ lze ukázat pomocí grafu

```
>   T2:=(x,y)->mtaylor(f(x,y),[x=2,y=0],2+1);
```

$$T2 := (x,\ y) \to \mathrm{mtaylor}(\mathrm{f}(x,\ y),\ [x = 2,\ y = 0],\ 3)$$

```
>   with(plots):plot3d(T2(x,y),x=-2..6,y=-2..2,axes=framed);
```



Zpět

Příklad 6.4.1

Najděte Taylorův polynom druhého stupně funkce $f(x, y) = x\,\mathrm{e}^y$, který aproximuje funkci f v okolí bodu $[x_0, y_0] = [2, 0]$.

Mathematica:

f[x_, y_] = xExp[y];

x0 = 2; y0 = 0;

Výpočet Taylorova polynomu:

T2[x_, y_] = f[x0, y0] + Derivative[1, 0][f][x0, y0](x − x0) + Derivative[0, 1][f][x0, y0](y − y0)+ 1/2(Derivative[2, 0][f][x0, y0](x − x0)^2 + 2Derivative[1, 1][f][x0, y0](x − x0)(y − y0)+ Derivative[0, 2][f][x0, y0](y − y0)^2)

$x + 2y + \frac{1}{2}\left(2(-2 + x)y + 2y^2\right)$

Zpět

Příklad 6.4.2

Napište Taylorův polynom 2. stupně pro funkci $f(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$ v bodě $[x_0, y_0] = [1, 0]$ a pomocí něho vypočtěte přibližně hodnotu $f(1,1; 0,1)$.

? Zpět

Příklad 6.4.2

Napište Taylorův polynom 2. stupně pro funkci $f(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$ v bodě $[x_0, y_0] = [1, 0]$ a pomocí něho vypočtěte přibližně hodnotu $f(1,1; 0,1)$.

Výsledek:

$$T_2(x) = \sin(1) + 2\cos(1)(x-1) + (\cos(1) - 2\sin(1))(x-1)^2 + \cos(1)y^2\,,$$

$$f(1,1;0,1) \doteq T_2(1,1;0,1) \doteq 0,943508.$$

Zpět

Příklad 6.4.2

Napište Taylorův polynom 2. stupně pro funkci $f(x,y)=\sin(x^2+y^2)$ v bodě $[x_0,y_0]=[1,0]$ a pomocí něho vypočtěte přibližně hodnotu $f(1,1;0,1)$.

Návod:

Taylorův polynom druhého stupně T_2 v okolí bodu $[x_0,y_0]$ je definovaný vztahem

$$T_2(x,y)=f(x_0,y_0)+\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)+$$

$$+\tfrac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)(x-x_0)^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0)+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)(y-y_0)^2\right)\ .$$

Zpět

Příklad 6.4.2

Napište Taylorův polynom 2. stupně pro funkci $f(x,y)=\sin(x^2+y^2)$ v bodě $[x_0,y_0]=[1,0]$ a pomocí něho vypočtěte přibližně hodnotu $f(1,1;0,1)$.

Řešení:

Do vzorce pro $T_2(x,y)$ dosadíme funkční hodnotu $f(x_0,y_0)$ a hodnoty parciálních derivací funkce f v bodě $[x_0,y_0]=[1,0]$

$f(1,0)=\sin(1)$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2x\cos(x^2+y^2) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(1,0)=2\cos(1)\,,$$

$$\tfrac{\partial f}{\partial y}=2y\cos(x^2+y^2) \qquad \Rightarrow \qquad \tfrac{\partial f}{\partial y}(1,0)=0\,,$$

$$\tfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=2\cos(x^2+y^2)-4x^2\sin(x^2+y^2) \qquad \Rightarrow \qquad \tfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,0)=2\cos(1)-4\sin(1)\,,$$

$$\tfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-4xy\sin(x^2+y^2) \qquad \Rightarrow \qquad \tfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(1,0)=0\,,$$

$$\tfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2\cos(x^2+y^2)-4y^2\sin(x^2+y^2) \qquad \Rightarrow \qquad \tfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,0)=2\cos(1)\,.$$

$$T_2(x,y)=\sin(1)+2\cos(1)(x-1)+0\cdot y+$$

$$+\tfrac{1}{2!}\left(2(\cos(1)-2\sin(1))(x-1)^2+2\cdot 0\cdot(x-1)y+2\cos(1)y^2\right)=$$

$$=\sin(1)+2\cos(1)(x-1)+(\cos(1)-2\sin(1))(x-1)^2+\cos(1)y^2.$$

Další

Příklad 6.4.2

Napište Taylorův polynom 2. stupně pro funkci $f(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$ v bodě $[x_0, y_0] = [1, 0]$ a pomocí něho vypočtěte přibližně hodnotu $f(1,1; 0,1)$.

Řešení:

Tento polynom aproximuje funkci f v okolí bodu $[x_0, y_0] = [2, 0]$.

Přibližnou hodnotu funkce $f(1,1; 0,1)$ vypočteme dosazením bodu [1,1; 0,1] do vypočteného Taylorova polynomu. Tedy

$f(1,1; 0,1) \doteq T_2(1,1; 0,1) =$

$= \sin(1) + 2\cos(1)(0,1) + (\cos(1) - 2\sin(1))(0,1)^2 + \cos(1)(0,1)^2 \doteq 0,943508.$

Zpět

Příklad 6.4.2

Napište Taylorův polynom 2. stupně pro funkci $f(x,y) = \sin(x^2+y^2)$ v bodě $[x_0,y_0] = [1,0]$ a pomocí něho vypočtěte přibližně hodnotu $f(1,1;0,1)$.

Maple:

```
> f:= (x,y) -> sin(x^2+y^2);
```

$$f := (x,\ y) \to \sin(x^2+y^2)$$

```
> mtaylor(f(x,y),[x=1,y=0],2+1);
```

$$\sin(1) + 2\cos(1)\,(x-1) + (-2\sin(1)+\cos(1))\,(x-1)^2 + \cos(1)\,y^2$$

```
> T2:= (x,y) ->mtaylor(f(x,y),[x=1,y=0],2+1);
```

$$T2 := (x,\ y) \to \mathrm{mtaylor}(\mathrm{f}(x,\ y),\ [x=1,\ y=0],\ 3)$$

Přibližnou hodnotu funkce f(1,1; 0,1) vypočteme dosazením bodu [1,1; 0,1] do tohoto Taylorova polynomu.

```
> subs(x=1.1,y=0.1,T2(x,y));
```

$$0.98\sin(1) + 0.22\cos(1)$$

```
> simplify(%);
```

$$0.9435080724$$

Skutečná hodnota funkce f(1,1; 0,1) je (zaokrouhleno na 10 desetinných míst):

```
> f(1.1, 0.1);
```

$$0.9390993563$$

Zpět

Příklad 6.4.2

Napište Taylorův polynom 2. stupně pro funkci $f(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$ v bodě $[x_0, y_0] = [1, 0]$ a pomocí něho vypočtěte přibližně hodnotu $f(1,1; 0,1)$.

Mathematica:

f[x_, y_] = Sin[x^2 + y^2];

x0 = 1; y0 = 0;

T2[x_, y_] = f[x0, y0] + Derivative[1, 0][f][x0, y0](x − x0) + Derivative[0, 1][f][x0, y0](y − y0)+ 1/2(Derivative[2, 0][f][x0, y0](x − x0)^2 + 2Derivative[1, 1][f][x0, y0](x − x0)(y − y0)+ Derivative[0, 2][f][x0, y0](y − y0)^2)

$2(-1 + x)\mathrm{Cos}[1] + \frac{1}{2}\left(2y^2\mathrm{Cos}[1] + (-1 + x)^2(2\mathrm{Cos}[1] - 4\mathrm{Sin}[1])\right) + \mathrm{Sin}[1]$

Přibližnou hodnotu funkce f(1,1; 0,1) vypočteme dosazením bodu [1,1; 0,1] do tohoto Taylorova polynomu.

T2[1.1, 0.1]

0.943508

Skutečná hodnota funkce f(1,1; 0,1) je (zaokrouhleno na 6 desetinných míst):

f[1.1, 0.1]

0.939099

Zpět

Příklad 6.4.3

Vypočtěte přibližnou hodnotu $\dfrac{1}{3,05^2 + 0,05}$ pomocí Taylorova polynomu druhého stupně.

? Zpět

Příklad 6.4.3

Vypočtěte přibližnou hodnotu $\dfrac{1}{3,05^2+0,05}$ pomocí Taylorova polynomu druhého stupně.

Výsledek:

$$T_2(x) = \frac{1}{9} - \frac{2}{27}(x-3) - \frac{1}{81}y + \frac{1}{27}(x-3)^2 + \frac{4}{243}(x-3)y + \frac{1}{729}y^2\,,$$

$$\frac{1}{3,05^2+0,05} \doteq T_2(3,05;0,05) \doteq 0,106927.$$

Zpět

Příklad 6.4.3

Vypočtěte přibližnou hodnotu $\dfrac{1}{3,05^2+0,05}$ pomocí Taylorova polynomu druhého stupně.

Návod:

Taylorův polynom druhého stupně T_2 v okolí bodu $[x_0, y_0]$ je definovaný vztahem

$$T_2(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) +$$

$$+\tfrac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)(x-x_0)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)(y-y_0)^2\right).$$

Zpět

Příklad 6.4.3

Vypočtěte přibližnou hodnotu $\frac{1}{3,05^2 + 0,05}$ pomocí Taylorova polynomu druhého stupně.

Řešení:

Položíme $f(x,y) = \frac{1}{x^2 + y}$ a zvolíme bod $[x_0, y_0] = [3,0]$. Do vzorce pro $T_2(x,y)$ dosadíme funkční hodnotu $f(x_0,y_0)$ a hodnoty parciálních derivací funkce f v bodě $[x_0, y_0] = [3,0]$

$$f(3,0) = \frac{1}{9}\,,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-2x}{(x^2+y)^2} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(3,0) = \frac{-2}{27}\,,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-1}{(x^2+y)^2} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(3,0) = \frac{-1}{81}\,,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{8x(x^2+y) - 2(x^2+y)}{(x^2+y)^4} = \frac{8x^2}{(x^2+y)^3} - \frac{2}{(x^2+y)^2} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(3,0) = \frac{2}{27}\,,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{4x}{(x^2+y)^3} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(3,0) = \frac{4}{243}\,,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{2}{(x^2+y)^3} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(3,0) = \frac{2}{729}\,.$$

Další

Příklad 6.4.3

Vypočtěte přibližnou hodnotu $\dfrac{1}{3,05^2 + 0,05}$ pomocí Taylorova polynomu druhého stupně.

Řešení:

$$T_2(x,y) = \frac{1}{9} - \frac{2}{27}(x-3) - \frac{1}{81}y + \frac{1}{27}(x-3)^2 + \frac{4}{243}(x-3)y + \frac{1}{729}y^2\,.$$

Přibližnou hodnotu $f(3,05;0,05)$ vypočteme dosazením bodu [3,05; 0,05] do vypočteného Taylorova polynomu. Tedy

$$f(3,05;0,05) \doteq T_2(3,05;0,05) =$$

$$= \frac{1}{9} - \frac{2}{27}0,05 - \frac{1}{81}0,05 + \frac{1}{27}(0,05)^2 + \frac{4}{243}0,05 \cdot 0,05 + \frac{1}{729}(0,05)^2 \doteq 0,106927\,.$$

Zpět

Příklad 6.4.3

Vypočtěte přibližnou hodnotu $\dfrac{1}{3,05^2+0,05}$ pomocí Taylorova polynomu druhého stupně.

Maple:

Zvolíme bod [3,0] a funkci f

```
> f:=(x,y)->1/(x^2+y);
```

$$f := (x,\ y) \to \frac{1}{x^2+y}$$

Ověříme správnost vypočtených parciálních derivací:

```
> fx:= diff(f(x,y),x) ;
```

$$fx := -\frac{2\,x}{(x^2+y)^2}$$

```
> fy:= diff(f(x,y),y) ;
```

$$fy := -\frac{1}{(x^2+y)^2}$$

```
> fxx:= diff(f(x,y),x$2);
```

$$fxx := \frac{8\,x^2}{(x^2+y)^3} - \frac{2}{(x^2+y)^2}$$

```
> fyy:= diff(f(x,y),y$2);
```

$$fyy := \frac{2}{(x^2+y)^3}$$

Další

Příklad 6.4.3

Vypočtěte přibližnou hodnotu $\dfrac{1}{3,05^2+0,05}$ pomocí Taylorova polynomu druhého stupně.

Maple:

```
> fxy:= diff(f(x,y),x,y);
```

$$fxy := \frac{4\,x}{(x^2+y)^3}$$

Taylorův polynom v bodě [3,0] vypočteme přímo příkazem:

```
> mtaylor(f(x,y),[x=3,y=0],2+1);
```

$$\frac{1}{3}-\frac{2\,x}{27}-\frac{y}{81}+\frac{(x-3)^2}{27}+\frac{4\,(x-3)\,y}{243}+\frac{y^2}{729}$$

```
> T2:= (x,y) ->mtaylor(f(x,y),[x=3,y=0],2+1);
```

$$T2 := (x,\ y) \to \mathrm{mtaylor}(\mathrm{f}(x,\ y),\ [x=3,\ y=0],\ 3)$$

Přibližnou hodnotu funkce f(3,05; 0,05) vypočteme dosazením bodu [3,05; 0.05] do tohoto Taylorova polynomu.

```
> subs(x=3.05,y=0.05,T2(x,y));
```

$$0.1069272977$$

Skutečná hodnota funkce f(3,05; 0,05) je (zaokrouhleno na 10 desetinných míst):

```
> f(3.05, 0.05);
```

$$0.1069232825$$

Zpět

Příklad 6.4.3

Vypočtěte přibližnou hodnotu $\dfrac{1}{3,05^2+0,05}$ pomocí Taylorova polynomu druhého stupně.

Mathematica:

Zvolíme bod [3,0] a funkci $f(x,y)=\frac{1}{x^2+y}$

$\boldsymbol{f[\mathrm{x\_},\mathrm{y\_}]=1/(x\verb|^|2+y);}$
$\mathbf{x0=3;y0=0;}$

Výpočet Taylorova polynomu:

T2[x_, y_] = f[x0, y0] + Derivative[1, 0][f][x0, y0](x − x0) + Derivative[0, 1][f][x0, y0](y − y0)+ 1/2(Derivative[2, 0][f][x0, y0](x − x0)^2 + 2Derivative[1, 1][f][x0, y0](x − x0)(y − y0)+ Derivative[0, 2][f][x0, y0](y − y0)^2)

$\frac{1}{9}-\frac{2}{27}(-3+x)-\frac{y}{81}+\frac{1}{2}\left(\frac{2}{27}(-3+x)^2+\frac{8}{243}(-3+x)y+\frac{2y^2}{729}\right)$

Přibližnou hodnotu $\frac{1}{(3.05)^2+0.05}$ vypočteme dosazením bodu [3,05; 0,05] do Taylorova polynomu.

T2[3.05, 0.05]

0.106927

Skutečná hodnota:

f[3.05, 0.05]

0.106923

Zpět

Příklad 6.4.4

Napište formálně totální diferenciál funkce: $f(x,y) = y^2 \sin x$ v bodě $[x_0, y_0]$.

? Zpět

Příklad 6.4.4

Napište formálně totální diferenciál funkce: $f(x, y) = y^2 \sin x$ v bodě $[x_0, y_0]$.

Výsledek:

$\mathrm{d}f(x_0, y_0) = y_0^2 \cos x_0 \, \mathrm{d}x + 2y_0 \sin x_0 \, \mathrm{d}y$.

Zpět

Příklad 6.4.4

Napište formálně totální diferenciál funkce: $f(x,y) = y^2 \sin x$ v bodě $[x_0, y_0]$.

Návod:

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y\,.$$

Zpět

Příklad 6.4.4

Napište formálně totální diferenciál funkce: $f(x,y) = y^2 \sin x$ v bodě $[x_0, y_0]$.

Řešení:

Protože $\dfrac{\partial f}{\partial x} = y^2 \cos x\,, \quad \dfrac{\partial f}{\partial y} = 2y \sin x\,,$

je $\quad \mathrm{d}f(x_0, y_0) = y_0^2 \cos x_0 \; \mathrm{d}x + 2y_0 \sin x_0 \; \mathrm{d}y\,.$

Zpět

Příklad 6.4.4

Napište formálně totální diferenciál funkce: $f(x,y) = y^2 \sin x$ v bodě $[x_0, y_0]$.

Maple:

```
> f:= (x,y) -> y^2*sin(x);
```

$$f := (x,\ y) \to y^2 \sin(x)$$

```
> 'df' = 'fx'*dx + 'fy'*dy ;
```

$$df = fx\ dx + fy\ dy$$

Vyjádříme parciální derivace a dosadíme do nich bod $[x_0,\ y_0]$.

```
> fx :=subs({x=x0,y=y0},diff(f(x,y),x));
```

$$fx := y0^2 \cos(x0)$$

```
> fy :=subs({x=x0,y=y0},diff(f(x,y),y));
```

$$fy := 2\, y0 \sin(x0)$$

Totální diferenciál je výraz

```
> df := fx*dx+fy*dy;
```

$$df := y0^2 \cos(x0)\, dx + 2\, y0 \sin(x0)\, dy$$

Zpět

Příklad 6.4.4

Napište formálně totální diferenciál funkce: $f(x, y) = y^2 \sin x$ v bodě $[x_0, y_0]$.

Mathematica:

$\boldsymbol{f[\mathrm{x\_}, \mathrm{y\_}] = y\hat{}2\mathrm{Sin}[x];}$

Výpočet totálního diferenciálu:

df = Derivative[1, 0][*f*][x0, y0]dx+Derivative[0, 1][*f*][x0, y0]dy

$\mathrm{dxy0}^2\mathrm{Cos}[\mathrm{x0}] + 2\mathrm{dyy0Sin}[\mathrm{x0}]$

Výpočet pomocí funkce Dt[f] pro výpočet totálního diferenciálu:

$\mathbf{Dt}[\boldsymbol{f}[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}]]/.\{\boldsymbol{x} \to \mathbf{x0}, \boldsymbol{y} \to \mathbf{y0}\}$

$\mathrm{y0}^2\mathrm{Cos}[\mathrm{x0}]\mathrm{Dt}[\mathrm{x0}] + 2\mathrm{y0Dt}[\mathrm{y0}]\mathrm{Sin}[\mathrm{x0}]$

Dt[x0] značí dx a Dt[y0] značí dy

Zpět

Příklad 6.4.5

Vypočtěte totální diferenciál funkce $f(x,y) = \sqrt{9x^2 + y^2}$ v bodě $[2,8]$ pro přírůstky $dx = -0,05, dy = 0,08$.

? Zpět

Příklad 6.4.5

Vypočtěte totální diferenciál funkce $f(x,y)=\sqrt{9x^2+y^2}$ v bodě $[2,8]$ pro přírůstky $dx=-0,05, dy=0,08$.

Výsledek:

$\mathrm{d}f(2,8)=-0,026$.

Zpět

Příklad 6.4.5

Vypočtěte totální diferenciál funkce $f(x, y) = \sqrt{9x^2 + y^2}$ v bodě $[2, 8]$ pro přírůstky $dx = -0,05, dy = 0,08$.

Návod:

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y\,.$$

Zpět

Příklad 6.4.5

Vypočtěte totální diferenciál funkce $f(x,y) = \sqrt{9x^2 + y^2}$ v bodě $[2,8]$ pro přírůstky $dx = -0,05, dy = 0,08$.

Řešení:

Protože

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{9x}{\sqrt{9x^2 + y^2}} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(2,8) = \frac{18}{10} = 1,8\,,$$

$$\tfrac{\partial f}{\partial y} = \tfrac{y}{\sqrt{9x^2+y^2}} \qquad \Rightarrow \qquad \tfrac{\partial f}{\partial y}(2,8) = \tfrac{8}{10} = 0,8$$

je $\quad \mathrm{d}f(2,8) = 1,8\ \mathrm{d}x + 0,8\ \mathrm{d}y = 1,8 \cdot (-0,05) + 0,8 \cdot 0,08 = -0,026\,.$

Zpět

Příklad 6.4.5

Vypočtěte totální diferenciál funkce $f(x,y) = \sqrt{9x^2 + y^2}$ v bodě $[2,8]$ pro přírůstky $dx = -0,05, dy = 0,08$.

Maple:

```
> f := (x,y) -> sqrt(9*x^2+y^2);
```

$$f := (x,\, y) \to \sqrt{9\,x^2 + y^2}$$

Napíšeme formálně totální diferenciál funkce

```
> 'df' = 'fx'*dx + 'fy'*dy ;
```

$$df = fx\;dx + fy\;dy$$

a dosadíme

```
> fx :=subs({x=2,y=8},diff(f(x,y),x));
```

$$fx := \frac{9\,\sqrt{100}}{50}$$

```
> fy :=subs({x=2,y=8},diff(f(x,y),y));
```

$$fy := \frac{2\,\sqrt{100}}{25}$$

```
> dx := -0.05; dy := 0.08;
```

$$dx := -0.05$$

$$dy := 0.08$$

Totální diferenciál je výraz

```
> df := fx*dx+fy*dy;
```

$$df := -0.002600000000\,\sqrt{100}$$

Další

Příklad 6.4.5

Vypočtěte totální diferenciál funkce $f(x,y) = \sqrt{9x^2 + y^2}$ v bodě $[2,8]$ pro přírůstky $dx = -0,05, dy = 0,08$.

Maple:

```
> simplify(%);
```

$$-0.02600000000$$

Zpět

Příklad 6.4.5

Vypočtěte totální diferenciál funkce $f(x, y) = \sqrt{9x^2 + y^2}$ v bodě $[2, 8]$ pro přírůstky $dx = -0,05, dy = 0,08$.

Mathematica:

f[x_, y_] = Sqrt[9x^2 + y^2];

Výpočet totálního diferenciálu:

df = Derivative[1, 0][f][x0, y0]dx+Derivative[0, 1][f][x0, y0]dy

$$\frac{9\mathrm{dx}\ \mathrm{x0}}{\sqrt{9\mathrm{x0}^2+\mathrm{y0}^2}} + \frac{\mathrm{dy}\ \mathrm{y0}}{\sqrt{9\mathrm{x0}^2+\mathrm{y0}^2}}$$

Dosazení za x_0, y_0, x, y :

df/.{x0 → 2, y0 → 8, dx → −0.05, dy → 0.08}

-0.026

Zpět

Newtonova metoda

- Příklad 6.5.1 Newtonovou metodou vypočtěte první aproximaci řešení soustavy nelineárních rovnic
  $x^2 + y^2 = 1\,, \quad \sin x = y\ .$
  Pro výpočet kořene ve III. kvadrantu zvolte nultou aproximaci $x_0 = -1\,,\ y_0 = -1\,.$

- Příklad 6.5.2 Newtonovou metodou vypočtěte první aproximaci řešení soustavy nelineárních rovnic
  $$\begin{aligned} x - y^2 - 1 &= 0 \\ 2x^2 - y &= 0\,. \end{aligned}$$
  Pro výpočet kořene zvolte nultou aproximaci $\left[\frac{1}{2}\,,\ \frac{1}{2}\right]$.

Příklad 6.5.1

Newtonovou metodou vypočtěte první aproximaci řešení soustavy nelineárních rovnic
$x^2 + y^2 = 1\,, \quad \sin x = y\;.$
Pro výpočet kořene ve III. kvadrantu zvolte nultou aproximaci $x_0 = -1\,,\ y_0 = -1\,.$

? Zpět

Příklad 6.5.1

Newtonovou metodou vypočtěte první aproximaci řešení soustavy nelineárních rovnic
$x^2 + y^2 = 1\,, \quad \sin x = y\ .$
Pro výpočet kořene ve III. kvadrantu zvolte nultou aproximaci $x_0 = -1\,,\ y_0 = -1\,.$

Výsledek:

Soustava má dvě řešení $\mathbf{X}\,,\ \widetilde{\mathbf{X}}$. První aproximace řešení soustavy ve III. kvadrantu je $\mathbf{X_1} \doteq [-0,778309; -0,721691]$. Po dvou dalších iteracích provedených v Maplu (lze rovněž pomocí příkazu fsolve) lze výsledek

$$\mathbf{X} \doteq [-0,739085; -0,673612]\ ,\ \widetilde{\mathbf{X}} \doteq [0,739085; 0,673612]\,.$$

pokládat za řešení soustavy.

Zpět

Příklad 6.5.1

Newtonovou metodou vypočtěte první aproximaci řešení soustavy nelineárních rovnic
$x^2 + y^2 = 1\,, \quad \sin x = y\ .$
Pro výpočet kořene ve III. kvadrantu zvolte nultou aproximaci $x_0 = -1\,,\ y_0 = -1\,.$

Návod:

Nechť je dána soustava rovnic

$$\begin{aligned} f_1(x,y) &= 0 \\ f_2(x,y) &= 0\,. \end{aligned}$$

Ze soustavy lineárních algebraických rovnic

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(\mathbf{X_0}) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(\mathbf{X_0}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(\mathbf{X_0}) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(\mathbf{X_0}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_x \\ \Delta_y \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{X_0}) \\ f_2(\mathbf{X_0}) \end{bmatrix}\,,$$

kde $\mathbf{X_0} = [x_0, y_0]$ je počáteční "přiblížení", vypočítáme $\mathbf{\Delta X} = [\Delta_x\,, \Delta_y]\,.$ Potom
$\mathbf{X_1} = \mathbf{X_0} + \mathbf{\Delta X}$ je první další přiblížení soustavy nelineárních rovnic.

Zpět

Příklad 6.5.1

Newtonovou metodou vypočtěte první aproximaci řešení soustavy nelineárních rovnic
$x^2 + y^2 = 1\,, \quad \sin x = y\,.$
Pro výpočet kořene ve III. kvadrantu zvolte nultou aproximaci $x_0 = -1\,,\ y_0 = -1\,.$

Řešení:

Z grafického znázornění (v Maplu) je zřejmé, že má soustava dvě řešení navzájem symetrická vůči počátku.
Je zadáno počáteční přiblížení $\mathbf{X_0} = [-1, -1]$ k řešení soustavy ve III. kvadrantu.
Přepíšeme soustavu a řešíme Newtonovou metodou

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 1 &= 0 \\ y - \sin x &= 0\,, \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 2x_0 & 2y_0 \\ -\cos x_0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_x \\ \Delta_y \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} x_0^2 + y_0^2 - 1 \\ y_0 - \sin x_0 \end{bmatrix}.$$

Tedy

$$\begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -\cos(-1) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_x \\ \Delta_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 + \sin(-1) \end{bmatrix}.$$

Řešíme-li soustavu lineárních algebraických rovnic dostáváme

$$\begin{bmatrix} \Delta_x \\ \Delta_y \end{bmatrix} \doteq \begin{bmatrix} 0,221691 \\ 0,278309 \end{bmatrix},$$

Další

Příklad 6.5.1

Newtonovou metodou vypočtěte první aproximaci řešení soustavy nelineárních rovnic
$x^2 + y^2 = 1\,, \quad \sin x = y\ .$
Pro výpočet kořene ve III. kvadrantu zvolte nultou aproximaci $x_0 = -1\,,\ y_0 = -1\,.$

Řešení:

tedy aproximace prvního kořene je $\mathbf{X_1} \doteq [-0,778309; -0,721691]\ .$

Odvodíme aproximaci druhého kořene, tedy $[0,778309; 0,721691]$, nebo tento kořen spočítáme Newtonovou metodou při zadání počátečního přiblížení $[1,1]$.

Zpět

Příklad 6.5.1

Newtonovou metodou vypočtěte první aproximaci řešení soustavy nelineárních rovnic
$x^2 + y^2 = 1\,, \quad \sin x = y\ .$
Pro výpočet kořene ve III. kvadrantu zvolte nultou aproximaci $x_0 = -1\,,\ y_0 = -1\,.$

Maple:

```
> with(linalg):
> f1:= x^2 + y^2 - 1;
```

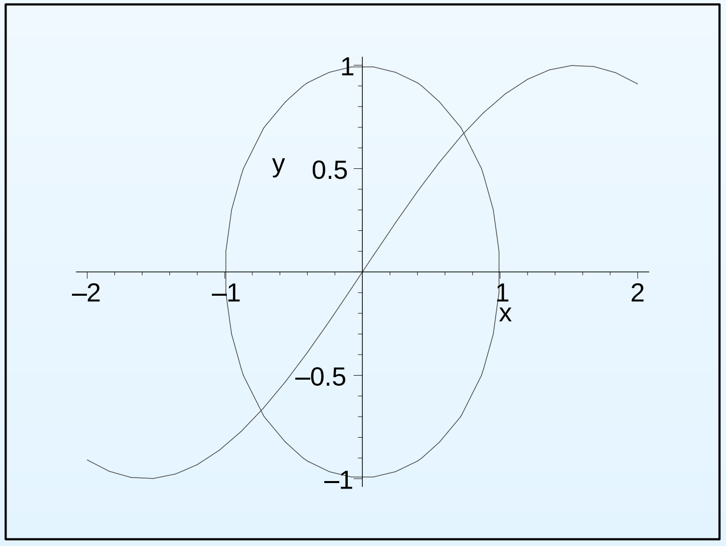
$$f1 := x^2 + y^2 - 1$$

```
> f2:=y - sin(x);
```

$$f2 := y - \sin(x)$$

Obě funkce znázorníme graficky.

```
> plots[implicitplot]({f1=0,f2=0},x=-2..2,y=-2.5..2.5);
```



Úloha má 2 řešení symetrické podle počátku.

Další

Příklad 6.5.1

Newtonovou metodou vypočtěte první aproximaci řešení soustavy nelineárních rovnic
$x^2 + y^2 = 1\,, \quad \sin x = y\ .$
Pro výpočet kořene ve III. kvadrantu zvolte nultou aproximaci $x_0 = -1\,,\ y_0 = -1\,.$

Maple:

```
> f := vector([f1,f2]);
```

$$f := [x^2 + y^2 - 1,\ y - \sin(x)]$$

Vypočtěme matici parciálnich derivací vektorové funkce f.

```
> Df := jacobian(f,[x,y]);
```

$$Df := \begin{bmatrix} 2\,x & 2\,y \\ -\cos(x) & 1 \end{bmatrix}$$

Pro výpočet jednoho ze dvou kořenů ve III. kvadrantu zvolme nultou aproximaci [-1,-1].

```
> Aprox[0]:=[-1.0,-1.0];
```

$$Aprox_0 := [-1.0,\ -1.0]$$

```
> J[0]:=subs(x=Aprox[0][1],y=Aprox[0][2],evalm(Df));
```

$$J_0 := \begin{bmatrix} -2.0 & -2.0 \\ -\cos(-1.0) & 1 \end{bmatrix}$$

```
> F[0]:=subs(x=Aprox[0][1],y=Aprox[0][2],evalm(f));
```

$$F_0 := [1.00,\ -1.0 - \sin(-1.0)]$$

Další

Příklad 6.5.1

Newtonovou metodou vypočtěte první aproximaci řešení soustavy nelineárních rovnic
$x^2 + y^2 = 1\,, \quad \sin x = y\ .$
Pro výpočet kořene ve III. kvadrantu zvolte nultou aproximaci $x_0 = -1\,,\ y_0 = -1\,.$

Maple:

Řešíme soustavu lineárních algebraických rovnic

```
> DX:=linsolve(J[0],-F[0]);
```

$$DX := [0.2216908872,\ 0.2783091128]$$

```
> Aprox[1]:=evalm(Aprox[0]+DX);
```

$$Aprox_1 := [-0.7783091128,\ -0.7216908872]$$

Pomocí Maplu uděláme ještě několik (nmax) dalších aproximací, (zvolíme nmax = 2).

```
> nmax:=2;
```

$$nmax := 2$$

```
> for n from 1 to nmax do
> J[n]:=subs(x=Aprox[n][1],y=Aprox[n][2],evalm(Df));
> F[n]:=subs(x=Aprox[n][1],y=Aprox[n][2],evalm(f));
> DX:=linsolve(J[n],-F[n]);
> Aprox[n+1]:= evalm(Aprox[n]+DX);
> end do;
```

Další

Příklad 6.5.1

Newtonovou metodou vypočtěte první aproximaci řešení soustavy nelineárních rovnic
$x^2 + y^2 = 1\,, \quad \sin x = y\,.$
Pro výpočet kořene ve III. kvadrantu zvolte nultou aproximaci $x_0 = -1\,,\ y_0 = -1\,.$

Maple:

$$J_1 := \begin{bmatrix} -1.556618226 & -1.443381774 \\ -\cos(-0.7783091128) & 1 \end{bmatrix}$$

$$F_1 := [0.1266028118,\ -0.7216908872 - \sin(-0.7783091128)]$$

$$DX := [0.03803185367,\ 0.04669709457]$$

$$Aprox_2 := [-0.7402772591,\ -0.6749937926]$$

$$J_2 := \begin{bmatrix} -1.480554518 & -1.349987585 \\ -\cos(-0.7402772591) & 1 \end{bmatrix}$$

$$F_2 := [0.0036270403,\ -0.6749937926 - \sin(-0.7402772591)]$$

$$DX := [0.001191042484,\ 0.001380484524]$$

$$Aprox_3 := [-0.7390862166,\ -0.6736133081]$$

Druhý kořen I. kvadrantu je symetrický podle počátku. Ověříme ho výpočtem přímo pomocí příkazu fsolve:

```
> koren2:=fsolve({f1,f2},{x=1,y=1});
```

$$koren2 := \{x = 0.7390851332,\ y = 0.6736120292\}$$

Zpět

Příklad 6.5.1

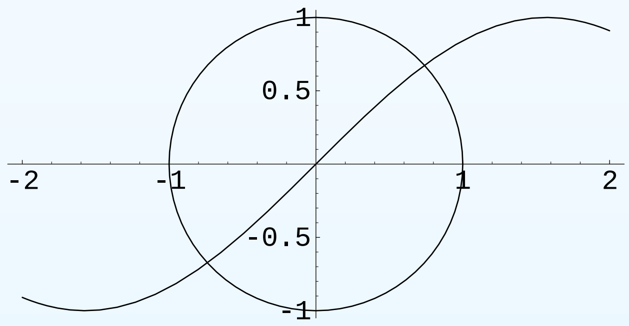
Newtonovou metodou vypočtěte první aproximaci řešení soustavy nelineárních rovnic
$x^2 + y^2 = 1\,, \quad \sin x = y\;.$
Pro výpočet kořene ve III. kvadrantu zvolte nultou aproximaci $x_0 = -1\,,\ y_0 = -1\,.$

Mathematica:

f1[x_, y_] = x^2 + y^2 − 1;f2[x_, y_] = Sin[x] − y;

<< Graphics`ImplicitPlot`

ImplicitPlot[{f1[x, y] == 0, f2[x, y] == 0}, {x, −2, 2}];



Z grafického znázornění vyplývá, že soustava má dvě řešení.

Jacobf = Outer[D, {f1[x, y], f2[x, y]}, {x, y}]

$\{\{2x, 2y\}, \{\mathrm{Cos}[x], -1\}\}$

***F*[x_, y_] = {f1[x, y], f2[x, y]};**

Další

Příklad 6.5.1

Newtonovou metodou vypočtěte první aproximaci řešení soustavy nelineárních rovnic
$x^2 + y^2 = 1\,, \quad \sin x = y\ .$
Pro výpočet kořene ve III. kvadrantu zvolte nultou aproximaci $x_0 = -1\,,\ y_0 = -1\,.$

Mathematica:

x0 = −1; y0 = 0;

reseni = {{"i", "xi", "yi"}, {0, x0, y0}};

nmax = 2;

Program pro výpočet řešení pomocí Newtonovy metody:

**For[*i* = 1, *i* ≤ nmax,{dX = LinearSolve[*N*[Jacobf/.{*x* → x0, *y* → y0}],
N[−*F*[x0, y0]]];x1 = *N*[x0 + dX[[1]]]; y1 = *N*[y0 + dX[[2]]];
reseni = Join[reseni, {{*i*, x1, y1}}]; x0 = x1;y0 = y1; *i* = *i* + 1}]**

Řešení:

MatrixForm[reseni]

$$\begin{pmatrix} i & \xi & \text{yi} \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1. & -0.841471 \\ 2 & -0.756617 & -0.709971 \end{pmatrix}$$

Zpět

Příklad 6.5.2

Newtonovou metodou vypočtěte první aproximaci řešení soustavy nelineárních rovnic

$$
\begin{aligned}
x - y^2 - 1 &= 0 \\
2x^2 - y &= 0\,.
\end{aligned}
$$

Pro výpočet kořene zvolte nultou aproximaci $\left[\frac{1}{2}\,,\,\frac{1}{2}\right]$.

? Zpět

Příklad 6.5.2

Newtonovou metodou vypočtěte první aproximaci řešení soustavy nelineárních rovnic

$$x - y^2 - 1 = 0$$
$$2x^2 - y = 0\,.$$

Pro výpočet kořene zvolte nultou aproximaci $\left[\frac{1}{2}\,,\ \frac{1}{2}\right]$.

Výsledek:

První "aproximace" řešení soustavy je $\mathbf{X_1} \doteq \left[-\dfrac{1}{4}\,,\ -1\right]$. Soustava však nemá řešení (viz grafické znázornění). Po několika dalších iteracích metody provedených v Maplu je zřejmé, že proces nekonverguje.

Zpět

Příklad 6.5.2

Newtonovou metodou vypočtěte první aproximaci řešení soustavy nelineárních rovnic

$$x - y^2 - 1 = 0$$
$$2x^2 - y = 0\,.$$

Pro výpočet kořene zvolte nultou aproximaci $\left[\frac{1}{2}\,,\ \frac{1}{2}\right]$.

Návod:

Nechť je dána soustava rovnic

$$\begin{aligned} f_1(x,y) &= 0 \\ f_2(x,y) &= 0\,. \end{aligned}$$

Ze soustavy lineárních algebraických rovnic

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(\mathbf{X_0}) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(\mathbf{X_0}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(\mathbf{X_0}) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(\mathbf{X_0}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_x \\ \Delta_y \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{X_0}) \\ f_2(\mathbf{X_0}) \end{bmatrix} ,$$

kde $\mathbf{X_0} = [x_0, y_0]$ je počáteční přiblížení, vypočítáme $\mathbf{\Delta X} = [\Delta_x\,, \Delta_y]$. Potom $\mathbf{X_1} = \mathbf{X_0} + \mathbf{\Delta X}$ je první další přiblížení soustavy nelineárních rovnic.

Zpět

Příklad 6.5.2

Newtonovou metodou vypočtěte první aproximaci řešení soustavy nelineárních rovnic

$$x - y^2 - 1 = 0$$
$$2x^2 - y = 0\,.$$

Pro výpočet kořene zvolte nultou aproximaci $\left[\frac{1}{2}\,,\ \frac{1}{2}\right]$.

Řešení:

Z grafického znázornění je zřejmé, že soustava nemá řešení.
Zkusíme však přesto (jen formálně) vypočítat z počátečního zadaného přiblížení $\mathbf{X_0} = \left[\frac{1}{2}\,,\ \frac{1}{2}\right]$ první další přiblížení Newtonovou metodou.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2y_0 \\ 4x_0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_x \\ \Delta_y \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} x_0 - y_0^2 - 1 \\ 2x_0^2 - y_0 \end{bmatrix}.$$

Tedy

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_x \\ \Delta_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Řešíme-li soustavu lineárních algebraických rovnic dostáváme

$$\begin{bmatrix} \Delta_x \\ \Delta_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} \\ -\frac{3}{2} \end{bmatrix}.$$

Další

Příklad 6.5.2

Newtonovou metodou vypočtěte první aproximaci řešení soustavy nelineárních rovnic

$$x - y^2 - 1 = 0$$
$$2x^2 - y = 0\,.$$

Pro výpočet kořene zvolte nultou aproximaci $\left[\frac{1}{2}\,,\ \frac{1}{2}\right]$.

Řešení:

Tedy první "aproximace" kořene je $\mathbf{X_1} = [-\dfrac{1}{4}, -1]$, ačkoli tento výpočet neměl jiný smysl než pouze procvičit Newtonovu metodu.

Zpět

Příklad 6.5.2

Newtonovou metodou vypočtěte první aproximaci řešení soustavy nelineárních rovnic

$$x - y^2 - 1 = 0$$
$$2x^2 - y = 0\,.$$

Pro výpočet kořene zvolte nultou aproximaci $\left[\frac{1}{2}\,,\ \frac{1}{2}\right]$.

Maple:

```
> with(linalg):
> f1:=x-y^2-1;
```

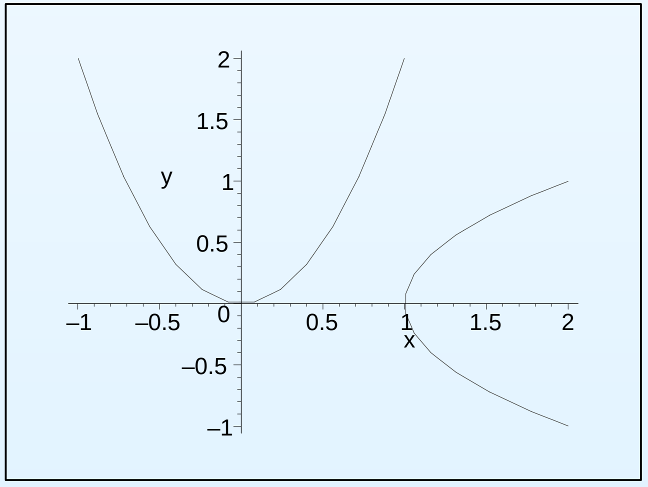
$$f1 := x - y^2 - 1$$

```
> f2:=2*x^2-y;
```

$$f2 := 2\,x^2 - y$$

Z grafického znázornění je zřejmé, že soustava nemá řešení.

```
> plots[implicitplot]({f1=0,f2=0},x=-2..2,y=-2..2);
```



Další

Příklad 6.5.2

Newtonovou metodou vypočtěte první aproximaci řešení soustavy nelineárních rovnic

$$x - y^2 - 1 = 0$$
$$2x^2 - y = 0\,.$$

Pro výpočet kořene zvolte nultou aproximaci $\left[\frac{1}{2}\,,\ \frac{1}{2}\right]$.

Maple:

Neexistující kořen soustavy přesto "aproximujeme" pomocí Newtonovy metody.

```
> f := vector([f1,f2]);
```

$$f := [x - y^2 - 1,\ 2\,x^2 - y]$$

Vypočtěme matici parciálnich derivací vektorové funkce f.

```
> Df := jacobian(f,[x,y]);
```

$$Df := \begin{bmatrix} 1 & -2\,y \\ 4\,x & -1 \end{bmatrix}$$

Zvolíme nultou aproximaci [0,5;0,5]

```
> Aprox[0]:=[0.5,0.5];
```

$$Aprox_0 := [0.5,\ 0.5]$$

```
> J[0]:=subs(x=Aprox[0][1],y=Aprox[0][2],evalm(Df));
```

$$J_0 := \begin{bmatrix} 1 & -1.0 \\ 2.0 & -1 \end{bmatrix}$$

Další

Příklad 6.5.2

Newtonovou metodou vypočtěte první aproximaci řešení soustavy nelineárních rovnic

$$x - y^2 - 1 = 0$$
$$2x^2 - y = 0\,.$$

Pro výpočet kořene zvolte nultou aproximaci $\left[\frac{1}{2}\,,\ \frac{1}{2}\right]$.

Maple:

```
> F[0]:=subs(x=Aprox[0][1],y=Aprox[0][2],evalm(f));
```

$$F_0 := [-0.75,\ 0.]$$

Řešíme soustavu lineárních algebraických rovnic:

```
> DX:=linsolve(J[0],-F[0]);
```

$$DX := [-0.7500000000,\ -1.500000000]$$

```
> Aprox[1]:=evalm(Aprox[0]+DX);
```

$$Aprox_1 := [-0.2500000000,\ -1.000000000]$$

Udělejme nmax dalších aproximací, (zvolime nmax = 4).

```
> nmax:=4;
```

$$nmax := 4$$

```
> for n from 1 to nmax do
> J[n]:=subs(x=Aprox[n][1],y=Aprox[n][2],evalm(Df)):
> F[n]:=subs(x=Aprox[n][1],y=Aprox[n][2],evalm(f)):;
> DX:=linsolve(J[n],-F[n]):
> Aprox[n+1]:= evalm(Aprox[n]+DX);
> end do;
```

Další

Příklad 6.5.2

Newtonovou metodou vypočtěte první aproximaci řešení soustavy nelineárních rovnic

$$x - y^2 - 1 = 0$$
$$2x^2 - y = 0\,.$$

Pro výpočet kořene zvolte nultou aproximaci $\left[\frac{1}{2}\,,\,\frac{1}{2}\right]$.

Maple:

$$Aprox_2 := [-0.2500000000,\ 0.125000000]$$

$$Aprox_3 := [0.7625000000,\ -0.887500000]$$

$$Aprox_4 := [0.3549149777,\ -0.0803218179]$$

$$Aprox_5 := [0.8419945324,\ 0.9434166001]$$

Vidíme, že hodnoty složek vektoru DX, ani při volbě nmax=4 , nekonvergují k 0.

Zpět

Příklad 6.5.2

Newtonovou metodou vypočtěte první aproximaci řešení soustavy nelineárních rovnic

$$x - y^2 - 1 = 0$$
$$2x^2 - y = 0\,.$$

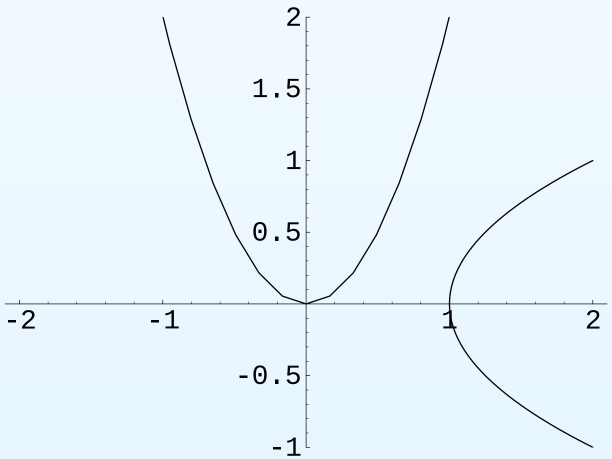
Pro výpočet kořene zvolte nultou aproximaci $\left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

Mathematica:

f1[x_, y_] = $x - y$^2 − 1;f2[x_, y_] = 2x^2 − y;

<< Graphics`ImplicitPlot`

ImplicitPlot[{f1[x, y] == 0, f2[x, y] == 0}, {x, −2, 2},PlotRange → {−1, 2}];



Z grafického znázornění vyplývá, že soustava nemá řešení.
Přesto můžeme zkusit použít Newtonovu metodu.

Další

Příklad 6.5.2

Newtonovou metodou vypočtěte první aproximaci řešení soustavy nelineárních rovnic

$$x - y^2 - 1 = 0$$
$$2x^2 - y = 0\,.$$

Pro výpočet kořene zvolte nultou aproximaci $\left[\frac{1}{2}\,,\ \frac{1}{2}\right]$.

Mathematica:

$\mathbf{Jacobf = Outer[}D\mathbf{, \{f1[}x, y\mathbf{], f2[}x, y\mathbf{]\}, \{}x, y\mathbf{\}]}$

$\{\{1, -2y\}, \{4x, -1\}\}$

$F\mathbf{[x\_, y\_] = \{f1[}x, y\mathbf{], f2[}x, y\mathbf{]\};}$

$\mathbf{x0 = -1; y0 = 0;}$

```
reseni = {{"i", "xi", "yi"}, {0, x0, y0}};
```

```
nmax = 4;
```

```
For[i = 1, i ≤ nmax,{dX = LinearSolve[N[Jacobf/.{x → x0, y → y0}],
N[−F[x0, y0]]];x1 = N[x0 + dX[[1]]]; y1 = N[y0 + dX[[2]]];
reseni = Join[reseni, {{i, x1, y1}}]; x0 = x1;
y0 = y1; i = i + 1}]
```

Další

Příklad 6.5.2

Newtonovou metodou vypočtěte první aproximaci řešení soustavy nelineárních rovnic

$$x - y^2 - 1 = 0$$
$$2x^2 - y = 0\,.$$

Pro výpočet kořene zvolte nultou aproximaci $\left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

Mathematica:

MatrixForm[reseni]

$$\begin{pmatrix} i & \text{xi} & \text{yi} \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1. & -6. \\ 2 & -0.22449 & -2.89796 \\ 3 & 1.62064 & -1.55606 \\ 4 & 0.704928 & -0.683218 \end{pmatrix}$$

Newtonova metoda nekonverguje.

Zpět

Extrémy funkcí dvou proměnných

- Lokální extrémy
- Metoda nejmenších čtverců

Zpět

Lokální extrémy

- Příklad 7.1.1 Najděte lokální extrémy funkce $f(x,y) = y + \dfrac{1}{y} - 2\ln^2 x$.
- Příklad 7.1.2 Najděte lokální extrémy funkce $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y + 12$ a v bodech odpovídajících lokálním extrémům napište rovnici tečné roviny ke grafu funkce $f(x,y)$.
- Příklad 7.1.3 Určete maximální a minimální hodnotu funkce $f(x,y) = x^2 + 2xy - 4x - 2y + 8$.
- Příklad 7.1.4 Zjistěte, zda má funkce $f(x,y) = x^y - x$ v bodě $B = [1,1]$ lokální extrém.
- Příklad 7.1.5 Číslo 24 rozložte na součet tří kladných čísel tak, aby jejich součin byl co největší.
- Příklad 7.1.6 Určete rozměry pravoúhlé vodní nádrže tvaru kvádru o objemu $32\mathrm{m}^3$ tak, aby dno a stěny měly dohromady co nejmenší povrch.

Zpět

Příklad 7.1.1

Najděte lokální extrémy funkce $f(x, y) = y + \dfrac{1}{y} - 2\ln^2 x$.

? Zpět

Příklad 7.1.1

Najděte lokální extrémy funkce $f(x,y) = y + \dfrac{1}{y} - 2\ln^2 x$.

Výsledek:

Funkce $f(x,y)$ má lokální maximum v bodě $[1,-1]$, $f(1,-1) = -2$.

Zpět

Příklad 7.1.1

Najděte lokální extrémy funkce $f(x,y) = y + \dfrac{1}{y} - 2\ln^2 x\,.$

Návod:

Najdeme stacionární body funkce (na základě nutné podmínky pro existenci lokálních extrémů) a pro jednotlivé body vypočteme Hessián, s jehož pomocí zkusíme rozhodnout, zda se jedná o sedlové body nebo body lokálních extrémů.

Zpět

Příklad 7.1.1

Najděte lokální extrémy funkce $f(x,y) = y + \dfrac{1}{y} - 2\ln^2 x$.

Řešení:

Definiční obor funkce $f(x,y)$ je určen podmínkami $x > 0$, $y \neq 0$, a tedy

$$D(f) = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0 \wedge y \neq 0\} .$$

Stacionární body uvnitř definičního oboru musí splňovat podmínky

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \,, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \,,$$

tj. v tomto případě

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \quad -4\ln x \cdot \frac{1}{x} \quad = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \quad 1 - \frac{1}{y^2} \quad = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = \pm 1 \,. \end{aligned}$$

Celkem jsme tedy získali dva stacionární body: $A_1 = [1,-1]$, $A_2 = [1,1]$ podezřelé z lokálních extrémů.

Další

Příklad 7.1.1

Najděte lokální extrémy funkce $f(x,y) = y + \dfrac{1}{y} - 2\ln^2 x$.

Řešení:

Zda se jedná skutečně o extrémy, nebo jen o sedlové body, zjistíme pomocí Hessovy matice. Nejprve si vypočteme druhé parciální derivace:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = -4\frac{1}{x^2} + 4\ln x\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{2}{y^3}\,.$$

Hessova matice v bodě $[1,-1]$ má podobu

$$H_f(1,-1) = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix},$$

její determinant $\det H_f(1,-1) = 8 > 0$, což znamená, že v bodě A_1 má funkce $f(x,y)$ lokální extrém. O jeho typu rozhoduje znaménko $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A_1) = -4 < 0$, jedná se tedy o ostré lokální maximum, $f(1,-1) = -2$.

Další

Příklad 7.1.1

Najděte lokální extrémy funkce $f(x,y) = y + \dfrac{1}{y} - 2\ln^2 x$.

Řešení:

Obdobně pro bod $[1,1]$ dostaneme

$$H_f(1,1) = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \det H_f(1,1) = -8 < 0\,,$$

což znamená, že v bodě A_2 má funkce $f(x,y)$ sedlový bod. Funkce $f(x,y)$ má na svém definičním oboru jediný lokální extrém - ostré lokální maximum v bodě $[1,-1]$, jehož funkční hodnota je -2.

Zpět

Příklad 7.1.1

Najděte lokální extrémy funkce $f(x,y) = y + \dfrac{1}{y} - 2\ln^2 x$.

Maple:

```
> with(linalg):
> f:=(x,y)->y+1/y-2*ln(x)^2;
```

$$f := (x,\, y) \to y + \frac{1}{y} - 2\ln(x)^2$$

Nejprve najdeme stacionární body:

```
> fx:=diff(f(x,y),x);
```

$$fx := -\frac{4\ln(x)}{x}$$

```
> fy:=diff(f(x,y),y);
```

$$fy := 1 - \frac{1}{y^2}$$

```
> solve({fx,fy});
```

$$\{x = 1,\, y = 1\},\, \{x = 1,\, y = -1\}$$

Vypočteme funkční hodnoty ve stacionárních bodech:

```
> f(1,-1);
```

$$-2$$

```
> f(1,1);
```

$$2$$

Další

Příklad 7.1.1

Najděte lokální extrémy funkce $f(x, y) = y + \dfrac{1}{y} - 2\ln^2 x$.

Maple:

Dále ověříme pomocí Hessovy matice postačující podmínku pro lokální extrémy:

```
> fxx:=diff(f(x,y),x,x);
```

$$fxx := -\frac{4}{x^2} + \frac{4\ln(x)}{x^2}$$

```
> fxy:=diff(f(x,y),x,y);
```

$$fxy := 0$$

```
> fyy:=diff(f(x,y),y,y);
```

$$fyy := \frac{2}{y^3}$$

```
> H_f:=matrix(2,2,[fxx,fxy,fxy,fyy]);
```

$$H\_f := \begin{bmatrix} -\frac{4}{x^2} + \frac{4\ln(x)}{x^2} & 0 \\ 0 & \frac{2}{y^3} \end{bmatrix}$$

```
> det(H_f);
```

$$\frac{2\left(-\frac{4}{x^2} + \frac{4\ln(x)}{x^2}\right)}{y^3}$$

Další

Příklad 7.1.1

Najděte lokální extrémy funkce $f(x,y) = y + \dfrac{1}{y} - 2\ln^2 x$.

Maple:

```
> x:=1:y:=-1:det(H_f);
```

$$8$$

```
> fxx;
```

$$-4$$

Hessián je kladné číslo (8), jedná se tedy o lokální extrém, podle znaménka derivace $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,-1) = -4$ jde o lokální maximum.

Podobně pro druhý stacionární bod:

```
> unassign('x','y'):fxx:=diff(f(x,y),x,x):fxy:=diff(f(x,y),x,y):
fyy:=diff(f(x,y),y,y):H_f:=matrix(2,2,[fxx,fxy,fxy,fyy]):x:=1:y:=1:det(H_f);
```

$$-8$$

Hessián je záporné číslo (-8), jde tedy o sedlový bod.

Zpět

Příklad 7.1.1

Najděte lokální extrémy funkce $f(x,y) = y + \dfrac{1}{y} - 2\ln^2 x$.

Mathematica:

f[x_, y_] = y + 1/y − 2Log[x]^2

$\frac{1}{y} + y - 2\mathrm{Log}[x]^2$

Nejprve najdeme stacionární body:

df = {D[f[x, y], x], D[f[x, y], y]}

$\left\{-\frac{4\mathrm{Log}[x]}{x}, 1 - \frac{1}{y^2}\right\}$

Solve[df == {0, 0}, {x, y}]

$\{\{x \to 1, y \to -1\}, \{x \to 1, y \to 1\}\}$

Vypočteme funkční hodnoty ve stacionárních bodech:

f[1, −1]

-2

f[1, 1]

2

Dále ověříme pomocí Hessovy matice postačující podmínku pro lokální extrémy:

Hf = D[f[x, y], {{x, y}, 2}]

$\left\{\left\{-\frac{4}{x^2} + \frac{4\mathrm{Log}[x]}{x^2}, 0\right\}, \left\{0, \frac{2}{y^3}\right\}\right\}$

Det[Hf/.{x → 1, y → −1}]

8

Další

Příklad 7.1.1

Najděte lokální extrémy funkce $f(x, y) = y + \dfrac{1}{y} - 2\ln^2 x$.

Mathematica:

$\mathbf{Hf[[1,1]]/.\{\boldsymbol{x} \to 1, \boldsymbol{y} \to -1\}}$

-4

Hessián je kladné číslo (8), jedná se tedy o lokální extrém, podle znaménka derivace $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,-1) = -4$ jde o lokální maximum.
Podobně pro druhý stacionární bod:

$\mathbf{Det[Hf/.\{\boldsymbol{x} \to 1, \boldsymbol{y} \to 1\}]}$

-8

$\mathbf{Hf[[1,1]]/.\{\boldsymbol{x} \to 1, \boldsymbol{y} \to 1\}}$

-4

Hessián je záporné číslo (-8), jde tedy o sedlový bod.

Zpět

Příklad 7.1.2

Najděte lokální extrémy funkce $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y + 12$ a v bodech odpovídajících lokálním extrémům napište rovnici tečné roviny ke grafu funkce $f(x, y)$.

? Zpět

Příklad 7.1.2

Najděte lokální extrémy funkce $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y + 12$ a v bodech odpovídajících lokálním extrémům napište rovnici tečné roviny ke grafu funkce $f(x, y)$.

Výsledek:

Funkce má lokální minimum v bodě $[1, 2]$, rovnice tečné roviny v tomto bodě je $z = 7$.

Zpět

Příklad 7.1.2

Najděte lokální extrémy funkce $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y + 12$ a v bodech odpovídajících lokálním extrémům napište rovnici tečné roviny ke grafu funkce $f(x, y)$.

Návod:

Najdeme stacionární body funkce, pro které vypočteme Hessián a rozhodneme, zda se jedná o sedlové body nebo body lokálních extrémů. Pro rovnici tečné roviny ke grafu funkce $f(x, y)$ v bodě $[x_0, y_0]$ použijeme vztah

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)\,.$$

Zpět

Příklad 7.1.2

Najděte lokální extrémy funkce $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y + 12$ a v bodech odpovídajících lokálním extrémům napište rovnici tečné roviny ke grafu funkce $f(x, y)$.

Řešení:

Funkce $f(x, y)$ je definována na $\mathbb{R}^2$. Nejprve zjistíme, pro které hodnoty platí nutná podmínka pro existenci lokálního extrému:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \ \wedge \ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \,.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = 2 \,.$$

Nalezli jsme jediný stacionární bod $[1, 2]$. Pro druhé parciální derivace platí:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 2 \,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 0 \,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 2 \,,$$

konkrétně pak

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, 2) = 2 \,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1, 2) = 0 \,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1, 2) = 2 \,,$$

Další

Příklad 7.1.2

Najděte lokální extrémy funkce $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y + 12$ a v bodech odpovídajících lokálním extrémům napište rovnici tečné roviny ke grafu funkce $f(x, y)$.

Řešení:

pro Hessovu matici v „podezřelém bodě“ dostáváme:

$$H_f(1, 2) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \det H_f(1, 2) = 4 > 0\,.$$

Vzhledem k tomu, že $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, 2) = 2 > 0$, jde o lokální minimum, pro které platí $f(1, 2) = 7$. Tečná rovina ke grafu funkce $f(x, y)$ má v bodě $[x_0, y_0]$ obecně rovnici

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)\,,$$

v bodech lokálních extrémů se tato rovnice zjednoduší na $z = f(x_0, y_0)$, v našem případě tedy tečná rovina ke grafu funkce $f(x, y)$ v bodě $[1, 2]$ má rovnici $z = 7$.

Zpět

Příklad 7.1.2

Najděte lokální extrémy funkce $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y + 12$ a v bodech odpovídajících lokálním extrémům napište rovnici tečné roviny ke grafu funkce $f(x,y)$.

Maple:

```
> with(linalg):
> f:=(x,y)->x^2+y^2-2*x-4*y+12;
```

$$f := (x,\, y) \to x^2 + y^2 - 2\,x - 4\,y + 12$$

Hledáme stacionární body:

```
> fx:=diff(f(x,y),x);
```

$$fx := 2\,x - 2$$

```
> fy:=diff(f(x,y),y);
```

$$fy := 2\,y - 4$$

```
> solve({fx,fy});
```

$$\{x = 1,\ y = 2\}$$

Funkční hodnota v jediném stacionárním bodě je:

```
> f(1,2);
```

$$7$$

```
> fxx:=diff(f(x,y),x,x);fxy:=diff(f(x,y),x,y);fyy:=diff(f(x,y),y,y);
```

$$fxx := 2$$

$$fxy := 0$$

$$fyy := 2$$

Další

Příklad 7.1.2

Najděte lokální extrémy funkce $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y + 12$ a v bodech odpovídajících lokálním extrémům napište rovnici tečné roviny ke grafu funkce $f(x, y)$.

Maple:

```
> x:=1:y:=2:fx:fY:z:=fx(1,2)*(x-1)+fy(1,2)*(y-2)+7;
```

$$z := 7$$

Rovnice tečné roviny v daném bodě je $z = 7$.

```
> H_f:=matrix(2,2,[fxx,fxy,fxy,fyy]);
```

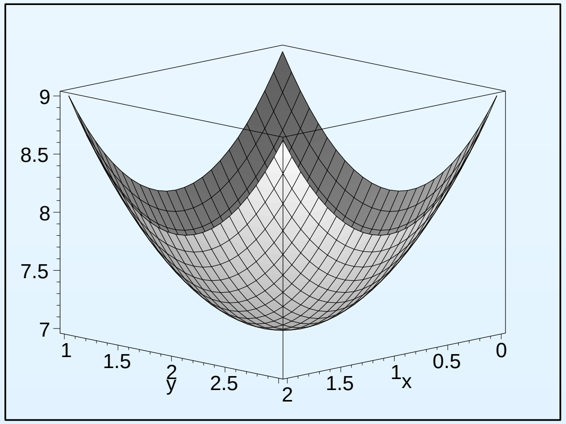
$$H\_f := \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

```
> det(H_f);
```

$$4$$

Hessián v daném bodě je kladný, jde tedy skutečně o lokální extrém, podle znaménka derivace fxx se jedná o lokální minimum. Průběh funkce v okolí tohoto bodu si můžeme přiblížit pomocí grafu:

```
> plot3d(f(x,y),x=0..2,y=1..3);
```



Zpět

Příklad 7.1.2

Najděte lokální extrémy funkce $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y + 12$ a v bodech odpovídajících lokálním extrémům napište rovnici tečné roviny ke grafu funkce $f(x, y)$.

Mathematica:

$\boldsymbol{f[\mathrm{x\_}, \mathrm{y\_}] = x\hat{}2 + y\hat{}2 - 2x - 4y + 12}$

$12 - 2x + x^2 - 4y + y^2$

Nejprve najdeme stacionární body:

$\boldsymbol{\mathrm{df} = \{D[f[x, y], x], D[f[x, y], y]\}}$

$\{-2 + 2x, -4 + 2y\}$

$\boldsymbol{\mathrm{Solve}[\mathrm{df} == \{0, 0\}, \{x, y\}]}$

$\{\{x \to 1, y \to 2\}\}$

Vypočteme funkční hodnotu ve stacionárním bodě:

$\boldsymbol{f[1, 2]}$

7

Dále ověříme pomocí Hessovy matice postačující podmínku pro lokální extrém:

$\boldsymbol{\mathrm{Hf} = D[f[x, y], \{\{x, y\}, 2\}]}$

$\{\{2, 0\}, \{0, 2\}\}$

$\boldsymbol{\mathrm{Det}[\mathrm{Hf}/.\{x \to 1, y \to 2\}]}$

4

$\boldsymbol{\mathrm{Hf}[[1, 1]]}$

2

Další

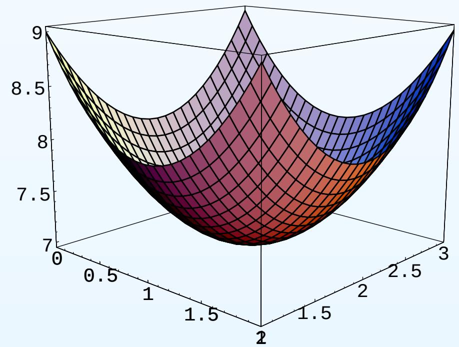
Příklad 7.1.2

Najděte lokální extrémy funkce $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y + 12$ a v bodech odpovídajících lokálním extrémům napište rovnici tečné roviny ke grafu funkce $f(x,y)$.

Mathematica:

Hessián v daném bodě je kladný, jde tedy skutečně o lokální extrém, podle znaménka derivace $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,2)$ se jedná o lokální minimum. Průběh funkce v okolí tohoto bodu si můžeme přiblížit pomocí grafu:

$\mathbf{Plot3D}[\boldsymbol{f}[\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}], \{\boldsymbol{x}, \mathbf{0}, \mathbf{2}\}, \{\boldsymbol{y}, \mathbf{1}, \mathbf{3}\}, \mathbf{BoxRatios} \rightarrow \{\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{0.8}\},$
$\mathbf{ViewPoint\text{-}>}\{\mathbf{2.236}, \mathbf{-2.417}, \mathbf{0.779}\}];$



Nyní sestrojíme rovnici tečny:

$\mathbf{tecna} = \mathbf{Simplify}[-\boldsymbol{f}[\mathbf{1},\mathbf{2}] == (\mathbf{df}[[\mathbf{1}]]/.\{\boldsymbol{x} \rightarrow \mathbf{1}, \boldsymbol{y} \rightarrow \mathbf{2}\})(\boldsymbol{x} - \mathbf{1}) + (\mathbf{df}[[\mathbf{2}]]/.\{\boldsymbol{x} \rightarrow \mathbf{1}, \boldsymbol{y} \rightarrow \mathbf{2}\})(\boldsymbol{y} - \mathbf{2})]$

$z == 7$

Zpět

Příklad 7.1.3

Určete maximální a minimální hodnotu funkce $f(x, y) = x^2 + 2xy - 4x - 2y + 8$.

? Zpět

Příklad 7.1.3

Určete maximální a minimální hodnotu funkce $f(x, y) = x^2 + 2xy - 4x - 2y + 8$.

Výsledek:

Funkce $f(x, y)$ nabývá na $\mathbb{R}^2$ neomezeně velkých i malých hodnot, žádné lokální extrémy nemá.

Zpět

Příklad 7.1.3

Určete maximální a minimální hodnotu funkce $f(x, y) = x^2 + 2xy - 4x - 2y + 8$.

Návod:

Hledáme globální extrémy funkce na jejím definičním oboru (globální extrém může být v bodě lokálního extrému, v bodě, v němž neexistuje derivace nebo v krajním bodě definičního oboru).

Zpět

Příklad 7.1.3

Určete maximální a minimální hodnotu funkce $f(x,y) = x^2 + 2xy - 4x - 2y + 8$.

Řešení:

Funkce $f(x,y)$ je na $\mathbb{R}^2$ spojitá. Vzhledem k tomu, že $\mathbb{R}^2$ není omezená množina (není ani kompaktní), nemáme existenci (konečných) extrémů zaručenu. Stacionární body najdeme řešením soustavy rovnic:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 2x + 2y - 4 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= 2x - 2 = 0 \end{aligned}\right\} \quad \Leftrightarrow \quad x = 1, y = 1\,.$$

Nalezli jsme jediný stacionární bod $A = [1,1]$. Vypočítáme si Hessián v tomto bodě:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1) = 2\,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,1) = 2\,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,1) = 0\,,$$

$$H_f(1,1) = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \det H_f(1,1) = -4 < 0\,.$$

Jde o sedlový bod; funkce $f(x,y)$ tedy nemá na $\mathbb{R}^2$ žádný lokální extrém (parciální derivace existují ve všech bodech definičního oboru, žádný bod přitom nesplňuje postačující podmínku pro existenci lokálního extrému). Vzhledem k povaze množiny $\mathbb{R}^2$ (nemá žádné krajní body) nemůže funkce $f(x,y)$ nabývat globálních extrémů ve vlastních bodech, její funkční hodnoty mohou být libovolně velké či naopak libovolně malé.

Zpět

Příklad 7.1.3

Určete maximální a minimální hodnotu funkce $f(x,y) = x^2 + 2xy - 4x - 2y + 8$.

Maple:

```
> with(linalg):
> f:=(x,y)->x^2+2*x*y-4*x-2*y+8;
```

$$f := (x,\, y) \to x^2 + 2\,x\,y - 4\,x - 2\,y + 8$$

```
> fx:=diff(f(x,y),x);
```

$$fx := 2\,x + 2\,y - 4$$

```
> fy:=diff(f(x,y),y);
```

$$fy := 2\,x - 2$$

```
> solve({fx,fy});
```

$$\{x = 1,\ y = 1\}$$

```
> f(1,1);
```

$$5$$

Nalezli jsme jediný stacionární bod [1,1], funkční hodnota v tomto bodě je 5. Nyní prověříme postačující podmínku pro lokální extrémy:

```
> fxx:=diff(f(x,y),x,x);
```

$$fxx := 2$$

```
> fxy:=diff(f(x,y),x,y);
```

$$fxy := 2$$

```
> fyy:=diff(f(x,y),y,y);
```

$$fyy := 0$$

Další

Příklad 7.1.3

Určete maximální a minimální hodnotu funkce $f(x,y) = x^2 + 2xy - 4x - 2y + 8$.

Maple:

```
> H_f:=matrix(2,2,[fxx,fxy,fxy,fyy]);
```

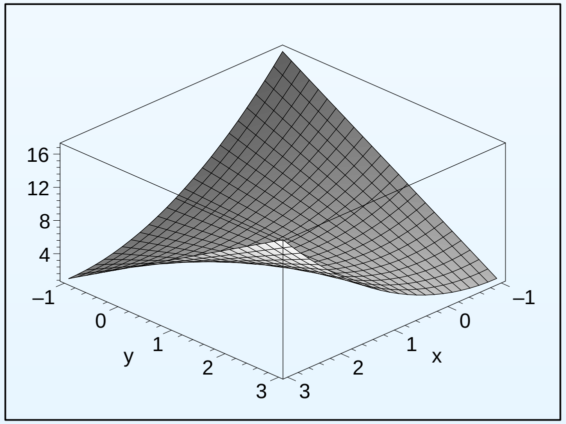
$$H\_f := \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> det(H_f);
```

$$-4$$

Je zřejmé, že podezřelý bod byl bodem sedlovým, nikoli bodem lokálního extrému (viz obrázek).

```
> plot3d(f(x,y),x=-1..3,y=-1..3,axes=boxed,orientation=[45,45]);
```



Zpět

Příklad 7.1.3

Určete maximální a minimální hodnotu funkce $f(x, y) = x^2 + 2xy - 4x - 2y + 8$.

Mathematica:

$\boldsymbol{f[\mathrm{x\_}, \mathrm{y\_}] = x\text{^}2 + 2xy - 4x - 2y + 8}$

$8 - 4x + x^2 - 2y + 2xy$

Nejprve najdeme stacionární body:

$\mathbf{df} = \{D[f[x, y], x], D[f[x, y], y]\}$

$\{-4 + 2x + 2y, -2 + 2x\}$

$\mathbf{Solve[df} == \{0, 0\}, \{x, y\}]$

$\{\{x \to 1, y \to 1\}\}$

Vypočteme funkční hodnotu ve stacionárním bodě:

$f[1, 1]$

5

Nalezli jsme jediný stacionární bod [1,1], funkční hodnota v tomto bodě je 5. Nyní prověříme postačující podmínku pro lokální extrémy:

$\mathbf{Hf} = D[f[x, y], \{\{x, y\}, 2\}]$

$\{\{2, 2\}, \{2, 0\}\}$

$\mathbf{Det[Hf/.}\{x \to 1, y \to 1\}]$

-4

Další

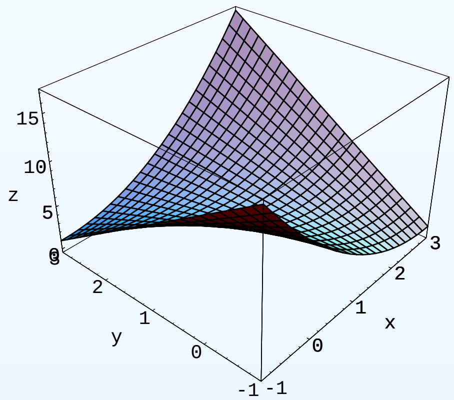
Příklad 7.1.3

Určete maximální a minimální hodnotu funkce $f(x,y) = x^2 + 2xy - 4x - 2y + 8$.

Mathematica:

Je zřejmé, že podezřelý bod byl bodem sedlovým, nikoli bodem lokálního extrému (viz obrázek).

$\mathbf{Plot3D[}\boldsymbol{f}\mathbf{[}\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\mathbf{]}, \{\boldsymbol{x}, -\mathbf{1}, \mathbf{3}\}, \{\boldsymbol{y}, -\mathbf{1}, \mathbf{3}\}, \mathbf{BoxRatios} \to \{\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{0.7}\},$
$\mathbf{ViewPoint\text{-}>}\{-\mathbf{1.942}, -\mathbf{1.705}, \mathbf{1.639}\}, \mathbf{AxesLabel} \to \{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\}\mathbf{];}$



Zpět

Příklad 7.1.4

Zjistěte, zda má funkce $f(x, y) = x^y - x$ v bodě $B = [1, 1]$ lokální extrém.

? Zpět

Příklad 7.1.4

Zjistěte, zda má funkce $f(x, y) = x^y - x$ v bodě $B = [1, 1]$ lokální extrém.

Výsledek:

Funkce $f(x, y)$ nemá v bodě B lokální extrém.

Zpět

Příklad 7.1.4

Zjistěte, zda má funkce $f(x,y) = x^y - x$ v bodě $B = [1,1]$ lokální extrém.

Návod:

Ověříme splnění nutné podmínky pro existenci lokálního extrému a vypočteme Hessián $\det H_f(1,1)$.

Zpět

Příklad 7.1.4

Zjistěte, zda má funkce $f(x,y) = x^y - x$ v bodě $B = [1,1]$ lokální extrém.

Řešení:

Nejprve ověříme splnění nutné podmínky pro existenci lokálního extrému:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = yx^{y-1} - 1\,, \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 1 - 1 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^y \ln x\,, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = 1 \cdot \ln 1 = 0\,.$$

Bod $[1,1]$ je tedy skutečně bodem stacionárním. Dále platí:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = y(y-1)x^{y-2}\,,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = x^{y-1} + yx^{y-1}\ln x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = x^y \ln^2 x\,.$$

Další

Příklad 7.1.4

Zjistěte, zda má funkce $f(x,y) = x^y - x$ v bodě $B = [1,1]$ lokální extrém.

Řešení:

V bodě $[1,1]$ dostaneme po dosazení:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1) = 0\,, \\ &\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,1) = 1 \\ &\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,1) = 0 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad H_f(1,1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \det H_f(1,1) = -1 < 0\,.$$

Bod $[1,1]$ je bodem sedlovým, nikoli lokálním extrémem.

Zpět

Příklad 7.1.4

Zjistěte, zda má funkce $f(x,y)=x^y-x$ v bodě $B=[1,1]$ lokální extrém.

Maple:

```
> with(linalg):
> f:=(x,y)->x^y-x;
```

$$f := (x,\, y) \to x^y - x$$

Ověříme, že daný bod splňuje nutnou podmínku pro lokální extrém:

```
> fx:=diff(f(x,y),x);fy:=diff(f(x,y),y);
```

$$fx := \frac{x^y\, y}{x} - 1$$

$$fy := x^y \ln(x)$$

```
> solve({fx,fy});
```

$$\{fx = 1,\, fy = 1\}$$

Bod [1,1] je tedy bodem stacionárním. Nyní vypočítejme Hessovu matici a Hessián:

```
> fxx:=diff(f(x,y),x,x);
```

$$fxx := \frac{x^y\, y^2}{x^2} - \frac{x^y\, y}{x^2}$$

```
> fxy:=diff(f(x,y),x,y);
```

$$fxy := \frac{x^y \ln(x)\, y}{x} + \frac{x^y}{x}$$

```
> fyy:=diff(f(x,y),y,y);
```

$$fyy := x^y \ln(x)^2$$

Další

Příklad 7.1.4

Zjistěte, zda má funkce $f(x,y) = x^y - x$ v bodě $B = [1,1]$ lokální extrém.

Maple:

```
> H_f:=matrix(2,2,[fxx,fxy,fxy,fyy]);
```

$$H\_f := \begin{bmatrix} \dfrac{x^y\, y^2}{x^2} - \dfrac{x^y\, y}{x^2} & \dfrac{x^y \ln(x)\, y}{x} + \dfrac{x^y}{x} \\ \dfrac{x^y \ln(x)\, y}{x} + \dfrac{x^y}{x} & x^y \ln(x)^2 \end{bmatrix}$$

```
> det(H_f);
```

$$-\frac{(x^y)^2\,(y\ln(x)^2 + 2\ln(x)\,y + 1)}{x^2}$$

```
> x:=1:y:=1:det(H_f);
```

$$-1$$

Hessián v daném bodě je záporný, nejde tedy o lokální extrém, ale o sedlový bod.

Zpět

Příklad 7.1.4

Zjistěte, zda má funkce $f(x,y) = x^y - x$ v bodě $B = [1,1]$ lokální extrém.

Mathematica:

f[x_, y_] = x^$y - x$

$-x + x^y$

Ověříme, že daný bod splňuje nutnou podmínku pro lokální extrém:

df = Simplify[{D[f[x, y], x], D[f[x, y], y]}]

$\{-1 + x^{-1+y}y, x^y\mathrm{Log}[x]\}$

Reduce[df == {0, 0}]

$y == 1\&\&x == 1$

Bod [1,1] je tedy bodem stacionárním. Nyní vypočítejme Hessovu matici a Hessián:

Hf = Simplify[D[f[x, y], {{x, y}, 2}]]

$\{\{x^{-2+y}(-1+y)y, x^{-1+y}(1+y\mathrm{Log}[x])\}, \{x^{-1+y}(1+y\mathrm{Log}[x]), x^y\mathrm{Log}[x]^2\}\}$

Det[Hf/.{$x \to 1, y \to 1$}]

-1

Hessián v daném bodě je záporný, nejde tedy o lokální extrém, ale o sedlový bod.

Zpět

Příklad 7.1.5

Číslo 24 rozložte na součet tří kladných čísel tak, aby jejich součin byl co největší.

? Zpět

Příklad 7.1.5

Číslo 24 rozložte na součet tří kladných čísel tak, aby jejich součin byl co největší.

Výsledek:

$24 = 8 + 8 + 8\,.$

Zpět

Příklad 7.1.5

Číslo 24 rozložte na součet tří kladných čísel tak, aby jejich součin byl co největší.

Návod:

Hledáme maximum funkce $f(x, y) = xy(24 - x - y)$.

Zpět

Příklad 7.1.5

Číslo 24 rozložte na součet tří kladných čísel tak, aby jejich součin byl co největší.

Řešení:

Označme si uvažovaná čísla x, y, z. Hledáme maximum součinu xyz za předpokladu, že platí rovnost $x+y+z=24$. Dosazením $z=24-x-y$ se ze součinu xyz stane funkce dvou proměnných

$$f(x,y)=xy(24-x-y)\,.$$

Nyní najdeme stacionární body této funkce

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=24y-2xy-y^2 \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=24x-2xy-x^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=0 \;\Leftrightarrow\; y(24-2x-y)=0 \qquad \frac{\partial f}{\partial y}=0 \;\Leftrightarrow\; x(24-2y-x)=0\,.$$

Ze zadání plyne omezení $0<x,y,z<24$, takže stacionární bod musí vyhovovat soustavě

$$\begin{array}{ccccccc} 24 & - & 2x & - & y & = & 0 \\ 24 & - & 2y & - & x & = & 0\,, \end{array}$$

která má jediné řešení $x=8$, $y=8$. Dále ověříme, že bod $[8,8]$ je lokálním maximem funkce $f(x,y)$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=-2y\,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=24-2x-2y\,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=-2x$$

Další

Příklad 7.1.5

Číslo 24 rozložte na součet tří kladných čísel tak, aby jejich součin byl co největší.

Řešení:

Hessián v bodě [8, 8]:

$$\det H_f(8,8) = \begin{vmatrix} -16 & -8 \\ -8 & -16 \end{vmatrix} = 16^2 - 64 > 0\,,$$

navíc $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(8,8) = -16 < 0$, jde tedy skutečně o ostré lokální maximum. Jednoduše lze dopočítat $z = 24 - 8 - 8 = 8$. Hledaný optimální rozklad je $24 = 8 + 8 + 8$.
Maximalní součin je $f(8,8) = 8^3 = 512$.

Zpět

Příklad 7.1.5

Číslo 24 rozložte na součet tří kladných čísel tak, aby jejich součin byl co největší.

Maple:

Úlohu převedeme na problém hledání lokálních extrémů funkce f :

```
> f:=(x,y)->x*y*(24-x-y);
```

$$f := (x,\, y) \to x\, y\, (24 - x - y)$$

Nejprve najdeme stacionární body:

```
> fx:=diff(f(x,y),x);
```

$$fx := y\, (24 - x - y) - x\, y$$

```
> fy:=diff(f(x,y),y);
```

$$fy := x\, (24 - x - y) - x\, y$$

```
> solve({fx,fy});
```

$$\{y = 0,\, x = 0\},\, \{y = 0,\, x = 24\},\, \{y = 24,\, x = 0\},\, \{y = 8,\, x = 8\}$$

Vzhledem k zadání úlohy x, y, z představují kladná čísla menší než 24 bereme v úvahu pouze poslední bod - [8,8]:

```
> f(8,8);
```

$$512$$

Zda má funkce v tomto bodě maximum, ověříme pomocí Hessiánu:

```
> fxx:=diff(f(x,y),x,x);
```

$$fxx := -2\, y$$

```
> fxy:=diff(f(x,y),x,y);
```

$$fxy := 24 - 2\, x - 2\, y$$

Další

Příklad 7.1.5

Číslo 24 rozložte na součet tří kladných čísel tak, aby jejich součin byl co největší.

Maple:

```
> fyy:=diff(f(x,y),y,y);
```

$$fyy := -2\,x$$

```
> x:=8:y:=8:fx:fy:fxx:fxy:fyy:
> H_f:=matrix(2,2,[fxx,fxy,fxy,fyy]);
```

$$H\_f := \begin{bmatrix} -16 & -8 \\ -8 & -16 \end{bmatrix}$$

```
> det(H_f);
```

$$192$$

Zjistili jsme, že $\det H_f(8,8) > 0$ a $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(8,8) < 0$, jde tedy o lokální maximum, odpovídající hodnota z je

```
> z:=24-x-y;
```

$$z := 8$$

Zpět

Příklad 7.1.5

Číslo 24 rozložte na součet tří kladných čísel tak, aby jejich součin byl co největší.

Mathematica:

Úlohu převedeme na problém hledání lokálních extrémů funkce f :

$\boldsymbol{f[\mathrm{x\_}, \mathrm{y\_}] = xy(24 - x - y)}$

$x(24 - x - y)y$

Nejprve najdeme stacionární body:

$\mathbf{df} = \boldsymbol{\{D[f[x, y], x], D[f[x, y], y]\}}$

$\{-xy + (24 - x - y)y, x(24 - x - y) - xy\}$

$\mathbf{Solve[df == \{0, 0\}, \{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\}]}$

$\{\{x \to 0, y \to 0\}, \{x \to 0, y \to 24\}, \{x \to 8, y \to 8\}, \{x \to 24, y \to 0\}\}$

Vzhledem k zadání úlohy x, y, z představují kladná čísla menší než 24 bereme v úvahu pouze bod - [8,8]:

$\boldsymbol{f[8, 8]}$

512

Zda má funkce v tomto bodě maximum, ověříme pomocí Hessiánu:

$\mathbf{Hf} = \boldsymbol{D[f[x, y], \{\{x, y\}, 2\}]}$

$\{\{-2y, 24 - 2x - 2y\}, \{24 - 2x - 2y, -2x\}\}$

Další

Příklad 7.1.5

Číslo 24 rozložte na součet tří kladných čísel tak, aby jejich součin byl co největší.

Mathematica:

$\mathbf{MatrixForm[Hf]/.\{\boldsymbol{x} \to 8, \boldsymbol{y} \to 8\}}$

$$\begin{pmatrix} -16 & -8 \\ -8 & -16 \end{pmatrix}$$

Det[%]

192

$\mathbf{Hf[[1,1]]/.\{\boldsymbol{x} \to 8, \boldsymbol{y} \to 8\}}$

-16

Zjistili jsme, že $\det H_f(8,8) > 0$ a $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(8,8) < 0$, jde tedy o lokální maximum, odpovídající hodnota z je

$\boldsymbol{z = 24 - x - y}/.\{x \to 8, y \to 8\}$

8

Zpět

Příklad 7.1.6

Určete rozměry pravoúhlé vodní nádrže tvaru kvádru o objemu 32m^3 tak, aby dno a stěny měly dohromady co nejmenší povrch.

= ? Zpět

Příklad 7.1.6

Určete rozměry pravoúhlé vodní nádrže tvaru kvádru o objemu $32\mathrm{m}^3$ tak, aby dno a stěny měly dohromady co nejmenší povrch.

Výsledek:

$a = 4\mathrm{m},\ b = 4\mathrm{m},\ c = 2\mathrm{m}\,.$

Zpět

Příklad 7.1.6

Určete rozměry pravoúhlé vodní nádrže tvaru kvádru o objemu $32\,\mathrm{m}^3$ tak, aby dno a stěny měly dohromady co nejmenší povrch.

Návod:

Hledáme minimum funkce $S(a,b) = ab + \frac{64}{b} + \frac{64}{a}$.

Zpět

Příklad 7.1.6

Určete rozměry pravoúhlé vodní nádrže tvaru kvádru o objemu $32\mathrm{m}^3$ tak, aby dno a stěny měly dohromady co nejmenší povrch.

Řešení:

Označme si rozměry dna nádrže a, b, výšku nádrže c. Ze vztahu pro objem kvádru dostáváme podmínku $32 = abc$. Dno a stěny nádoby mají povrch $ab + 2c(a+b)$, dosadíme-li $c = \frac{32}{ab}$, získáváme funkci dvou proměnných

$$S(a,b) = ab + \frac{64}{ab}(a+b) = ab + \frac{64}{b} + \frac{64}{a}\,,$$

pro kterou hledáme minimum:

$$\frac{\partial S}{\partial a}(a,b) = b - \frac{64}{a^2}\,, \qquad \frac{\partial S}{\partial b}(a,b) = b - \frac{64}{b^2}\,,$$

$$\frac{\partial S}{\partial a} = \frac{\partial S}{\partial b} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a^2 b = 64, ab^2 = 64 \;\Leftrightarrow\; a = b = 4$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial a^2} = \frac{128}{a^3}\,, \quad \frac{\partial^2 S}{\partial a \partial b} = 1\,, \quad \frac{\partial^2 S}{\partial b^2} = \frac{128}{b^3}$$

Další

Příklad 7.1.6

Určete rozměry pravoúhlé vodní nádrže tvaru kvádru o objemu $32\mathrm{m}^3$ tak, aby dno a stěny měly dohromady co nejmenší povrch.

Řešení:

Hessián v bodě $[4, 4]$:

$$\det H_S(4,4) = \begin{vmatrix} \frac{128}{64} & 1 \\ 1 & \frac{128}{64} \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 > 0\,,$$

dále $\dfrac{\partial^2 S}{\partial a^2}(4,4) = 2 > 0$, při rozměrech $a = 4\mathrm{m}$, $b = 4\mathrm{m}$ bude skutečně funkce $S(a, b)$ nabývat minimální hodnoty. Z podmínky $c = \frac{32}{ab}$ určíme zbývající rozměr nádrže $c = 2\mathrm{m}$. Hledaný minimální povrch je $S(4, 4) = 48\mathrm{m}^2$.

Zpět

Příklad 7.1.6

Určete rozměry pravoúhlé vodní nádrže tvaru kvádru o objemu 32m^3 tak, aby dno a stěny měly dohromady co nejmenší povrch.

Maple:

```
> S:=(a,b)->a*b+64/b+64/a;
```

$$S := (a,\, b) \to a\, b + \frac{64}{b} + \frac{64}{a}$$

Hledáme stacionární body:

```
> Sa:=diff(S(a,b),a);
```

$$Sa := b - \frac{64}{a^2}$$

```
> Sb:=diff(S(a,b),b);
```

$$Sb := a - \frac{64}{b^2}$$

```
> evalf(solve({Sa,Sb}));
```

$$\{b = 4.,\, a = 4.\},$$
$$\{b = -2.000000000 + 3.464101615\, I,\, a = -2.000000000 + 3.464101615\, I\}$$

Soustava má jediné reálné řešení - bod [4,4]

```
> f(4,4);
```

$$48$$

Další

Příklad 7.1.6

Určete rozměry pravoúhlé vodní nádrže tvaru kvádru o objemu 32m^3 tak, aby dno a stěny měly dohromady co nejmenší povrch.

Maple:

Nyní ověříme, že jde o lokální minimum:

```
> Saa:=diff(S(a,b),a,a);Sab:=diff(S(a,b),a,b);Sbb:=diff(S(a,b),b,b);
```

$$Saa := \frac{128}{a^3}$$

$$Sab := 1$$

$$Sbb := \frac{128}{b^3}$$

```
> H_S:=matrix(2,2,[Saa,Sab,Sab,Sbb]);
```

$$H\_S := \begin{bmatrix} \frac{128}{a^3} & 1 \\ 1 & \frac{128}{b^3} \end{bmatrix}$$

```
> a:=4:b:=4:with(linalg):det(H_S);
```

$$3$$

Zjistili jsme, že det $H_S(4,4) > 0$ a $\frac{\partial^2 S}{\partial a^2}(4,4) > 0$, jde tedy o lokální minimum, zbývající hodnota c je

```
> c:=32/a/b;
```

$$c := 2$$

Rozměry nádrže musí být 4m, 4m a 2m.

Zpět

Příklad 7.1.6

Určete rozměry pravoúhlé vodní nádrže tvaru kvádru o objemu $32\mathrm{m}^3$ tak, aby dno a stěny měly dohromady co nejmenší povrch.

Mathematica:

$\boldsymbol{S[\mathbf{a\_}, \mathbf{b\_}] = a * b + 64/b + 64/a}$

$\frac{64}{a} + \frac{64}{b} + ab$

Hledáme stacionární body:

$\mathbf{dS} = \boldsymbol{\{D[S[a, b], a], D[S[a, b], b]\}}$

$\left\{-\frac{64}{a^2} + b, a - \frac{64}{b^2}\right\}$

$\mathbf{Solve[dS == \{0, 0\}}, \boldsymbol{\{a, b\}}\mathbf{]}$

$\left\{\{a \to 4, b \to 4\}, \left\{a \to -4(-1)^{1/3}, b \to -4(-1)^{1/3}\right\}, \left\{a \to 4(-1)^{2/3}, b \to 4(-1)^{2/3}\right\}\right\}$

$\boldsymbol{S[4, 4]}$

48

Nyní ověříme, že jde o lokální minimum:

$\mathbf{HS} = \boldsymbol{D[S[a, b], \{\{a, b\}, 2\}]}$

$\left\{\left\{\frac{128}{a^3}, 1\right\}, \left\{1, \frac{128}{b^3}\right\}\right\}$

Další

Příklad 7.1.6

Určete rozměry pravoúhlé vodní nádrže tvaru kvádru o objemu 32m^3 tak, aby dno a stěny měly dohromady co nejmenší povrch.

Mathematica:

MatrixForm[HS]/.{$a \to 4, b \to 4$}

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Det[%]

3

HS[[1, 1]]/.{$a \to 4, b \to 4$}

2

Zjistili jsme, že $\det H_S(4,4) > 0$ a $\frac{\partial^2 S}{\partial a^2}(4,4) > 0$, jde tedy o lokální minimum, zbývající hodnota c je

$c = 32/(ab)$/.{$a \to 4, b \to 4$}

2

Rozměry nádrže musí být 4m, 4m a 2m.

Zpět

Metoda nejmenších čtverců

- **Příklad 7.2.1** V následující tabulce jsou dány hodnoty (x_i, y_i), $i = 1, \ldots, 6$.

x_i	1	2	3	4	5	6
y_i	8	10	15	18	23	28

Závislost y na x aproximujte polynomem $y = ax + b$, kde koeficienty a, b hledejte metodou nejmenších čtverců.

- **Příklad 7.2.2** Při měření závislosti výchylky magnetometru na proudu protékajícím cívkou byla naměřena tato data:

Číslo měření i	1	2	3	4	5	6	7	8
$I[A]$	$0,50$	$1,00$	$1,50$	$2,00$	$2,50$	$3,00$	$3,50$	$4,00$
α[rad]	$0,004$	$0,01$	0.0162	$0,0212$	$0,0274$	$0,0346$	$0,0398$	$0,0456$

I - proud protékající cívkou v ampérech (A), α - výchylka magnetometru v radiánech (rad). Předpokládejme lineární zavislost α na I.

- **Příklad 7.2.3** Při měření indexu lomu n glycerinového roztoku v závislosti na jeho objemové koncentraci $c_\odot$ v rozmezí od 0% (destilovaná voda) do 100% (čistý glycerin) byla naměřena tato data:

Měření číslo i	1	2	3	4	5	6
$c_\odot[\%]$	0	10	20	30	40	50
n	$1,3340$	$1,3460$	$1,3600$	$1,3690$	$1,3795$	$1,3855$
Měření číslo i	7	8	9	10	11	
$c_\odot[\%]$	60	70	80	90	100	
n	$1,3905$	$1,4100$	$1,4250$	$1,4315$	$1,4445$	

Graf naměřených hodnot aproximujte pomocí přímky o rovnici $n = a \cdot c_\odot + b$.

Zpět

Příklad 7.2.1

V následující tabulce jsou dány hodnoty (x_i, y_i), $i = 1, \ldots, 6$.

x_i	1	2	3	4	5	6
y_i	8	10	15	18	23	28

Závislost y na x aproximujte polynomem $y = ax + b$, kde koeficienty a, b hledejte metodou nejmenších čtverců.

? Zpět

Příklad 7.2.1

V následující tabulce jsou dány hodnoty (x_i, y_i), $i = 1, \ldots, 6$.

x_i	1	2	3	4	5	6
y_i	8	10	15	18	23	28

Závislost y na x aproximujte polynomem $y = ax + b$, kde koeficienty a, b hledejte metodou nejmenších čtverců.

Výsledek:

$$y = \frac{142}{35}x + \frac{14}{5}\,.$$

Zpět

Příklad 7.2.1

V následující tabulce jsou dány hodnoty (x_i, y_i), $i = 1, \dots, 6$.

x_i	1	2	3	4	5	6
y_i	8	10	15	18	23	28

Závislost y na x aproximujte polynomem $y = ax + b$, kde koeficienty a, b hledejte metodou nejmenších čtverců.

Návod:

Koeficienty a, b při lineární regresi určíme řešením soustavy rovnic:

$$a \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right) + b \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right) = \sum_{i=1}^{n} (x_i y_i)$$

$$a \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right) + b \cdot n = \sum_{i=1}^{n} y_i \,, \quad n = 6\,.$$

Zpět

Příklad 7.2.1

V následující tabulce jsou dány hodnoty (x_i, y_i), $i = 1, \dots, 6$.

x_i	1	2	3	4	5	6
y_i	8	10	15	18	23	28

Závislost y na x aproximujte polynomem $y = ax + b$, kde koeficienty a, b hledejte metodou nejmenších čtverců.

Řešení:

Pro hodnoty z tabulky si nejprve vypočítáme potřebné koeficienty:

$$\sum_{i=1}^{6} x_i = 21\,, \qquad \sum_{i=1}^{6} (x_i y_i) = 428\,,$$

$$\sum_{i=1}^{6} y_i = 102\,, \qquad \sum_{i=1}^{6} x_i^2 = 91\,.$$

Jejich dosazením dostaneme soustavu:

$$91a + 21b = 428$$

$$21a + 6b = 102\,,$$

která má jediné řešení

$$a = \frac{142}{35}\,,\ b = \frac{14}{5}\,.$$

Další

Příklad 7.2.1

V následující tabulce jsou dány hodnoty (x_i, y_i), $i = 1, \ldots, 6$.

x_i	1	2	3	4	5	6
y_i	8	10	15	18	23	28

Závislost y na x aproximujte polynomem $y = ax + b$, kde koeficienty a, b hledejte metodou nejmenších čtverců.

Řešení:

Hledanou aproximací je přímka o rovnici

$$y = \frac{142}{35}x + \frac{14}{5}\ .$$

Zpět

Příklad 7.2.1

V následující tabulce jsou dány hodnoty (x_i, y_i), $i = 1, \ldots, 6$.

x_i	1	2	3	4	5	6
y_i	8	10	15	18	23	28

Závislost y na x aproximujte polynomem $y = ax + b$, kde koeficienty a, b hledejte metodou nejmenších čtverců.

Maple:

Takto bychom postupovali analogicky našemu "ručnímu výpočtu":

```
> x1:=1:x2:=2:x3:=3:x4:=4:x5:=5:x6:=6:
> y1:=8:y2:=10:y3:=15:y4:=18:y5:=23:y6:=28:
> K1:=x1+x2+x3+x4+x5+x6;
```

$$K1 := 21$$

```
> K2:=y1+y2+y3+y4+y5+y6;
```

$$K2 := 102$$

```
> K3:=x1^2+x2^2+x3^2+x4^2+x5^2+x6^2;
```

$$K3 := 91$$

```
> K4:=x1*y1+x2*y2+x3*y3+x4*y4+x5*y5+x6*y6;
```

$$K4 := 428$$

```
> solve({a*K3+b*K1=K4,a*K1+6*b=K2});
```

$$\{a = \frac{142}{35},\ b = \frac{14}{5}\}$$

Další

Příklad 7.2.1

V následující tabulce jsou dány hodnoty (x_i, y_i), $i = 1, \ldots, 6$.

x_i	1	2	3	4	5	6
y_i	8	10	15	18	23	28

Závislost y na x aproximujte polynomem $y = ax + b$, kde koeficienty a, b hledejte metodou nejmenších čtverců.

Maple:

A nyní si ukážeme kratší způsob řešení pomocí hotové procedury v Maplu:

```
> with(stats):
> fit[leastsquare[[x,y],y=a*x+b,{a,b
}]]([[1,2,3,4,5,6],[8,10,15,18,23,28]]);
```

$$y = \frac{142\,x}{35} + \frac{14}{5}$$

Zpět

Příklad 7.2.1

V následující tabulce jsou dány hodnoty (x_i, y_i), $i = 1, \ldots, 6$.

x_i	1	2	3	4	5	6
y_i	8	10	15	18	23	28

Závislost y na x aproximujte polynomem $y = ax + b$, kde koeficienty a, b hledejte metodou nejmenších čtverců.

Mathematica:

Takto bychom postupovali analogicky našemu "ručnímu výpočtu":

datax = {1, 2, 3, 4, 5, 6};

datay = {8, 10, 15, 18, 23, 28};

K1 = Sum[datax[[*i*]], {*i*, 1, 6}]

21

K2 = Sum[datay[[*i*]], {*i*, 1, 6}]

102

K3 = Sum[datax[[*i*]]^2, {*i*, 1, 6}]

91

K4 = Sum[datax[[*i*]]datay[[*i*]], {*i*, 1, 6}]

428

Solve[{*a* ∗ K3 + *b* ∗ K1==K4, *a* ∗ K1 + 6 ∗ *b*==K2}, {*a*, *b*}]

$\left\{\left\{a \to \frac{142}{35}, b \to \frac{14}{5}\right\}\right\}$

Další

Příklad 7.2.1

V následující tabulce jsou dány hodnoty (x_i, y_i), $i = 1, \ldots, 6$.

x_i	1	2	3	4	5	6
y_i	8	10	15	18	23	28

Závislost y na x aproximujte polynomem $y = ax + b$, kde koeficienty a, b hledejte metodou nejmenších čtverců.

Mathematica:

A nyní si ukážeme kratší způsob řešení pomocí předdefinované procedury v programu Mathematica:

<< Statistics`LinearRegression`;

data = Table[{datax[[*i*]], datay[[*i*]]}, {*i*, 1, 6}]

$\{\{1, 8\}, \{2, 10\}, \{3, 15\}, \{4, 18\}, \{5, 23\}, \{6, 28\}\}$

rovnice = *y* == Fit[data, {1, *x*}, *x*]

$y == 2.8 + 4.05714x$

Zpět

Příklad 7.2.2

Při měření závislosti výchylky magnetometru na proudu protékajícím cívkou byla naměřena tato data:

Číslo měření i	1	2	3	4	5	6	7	8
$I[A]$	$0,50$	$1,00$	$1,50$	$2,00$	$2,50$	$3,00$	$3,50$	$4,00$
α[rad]	$0,004$	$0,01$	0.0162	$0,0212$	$0,0274$	$0,0346$	$0,0398$	$0,0456$

I - proud protékající cívkou v ampérech (A), α - výchylka magnetometru v radiánech (rad). Předpokládejme lineární zavislost α na I.

? Zpět

Příklad 7.2.2

Při měření závislosti výchylky magnetometru na proudu protékajícím cívkou byla naměřena tato data:

Číslo měření i	1	2	3	4	5	6	7	8
$I[A]$	$0,50$	$1,00$	$1,50$	$2,00$	$2,50$	$3,00$	$3,50$	$4,00$
α[rad]	$0,004$	$0,01$	0.0162	$0,0212$	$0,0274$	$0,0346$	$0,0398$	$0,0456$

I - proud protékající cívkou v ampérech (A), α - výchylka magnetometru v radiánech (rad). Předpokládejme lineární zavislost α na I.

Výsledek:

$\alpha \doteq 0,01194 \cdot I - 0,00202\,.$

Zpět

Příklad 7.2.2

Při měření závislosti výchylky magnetometru na proudu protékajícím cívkou byla naměřena tato data:

Číslo měření i	1	2	3	4	5	6	7	8
$I[A]$	$0,50$	$1,00$	$1,50$	$2,00$	$2,50$	$3,00$	$3,50$	$4,00$
α[rad]	$0,004$	$0,01$	0.0162	$0,0212$	$0,0274$	$0,0346$	$0,0398$	$0,0456$

I - proud protékající cívkou v ampérech (A), α - výchylka magnetometru v radiánech (rad). Předpokládejme lineární zavislost α na I.

Návod:

Koeficienty a, b pro aproximaci $\alpha = aI + b$ určíme řešením soustavy rovnic:

$$a \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} I_i^2 \right) + b \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} I_i \right) = \sum_{i=1}^{n} (I_i \alpha_i)$$

$$a \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} I_i \right) + b \cdot n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \,, \quad n = 8\,.$$

Zpět

Příklad 7.2.2

Při měření závislosti výchylky magnetometru na proudu protékajícím cívkou byla naměřena tato data:

Číslo měření i	1	2	3	4	5	6	7	8
$I[A]$	$0,50$	$1,00$	$1,50$	$2,00$	$2,50$	$3,00$	$3,50$	$4,00$
α[rad]	$0,004$	$0,01$	0.0162	$0,0212$	$0,0274$	$0,0346$	$0,0398$	$0,0456$

I - proud protékající cívkou v ampérech (A), α - výchylka magnetometru v radiánech (rad). Předpokládejme lineární zavislost α na I.

Řešení:

Označme hledanou aproximaci polynomem $\alpha = aI + b$, koeficienty a, b najdeme metodou nejmenších čtverců. Vzhledem ke skutečnosti, že měřené veličiny jsou udány v základních jednotkách, provedeme výpočet, aniž bychom dále uvažovali fyzikální rozměr jednotlivých veličin. Pro naměřené hodnoty vypočteme příslušné koeficienty:

$$\sum_{i=1}^{8} I_i = 18 \qquad \sum_{i=1}^{8} (I_i \alpha_i) = 0,5727$$

$$\sum_{i=1}^{8} \alpha_i = 0,1988 \qquad \sum_{i=1}^{8} I_i^2 = 51\,.$$

Dosazením dostaneme soustavu:

$$\begin{aligned} 51a &+ 18b &= 0,5727 \\ 18a &+ 8b &= 0,1988\,, \end{aligned}$$

která má jediné řešení $a \doteq 0,01194\,,\ b \doteq -0,00202\,.$
Hledanou aproximací je přímka o rovnici $\alpha \doteq 0,01194 \cdot I - 0,00202\,.$

Zpět

Příklad 7.2.2

Při měření závislosti výchylky magnetometru na proudu protékajícím cívkou byla naměřena tato data:

Číslo měření i	1	2	3	4	5	6	7	8
$I[A]$	$0,50$	$1,00$	$1,50$	$2,00$	$2,50$	$3,00$	$3,50$	$4,00$
α[rad]	$0,004$	$0,01$	0.0162	$0,0212$	$0,0274$	$0,0346$	$0,0398$	$0,0456$

I - proud protékající cívkou v ampérech (A), α - výchylka magnetometru v radiánech (rad). Předpokládejme lineární zavislost α na I.

Maple:

Takto bychom počítali pomocí soustavy lineárních rovnic:

```
> I1:=0.5:I2:=1:I3:=1.5:I4:=2:I5:=2.5:I6:=3:I7:=3.5:I8:=4:
> a1:=0.4*10^{-2}:a2:=1*10^{-2}:a3:=1.62*10^{-2}:a4:=2.12*10^{-2
}:a5:=2.74*10^{-2}:a6:=3.46*10^{-2}:a7:=3.98*10^{-2 }:a8:=4.56*10^{-2}:
> K1:=I1+I2+I3+I4+I5+I6+I7+I8;
```

$$K1 := 18.0$$

```
> K2:=a1+a2+a3+a4+a5+a6+a7+a8;
```

$$K2 := 19.88\,10^{\{-2\}}$$

```
> K3:=I1^2+I2^2+I3^2+I4^2+I5^2+I6^2+I7^2+I8^2;
```

$$K3 := 51.00$$

```
> K4:=I1*a1+I2*a2+I3*a3+I4*a4+I5*a5+I6*a6+I7*a7+I8*a8;
```

$$K4 := 57.270\,10^{\{-2\}}$$

Další

Příklad 7.2.2

Při měření závislosti výchylky magnetometru na proudu protékajícím cívkou byla naměřena tato data:

Číslo měření i	1	2	3	4	5	6	7	8
$I[A]$	$0,50$	$1,00$	$1,50$	$2,00$	$2,50$	$3,00$	$3,50$	$4,00$
$\alpha[\text{rad}]$	$0,004$	$0,01$	0.0162	$0,0212$	$0,0274$	$0,0346$	$0,0398$	$0,0456$

I - proud protékající cívkou v ampérech (A), α - výchylka magnetometru v radiánech (rad). Předpokládejme lineární zavislost α na I.

Maple:

```
> solve({a*K3+b*K1=K4,a*K1+8*b=K2});
```

$$\{b = -0.2021428571\,10.^{\{-2.\}},\ a = 1.194285714\,10.^{\{-2.\}}\}$$

Hledaná regresní přímka má rovnici:

```
> alpha:=1.194285714*10.^{-2.}*I-.2021428571*10.^{-2.};
```

$$\alpha := 1.194285714\,I\,10.^{\{-2.\}} - 0.2021428571\,10.^{\{-2.\}}$$

Nyní budeme počítat přímo s využitím balíku stats:

```
> restart:with(stats):
> fit[leastsquare[[x,y],y=a*x+b,{a,b
}]]([[0.5,1,1.5,2,2.5,3,3.5,4],[0.004,0.01,0.0162,0.0212,0.0274,0.034
6,0.0398,0.0456]]);
```

$$y = 0.01194285714\,x - 0.002021428571$$

V obou případech jsme získali tentýž výsledek.

Další

Příklad 7.2.2

Při měření závislosti výchylky magnetometru na proudu protékajícím cívkou byla naměřena tato data:

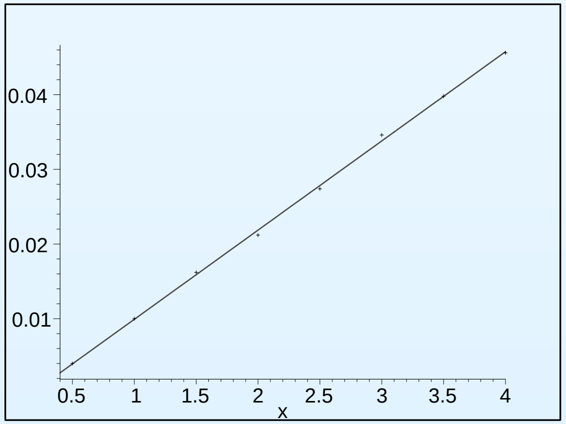
Číslo měření i	1	2	3	4	5	6	7	8
$I[A]$	$0,50$	$1,00$	$1,50$	$2,00$	$2,50$	$3,00$	$3,50$	$4,00$
α[rad]	$0,004$	$0,01$	0.0162	$0,0212$	$0,0274$	$0,0346$	$0,0398$	$0,0456$

I - proud protékající cívkou v ampérech (A), α - výchylka magnetometru v radiánech (rad). Předpokládejme lineární zavislost α na I.

Maple:

Podívejme se nyní na obrázek celé situace:

```
> proud:=[0.5,1,1.5,2,2.5,3,3.5,4]:
> uhel:=[0.004,0.01,0.0162,0.0212,0.0274,0.0346,0.0398,0.0456]:
> body:=convert(linalg[transpose]([proud,uhel]),listlist):
> with(plots):obr:=listplot(body,style=POINT,symbolsize=14):
> primka:=plot(.1194285714e-1*x-.2021428571e-2, x=0.4 ..
4,thickness=3):
> display({obr,primka});
```



Zpět

Příklad 7.2.2

Při měření závislosti výchylky magnetometru na proudu protékajícím cívkou byla naměřena tato data:

Číslo měření i	1	2	3	4	5	6	7	8
$I[A]$	$0,50$	$1,00$	$1,50$	$2,00$	$2,50$	$3,00$	$3,50$	$4,00$
α[rad]	$0,004$	$0,01$	0.0162	$0,0212$	$0,0274$	$0,0346$	$0,0398$	$0,0456$

I - proud protékající cívkou v ampérech (A), α - výchylka magnetometru v radiánech (rad). Předpokládejme lineární zavislost α na I.

Mathematica:

Takto bychom počítali pomocí soustavy lineárních rovnic:

dataI = {0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 2.5, 3.0, 3.5, 4.0};

dataalfa = {0.4, 1.0, 1.62, 2.12, 2.74, 3.46, 3.98, 4.56}10^(−2);

K1 = Sum[dataI[[*i*]], {*i*, 1, 8}]

18.

K2 = Sum[dataalfa[[*i*]], {*i*, 1, 8}]

0.1988

K3 = Sum[dataI[[*i*]]^2, {*i*, 1, 8}]

51.

K4 = Sum[dataI[[*i*]]dataalfa[[*i*]], {*i*, 1, 8}]

0.5727

Solve[{*a* ∗ K3 + *b* ∗ K1==K4, *a* ∗ K1 + 8 ∗ *b*==K2}, {*a*, *b*}]

$\{\{a \to 0.0119429, b \to -0.00202143\}\}$

Další

Příklad 7.2.2

Při měření závislosti výchylky magnetometru na proudu protékajícím cívkou byla naměřena tato data:

Číslo měření i	1	2	3	4	5	6	7	8
$I[A]$	$0,50$	$1,00$	$1,50$	$2,00$	$2,50$	$3,00$	$3,50$	$4,00$
α[rad]	$0,004$	$0,01$	0.0162	$0,0212$	$0,0274$	$0,0346$	$0,0398$	$0,0456$

I - proud protékající cívkou v ampérech (A), α - výchylka magnetometru v radiánech (rad). Předpokládejme lineární zavislost α na I.

Mathematica:

Hledaná regresní přímka má rovnici:

rovnice = $\boldsymbol{\alpha}$ == $\boldsymbol{ai + b}$/.%

$\{\alpha == -0.00202143 + 0.0119429i\}$

Nyní budeme počítat přímo s využitím balíku Statistics:

<< Statistics`LinearRegression`;

data = Table[{dataI[[$\boldsymbol{i}$]], dataalfa[[$\boldsymbol{i}$]]}, {$\boldsymbol{i}$, 1, 8}]

$\{\{0.5, 0.004\}, \{1., 0.01\}, \{1.5, 0.0162\}, \{2., 0.0212\},$
$\{2.5, 0.0274\}, \{3., 0.0346\}, \{3.5, 0.0398\}, \{4., 0.0456\}\}$

rovnice = $\boldsymbol{\alpha}$ == Fit[data, {1, $\boldsymbol{i}$}, $\boldsymbol{i}$]

$\alpha == -0.00202143 + 0.0119429i$

V obou případech jsme získali tentýž výsledek.

Další

Příklad 7.2.2

Při měření závislosti výchylky magnetometru na proudu protékajícím cívkou byla naměřena tato data:

Číslo měření i	1	2	3	4	5	6	7	8
$I[A]$	$0,50$	$1,00$	$1,50$	$2,00$	$2,50$	$3,00$	$3,50$	$4,00$
α[rad]	$0,004$	$0,01$	0.0162	$0,0212$	$0,0274$	$0,0346$	$0,0398$	$0,0456$

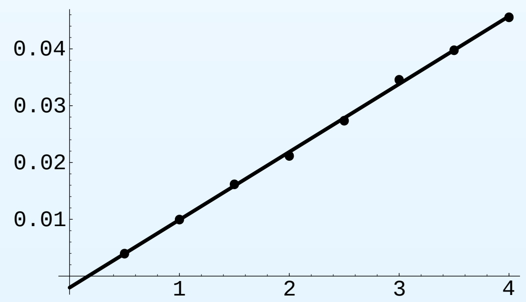
I - proud protékající cívkou v ampérech (A), α - výchylka magnetometru v radiánech (rad). Předpokládejme lineární zavislost α na I.

Mathematica:

Podívejme se nyní na obrázek celé situace:

g1 = ListPlot[data, PlotStyle → {PointSize[0.02]}, DisplayFunction → Identity];
g2 = Plot[rovnice[[2]], {i, 0, 4}, PlotStyle → {Thickness[0.008]}, DisplayFunction → Identity];

Show[{g1, g2}, DisplayFunction → $DisplayFunction];



Zpět

Příklad 7.2.3

Při měření indexu lomu n glycerinového roztoku v závislosti na jeho objemové koncentraci $c_\odot$ v rozmezí od 0% (destilovaná voda) do 100% (čistý glycerin) byla naměřena tato data:

Měření číslo i	1	2	3	4	5	6
$c_\odot\,[\%]$	0	10	20	30	40	50
n	$1,3340$	$1,3460$	$1,3600$	$1,3690$	$1,3795$	$1,3855$
Měření číslo i	7	8	9	10	11	
$c_\odot\,[\%]$	60	70	80	90	100	
n	$1,3905$	$1,4100$	$1,4250$	$1,4315$	$1,4445$	

Graf naměřených hodnot aproximujte pomocí přímky o rovnici $n = a \cdot c_\odot + b$.

? Zpět

Příklad 7.2.3

Při měření indexu lomu n glycerinového roztoku v závislosti na jeho objemové koncentraci $c_\odot$ v rozmezí od 0% (destilovaná voda) do 100% (čistý glycerin) byla naměřena tato data:

Měření číslo i	1	2	3	4	5	6
$c_\odot\,[\%]$	0	10	20	30	40	50
n	$1,3340$	$1,3460$	$1,3600$	$1,3690$	$1,3795$	$1,3855$
Měření číslo i	7	8	9	10	11	
$c_\odot\,[\%]$	60	70	80	90	100	
n	$1,3905$	$1,4100$	$1,4250$	$1,4315$	$1,4445$	

Graf naměřených hodnot aproximujte pomocí přímky o rovnici $n = a \cdot c_\odot + b\,.$

Výsledek:

$n = 0,1075 \cdot c_\odot + 1,3349\,.$ Zpět

Příklad 7.2.3

Při měření indexu lomu n glycerinového roztoku v závislosti na jeho objemové koncentraci $c_\odot$ v rozmezí od 0% (destilovaná voda) do 100% (čistý glycerin) byla naměřena tato data:

Měření číslo i	1	2	3	4	5	6
$c_\odot [\%]$	0	10	20	30	40	50
n	$1,3340$	$1,3460$	$1,3600$	$1,3690$	$1,3795$	$1,3855$
Měření číslo i	7	8	9	10	11	
$c_\odot [\%]$	60	70	80	90	100	
n	$1,3905$	$1,4100$	$1,4250$	$1,4315$	$1,4445$	

Graf naměřených hodnot aproximujte pomocí přímky o rovnici $n = a \cdot c_\odot + b$.

Návod:

Koeficienty a, b pro aproximaci $n = ac_\odot + b$ určíme řešením soustavy rovnic:

$$a \cdot \left(\sum_{i=1}^{k} c_{\odot i}^2 \right) + b \cdot \left(\sum_{i=1}^{k} c_{\odot i} \right) = \sum_{i=1}^{k} (c_{\odot i} n_i)$$

$$a \cdot \left(\sum_{i=1}^{k} c_{\odot i} \right) + b \cdot k = \sum_{i=1}^{k} n_i \,, \quad k = 11\,.$$

Zpět

Příklad 7.2.3

Při měření indexu lomu n glycerinového roztoku v závislosti na jeho objemové koncentraci $c_\odot$ v rozmezí od 0% (destilovaná voda) do 100% (čistý glycerin) byla naměřena tato data:

Měření číslo i	1	2	3	4	5	6
$c_\odot$ [%]	0	10	20	30	40	50
n	$1,3340$	$1,3460$	$1,3600$	$1,3690$	$1,3795$	$1,3855$
Měření číslo i	7	8	9	10	11	
$c_\odot$ [%]	60	70	80	90	100	
n	$1,3905$	$1,4100$	$1,4250$	$1,4315$	$1,4445$	

Graf naměřených hodnot aproximujte pomocí přímky o rovnici $n = a \cdot c_\odot + b$.

Řešení:

Pro naměřené hodnoty vypočteme příslušné koeficienty:

$$\sum_{i=1}^{11} c_{\odot i} = 5,5 \qquad \sum_{i=1}^{11} (c_{\odot i} n_i) = 7,756$$

$$\sum_{i=1}^{11} n_i = 15,2755 \qquad \sum_{i=1}^{11} c_{\odot i}^2 = 3,85\,.$$

Dosazením dostaneme soustavu:
$$\begin{array}{rcrcl} 3,85a & + & 5,5b & = & 7,756 \\ 5,5a & + & 11b & = & 15,2755\,, \end{array}$$
která má jediné řešení $a \doteq 0,1075\,,\ b \doteq 1,3349\,.$
Hledanou aproximací je přímka o rovnici $n = 0,1075 \cdot c_\odot + 1,3349\,.$

Zpět

Příklad 7.2.3

Při měření indexu lomu n glycerinového roztoku v závislosti na jeho objemové koncentraci $c_{\odot}$ v rozmezí od 0% (destilovaná voda) do 100% (čistý glycerin) byla naměřena tato data:

Měření číslo i	1	2	3	4	5	6
$c_{\odot}[\%]$	0	10	20	30	40	50
n	$1,3340$	$1,3460$	$1,3600$	$1,3690$	$1,3795$	$1,3855$
Měření číslo i	7	8	9	10	11	
$c_{\odot}[\%]$	60	70	80	90	100	
n	$1,3905$	$1,4100$	$1,4250$	$1,4315$	$1,4445$	

Graf naměřených hodnot aproximujte pomocí přímky o rovnici $n = a \cdot c_{\odot} + b$.

Maple:

Nejprve opět uvedeme podrobný výpočet:

```
> c1:=0:c2:=0.10:c3:=0.20:c4:=0.30:c5:=0.40:c6:=0.50:c7:=0.60:c8:=0.70:
c9:=0.80:c10:=0.90:c11:=1.00:
> n1:=1.334:n2:=1.346:n3:=1.36:n4:=1.369:n5:=1.3795:n6:=1.3855:n7:=1.39
05:n8:=1.41:n9:=1.425:n10:=1.4315:n11:=1.4445:
> K1:=c1+c2+c3+c4+c5+c6+c7+c8+c9+c10+c11;
```

$$K1 := 5.50$$

```
> K2:=n1+n2+n3+n4+n5+n6+n7+n8+n9+n10+n11;
```

$$K2 := 15.2755$$

```
> K3:=c1^2+c2^2+c3^2+c4^2+c5^2+c6^2+c7^2+c8^2+c9^2+c10^2+c11^2;
```

$$K3 := 3.8500$$

Další

Příklad 7.2.3

Při měření indexu lomu n glycerinového roztoku v závislosti na jeho objemové koncentraci $c_\odot$ v rozmezí od 0% (destilovaná voda) do 100% (čistý glycerin) byla naměřena tato data:

Měření číslo i	1	2	3	4	5	6
$c_\odot$ [%]	0	10	20	30	40	50
n	$1,3340$	$1,3460$	$1,3600$	$1,3690$	$1,3795$	$1,3855$
Měření číslo i	7	8	9	10	11	
$c_\odot$ [%]	60	70	80	90	100	
n	$1,3905$	$1,4100$	$1,4250$	$1,4315$	$1,4445$	

Graf naměřených hodnot aproximujte pomocí přímky o rovnici $n = a \cdot c_\odot + b$.

Maple:

```
> K4:=c1*n1+c2*n2+c3*n3+c4*n4+c5*n5+c6*n6+c7*n7+c8*n8+c9*n9+c10*n10+c11
*n11;
```

$$K4 := 7.756000$$

```
> solve({a*K3+b*K1=K4,a*K1+11*b=K2});
```

$$\{a = 0.1075000000,\ b = 1.334931818\}$$

Hledaná regresní přímka má rovnici:

```
> n:=.1075000000*c+1.334931818;
```

$$n := 0.1075000000\,c + 1.334931818$$

Další

Příklad 7.2.3

Při měření indexu lomu n glycerinového roztoku v závislosti na jeho objemové koncentraci $c_\odot$ v rozmezí od 0% (destilovaná voda) do 100% (čistý glycerin) byla naměřena tato data:

Měření číslo i	1	2	3	4	5	6
$c_\odot[\%]$	0	10	20	30	40	50
n	$1,3340$	$1,3460$	$1,3600$	$1,3690$	$1,3795$	$1,3855$
Měření číslo i	7	8	9	10	11	
$c_\odot[\%]$	60	70	80	90	100	
n	$1,3905$	$1,4100$	$1,4250$	$1,4315$	$1,4445$	

Graf naměřených hodnot aproximujte pomocí přímky o rovnici $n = a \cdot c_\odot + b$.

Maple:

A nyní si uvedeme rychlejší možnost výpočtu:

```
> with(stats):
> fit[leastsquare[[x,y],y=a*x+b,{a,b
}]]([[0,0.1,0.2,0.3,0.4,0.5,0.6,0.7,0.8,0.9,1.0],[1.334,1.346,1.36,1.
369,1.3795,1.3855,1.3905,1.41,1.425,1.4315,1.4445]]);
```

$$y = 0.1075000000\,x + 1.334931818$$

Oba způsoby výpočtu vedly ke stejnému výsledku.

Podívejme se nyní na obrázek provedené regrese:

```
> koncentrace:=[0,0.1,0.2,0.3,0.4,0.5,0.6,0.7,0.8,0.9,1.0]:
> indx:=[1.334,1.346,1.36,1.369,1.3795,1.3855,1.3905,1.41,1.425,1.4315,
1.4445]:
```

Další

Příklad 7.2.3

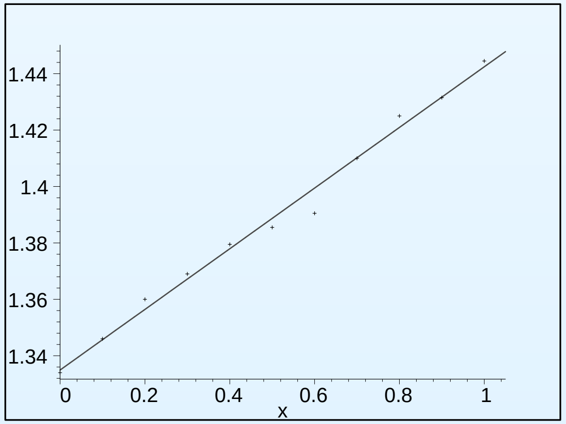
Při měření indexu lomu n glycerinového roztoku v závislosti na jeho objemové koncentraci $c_\odot$ v rozmezí od 0% (destilovaná voda) do 100% (čistý glycerin) byla naměřena tato data:

Měření číslo i	1	2	3	4	5	6
$c_\odot\,[\%]$	0	10	20	30	40	50
n	$1,3340$	$1,3460$	$1,3600$	$1,3690$	$1,3795$	$1,3855$
Měření číslo i	7	8	9	10	11	
$c_\odot\,[\%]$	60	70	80	90	100	
n	$1,3905$	$1,4100$	$1,4250$	$1,4315$	$1,4445$	

Graf naměřených hodnot aproximujte pomocí přímky o rovnici $n = a \cdot c_\odot + b$.

Maple:

```
> body:=convert(linalg[transpose]([koncentrace,indx]),listlist):
> with(plots):obr:=listplot(body,style=POINT,symbolsize=14):
> primka:=plot(0.1075000000*x+1.334931818, x=0 .. 1.05,thickness=3):
> display({obr,primka});
```



Zpět

Příklad 7.2.3

Při měření indexu lomu n glycerinového roztoku v závislosti na jeho objemové koncentraci $c_\odot$ v rozmezí od 0% (destilovaná voda) do 100% (čistý glycerin) byla naměřena tato data:

Měření číslo i	1	2	3	4	5	6
$c_\odot\,[\%]$	0	10	20	30	40	50
n	$1,3340$	$1,3460$	$1,3600$	$1,3690$	$1,3795$	$1,3855$
Měření číslo i	7	8	9	10	11	
$c_\odot\,[\%]$	60	70	80	90	100	
n	$1,3905$	$1,4100$	$1,4250$	$1,4315$	$1,4445$	

Graf naměřených hodnot aproximujte pomocí přímky o rovnici $n = a \cdot c_\odot + b$.

Mathematica:

Nejprve opět uvedeme podrobný výpočet:

datac = {0.0, 0.10, 0.20, 0.30, 0.40, 0.50, 0.60, 0.70, 0.80, 0.90, 1.00};

datan = {1.3340, 1.3460, 1.3600, 1.3690, 1.3795, 1.3855, 1.3905, 1.4100, 1.4250, 1.4315, 1.4445};

K1 = Sum[datac[[*i*]], {*i*, 1, 11}]

5.5

K2 = Sum[datan[[*i*]], {*i*, 1, 11}]

15.2755

K3 = Sum[datac[[*i*]]^2, {*i*, 1, 11}]

3.85

Další

Příklad 7.2.3

Při měření indexu lomu n glycerinového roztoku v závislosti na jeho objemové koncentraci $c_{\odot}$ v rozmezí od 0% (destilovaná voda) do 100% (čistý glycerin) byla naměřena tato data:

Měření číslo i	1	2	3	4	5	6
$c_{\odot}[\%]$	0	10	20	30	40	50
n	$1,3340$	$1,3460$	$1,3600$	$1,3690$	$1,3795$	$1,3855$
Měření číslo i	7	8	9	10	11	
$c_{\odot}[\%]$	60	70	80	90	100	
n	$1,3905$	$1,4100$	$1,4250$	$1,4315$	$1,4445$	

Graf naměřených hodnot aproximujte pomocí přímky o rovnici $n = a \cdot c_{\odot} + b$.

Mathematica:

$\mathbf{K4 = Sum[datac[[\boldsymbol{i}]]datan[[\boldsymbol{i}]], \{\boldsymbol{i}, 1, 11\}]}$

7.756

$\mathbf{Solve[\{\boldsymbol{a} * K3 + \boldsymbol{b} * K1 == K4, \boldsymbol{a} * K1 + 11 * \boldsymbol{b} == K2\}, \{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\}]}$

$\{\{a \to 0.1075, b \to 1.33493\}\}$

Hledaná regresní přímka má rovnici:

$\mathbf{rovnice = \boldsymbol{n} == \boldsymbol{ac} + \boldsymbol{b}/.\%}$

$\{n == 1.33493 + 0.1075c\}$

Další

Příklad 7.2.3

Při měření indexu lomu n glycerinového roztoku v závislosti na jeho objemové koncentraci $c_\odot$ v rozmezí od 0% (destilovaná voda) do 100% (čistý glycerin) byla naměřena tato data:

Měření číslo i	1	2	3	4	5	6
$c_\odot[\%]$	0	10	20	30	40	50
n	$1,3340$	$1,3460$	$1,3600$	$1,3690$	$1,3795$	$1,3855$
Měření číslo i	7	8	9	10	11	
$c_\odot[\%]$	60	70	80	90	100	
n	$1,3905$	$1,4100$	$1,4250$	$1,4315$	$1,4445$	

Graf naměřených hodnot aproximujte pomocí přímky o rovnici $n = a \cdot c_\odot + b$.

Mathematica:

A nyní si uvedeme rychlejší možnost výpočtu:

<< Statistics`LinearRegression`;

data = Table[{datac[[*i*]], datan[[*i*]]}, {*i*, 1, 11}]

{{0., 1.334}, {0.1, 1.346}, {0.2, 1.36}, {0.3, 1.369}, {0.4, 1.3795},
{0.5, 1.3855}, {0.6, 1.3905}, {0.7, 1.41}, {0.8, 1.425}, {0.9, 1.4315}, {1., 1.4445}}

rovnice = *n* == Fit[data, {1, *c*}, *c*]

$n == 1.33493 + 0.1075c$

Oba způsoby výpočtu vedly ke stejnému výsledku.
Podívejme se nyní na obrázek provedené regrese:

Další

Příklad 7.2.3

Při měření indexu lomu n glycerinového roztoku v závislosti na jeho objemové koncentraci $c_{\odot}$ v rozmezí od 0% (destilovaná voda) do 100% (čistý glycerin) byla naměřena tato data:

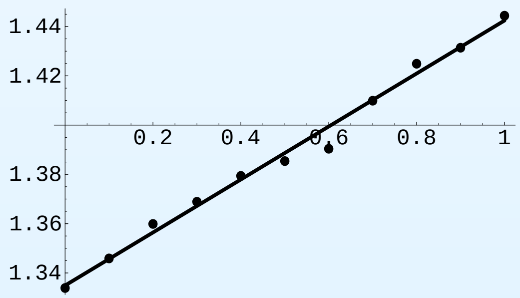
Měření číslo i	1	2	3	4	5	6
$c_{\odot}[\%]$	0	10	20	30	40	50
n	$1,3340$	$1,3460$	$1,3600$	$1,3690$	$1,3795$	$1,3855$
Měření číslo i	7	8	9	10	11	
$c_{\odot}[\%]$	60	70	80	90	100	
n	$1,3905$	$1,4100$	$1,4250$	$1,4315$	$1,4445$	

Graf naměřených hodnot aproximujte pomocí přímky o rovnici $n = a \cdot c_{\odot} + b$.

Mathematica:

g1 = ListPlot[data, PlotStyle → {PointSize[0.02]}, DisplayFunction → Identity];
g2 = Plot[rovnice[[2]], {c, 0, 1.00}, PlotStyle → {Thickness[0.008]},
DisplayFunction → Identity];

Show[{g1, g2}, DisplayFunction → $DisplayFunction];



Zpět

Implicitně zadané funkce

- Implicitní funkce jedné reálné proměnné
- Implicitní funkce více reálných proměnných

Zpět

Implicitní funkce jedné reálné proměnné

- **Příklad 8.1.1** Ověřte, že v okolí bodu $A = [-1, 1]$ je rovnicí $F(x, y) = x^2 - y - \mathrm{e}^{y-1} + 1 = 0$ implicitně definována funkce $y = f(x)$. Zjistěte, zda v okolí bodu $x_0 = -1$ je funkce $f(x)$ rostoucí, klesající, konvexní či konkávní.

- **Příklad 8.1.2** Rozhodněte, zda křivka $2x - x^2 - \mathrm{e}^y - 2y = 0$ leží v okolí bodu $[1, 0]$ pod tečnou nebo nad tečnou.

- **Příklad 8.1.3** Najděte rovnici tečny a normály v bodě $[1, 0]$ ke křivce dané rovnicí $2x - x^2 - \mathrm{e}^y - 2y = 0$.

- **Příklad 8.1.4** Uvažujte křivku o rovnici $2x - x^2 - \mathrm{e}^y - 2y = 0$ na okolí bodu $A = [1, 0]$ a vypočtěte úhel, pod kterým tuto křivku v daném bodě A protíná přímka o rovnici $p : x - y - 1 = 0$.

- **Příklad 8.1.5** Ověřte, že rovnice $F(x, y) = y - x - \sin y = 0$ definuje v okolí bodu $P = \left[\frac{\pi}{2} - 1, \frac{\pi}{2}\right]$ jedinou funkci $y = f(x)$, pro kterou $f(\frac{\pi}{2} - 1) = \frac{\pi}{2}$ a která má v intervalu $I = (\frac{\pi}{2} - 1 - \varepsilon, \frac{\pi}{2} - 1 + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, spojitou první a druhou derivaci. Najděte Taylorův polynom 2. stupně funkce f v bodě $x_0 = \frac{\pi}{2} - 1$ a pomocí tohoto polynomu určete přibližnou hodnotu $f(\frac{\pi}{2} - 0,98)$.

Zpět

Příklad 8.1.1

Ověřte, že v okolí bodu $A = [-1, 1]$ je rovnicí $F(x, y) = x^2 - y - \mathrm{e}^{y-1} + 1 = 0$ implicitně definována funkce $y = f(x)$. Zjistěte, zda v okolí bodu $x_0 = -1$ je funkce $f(x)$ rostoucí, klesající, konvexní či konkávní.

? Zpět

Příklad 8.1.1

Ověřte, že v okolí bodu $A = [-1, 1]$ je rovnicí $F(x, y) = x^2 - y - \mathrm{e}^{y-1} + 1 = 0$ implicitně definována funkce $y = f(x)$. Zjistěte, zda v okolí bodu $x_0 = -1$ je funkce $f(x)$ rostoucí, klesající, konvexní či konkávní.

Výsledek:

Funkce $y = f(x)$ je definována implicitně na okolí bodu A danou rovnicí a je v tomto bodě klesající a konvexní.

Zpět

Příklad 8.1.1

Ověřte, že v okolí bodu $A = [-1, 1]$ je rovnicí $F(x, y) = x^2 - y - \mathrm{e}^{y-1} + 1 = 0$ implicitně definována funkce $y = f(x)$. Zjistěte, zda v okolí bodu $x_0 = -1$ je funkce $f(x)$ rostoucí, klesající, konvexní či konkávní.

Návod:

Ověříme podmínky věty o existenci implicitní funkce:

$$\begin{aligned} &1) \quad F(= -1, 1) = 0\ , \\ &2) \quad \frac{\partial F}{\partial y}(-1, 1) \neq 0\ . \end{aligned}$$

a vypočteme první derivaci podle věty o derivaci implicitní funkce:

$$f'(x) = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}(x, f(x))}{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))} \qquad \text{pro} \quad x \in (-1 - \delta, -1 + \delta)\ .$$

Druhou derivaci spočteme např. derivací předcházejícího vztahu.

Zpět

Příklad 8.1.1

Ověřte, že v okolí bodu $A = [-1, 1]$ je rovnicí $F(x, y) = x^2 - y - \mathrm{e}^{y-1} + 1 = 0$ implicitně definována funkce $y = f(x)$. Zjistěte, zda v okolí bodu $x_0 = -1$ je funkce $f(x)$ rostoucí, klesající, konvexní či konkávní.

Řešení:

V bodě $A = [-1, 1]$ platí

$$F(-1, 1) = (-1)^2 - 1 - \mathrm{e}^{1-1} + 1 = 1 - 1 - 1 + 1 = 0\,,$$

dále

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = -1 - \mathrm{e}^{y-1}\,, \qquad \frac{\partial F}{\partial y}(-1, 1) = -1 - 1 = -2 \neq 0\,.$$

Jsou tedy splněny předpoklady pro to, aby rovnicí $F(x, y) = 0$ v okolí bodu A byla definována jednoznačně funkce $y = f(x)$. Vypočteme $y'(x)$, $y''(x)$:

$$y'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, y)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, y)} = -\frac{2x}{-1 - \mathrm{e}^{y-1}} = \frac{2x}{1 + \mathrm{e}^{y-1}}\,, \quad y'(-1) = \frac{-2}{2} = -1$$

$$y''(x) = \frac{2(1 + \mathrm{e}^{y-1}) - 2x(\mathrm{e}^{y-1} \cdot y'(x))}{(1 + \mathrm{e}^{y-1})^2}\,, \qquad y''(-1) = \frac{0 - 2 \cdot (-1)}{(-2)^2} = \frac{1}{2}\,.$$

Zpět

Příklad 8.1.1

Ověřte, že v okolí bodu $A = [-1, 1]$ je rovnicí $F(x, y) = x^2 - y - \mathrm{e}^{y-1} + 1 = 0$ implicitně definována funkce $y = f(x)$. Zjistěte, zda v okolí bodu $x_0 = -1$ je funkce $f(x)$ rostoucí, klesající, konvexní či konkávní.

Maple:

```
> with(plots):
> F:=(x,y)->x^2-y-exp(y-1)+1;
```

$$F := (x,\ y) \to x^2 - y - e^{(y-1)} + 1$$

Nejprve ověříme podmínky existence funkce $y = f(x)$ na okolí bodu [-1,1]:

```
> F(-1,1);
```

$$0$$

```
> diff(F(x,y),y);
```

$$-1 - e^{(y-1)}$$

```
> subs(x=-1,y=1,%);
```

$$-1 - e^0$$

```
> simplify(%);
```

$$-2$$

Nyní můžeme počítat derivace $f'(x)$ a $f''(x)$:

```
> implicitdiff(F(x,y),y,x);
```

$$\frac{2\,x}{1 + e^{(y-1)}}$$

Další

Příklad 8.1.1

Ověřte, že v okolí bodu $A = [-1, 1]$ je rovnicí $F(x, y) = x^2 - y - \mathrm{e}^{y-1} + 1 = 0$ implicitně definována funkce $y = f(x)$. Zjistěte, zda v okolí bodu $x_0 = -1$ je funkce $f(x)$ rostoucí, klesající, konvexní či konkávní.

Maple:

```
> subs(x=-1,y=1,implicitdiff(F(x,y),y,x));
```

$$-\frac{2}{1 + e^0}$$

```
> simplify(%);
```

$$-1$$

Funkce je ve sledovaném bodě klesající.

```
> implicitdiff(F(x,y),y,x$2);
```

$$-\frac{2\,(-1 - 2\,e^{(y-1)} - (e^{(y-1)})^2 + 2\,x^2\,e^{(y-1)})}{1 + 3\,e^{(y-1)} + 3\,(e^{(y-1)})^2 + (e^{(y-1)})^3}$$

```
> subs(x=-1,y=1,implicitdiff(F(x,y),y,x$2));
```

$$-\frac{2\,(-1 - (e^0)^2)}{1 + 3\,e^0 + 3\,(e^0)^2 + (e^0)^3}$$

```
> simplify(%);
```

$$\frac{1}{2}$$

Funkce je ve sledovaném bodě konvexní.

Další

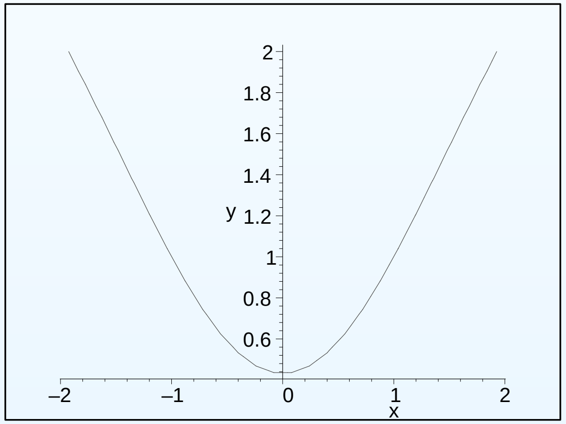
Příklad 8.1.1

Ověřte, že v okolí bodu $A = [-1, 1]$ je rovnicí $F(x, y) = x^2 - y - \mathrm{e}^{y-1} + 1 = 0$ implicitně definována funkce $y = f(x)$. Zjistěte, zda v okolí bodu $x_0 = -1$ je funkce $f(x)$ rostoucí, klesající, konvexní či konkávní.

Maple:

O průběhu funkce $y = f(x)$ v okolí bodu [-1, 1] se můžeme v Maplu přesvědčit vykreslením funkce dané implicitně pomocí příkazu implicitplot:

```
> implicitplot(F(x,y),x=-2..2,y=-2..2);
```



Zpět

Příklad 8.1.1

Ověřte, že v okolí bodu $A = [-1, 1]$ je rovnicí $F(x, y) = x^2 - y - \mathrm{e}^{y-1} + 1 = 0$ implicitně definována funkce $y = f(x)$. Zjistěte, zda v okolí bodu $x_0 = -1$ je funkce $f(x)$ rostoucí, klesající, konvexní či konkávní.

Mathematica:

F[x_, y_] = x^2 − y − Exp[y − 1] + 1

$1 - e^{-1+y} + x^2 - y$

Nejprve ověříme podmínky existence funkce $y = y(x)$ na okolí bodu [-1,1]: **F[−1, 1]**

0

D[F[x, y], y]/.{x → −1, y → 1}

-2

Nyní můžeme počítat derivace $y'(x)$ a $y''(x)$:

r1 = D[F[x, y[x]] == 0, x]

$2x - y'[x] - e^{-1+y[x]}y'[x] == 0$

der1 = Solve[r1, y′[x]]

$\left\{\left\{y'[x] \to \frac{2ex}{e+e^{y[x]}}\right\}\right\}$

(der1/.{x → −1})/.{y[−1] → 1}

$\{\{y'[-1] \to -1\}\}$

Funkce je ve sledovaném bodě klesající.

Další

Příklad 8.1.1

Ověřte, že v okolí bodu $A = [-1, 1]$ je rovnicí $F(x, y) = x^2 - y - \mathrm{e}^{y-1} + 1 = 0$ implicitně definována funkce $y = f(x)$. Zjistěte, zda v okolí bodu $x_0 = -1$ je funkce $f(x)$ rostoucí, klesající, konvexní či konkávní.

Mathematica:

r2 = *D*[*F*[*x*, *y*[*x*]] == 0, {*x*, 2}]/.der1

$$\left\{2 - \frac{4e^{1+y[x]}x^2}{\left(e+e^{y[x]}\right)^2} - y''[x] - e^{-1+y[x]}y''[x] == 0\right\}$$

der2 = Solve[r2, *y*" [*x*]]

$$\left\{\left\{y''[x] \to \frac{2e\left(e^2+e^{2y[x]}+2e^{1+y[x]}-2e^{1+y[x]}x^2\right)}{\left(e+e^{y[x]}\right)^3}\right\}\right\}$$

(der2/.{*x* → −1})/.{*y*[−1] → 1}

$$\left\{\left\{y''[-1] \to \frac{1}{2}\right\}\right\}$$

Funkce je ve sledovaném bodě konvexní. O průběhu funkce $y = f(x)$ v okolí bodu [-1, 1] se můžeme v programu Mathematica přesvědčit vykreslením funkce dané implicitně pomocí příkazu ImplicitPlot:

Další

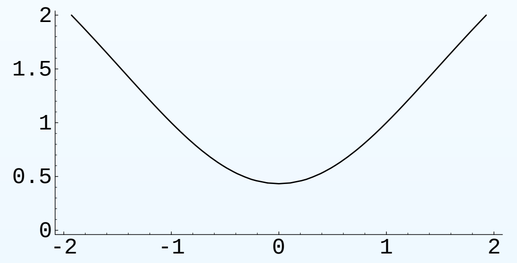
Příklad 8.1.1

Ověřte, že v okolí bodu $A = [-1, 1]$ je rovnicí $F(x, y) = x^2 - y - e^{y-1} + 1 = 0$ implicitně definována funkce $y = f(x)$. Zjistěte, zda v okolí bodu $x_0 = -1$ je funkce $f(x)$ rostoucí, klesající, konvexní či konkávní.

Mathematica:

<< Graphics`ImplicitPlot`

ImplicitPlot[x^2 − y − Exp[y − 1] + 1 == 0, {x, −2, 2}, {y, 0, 2}];



Zpět

Příklad 8.1.2

Rozhodněte, zda křivka $2x - x^2 - e^y - 2y = 0$ leží v okolí bodu $[1, 0]$ pod tečnou nebo nad tečnou.

Zpět

Příklad 8.1.2

Rozhodněte, zda křivka $2x - x^2 - e^y - 2y = 0$ leží v okolí bodu $[1, 0]$ pod tečnou nebo nad tečnou.

Výsledek:

V okolí bodu $[1, 0]$ leží tato křivka pod tečnou (funkce $y = f(x)$ je na okolí tohoto bodu konkávní).

Zpět

Příklad 8.1.2

Rozhodněte, zda křivka $2x - x^2 - \mathrm{e}^y - 2y = 0$ leží v okolí bodu $[1, 0]$ pod tečnou nebo nad tečnou.

Návod:

Ověříme, že v okolí bodu $[1, 0]$ lze křivku považovat za část grafu funkce $y = f(x)$ a dokážeme, že funkce je v okolí tohoto bodu konvexní (graf nad tečnou) nebo konkávní (graf pod tečnou). Viz návod v předchozím příkladě.

Zpět

Příklad 8.1.2

Rozhodněte, zda křivka $2x - x^2 - \mathrm{e}^y - 2y = 0$ leží v okolí bodu $[1, 0]$ pod tečnou nebo nad tečnou.

Řešení:

Označme $F(x, y) = 2x - x^2 - \mathrm{e}^y - 2y = 0$ a ověřme podmínky existence funkce $y = f(x)$ v okolí bodu $[1, 0]$ definované rovnicí $F(x, y) = 0$:

$$F(1, 0) = 2 - 1 - \mathrm{e}^0 - 0 = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = -\mathrm{e}^y - 2 \qquad \frac{\partial F}{\partial y}(1, 0) = -3 \neq 0\,.$$

Část křivky v okolí daného bodu lze proto považovat za graf funkce $y = f(x)$. O tom, zda tento graf leží pod nebo nad tečnou, lze rozhodnout na základě znalosti konvexnosti / konkávnosti funkce. Počítejme tedy $f''(1)$:

$$f'(x) = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}(x, y)}{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x, y)} = -\frac{2 - 2x}{-\mathrm{e}^y - 2} \qquad f'(1) = 0$$

$$f''(x) = \frac{-2(\mathrm{e}^y + 2) - (2 - 2x)\mathrm{e}^y \cdot y'(x)}{(\mathrm{e}^y + 2)^2} \qquad f''(1) = -\tfrac{2}{3}\,.$$

Další

Příklad 8.1.2

Rozhodněte, zda křivka $2x - x^2 - e^y - 2y = 0$ leží v okolí bodu $[1, 0]$ pod tečnou nebo nad tečnou.

Řešení:

Zjistili jsme, že funkce $f(x)$ má v bodě $x_0 = 1$ lokální maximum (je na jeho okolí konkávní), studovaná křivka tedy leží v okolí bodu $[1, 0]$ pod tečnou.

Zpět

Příklad 8.1.2

Rozhodněte, zda křivka $2x - x^2 - \mathrm{e}^y - 2y = 0$ leží v okolí bodu $[1, 0]$ pod tečnou nebo nad tečnou.

Maple:

```
> with(plots):
> F:=(x,y)->2*x-x^2-exp(y)-2*y;
```

$$F := (x,\, y) \to 2\,x - x^2 - e^y - 2\,y$$

Nejprve ověříme podmínky existence funkce $y = f(x)$ na okolí bodu [1,0]:

```
> F(1,0);
```

$$0$$

```
> diff(F(x,y),y);
```

$$-e^y - 2$$

```
> subs(x=1,y=0,%);
```

$$-e^0 - 2$$

```
> simplify(%);
```

$$-3$$

Nyní potřebujeme znát derivace $f'(1)$ a $f''(1)$:

```
> implicitdiff(F(x,y),y,x);
```

$$-\frac{2\,(-1 + x)}{e^y + 2}$$

```
> subs(x=1,y=0,implicitdiff(F(x,y),y,x));
```

$$0$$

Další

Příklad 8.1.2

Rozhodněte, zda křivka $2x - x^2 - \mathrm{e}^y - 2y = 0$ leží v okolí bodu $[1, 0]$ pod tečnou nebo nad tečnou.

Maple:

```
> implicitdiff(F(x,y),y,x$2);
```

$$-\frac{2\left((e^y)^2 + 6\,e^y + 4 + 2\,e^y\,x^2 - 4\,e^y\,x\right)}{(e^y)^3 + 6\,(e^y)^2 + 12\,e^y + 8}$$

```
> subs(x=1,y=0,implicitdiff(F(x,y),y,x$2));
```

$$-\frac{2\left((e^0)^2 + 4\,e^0 + 4\right)}{(e^0)^3 + 6\,(e^0)^2 + 12\,e^0 + 8}$$

```
> simplify(%);
```

$$\frac{-2}{3}$$

Funkce je v okolí daného bodu konkávní, její graf tedy leží pod tečnou. Přesvědčit se můžeme pomocí obrázku (nakreslíme tečnu a křivku):

```
> t:=plot(0,x=-2..2,thickness=3):
> k:=implicitplot(F(x,y),x=-2..2,y=-2..2,grid=[50,50],thickness=3):
```

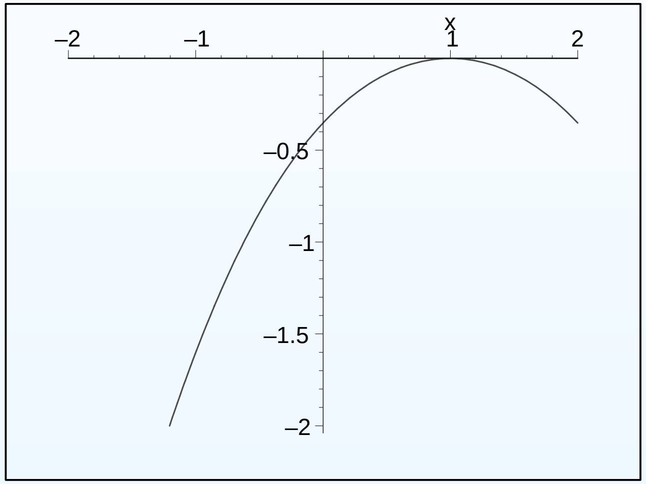
Další

Příklad 8.1.2

Rozhodněte, zda křivka $2x - x^2 - e^y - 2y = 0$ leží v okolí bodu $[1, 0]$ pod tečnou nebo nad tečnou.

Maple:

```
> display({t,k});
```



Zpět

Příklad 8.1.2

Rozhodněte, zda křivka $2x - x^2 - \mathrm{e}^y - 2y = 0$ leží v okolí bodu $[1, 0]$ pod tečnou nebo nad tečnou.

Mathematica:

$\boldsymbol{F[\mathrm{x\_}, \mathrm{y\_}] = 2x - x\hat{}2 - \mathrm{Exp}[y] - 2y}$

$-e^y + 2x - x^2 - 2y$

Nejprve ověříme podmínky existence funkce $y = y(x)$ na okolí bodu [1,0]:

$\boldsymbol{F[1, 0]}$

0

$\boldsymbol{D[F[x, y], y]/.\{x \to 1, y \to 0\}}$

-3

Nyní potřebujeme znát derivace $y'(1)$ a $y''(1)$:

$\boldsymbol{\mathrm{r1} = D[F[x, y[x]] == 0, x]}$

$2 - 2x - 2y'[x] - e^{y[x]}y'[x] == 0$

$\boldsymbol{\mathrm{der1} = \mathrm{Solve}[\mathrm{r1}, y'[x]]}$

$\left\{\left\{y'[x] \to -\frac{2(-1+x)}{2+e^{y[x]}}\right\}\right\}$

$\boldsymbol{(\mathrm{der1}/.\{x \to 1\})/.\{y[1] \to 0\}}$

$\{\{y'[1] \to 0\}\}$

Další

Příklad 8.1.2

Rozhodněte, zda křivka $2x - x^2 - \mathrm{e}^y - 2y = 0$ leží v okolí bodu $[1, 0]$ pod tečnou nebo nad tečnou.

Mathematica:

r2 = D[F[x, y[x]] == 0, {x, 2}]/.der1

$$\left\{-2 - \frac{4e^{y[x]}(-1+x)^2}{\left(2+e^{y[x]}\right)^2} - 2y''[x] - e^{y[x]}y''[x] == 0\right\}$$

der2 = Solve[r2, y''[x]]

$$\left\{\left\{y''[x] \to \frac{2\left(4+6e^{y[x]}+e^{2y[x]}-4e^{y[x]}x+2e^{y[x]}x^2\right)}{\left(-2-e^{y[x]}\right)\left(2+e^{y[x]}\right)^2}\right\}\right\}$$

(der2/.{x → 1})/.{y[1] → 0}

$$\left\{\left\{y''[1] \to -\frac{2}{3}\right\}\right\}$$

Funkce je v okolí daného bodu konkávní, její graf tedy leží pod te čnou. Přesvědčit se můžeme pomocí obrázku (nakreslíme tečnu a křivku):

```
<< Graphics`ImplicitPlot`
t = Plot[0, {x, −2, 2}, PlotStyle → {Thickness[0.008]}, DisplayFunction → Identity];
g = ImplicitPlot[F[x, y] == 0, {x, −2, 2}, {y, −2, 0}, PlotStyle → {Thickness[0.008]},
DisplayFunction → Identity];
```

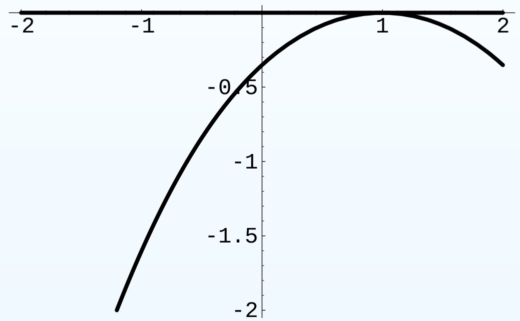
Další

Příklad 8.1.2

Rozhodněte, zda křivka $2x - x^2 - e^y - 2y = 0$ leží v okolí bodu $[1, 0]$ pod tečnou nebo nad tečnou.

Mathematica:

Show[{t, g}, DisplayFunction → $DisplayFunction];



Zpět

Příklad 8.1.3

Najděte rovnici tečny a normály v bodě $[1, 0]$ ke křivce dané rovnicí
$2x - x^2 - e^y - 2y = 0$.

? Zpět

Příklad 8.1.3

Najděte rovnici tečny a normály v bodě $[1, 0]$ ke křivce dané rovnicí
$2x - x^2 - \mathrm{e}^y - 2y = 0$.

Výsledek:

$t: \quad y = 0\,, \qquad$ normála $n: \quad x = 1\,.$

Zpět

Příklad 8.1.3

Najděte rovnici tečny a normály v bodě $[1,0]$ ke křivce dané rovnicí
$2x - x^2 - \mathrm{e}^y - 2y = 0\,.$

Návod:

Nejprve ověříme, že na okolí daného bodu křivka odpovídá jednoznačně grafu funkce $y = f(x)$. Rovnice tečny v bodě $[x_0, y_0]$ má potom podobu

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)\,,$$

normálou v tomto bodě je přímka k tečně kolmá.

Zpět

Příklad 8.1.3

Najděte rovnici tečny a normály v bodě $[1, 0]$ ke křivce dané rovnicí $2x - x^2 - e^y - 2y = 0$.

Řešení:

Označme $F(x, y) = 2x - x^2 - e^y - 2y$ a ověřme, že na okolí bodu $[1, 0]$ rovnice $F(x, y) = 0$ určuje jedinou funkci $y = f(x)$, pro kterou platí $f(1) = 0$ a která má na intervalu $I = (1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, spojitou derivaci $f'(x)$:

$$F(1, 0) = 2 - 1 - e^0 - 0 = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = -e^y - 2 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial F}{\partial y}(1, 0) = -3 \neq 0 \,.$$

Předpoklady věty o implicitní funkci jsou splněny, lze tedy vypočítat $f'(1)$:

$$f'(x) = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}(x, y)}{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x, y)} = -\frac{2 - 2x}{-e^y - 2} \qquad \Rightarrow \qquad f'(1) = 0 \,.$$

Rovnice tečny ke grafu funkce $y = f(x)$ v bodě $[x_0, y_0]$ má podobu

$$t: \quad y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)\,,$$

po dosazení dostáváme $\quad t: \; y = 0(x - 1) + 0 = 0.$

Další

Příklad 8.1.3

Najděte rovnici tečny a normály v bodě $[1, 0]$ ke křivce dané rovnicí
$2x - x^2 - e^y - 2y = 0$.

Řešení:

Tečnou k zadané křivce v bodě $[1, 0]$ je tedy osa x. Normálou je přímka k ní kolmá procházející bodem $[1, 0]$, tedy přímka o rovnici $x = 1$. Pozor! V tomto případě se jedná o přímku, která nemá definovanou směrnici, takže nelze použít pro normálu rovnici

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

Zpět

Příklad 8.1.3

Najděte rovnici tečny a normály v bodě $[1, 0]$ ke křivce dané rovnicí
$2x - x^2 - \mathrm{e}^y - 2y = 0$.

Maple:

```
> with(plots):
> F:=(x,y)->2*x-x^2-exp(y)-2*y;
```

$$F := (x,\ y) \rightarrow 2\,x - x^2 - e^y - 2\,y$$

```
> F(1,0);
```

$$0$$

```
> diff(F(x,y),y);
```

$$-e^y - 2$$

```
> subs(x=1,y=0,%);
```

$$-e^0 - 2$$

```
> simplify(%);
```

$$-3$$

Ověřili jsme předpoklady věty o implicitní funkci a nyní můžeme počítat $f'(x)$:

```
> implicitdiff(F(x,y),y,x);
```

$$-\frac{2\,(-1 + x)}{e^y + 2}$$

```
> subs(x=1,y=0,implicitdiff(F(x,y),y,x));
```

$$0$$

Další

Příklad 8.1.3

Najděte rovnici tečny a normály v bodě $[1, 0]$ ke křivce dané rovnicí
$2x - x^2 - e^y - 2y = 0$.

Maple:

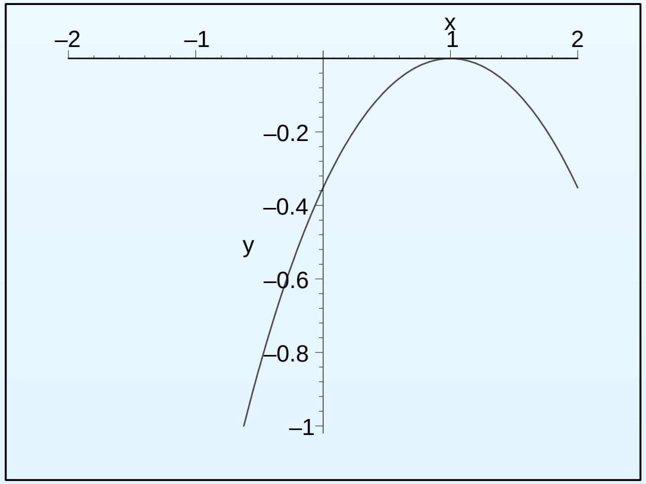
Rovnice tečny v bodě [1,0] bude:

```
> y1:=0+(%)*(x-1);
```

$$y1 := 0$$

Vzhledem k tomu, že hledanou tečnou je osa x, je zřejmě normálou přímka kolmá k ose x, která prochází bodem [1,0], což je přímka o rovnici $x = 1$.
Náhled na celou situaci si můžeme udělat z obrázku grafu funkce $f(x)$ na okolí bodu [1,0]:

```
> k:=implicitplot(F(x,y),x=-1..2,y=-1..2,thickness=3,grid=[50,50]):
> t:=plot(0,x=-2..2,color=blue,thickness=3):
> display({t,k});
```



Zpět

Příklad 8.1.3

Najděte rovnici tečny a normály v bodě $[1, 0]$ ke křivce dané rovnicí
$2x - x^2 - \mathrm{e}^y - 2y = 0$.

Mathematica:

$\boldsymbol{F[\mathrm{x\_}, \mathrm{y\_}] = 2x - x\hat{}2 - \mathrm{Exp}[y] - 2y}$

$-e^y + 2x - x^2 - 2y$

$\boldsymbol{F[1, 0]}$

0

$\boldsymbol{D[F[x, y], y]/.\{x \to 1, y \to 0\}}$

-3

Ověřili jsme předpoklady věty o implicitní funkci a nyní můžeme po čítat $f'(x)$:

$\boldsymbol{\mathrm{r1} = D[F[x, y[x]] == 0, x]}$

$2 - 2x - 2y'[x] - e^{y[x]}y'[x] == 0$

$\boldsymbol{\mathrm{der1} = \mathrm{Solve}[\mathrm{r1}, y'[x]]}$

$\left\{\left\{y'[x] \to -\frac{2(-1+x)}{2+e^{y[x]}}\right\}\right\}$

$\boldsymbol{(\mathrm{der1}/.\{x \to 1\})/.\{y[1] \to 0\}}$

$\{\{y'[1] \to 0\}\}$

Rovnice tečny v bodě [1,0] bude:

$\boldsymbol{\mathrm{tecna} = y - 0 == 0(x - 1)}$

$y == 0$

Další

Příklad 8.1.3

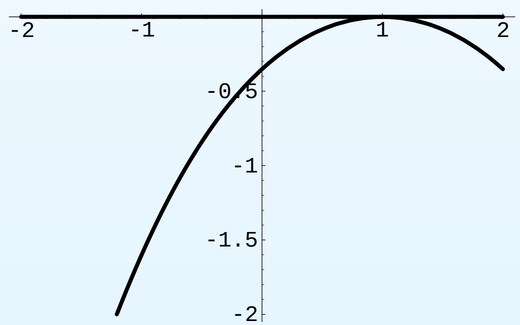
Najděte rovnici tečny a normály v bodě $[1, 0]$ ke křivce dané rovnicí
$2x - x^2 - e^y - 2y = 0$.

Mathematica:

Vzhledem k tomu, že hledanou tečnou je osa x, je zřejmě normálou přímka kolmá k ose x, která prochází bodem [1,0], což je přímka o rovnici $x = 1$.

Náhled na celou situaci si můžeme udělat z obrázku grafu funkce $f(x)$ a tečny na okolí bodu [1,0]:

```
<< Graphics`ImplicitPlot`
t = Plot[0, {x, -2, 2}, PlotStyle -> {Thickness[0.008]}, DisplayFunction -> Identity];
g = ImplicitPlot[F[x, y] == 0, {x, -2, 2}, {y, -2, 0}, PlotStyle -> {Thickness[0.008]},
DisplayFunction -> Identity];
Show[{t, g}, DisplayFunction -> $DisplayFunction];
```



Zpět

Příklad 8.1.4

Uvažujte křivku o rovnici $2x - x^2 - e^y - 2y = 0$ na okolí bodu $A = [1, 0]$ a vypočtěte úhel, pod kterým tuto křivku v daném bodě A protíná přímka o rovnici $p : x - y - 1 = 0$.

? Zpět

Příklad 8.1.4

Uvažujte křivku o rovnici $2x - x^2 - \mathrm{e}^y - 2y = 0$ na okolí bodu $A = [1, 0]$ a vypočtěte úhel, pod kterým tuto křivku v daném bodě A protíná přímka o rovnici $p : x - y - 1 = 0$.

Výsledek:

$\alpha = 45^\circ$.

Zpět

Příklad 8.1.4

Uvažujte křivku o rovnici $2x - x^2 - \mathrm{e}^y - 2y = 0$ na okolí bodu $A = [1, 0]$ a vypočtěte úhel, pod kterým tuto křivku v daném bodě A protíná přímka o rovnici $p : x - y - 1 = 0$.

Návod:

Bod $[1, 0]$ je průsečíkem přímky p s danou křivkou, hledaný úhel proto vypočteme jako úhel svíraný tečnou ke křivce v bodě $[1, 0]$ a přímkou p.

Zpět

Příklad 8.1.4

Uvažujte křivku o rovnici $2x - x^2 - e^y - 2y = 0$ na okolí bodu $A = [1, 0]$ a vypočtěte úhel, pod kterým tuto křivku v daném bodě A protíná přímka o rovnici $p : x - y - 1 = 0$.

Řešení:

Označíme-li $F(x, y) = 2x - x^2 - e^y - 2y = 0$, pak platí:

$$F(1, 0) = 2 - 1 - e^0 - 0 = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = -e^y - 2 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial F}{\partial y}(1, 0) = -3 \neq 0\,.$$

Křivku lze na okolí bodu $[1, 0]$ považovat za část grafu funkce $y = f(x)$, kde

$$f'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, y)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, y)} = -\frac{2 - 2x}{-e^y - 2}, \qquad f'(1) = 0\,.$$

Tečna t ke grafu $f(x)$ v bodě $[1, 0]$ má rovnici

$$y = 0 + f'(1)(x - 1) = 0\,.$$

Hledaný úhel φ je tedy úhlem, který svírá tečna t s přímkou p.

Další

Příklad 8.1.4

Uvažujte křivku o rovnici $2x - x^2 - \mathrm{e}^y - 2y = 0$ na okolí bodu $A = [1, 0]$ a vypočtěte úhel, pod kterým tuto křivku v daném bodě A protíná přímka o rovnici $p : x - y - 1 = 0$.

Řešení:

Normálový vektor tečny t je $\vec{n}_t = (0, 1)$, normálový vektor přímky p je $\vec{n}_p = (1, -1)$, celkem tedy

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{n}_t \cdot \vec{n}_p|}{\|\vec{n}_t\| \cdot \|\vec{n}_p\|} = \frac{|1 \cdot 0 + (-1) \cdot 1|}{1 \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \Rightarrow \qquad \varphi = 45^\circ\,.$$

Zpět

Příklad 8.1.4

Uvažujte křivku o rovnici $2x - x^2 - \mathrm{e}^y - 2y = 0$ na okolí bodu $A = [1, 0]$ a vypočtěte úhel, pod kterým tuto křivku v daném bodě A protíná přímka o rovnici $p : x - y - 1 = 0$.

Maple:

Zprvu postupujeme analogicky jako u předchozího příkladu, neboť se jedná o stejnou implicitní funkci:

```
> with(plots):
> F:=(x,y)->2*x-x^2-exp(y)-2*y;
```

$$F := (x,\, y) \to 2\,x - x^2 - e^y - 2\,y$$

```
> F(1,0);
```

$$0$$

```
> diff(F(x,y),y);
```

$$-e^y - 2$$

```
> subs(x=1,y=0,%);
```

$$-e^0 - 2$$

```
> simplify(%);
```

$$-3$$

Ověřili jsme předpoklady věty o implicitní funkci a nyní můžeme počítat $f'(x)$:

```
> implicitdiff(F(x,y),y,x);
```

$$-\frac{2\,(-1 + x)}{e^y + 2}$$

Další

Příklad 8.1.4

Uvažujte křivku o rovnici $2x - x^2 - e^y - 2y = 0$ na okolí bodu $A = [1, 0]$ a vypočtěte úhel, pod kterým tuto křivku v daném bodě A protíná přímka o rovnici $p : x - y - 1 = 0$.

Maple:

```
> subs(x=1,y=0,implicitdiff(F(x,y),y,x));
```

$$0$$

Rovnice tečny v bodě [1,0] bude:

```
> y1:=0+(%)*(x-1);
```

$$y1 := 0$$

Normálový vektor přímky t je:

```
> nt:=<0,1>;
```

$$nt := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Normálový vektor přímky p je:

```
> np:=<1,-1>;
```

$$np := \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Úhel, který tyto dvě přímky svírají, je

```
> with(LinearAlgebra):alfa:=arccos(abs(nt.np)/(Norm(nt,2)*Norm(np,2)));
```

$$alfa := \frac{\pi}{4}$$

Zpět

Příklad 8.1.4

Uvažujte křivku o rovnici $2x - x^2 - e^y - 2y = 0$ na okolí bodu $A = [1, 0]$ a vypočtěte úhel, pod kterým tuto křivku v daném bodě A protíná přímka o rovnici $p : x - y - 1 = 0$.

Mathematica:

Zprvu postupujeme analogicky jako u předchozího příkladu, neboť se jedná o stejnou implicitní funkci:

$\boldsymbol{F[x\_, y\_] = 2x - x\hat{}2 - \mathrm{Exp}[y] - 2y}$

$-e^y + 2x - x^2 - 2y$

$\boldsymbol{F[1, 0]}$

0

$\boldsymbol{D[F[x, y], y]/.\{x \to 1, y \to 0\}}$

-3

Ověřili jsme předpoklady věty o implicitní funkci a nyní můžeme počítat $f'(x)$:

$\boldsymbol{\mathrm{r1} = D[F[x, y[x]] == 0, x]}$

$2 - 2x - 2y'[x] - e^{y[x]}y'[x] == 0$

$\boldsymbol{\mathrm{der1} = \mathrm{Solve}[\mathrm{r1}, y'[x]]}$

$\left\{\left\{y'[x] \to -\frac{2(-1+x)}{2+e^{y[x]}}\right\}\right\}$

$\boldsymbol{(\mathrm{der1}/.\{x \to 1\})/.\{y[1] \to 0\}}$

$\{\{y'[1] \to 0\}\}$

Další

Příklad 8.1.4

Uvažujte křivku o rovnici $2x - x^2 - e^y - 2y = 0$ na okolí bodu $A = [1, 0]$ a vypočtěte úhel, pod kterým tuto křivku v daném bodě A protíná přímka o rovnici $p : x - y - 1 = 0$.

Mathematica:

Rovnice tečny v bodě [1,0] bude:

$\mathbf{tecna = \boldsymbol{y} - 0 == 0(\boldsymbol{x} - 1)}$

$y == 0$

$\mathbf{primka = \boldsymbol{y} == \boldsymbol{x} - 1}$

$y == -1 + x$

Normálový vektor přímky t je:

$\mathbf{nt = \{0, 1\};}$

Normálový vektor přímky p je:

$\mathbf{np = \{1, -1\};}$

Úhel, který tyto dvě přímky svírají, je

$\boldsymbol{\varphi}$ **= ArcCos[Abs[nt.np]/(Norm[nt]Norm[np])]**

$\frac{\pi}{4}$

Zpět

Příklad 8.1.5

Ověřte, že rovnice $F(x, y) = y - x - \sin y = 0$ definuje v okolí bodu $P = \left[\frac{\pi}{2} - 1, \frac{\pi}{2}\right]$ jedinou funkci $y = f(x)$, pro kterou $f(\frac{\pi}{2} - 1) = \frac{\pi}{2}$ a která má v intervalu $I = (\frac{\pi}{2} - 1 - \varepsilon, \frac{\pi}{2} - 1 + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, spojitou první a druhou derivaci. Najděte Taylorův polynom 2. stupně funkce f v bodě $x_0 = \frac{\pi}{2} - 1$ a pomocí tohoto polynomu určete přibližnou hodnotu $f(\frac{\pi}{2} - 0,98)$.

? Zpět

Příklad 8.1.5

Ověřte, že rovnice $F(x,y) = y - x - \sin y = 0$ definuje v okolí bodu $P = \left[\frac{\pi}{2} - 1, \frac{\pi}{2}\right]$ jedinou funkci $y = f(x)$, pro kterou $f(\frac{\pi}{2} - 1) = \frac{\pi}{2}$ a která má v intervalu $I = (\frac{\pi}{2} - 1 - \varepsilon, \frac{\pi}{2} - 1 + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, spojitou první a druhou derivaci. Najděte Taylorův polynom 2. stupně funkce f v bodě $x_0 = \frac{\pi}{2} - 1$ a pomocí tohoto polynomu určete přibližnou hodnotu $f(\frac{\pi}{2} - 0,98)$.

Výsledek:

$T_2(x) = x + 1 - \frac{1}{2!}\left(x - \frac{\pi}{2} + 1\right)^2$, $\qquad f\left(\frac{\pi}{2} - 0,98\right) \doteq 1,5906$.

Zpět

Příklad 8.1.5

Ověřte, že rovnice $F(x,y) = y - x - \sin y = 0$ definuje v okolí bodu $P = \left[\frac{\pi}{2} - 1, \frac{\pi}{2}\right]$ jedinou funkci $y = f(x)$, pro kterou $f(\frac{\pi}{2} - 1) = \frac{\pi}{2}$ a která má v intervalu $I = (\frac{\pi}{2} - 1 - \varepsilon, \frac{\pi}{2} - 1 + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, spojitou první a druhou derivaci. Najděte Taylorův polynom 2. stupně funkce f v bodě $x_0 = \frac{\pi}{2} - 1$ a pomocí tohoto polynomu určete přibližnou hodnotu $f(\frac{\pi}{2} - 0,98)$.

Návod:

$$T_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2\,, \qquad f(x) \doteq T_2(x)$$

Derivace $f'(x)$ a $f''(x)$ vypočteme pomocí věty o derivaci implicitně zadané funkce.

Zpět

Příklad 8.1.5

Ověřte, že rovnice $F(x,y) = y - x - \sin y = 0$ definuje v okolí bodu $P = \left[\frac{\pi}{2} - 1, \frac{\pi}{2}\right]$ jedinou funkci $y = f(x)$, pro kterou $f(\frac{\pi}{2} - 1) = \frac{\pi}{2}$ a která má v intervalu $I = (\frac{\pi}{2} - 1 - \varepsilon, \frac{\pi}{2} - 1 + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, spojitou první a druhou derivaci. Najděte Taylorův polynom 2. stupně funkce f v bodě $x_0 = \frac{\pi}{2} - 1$ a pomocí tohoto polynomu určete přibližnou hodnotu $f(\frac{\pi}{2} - 0,98)$.

Řešení:

Pro ověření existence implicitně definované funkce nejprve vypočteme:

$$F\left(\tfrac{\pi}{2} - 1, \tfrac{\pi}{2}\right) = \tfrac{\pi}{2} - \left(\tfrac{\pi}{2} - 1\right) - \sin\tfrac{\pi}{2} = \tfrac{\pi}{2} - \tfrac{\pi}{2} + 1 - 1 = 0\,,$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = 1 - \cos y\,, \qquad \frac{\partial F}{\partial y}\left(\frac{\pi}{2} - 1, \frac{\pi}{2}\right) = 1 \neq 0\,.$$

Rovnice $F(x,y) = 0$ tedy skutečně na okolí bodu P určuje implicitně funkci $y = f(x)$. Nyní potřebujeme zjistit první a druhou derivaci:

$$f'(x) = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y)}{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y)} = -\frac{-1}{1 - \cos y}\,, \qquad f'(\tfrac{\pi}{2} - 1) = -\frac{-1}{1} = 1$$

$$f''(x) = -\frac{0 + \sin y \cdot y'}{(1 - \cos y)^2}\,, \qquad f''(\tfrac{\pi}{2} - 1) = \frac{-1}{1} = -1\,.$$

Další

Příklad 8.1.5

Ověřte, že rovnice $F(x,y) = y - x - \sin y = 0$ definuje v okolí bodu $P = \left[\frac{\pi}{2} - 1, \frac{\pi}{2}\right]$ jedinou funkci $y = f(x)$, pro kterou $f(\frac{\pi}{2} - 1) = \frac{\pi}{2}$ a která má v intervalu $I = (\frac{\pi}{2} - 1 - \varepsilon, \frac{\pi}{2} - 1 + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, spojitou první a druhou derivaci. Najděte Taylorův polynom 2. stupně funkce f v bodě $x_0 = \frac{\pi}{2} - 1$ a pomocí tohoto polynomu určete přibližnou hodnotu $f(\frac{\pi}{2} - 0,98)$.

Řešení:

Taylorův polynom 2. stupně funkce f v bodě $x_0 = \frac{\pi}{2} - 1$ má proto podobu:

$$T_2(x) = \frac{\pi}{2} + \left(x - \frac{\pi}{2} + 1\right) - \frac{1}{2!}\left(x - \frac{\pi}{2} + 1\right)^2 .$$

Pro přibližnou hodnotu $f(\frac{\pi}{2} - 0,98)$ platí

$$f\left(\frac{\pi}{2} - 0,98\right) \doteq T_2\left(\frac{\pi}{2} - 0,98\right) = \frac{\pi}{2} + 0,02 - \frac{1}{2} \cdot 0,02^2 \doteq 1,5906 .$$

Zpět

Příklad 8.1.5

Ověřte, že rovnice $F(x, y) = y - x - \sin y = 0$ definuje v okolí bodu $P = \left[\frac{\pi}{2} - 1, \frac{\pi}{2}\right]$ jedinou funkci $y = f(x)$, pro kterou $f(\frac{\pi}{2} - 1) = \frac{\pi}{2}$ a která má v intervalu $I = (\frac{\pi}{2} - 1 - \varepsilon, \frac{\pi}{2} - 1 + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, spojitou první a druhou derivaci. Najděte Taylorův polynom 2. stupně funkce f v bodě $x_0 = \frac{\pi}{2} - 1$ a pomocí tohoto polynomu určete přibližnou hodnotu $f(\frac{\pi}{2} - 0,98)$.

Maple:

```
> F:=(x,y)->y-x-sin (y);
```

$$F := (x,\ y) \to y - x - \sin(y)$$

Nejprve ověříme podmínky existence funkce $y = f(x)$ na okolí daného bodu:

```
> F(Pi/2-1,Pi/2);
```

$$0$$

```
> diff(F(x,y),y);
```

$$1 - \cos(y)$$

```
> subs(x=Pi/2-1,y=Pi/2,%);
```

$$1 - \cos(\frac{\pi}{2})$$

```
> simplify(%);
```

$$1$$

Předpoklady věty o implicitní funkci jsou splněny, platí tedy:

```
> implicitdiff(F(x,y),y,x);
```

$$-\frac{1}{-1 + \cos(y)}$$

Další

Příklad 8.1.5

Ověřte, že rovnice $F(x,y) = y - x - \sin y = 0$ definuje v okolí bodu $P = \left[\frac{\pi}{2} - 1, \frac{\pi}{2}\right]$ jedinou funkci $y = f(x)$, pro kterou $f(\frac{\pi}{2} - 1) = \frac{\pi}{2}$ a která má v intervalu $I = (\frac{\pi}{2} - 1 - \varepsilon, \frac{\pi}{2} - 1 + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, spojitou první a druhou derivaci. Najděte Taylorův polynom 2. stupně funkce f v bodě $x_0 = \frac{\pi}{2} - 1$ a pomocí tohoto polynomu určete přibližnou hodnotu $f(\frac{\pi}{2} - 0,98)$.

Maple:

```
> subs(x=Pi/2-1,y=Pi/2,implicitdiff(F(x,y),y,x));
```

$$-\frac{1}{-1 + \cos(\frac{\pi}{2})}$$

```
> simplify(%);
```

$$1$$

```
> implicitdiff(F(x,y),y,x$2);
```

$$\frac{\sin(y)}{-1 + 3\cos(y) - 3\cos(y)^2 + \cos(y)^3}$$

```
> subs(x=Pi/2-1,y=Pi/2,implicitdiff(F(x,y),y,x$2));
```

$$\frac{\sin(\frac{\pi}{2})}{-1 + 3\cos(\frac{\pi}{2}) - 3\cos(\frac{\pi}{2})^2 + \cos(\frac{\pi}{2})^3}$$

```
> simplify(%);
```

$$-1$$

Další

Příklad 8.1.5

Ověřte, že rovnice $F(x,y) = y - x - \sin y = 0$ definuje v okolí bodu $P = \left[\frac{\pi}{2} - 1, \frac{\pi}{2}\right]$ jedinou funkci $y = f(x)$, pro kterou $f(\frac{\pi}{2} - 1) = \frac{\pi}{2}$ a která má v intervalu $I = (\frac{\pi}{2} - 1 - \varepsilon, \frac{\pi}{2} - 1 + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, spojitou první a druhou derivaci. Najděte Taylorův polynom 2. stupně funkce f v bodě $x_0 = \frac{\pi}{2} - 1$ a pomocí tohoto polynomu určete přibližnou hodnotu $f(\frac{\pi}{2} - 0,98)$.

Maple:

Nyní můžeme zapsat Taylorův polynom:

```
> T2:=Pi/2+(x-Pi/2+1)-1/2*(x-Pi/2+1)^2;
```

$$T2 := x + 1 - \frac{(x - \frac{\pi}{2} + 1)^2}{2}$$

```
> f(Pi/2-0.98):=subs(x=Pi/2-0.98,T2);
```

$$\mathrm{f}(\frac{\pi}{2} - 0.98) := \frac{\pi}{2} + 0.01980000000$$

```
> simplify(%);
```

$$1.590596327$$

Zpět

Příklad 8.1.5

Ověřte, že rovnice $F(x,y) = y - x - \sin y = 0$ definuje v okolí bodu $P = \left[\frac{\pi}{2} - 1, \frac{\pi}{2}\right]$ jedinou funkci $y = f(x)$, pro kterou $f(\frac{\pi}{2} - 1) = \frac{\pi}{2}$ a která má v intervalu $I = (\frac{\pi}{2} - 1 - \varepsilon, \frac{\pi}{2} - 1 + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, spojitou první a druhou derivaci. Najděte Taylorův polynom 2. stupně funkce f v bodě $x_0 = \frac{\pi}{2} - 1$ a pomocí tohoto polynomu určete přibližnou hodnotu $f(\frac{\pi}{2} - 0,98)$.

Mathematica:

$\boldsymbol{F[\mathrm{x\_}, \mathrm{y\_}] = y - x - \mathrm{Sin}[y]}$

$-x + y - \mathrm{Sin}[y]$

Nejprve ověříme podmínky existence funkce $y = f(x)$ na okolí daného bodu:

$\boldsymbol{F[\mathrm{Pi}/2 - 1, \mathrm{Pi}/2]}$

0

$\boldsymbol{D[F[x,y],y]/.\{x \to \mathrm{Pi}/2 - 1, y \to \mathrm{Pi}/2\}}$

1

Předpoklady věty o implicitní funkci jsou splněny, platí tedy:

$\boldsymbol{\mathrm{r1} = D[F[x, y[x]] == 0, x]}$

$-1 + y'[x] - \mathrm{Cos}[y[x]]y'[x] == 0$

$\boldsymbol{\mathrm{der1} = \mathrm{Solve}[\mathrm{r1}, y'[x]]}$

$\left\{\left\{y'[x] \to \frac{1}{1 - \mathrm{Cos}[y[x]]}\right\}\right\}$

$\boldsymbol{(\mathrm{der1}/.\{x \to \mathrm{Pi}/2 - 1\})/.\{y[\mathrm{Pi}/2 - 1] \to \mathrm{Pi}/2\}}$

Další

Příklad 8.1.5

Ověřte, že rovnice $F(x, y) = y - x - \sin y = 0$ definuje v okolí bodu $P = \left[\frac{\pi}{2} - 1, \frac{\pi}{2}\right]$ jedinou funkci $y = f(x)$, pro kterou $f(\frac{\pi}{2} - 1) = \frac{\pi}{2}$ a která má v intervalu $I = (\frac{\pi}{2} - 1 - \varepsilon, \frac{\pi}{2} - 1 + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, spojitou první a druhou derivaci. Najděte Taylorův polynom 2. stupně funkce f v bodě $x_0 = \frac{\pi}{2} - 1$ a pomocí tohoto polynomu určete přibližnou hodnotu $f(\frac{\pi}{2} - 0,98)$.

Mathematica:

$\left\{\left\{y'\left[-1 + \frac{\pi}{2}\right] \to 1\right\}\right\}$

r2 = D[F[x, y[x]] == 0, {x, 2}]/.der1

$\left\{\frac{\mathrm{Sin}[y[x]]}{(1-\mathrm{Cos}[y[x]])^2} + y''[x] - \mathrm{Cos}[y[x]]y''[x] == 0\right\}$

der2 = Solve[r2, y”[x]]

$\left\{\left\{y''[x] \to \frac{\mathrm{Sin}[y[x]]}{(-1+\mathrm{Cos}[y[x]])^3}\right\}\right\}$

(der2/.{x → Pi/2 − 1})/.{y[Pi/2 − 1] → Pi/2}

$\left\{\left\{y''\left[-1 + \frac{\pi}{2}\right] \to -1\right\}\right\}$

Nyní můžeme zapsat Taylorův polynom:

T2[x_] = Pi/2 + (x − (Pi/2 − 1)) − 1/2!(x − (Pi/2 − 1))^2

$1 + x - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\pi}{2} + x\right)^2$

T2[Pi/2 − 0.98]

1.5906

Zpět

Implicitní funkce více reálných proměnných

- Příklad 8.2.1 Ověřte, zda rovnice $F(x,y,z) = \mathrm{e}^z + x^2y + z + 5 = 0$ definuje v okolí bodu $A = [1,-6,0]$ jedinou spojitě diferencovatelnou funkci $z = f(x,y)$ a vypočtěte $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,-6)$.
- Příklad 8.2.2 Vypočtěte totální diferenciál v bodě $[x_0, y_0]$ funkce $z = f(x,y)$ definované implicitně rovnicí $\dfrac{x}{z} - \ln\dfrac{z}{y} = 0\,.$
- Příklad 8.2.3 Napište rovnici tečné roviny k ploše $x^3 + y^3 + z^3 + xyz - 6 = 0$ v bodě $T = [1,2,-1]$.
- Příklad 8.2.4 Pomocí totálního diferenciálu vypočtěte přibližně funkční hodnotu $f(0,98;1,02)$ funkce $z = f(x,y)$ definované implicitně rovnicí $F(x,y,z) = x + y - z^3 - xz = 0\,.$
- Příklad 8.2.5 Najděte lokální extrémy funkce $z = f(x,y)$ určené implicitně rovnicí $F(x,y,z) = 2x - x^2 - 4y^2 - z = 0\,.$
- Příklad 8.2.6 Vypočtěte totální diferenciál $\mathrm{d}T$ pro jeden mol reálného plynu, který se řídí Redlich-Kwongovou stavovou rovnicí $pV = RT + p\left(b - \dfrac{a}{RT^{\frac{3}{2}}}\right)$, kde p značí tlak plynu, V objem plynu, a, b, R jsou reálné konstanty.

Zpět

Příklad 8.2.1

Ověřte, zda rovnice $F(x, y, z) = \mathrm{e}^z + x^2y + z + 5 = 0$ definuje v okolí bodu $A = [1, -6, 0]$ jedinou spojitě diferencovatelnou funkci $z = f(x, y)$ a vypočtěte $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1, -6)$.

? Zpět

Příklad 8.2.1

Ověřte, zda rovnice $F(x, y, z) = \mathrm{e}^z + x^2 y + z + 5 = 0$ definuje v okolí bodu $A = [1, -6, 0]$ jedinou spojitě diferencovatelnou funkci $z = f(x, y)$ a vypočtěte $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1, -6)$.

Výsledek:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1, -6) = -\frac{1}{8}\,.$$

Zpět

Příklad 8.2.1

Ověřte, zda rovnice $F(x,y,z) = \mathrm{e}^z + x^2y + z + 5 = 0$ definuje v okolí bodu $A = [1,-6,0]$ jedinou spojitě diferencovatelnou funkci $z = f(x,y)$ a vypočtěte $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,-6)$.

Návod:

Ověříme podmínky věty o existenci implicitní funkce:

$$
\begin{aligned}
&1) \quad F(1,-6,0) = 0\ ,\\
&2) \quad \frac{\partial F}{\partial z}(1,-6,0) \neq 0\ .
\end{aligned}
$$

a vypočteme první parciální derivace podle věty o derivaci implicitní funkce:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \quad &= \quad -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y,f(x,y))}{\dfrac{\partial F}{\partial z}(x,y,z)}\ ,\\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \quad &= \quad -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y,f(x,y))}{\dfrac{\partial F}{\partial z}(x,y,z)} \qquad \text{pro} \quad x \in (1-\delta_x, 1+\delta_x)\ ,\ y \in (-6-\delta_y, -6+\delta_y)\ .
\end{aligned}
$$

Druhé derivace spočteme např. derivací předcházejících vztahů.

Zpět

Příklad 8.2.1

Ověřte, zda rovnice $F(x,y,z) = \mathrm{e}^z + x^2y + z + 5 = 0$ definuje v okolí bodu $A = [1,-6,0]$ jedinou spojitě diferencovatelnou funkci $z = f(x,y)$ a vypočtěte $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,-6)$.

Řešení:

Pro ověření existence implicitně definované funkce potřebujeme vypočítat:

$$F(1,-6,0) = \mathrm{e}^0 + 1\cdot(-6) + 0 + 5 = 0\,,$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z) = \mathrm{e}^z + 1\,, \qquad \frac{\partial F}{\partial z}(1,-6,0) = 2 \neq 0\,.$$

Rovnice $F(x,y,z) = 0$ tedy skutečně na okolí bodu $[1,-6,0]$ určuje implicitně funkci $z = f(x,y)$. Nyní můžeme přistoupit k výpočtu parciálních derivací:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y,z)}{\dfrac{\partial F}{\partial z}(x,y,z)} = -\frac{x^2}{\mathrm{e}^z + 1}\,, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(1,-6) = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -\frac{0 - x^2\mathrm{e}^z \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)}{(\mathrm{e}^z+1)^2}\,, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,-6) = -\frac{0-(-\frac{1}{2})}{4} = -\frac{1}{8}\,.$$

Hledaná parciální derivace je

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,-6) = -\frac{1}{8}\,.$$

Další

Příklad 8.2.1

Ověřte, zda rovnice $F(x, y, z) = \mathrm{e}^z + x^2 y + z + 5 = 0$ definuje v okolí bodu $A = [1, -6, 0]$ jedinou spojitě diferencovatelnou funkci $z = f(x, y)$ a vypočtěte $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1, -6)$.

Řešení:

Zjistili jsme, že v bodě A je funkce $y = f(x)$ klesající ($y'(-1) < 0$) a konvexní ($y''(-1) > 0$). Přesvědčit se o tom můžeme např. pomocí programu Maple, jak uvidíme dále.

Zpět

Příklad 8.2.1

Ověřte, zda rovnice $F(x,y,z) = \mathrm{e}^z + x^2 y + z + 5 = 0$ definuje v okolí bodu $A = [1,-6,0]$ jedinou spojitě diferencovatelnou funkci $z = f(x,y)$ a vypočtěte $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,-6)$.

Maple:

```
> F:=(x,y,z)->exp(z)+x^2*y+z+5;
```

$$F := (x,\ y,\ z) \to e^z + x^2\, y + z + 5$$

Nejprve ověříme podmínky pro existenci funkce $z = f(x,y)$ na okolí bodu [1,-6,0]:

```
> F(1,-6,0);
```

$$0$$

```
> diff(F(x,y,z),z);
```

$$e^z + 1$$

```
> subs(x=1,y=-6,z=0,%);
```

$$e^0 + 1$$

```
> simplify(%);
```

$$2$$

Nyní můžeme počítat příslušné parciální derivace:

```
> implicitdiff(F(x,y,z),z,y);
```

$$-\frac{x^2}{e^z + 1}$$

Další

Příklad 8.2.1

Ověřte, zda rovnice $F(x, y, z) = \mathrm{e}^z + x^2 y + z + 5 = 0$ definuje v okolí bodu $A = [1, -6, 0]$ jedinou spojitě diferencovatelnou funkci $z = f(x, y)$ a vypočtěte $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1, -6)$.

Maple:

```
> dzdy:=simplify(subs(x=1,y=-6,z=0,implicitdiff(F(x,y,z),z,y)));
```

$$dzdy := \frac{-1}{2}$$

```
> implicitdiff(F(x,y,z),z,y$2);
```

$$-\frac{x^4\, e^z}{(e^z)^3 + 3\,(e^z)^2 + 3\,e^z + 1}$$

```
> subs(x=1,y=-6,z=0,implicitdiff(F(x,y,z),z,y$2));
```

$$-\frac{e^0}{(e^0)^3 + 3\,(e^0)^2 + 3\,e^0 + 1}$$

```
> dzdydy:=simplify(%);
```

$$dzdydy := \frac{-1}{8}$$

Zpět

Příklad 8.2.1

Ověřte, zda rovnice $F(x, y, z) = \mathrm{e}^z + x^2y + z + 5 = 0$ definuje v okolí bodu $A = [1, -6, 0]$ jedinou spojitě diferencovatelnou funkci $z = f(x, y)$ a vypočtěte $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1, -6)$.

Mathematica:

$\boldsymbol{F[\mathrm{x\_, y\_, z\_}] = \mathrm{Exp}[z] + x\hat{\ }2 * y + z + 5}$

$5 + e^z + x^2y + z$

Nejprve ověříme podmínky pro existenci funkce $z = z(x, y)$ na okolí bodu [1,-6,0]:

$\boldsymbol{F[1, -6, 0]}$

0

$\boldsymbol{D[F[x, y, z], z]/.\{x \to 1, y \to -6, z \to 0\}}$

2

Nyní můžeme počítat příslušné parciální derivace:

$\boldsymbol{\mathrm{r1} = D[F[x, y, z[x, y]] == 0, y]}$

$x^2 + z^{(0,1)}[x, y] + e^{z[x,y]}z^{(0,1)}[x, y] == 0$

$\boldsymbol{\mathrm{der1} = \mathrm{Solve}\left[\mathrm{r1}, z^{(0,1)}[x, y]\right]}$

$\left\{\left\{z^{(0,1)}[x, y] \to -\frac{x^2}{1+e^{z[x,y]}}\right\}\right\}$

$\boldsymbol{(\mathrm{der1}/.\{x \to 1, y \to -6\})/.\{z[1, -6] \to 0\}}$

$\left\{\left\{z^{(0,1)}[1, -6] \to -\frac{1}{2}\right\}\right\}$

Další

Příklad 8.2.1

Ověřte, zda rovnice $F(x, y, z) = \mathrm{e}^z + x^2 y + z + 5 = 0$ definuje v okolí bodu $A = [1, -6, 0]$ jedinou spojitě diferencovatelnou funkci $z = f(x, y)$ a vypočtěte $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1, -6)$.

Mathematica:

$\mathbf{r2 = \boldsymbol{D}[\boldsymbol{F}[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}]] == 0, \{\boldsymbol{y}, 2\}]/.der1}$

$$\left\{ \frac{e^{z[x,y]} x^4}{\left(1+e^{z[x,y]}\right)^2} + z^{(0,2)}[x, y] + e^{z[x,y]} z^{(0,2)}[x, y] == 0 \right\}$$

$\mathbf{der2 = Solve}\left[\mathbf{r2}, \boldsymbol{z}^{(\mathbf{0,2})}[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}]\right]$

$$\left\{ \left\{ z^{(0,2)}[x, y] \to -\frac{e^{z[x,y]} x^4}{\left(1+e^{z[x,y]}\right)^3} \right\} \right\}$$

$\mathbf{(der2/.\{\boldsymbol{x} \to 1, \boldsymbol{y} \to -6\})/.\{\boldsymbol{z}[1, -6] \to 0\}}$

$$\left\{ \left\{ z^{(0,2)}[1, -6] \to -\frac{1}{8} \right\} \right\}$$

Zpět

Příklad 8.2.2

Vypočtěte totální diferenciál v bodě $[x_0, y_0]$ funkce $z = f(x, y)$ definované implicitně rovnicí $\dfrac{x}{z} - \ln\dfrac{z}{y} = 0\,.$

? Zpět

Příklad 8.2.2

Vypočtěte totální diferenciál v bodě $[x_0, y_0]$ funkce $z = f(x, y)$ definované implicitně rovnicí $\dfrac{x}{z} - \ln \dfrac{z}{y} = 0$.

Výsledek:

$$\mathrm{d}f(x_0, y_0) = \frac{z_0}{x_0 + z_0}\mathrm{d}x + \frac{z_0^2}{y_0(x_0 + z_0)}\mathrm{d}y .$$

Zpět

Příklad 8.2.2

Vypočtěte totální diferenciál v bodě $[x_0, y_0]$ funkce $z = f(x, y)$ definované implicitně rovnicí $\dfrac{x}{z} - \ln\dfrac{z}{y} = 0\,.$

Návod:

Totálním diferenciálem funkce $z = f(x, y)$ v bodě $[x_0, y_0]$ rozumíme formu:

$$\mathrm{d}f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\mathrm{d}y\,.$$

Zpět

Příklad 8.2.2

Vypočtěte totální diferenciál v bodě $[x_0, y_0]$ funkce $z = f(x, y)$ definované implicitně rovnicí $\dfrac{x}{z} - \ln\dfrac{z}{y} = 0$.

Řešení:

Předpokládejme, že funkce $z = f(x, y)$ je definována na okolí bodu $[x_0, y_0]$ implicitně rovnicí

$$F(x, y, z) = \frac{x}{z} - \ln\frac{z}{y} = 0 .$$

Potom platí:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)}{\dfrac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)} = -\frac{\dfrac{1}{z_0}}{-\dfrac{x_0}{z_0^2} - \dfrac{1}{z_0}} = \frac{z_0}{x_0 + z_0}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)}{\dfrac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)} = -\frac{\dfrac{1}{y_0}}{-\dfrac{x_0}{z_0^2} - \dfrac{1}{z_0}} = \frac{z_0^2}{y_0(x_0 + z_0)} .$$

Celkově tedy pro totální diferenciál funkce $z = f(x, y)$ v bodě $[x_0, y_0]$ dostaneme:

$$\mathrm{d}f(x_0, y_0) = \frac{z_0}{x_0 + z_0}\,\mathrm{d}x + \frac{z_0^2}{y_0(x_0 + z_0)}\,\mathrm{d}y .$$

Zpět

Příklad 8.2.2

Vypočtěte totální diferenciál v bodě $[x_0, y_0]$ funkce $z = f(x, y)$ definované implicitně rovnicí $\dfrac{x}{z} - \ln\dfrac{z}{y} = 0\,.$

Maple:

Předpokládejme, že funkce $z = f(x, y)$ je definována na okolí bodu $[x_0, y_0]$ implicitně danou rovnicí:

```
> F:=(x,y,z)->x/z-ln (z/y);
```

$$F := (x,\, y,\, z) \rightarrow \frac{x}{z} - \ln(\frac{z}{y})$$

Pro výpočet totálního diferenciálu potřebujeme znát příslušné parciální derivace:

```
> implicitdiff(F(x,y,z),z,x);
```

$$\frac{z}{x+z}$$

```
> dzdx:=simplify(subs(x=x_0,y=y_0,z=z_0,implicitdiff(F(x,y,z),z,x)));
```

$$dzdx := \frac{z\_0}{x\_0 + z\_0}$$

```
> implicitdiff(F(x,y,z),z,y);
```

$$\frac{z^2}{y\,(x+z)}$$

```
> subs(x=x_0,y=y_0,z=z_0,implicitdiff(F(x,y,z),z,y));
```

$$\frac{z\_0^2}{y\_0\,(x\_0 + z\_0)}$$

Další

Příklad 8.2.2

Vypočtěte totální diferenciál v bodě $[x_0, y_0]$ funkce $z = f(x, y)$ definované implicitně rovnicí $\dfrac{x}{z} - \ln\dfrac{z}{y} = 0\,.$

Maple:

```
> dzdy:=simplify(%);
```

$$dzdy := \frac{z\_0^2}{y\_0\,(x\_0 + z\_0)}$$

Nyní už zbývá jen sestavit příslušnou diferenciální formu:

```
> df:= dzdx * dx+dzdy * dy;
```

$$df := \frac{z\_0\ dx}{x\_0 + z\_0} + \frac{z\_0^2\ dy}{y\_0\,(x\_0 + z\_0)}$$

Zpět

Příklad 8.2.2

Vypočtěte totální diferenciál v bodě $[x_0, y_0]$ funkce $z = f(x, y)$ definované implicitně rovnicí $\dfrac{x}{z} - \ln\dfrac{z}{y} = 0$.

Mathematica:

Předpokládejme, že funkce $z = z(x, y)$ je definována na okolí bodu $[x_0, y_0]$ implicitně danou rovnicí:

F[x_, y_, z_] = x/z − Log[z/y]

$$\frac{x}{z} - \mathrm{Log}\left[\frac{z}{y}\right]$$

Pro výpočet totálního diferenciálu potřebujeme znát příslušné parciální derivace:

rx = D[F[x, y, z[x, y]] == 0, x]

$$\frac{1}{z[x,y]} - \frac{x\, z^{(1,0)}[x,y]}{z[x,y]^2} - \frac{z^{(1,0)}[x,y]}{z[x,y]} == 0$$

derx = Solve[rx, $z^{(1,0)}$[x, y]]

$$\left\{\left\{z^{(1,0)}[x, y] \to \frac{z[x,y]}{x+z[x,y]}\right\}\right\}$$

(derx/.{x → x0, y → y0})

$$\left\{\left\{z^{(1,0)}[\mathrm{x0}, \mathrm{y0}] \to \frac{z[\mathrm{x0},\mathrm{y0}]}{\mathrm{x0}+z[\mathrm{x0},\mathrm{y0}]}\right\}\right\}$$

ry = D[F[x, y, z[x, y]] == 0, y]

$$-\frac{x\, z^{(0,1)}[x,y]}{z[x,y]^2} - \frac{y\left(-\frac{z[x,y]}{y^2} + \frac{z^{(0,1)}[x,y]}{y}\right)}{z[x,y]} == 0$$

Další

Příklad 8.2.2

Vypočtěte totální diferenciál v bodě $[x_0, y_0]$ funkce $z = f(x, y)$ definované implicitně rovnicí $\frac{x}{z} - \ln\frac{z}{y} = 0$.

Mathematica:

dery = Solve$\left[\mathbf{ry}, z^{(0,1)}[x, y]\right]$

$$\left\{\left\{z^{(0,1)}[x,y] \to \frac{z[x,y]^2}{y(x+z[x,y])}\right\}\right\}$$

(dery/.$\{x \to \mathrm{x0}, y \to \mathrm{y0}\}$**)**

$$\left\{\left\{z^{(0,1)}[\mathrm{x0},\mathrm{y0}] \to \frac{z[\mathrm{x0},\mathrm{y0}]^2}{\mathrm{y0}(\mathrm{x0}+z[\mathrm{x0},\mathrm{y0}])}\right\}\right\}$$

Nyní už zbývá jen sestavit příslušnou diferenciální formu:

df==derx[[1]][[1]][[2]]dx + dery[[1]][[1]][[2]]dy

$$\mathrm{df} == \frac{\mathrm{dx}\, z[x,y]}{x+z[x,y]} + \frac{\mathrm{dy}\, z[x,y]^2}{y(x+z[x,y])}$$

Zpět

Příklad 8.2.3

Napište rovnici tečné roviny k ploše $x^3 + y^3 + z^3 + xyz - 6 = 0$ v bodě $T = [1, 2, -1]$.

? Zpět

Příklad 8.2.3

Napište rovnici tečné roviny k ploše $x^3 + y^3 + z^3 + xyz - 6 = 0$ v bodě $T = [1, 2, -1]$.

Výsledek:

$x + 11y + 5z = 18\,.$

Zpět

Příklad 8.2.3

Napište rovnici tečné roviny k ploše $x^3 + y^3 + z^3 + xyz - 6 = 0$ v bodě $T = [1, 2, -1]$.

Návod:

Tečná rovina v bodě $T = [x_0, y_0, z_0]$ ke grafu funkce $f(x, y)$ má rovnici:

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)\,.$$

Příslušné parciální derivace počítáme jako derivace funkce dané implicitně.

Zpět

Příklad 8.2.3

Napište rovnici tečné roviny k ploše $x^3 + y^3 + z^3 + xyz - 6 = 0$ v bodě $T = [1, 2, -1]$.

Řešení:

Bod T leží na ploše určené rovnicí

$$F(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 + xyz - 6 = 0\,,$$

neboť

$$F(1, 2, -1) = 1^3 + 2^3 + (-1)^3 - 2 - 6 = 0\,.$$

Dále platí

$$\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z) = 3z^2 + xy\,, \qquad \frac{\partial F}{\partial z}(1, 2, -1) = 3(-1)^2 + 2 = 5 \neq 0\,,$$

takže rovnice na okolí bodu T určuje implicitně definovanou funkci $f(x, y)$, pro kterou dostáváme:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}(x, y, z)}{\dfrac{\partial F}{\partial z}(x, y, z)} = -\frac{3x^2 + yz}{3z^2 + xy}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, 2) = -\frac{3 - 2}{3 + 2} = -\frac{1}{5}\,,$$

Další

Příklad 8.2.3

Napište rovnici tečné roviny k ploše $x^3 + y^3 + z^3 + xyz - 6 = 0$ v bodě $T = [1, 2, -1]$.

Řešení:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z)} = -\frac{3y^2 + xz}{3z^2 + xy}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1, 2) = -\frac{12 - 1}{3 + 2} = -\frac{11}{5}\,.$$

Rovnice tečné roviny v bodě $T = [1, 2, -1]$ má tvar

$$z = -1 - \frac{1}{5}(x - 1) - \frac{11}{5}(y - 2)\,,$$

tj.

$$x + 11y + 5z = 18\,.$$

Zpět

Příklad 8.2.3

Napište rovnici tečné roviny k ploše $x^3 + y^3 + z^3 + xyz - 6 = 0$ v bodě $T = [1, 2, -1]$.

Maple:

```
> F:=(x,y,z)->x^3+y^3+z^3+x*y*z-6;
```

$$F := (x,\ y,\ z) \to x^3 + y^3 + z^3 + x\,y\,z - 6$$

```
> F(1,2,-1);
```

$$0$$

```
> diff(F(x,y,z),z);
```

$$3\,z^2 + x\,y$$

```
> subs(x=1,y=2,z=-1,%);
```

$$5$$

Ověřili jsme, že daná rovnice definuje v okolí bodu T funkci $z = f(x, y)$.
Nyní můžeme počítat příslušné parciální derivace:

```
> implicitdiff(F(x,y,z),z,x);
```

$$-\frac{3\,x^2 + z\,y}{3\,z^2 + x\,y}$$

```
> dzdx:=simplify(subs(x=1,y=2,z=-1,implicitdiff(F(x,y,z),z,x)));
```

$$dzdx := \frac{-1}{5}$$

```
> implicitdiff(F(x,y,z),z,y);
```

$$-\frac{3\,y^2 + x\,z}{3\,z^2 + x\,y}$$

Další

Příklad 8.2.3

Napište rovnici tečné roviny k ploše $x^3 + y^3 + z^3 + xyz - 6 = 0$ v bodě $T = [1, 2, -1]$.

Maple:

```
> dzdy:=subs(x=1,y=2,z=-1,implicitdiff(F(x,y,z),z,y));
```

$$dzdy := \frac{-11}{5}$$

Nyní sestrojíme tečnou rovinu:

```
> z:= -1+dzdx* (x-1) +dzdy * (y-2);
```

$$z := \frac{18}{5} - \frac{x}{5} - \frac{11\,y}{5}$$

Zpět

Příklad 8.2.3

Napište rovnici tečné roviny k ploše $x^3 + y^3 + z^3 + xyz - 6 = 0$ v bodě $T = [1, 2, -1]$.

Mathematica:

$\boldsymbol{F[\mathrm{x\_}, \mathrm{y\_}, \mathrm{z\_}] = x\hat{\ }3 + y\hat{\ }3 + z\hat{\ }3 + xyz - 6}$

$-6 + x^3 + y^3 + xyz + z^3$

$\boldsymbol{F[1, 2, -1]}$

0

$\boldsymbol{D[F[x, y, z], z]/.\{x \to 1, y \to 2, z \to -1\}}$

5

Ověřili jsme, že daná rovnice definuje v okolí bodu T funkci $z = f(x, y)$.
Nyní můžeme počítat příslušné parciální derivace:

$\boldsymbol{\mathrm{rx} = D[F[x, y, z[x, y]] == 0, x]}$

$3x^2 + yz[x, y] + xyz^{(1,0)}[x, y] + 3z[x, y]^2 z^{(1,0)}[x, y] == 0$

$\boldsymbol{\mathrm{derx} = \mathrm{Solve}\left[\mathrm{rx}, z^{(1,0)}[x, y]\right]}$

$\left\{\left\{z^{(1,0)}[x, y] \to \frac{-3x^2 - yz[x,y]}{xy + 3z[x,y]^2}\right\}\right\}$

$\boldsymbol{\mathrm{der1} = \mathrm{derx}/.\{x \to 1, y \to 2\}/.\{z[1, 2] \to -1\}}$

$\left\{\left\{z^{(1,0)}[1, 2] \to -\frac{1}{5}\right\}\right\}$

Další

Příklad 8.2.3

Napište rovnici tečné roviny k ploše $x^3 + y^3 + z^3 + xyz - 6 = 0$ v bodě $T = [1, 2, -1]$.

Mathematica:

$\mathbf{ry = \boldsymbol{D}[\boldsymbol{F}[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}]] == 0, \boldsymbol{y}]}$

$3y^2 + xz[x, y] + xyz^{(0,1)}[x, y] + 3z[x, y]^2 z^{(0,1)}[x, y] == 0$

$\mathbf{dery = Solve\left[ry, \boldsymbol{z}^{(0,1)}[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}]\right]}$

$\left\{\left\{z^{(0,1)}[x, y] \to \frac{-3y^2 - xz[x,y]}{xy + 3z[x,y]^2}\right\}\right\}$

$\mathbf{der2 = dery/.\{\boldsymbol{x} \to 1, \boldsymbol{y} \to 2\}/.\{\boldsymbol{z}[1, 2] \to -1\}}$

$\left\{\left\{z^{(0,1)}[1, 2] \to -\frac{11}{5}\right\}\right\}$

Nyní sestrojíme tečnou rovinu:

$\mathbf{TecnaRov = \boldsymbol{z} - (-1) == der1[[1]][[1]][[2]](\boldsymbol{x} - 1) + der2[[1]][[1]][[2]](\boldsymbol{y} - 2)}$

$1 + z == \frac{1-x}{5} - \frac{11}{5}(-2 + y)$

Simplify[%]

$x + 11y + 5z == 18$

Zpět

Příklad 8.2.4

Pomocí totálního diferenciálu vypočtěte přibližně funkční hodnotu $f(0,98;1,02)$ funkce $z = f(x,y)$ definované implicitně rovnicí $F(x,y,z) = x + y - z^3 - xz = 0$.

Příklad 8.2.4

Pomocí totálního diferenciálu vypočtěte přibližně funkční hodnotu $f(0,98;1,02)$ funkce $z = f(x,y)$ definované implicitně rovnicí $F(x,y,z) = x + y - z^3 - xz = 0$.

Výsledek:

$f(0,98;1,02) \doteq 1,005$.

Zpět

Příklad 8.2.4

Pomocí totálního diferenciálu vypočtěte přibližně funkční hodnotu $f(0,98;1,02)$ funkce $z = f(x,y)$ definované implicitně rovnicí $F(x,y,z) = x + y - z^3 - xz = 0$.

Návod:

Pro aproximaci pomocí totálního diferenciálu platí

$$f(x,y) \doteq f(x_0,y_0) + \mathrm{d}f(x_0,y_0) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)\,.$$

Zpět

Příklad 8.2.4

Pomocí totálního diferenciálu vypočtěte přibližně funkční hodnotu $f(0,98;1,02)$ funkce $z = f(x,y)$ definované implicitně rovnicí $F(x,y,z) = x + y - z^3 - xz = 0$.

Řešení:

Pro výpočet hledané funkční hodnoty musíme zvolit bod $[1,1,1]$. Dosadíme-li $x = 1$ a $y = 1$ do rovnice $x + y - z^3 - xz = 0$, dostaneme rovnici $2 - z^3 - z = 0$. Tato rovnice má jediné reálné řešení $z = 1$ (ověřte si to graficky, nebo vydělte rovnici členem $(z-1)$).
Nyní ověříme, že v okolí tohoto bodu rovnice $F(x,y,z) = 0$ určuje jedinou spojitě diferencovatelnou funkci $z = f(x,y)$:

$$F(1,1,1) = 1 + 1 - 1 - 1 = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z) = -3z^2 - x \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial F}{\partial z}(1,1,1) = -3 - 1 = -4 \neq 0\,.$$

Nyní přistoupíme k výpočtu parciálních derivací:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z)} = -\frac{1-z}{-3z^2 - x}\,, \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z)} = -\frac{1}{-3z^2 - x}\,, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = -\frac{1}{-4} = \frac{1}{4}\,.$$

Další

Příklad 8.2.4

Pomocí totálního diferenciálu vypočtěte přibližně funkční hodnotu $f(0,98;1,02)$ funkce $z = f(x,y)$ definované implicitně rovnicí $F(x,y,z) = x + y - z^3 - xz = 0$.

Řešení:

Pro totální diferenciál funkce $f(x,y)$ v bodě $[1,1]$ platí

$$\mathrm{d}f(1,1) = \frac{1}{4}\mathrm{d}y\,,$$

pro přibližnou hodnotu $f(0,98;1,02)$ odtud plyne

$$f(0,98;1,02) \doteq f(1,1) + \mathrm{d}f(1,1) = 1 + \frac{1}{4}\cdot 0,02 = 1,005\,.$$

Zpět

Příklad 8.2.4

Pomocí totálního diferenciálu vypočtěte přibližně funkční hodnotu $f(0,98;1,02)$ funkce $z = f(x,y)$ definované implicitně rovnicí $F(x,y,z) = x + y - z^3 - xz = 0$.

Maple:

```
> F:=(x,y,z)->x+y-z^3-x*z;
```

$$F := (x,\ y,\ z) \to x + y - z^3 - x\,z$$

Nejprve ověříme podmínky existence funkce $z = f(x,y)$ na okolí bodu [1,1,1]:

```
> F(1,1,1);
```

$$0$$

```
> diff(F(x,y,z),z);
```

$$-3\,z^2 - x$$

```
> subs(x=1,y=1,z=1,%);
```

$$-4$$

Nyní vypočteme parciální derivace funkce f v bodě [1,1]:

```
> dfdx:=implicitdiff(F(x,y,z),z,x);
```

$$dfdx := -\frac{-1+z}{3\,z^2+x}$$

```
> dfdx1:=subs(x=1,y=1,z=1,dfdx);
```

$$dfdx1 := 0$$

```
> dfdy:=implicitdiff(F(x,y,z),z,y);
```

$$dfdy := \frac{1}{3\,z^2+x}$$

Další

Příklad 8.2.4

Pomocí totálního diferenciálu vypočtěte přibližně funkční hodnotu $f(0,98;1,02)$ funkce $z = f(x,y)$ definované implicitně rovnicí $F(x,y,z) = x + y - z^3 - xz = 0$.

Maple:

```
> dfdy1:=subs(x=1,y=1,z=1,dfdy);
```

$$dfdy1 := \frac{1}{4}$$

Pomocí parciálních derivací zapíšeme formuli pro totální diferenciál:

```
> tot_dif:=dfdx1*dx+dfdy1*dy;
```

$$tot\_dif := \frac{dy}{4}$$

Zbývá dosadit hodnoty přírůstků dx a dy:

```
> dx:=-0.02:dy:=0.02: f(0.98,1.02):=1+tot_dif;
```

$$\mathrm{f}(0.98,\ 1.02) := 1.005000000$$

Zpět

Příklad 8.2.4

Pomocí totálního diferenciálu vypočtěte přibližně funkční hodnotu $f(0,98;1,02)$ funkce $z = f(x,y)$ definované implicitně rovnicí $F(x,y,z) = x + y - z^3 - xz = 0$.

Mathematica:

$\boldsymbol{F[\mathrm{x\_,y\_,z\_}] = x + y - z\hat{}3 - xz}$

$x + y - xz - z^3$

Nejprve ověříme podmínky existence funkce $z = f(x,y)$ na okolí bodu [1,1,1]:

$\boldsymbol{F[1,1,1]}$

0

$\boldsymbol{D[F[x,y,z],z]/.\{x \to 1, y \to 1, z \to 1\}}$

-4

Nyní vypočteme parciální derivace funkce f v bodě [1,1]:

$\boldsymbol{\mathrm{rx} = D[F[x,y,z[x,y]] == 0, x]}$

$1 - z[x,y] - xz^{(1,0)}[x,y] - 3z[x,y]^2 z^{(1,0)}[x,y] == 0$

$\boldsymbol{\mathrm{derx} = \mathrm{Solve}\left[\mathrm{rx}, z^{(1,0)}[x,y]\right]}$

$\left\{\left\{z^{(1,0)}[x,y] \to \frac{1-z[x,y]}{x+3z[x,y]^2}\right\}\right\}$

$\boldsymbol{\mathrm{der1} = \mathrm{derx}/.\{x \to 1, y \to 1\}/.\{z[1,1] \to 1\}}$

$\left\{\left\{z^{(1,0)}[1,1] \to 0\right\}\right\}$

Další

Příklad 8.2.4

Pomocí totálního diferenciálu vypočtěte přibližně funkční hodnotu $f(0,98;1,02)$ funkce $z = f(x,y)$ definované implicitně rovnicí $F(x,y,z) = x + y - z^3 - xz = 0$.

Mathematica:

$\mathbf{ry = D[F[x,y,z[x,y]] == 0, y]}$

$1 - xz^{(0,1)}[x,y] - 3z[x,y]^2 z^{(0,1)}[x,y] == 0$

$\mathbf{dery = Solve\left[ry, z^{(0,1)}[x,y]\right]}$

$\left\{\left\{z^{(0,1)}[x,y] \to \frac{1}{x+3z[x,y]^2}\right\}\right\}$

$\mathbf{der2 = dery/.\{x \to 1, y \to 1\}/.\{z[1,1] \to 1\}}$

$\left\{\left\{z^{(0,1)}[1,1] \to \frac{1}{4}\right\}\right\}$

Pomocí parciálních derivací zapíšeme formuli pro totální diferenciál

df[dx_, dy_] = 0dx + 1/4dy

$\frac{\mathrm{dy}}{4}$

Zbývá dosadit hodnoty přírůstků dx a dy:

df[0.98 − 1, 1.02 − 1]

0.005

f_priblizna = 1 + df[0.98 − 1, 1.02 − 1]

1.005

Zpět

Příklad 8.2.5

Najděte lokální extrémy funkce $z = f(x,y)$ určené implicitně rovnicí
$F(x,y,z) = 2x - x^2 - 4y^2 - z = 0$.

? Zpět

Příklad 8.2.5

Najděte lokální extrémy funkce $z = f(x, y)$ určené implicitně rovnicí
$F(x, y, z) = 2x - x^2 - 4y^2 - z = 0$.

Výsledek:

Lokální maximum $f(1, 0) = 1$.

Zpět

Příklad 8.2.5

Najděte lokální extrémy funkce $z = f(x, y)$ určené implicitně rovnicí
$F(x, y, z) = 2x - x^2 - 4y^2 - z = 0$.

Návod:

Najdeme stacionární body a pomocí Hessiánu se pokusíme rozhodnout, zda se jedná o body lokálních extrémů.

Zpět

Příklad 8.2.5

Najděte lokální extrémy funkce $z = f(x, y)$ určené implicitně rovnicí
$F(x, y, z) = 2x - x^2 - 4y^2 - z = 0$.

Řešení:

Stacionární body vyhovují nutné podmínce pro lokální extrém

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0\,,$$

tj.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{2 - 2x}{-1} = 2 - 2x \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{-8y}{-1} = -8y \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = 0\,.$$

Zjistili jsme jediný stacionární bod $[1, 0]$. Vypočteme nyní druhé parciální derivace:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2\,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0\,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -8$$

Další

Příklad 8.2.5

Najděte lokální extrémy funkce $z = f(x,y)$ určené implicitně rovnicí
$F(x,y,z) = 2x - x^2 - 4y^2 - z = 0\,.$

Řešení:

a Hessián v bodě $[1,0]$:

$$\det H_f(1,0) = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -8 \end{vmatrix} = 16 > 0\,.$$

Funkce $z = f(x,y)$ má v bodě $[1,0]$ lokální extrém, vzhledem ke znaménku
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,0) = -2 < 0$ jde o ostré lokální maximum s funkční hodnotou $z = 1$.

Zpět

Příklad 8.2.5

Najděte lokální extrémy funkce $z = f(x,y)$ určené implicitně rovnicí $F(x,y,z) = 2x - x^2 - 4y^2 - z = 0$.

Maple:

```
> F:=(x,y,z)->2*x-x^2-4*y^2-z;
```

$$F := (x,\ y,\ z) \to 2\,x - x^2 - 4\,y^2 - z$$

Nejprve najdeme stacionární body:

```
> dfdx:=implicitdiff(F(x,y,z),z,x);
```

$$dfdx := 2 - 2\,x$$

```
> dfdy:=implicitdiff(F(x,y,z),z,y);
```

$$dfdy := -8\,y$$

```
> solve({dfdx=0,dfdy=0});
```

$$\{y = 0,\ x = 1\}$$

Máme jediný stacionární bod - bod [1,0]. Vypočteme příslušný Hessián:

```
> fxx:=implicitdiff(F(x,y,z),z,x$2);
```

$$fxx := -2$$

```
> fxy:=implicitdiff(F(x,y,z),z,x,y);
```

$$fxy := 0$$

```
> fyy:=implicitdiff(F(x,y,z),z,y$2);
```

$$fyy := -8$$

Další

Příklad 8.2.5

Najděte lokální extrémy funkce $z = f(x, y)$ určené implicitně rovnicí $F(x, y, z) = 2x - x^2 - 4y^2 - z = 0$.

Maple:

```
> H_f:=matrix(2,2,[fxx,fxy,fxy,fyy]);
```

$$H\_f := \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -8 \end{bmatrix}$$

```
> with(linalg):
> det(H_f);
```

$$16$$

V daném bodě je lokální extrém, dále je $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, 0) < 0$, takže se jedná o ostré lokální maximum, jehož funkční hodnota je

```
> f10:=solve(2*1-1^2-4*0^2-z=0);
```

$$f10 := 1$$

Zpět

Příklad 8.2.5

Najděte lokální extrémy funkce $z = f(x, y)$ určené implicitně rovnicí $F(x, y, z) = 2x - x^2 - 4y^2 - z = 0$.

Mathematica:

$\boldsymbol{F[\mathbf{x\_, y\_, z\_}] = 2x - x\hat{}2 - 4y\hat{}2 - z}$

$2x - x^2 - 4y^2 - z$

Nejprve najdeme stacionární body:
Výpočet $\frac{\partial f}{\partial x}$

$\mathbf{rx} = \boldsymbol{D[F[x, y, z[x, y]] == 0, x]}$

$2 - 2x - z^{(1,0)}[x, y] == 0$

$\mathbf{derx = Solve}\left[\mathbf{rx}, \boldsymbol{z^{(1,0)}[x, y]}\right]$

$\left\{\left\{z^{(1,0)}[x, y] \to -2(-1 + x)\right\}\right\}$

Výpočet $\frac{\partial f}{\partial y}$

$\mathbf{ry} = \boldsymbol{D[F[x, y, z[x, y]] == 0, y]}$

$-8y - z^{(0,1)}[x, y] == 0$

$\mathbf{dery = Solve}\left[\mathbf{ry}, \boldsymbol{z^{(0,1)}[x, y]}\right]$

$\left\{\left\{z^{(0,1)}[x, y] \to -8y\right\}\right\}$

Další

Příklad 8.2.5

Najděte lokální extrémy funkce $z = f(x, y)$ určené implicitně rovnicí
$F(x, y, z) = 2x - x^2 - 4y^2 - z = 0$.

Mathematica:

Určení stacionárních bodů:

$\mathbf{Solve[\{2 - 2\boldsymbol{x} == 0, -8\boldsymbol{y} == 0\}, \{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\}]}$

$\{\{x \to 1, y \to 0\}\}$

Máme jediný stacionární bod - bod [1,0]. Vypočteme příslušný Hessián. Výpočet $\frac{\partial f^2}{\partial x^2}$

$\mathbf{rxx = \boldsymbol{D}[rx, \boldsymbol{x}]}$

$-2 - z^{(2,0)}[x, y] == 0$

$\mathbf{derxx = Solve\left[rxx, \boldsymbol{z}^{(2,0)}[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}]\right]}$

$\left\{\left\{z^{(2,0)}[x, y] \to -2\right\}\right\}$

Výpočet $\frac{\partial f^2}{\partial x \partial y}$

$\mathbf{rxy = \boldsymbol{D}[rx, \boldsymbol{y}]}$

$-z^{(1,1)}[x, y] == 0$

$\mathbf{derxy = Solve\left[rxy, \boldsymbol{z}^{(1,1)}[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}]\right]}$

$\left\{\left\{z^{(1,1)}[x, y] \to 0\right\}\right\}$

Další

Příklad 8.2.5

Najděte lokální extrémy funkce $z = f(x, y)$ určené implicitně rovnicí $F(x, y, z) = 2x - x^2 - 4y^2 - z = 0$.

Mathematica:

Výpočet $\frac{\partial f^2}{\partial y^2}$

$\mathbf{ryy = \mathit{D}[ry, \mathit{y}]}$

$-8 - z^{(0,2)}[x, y] == 0$

$\mathbf{deryy = Solve\left[ryy, \mathit{z}^{(0,2)}[\mathit{x}, \mathit{y}]\right]}$

$\left\{\left\{z^{(0,2)}[x, y] \to -8\right\}\right\}$

$\mathbf{Hf = \{\{-2, 0\}, \{0, -8\}\}}$

$\{\{-2, 0\}, \{0, -8\}\}$

Det[Hf]

16

V daném bodě je lokální extrém, dále je $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, 0) < 0$, takže se jedná o ostré lokální maximum, jehož funkční hodnota je

$\mathbf{Solve[\mathit{F}[1, 0, \mathit{z}] == 0, \mathit{z}]}$

$\{\{z \to 1\}\}$

Zpět

Příklad 8.2.6

Vypočtěte totální diferenciál dT pro jeden mol reálného plynu, který se řídí Redlich-Kwongovou stavovou rovnicí $pV = RT + p\left(b - \frac{a}{RT^{\frac{3}{2}}}\right)$, kde p značí tlak plynu, V objem plynu, a, b, R jsou reálné konstanty.

? Zpět

Příklad 8.2.6

Vypočtěte totální diferenciál dT pro jeden mol reálného plynu, který se řídí Redlich-Kwongovou stavovou rovnicí $pV = RT + p\left(b - \dfrac{a}{RT^{\frac{3}{2}}}\right)$, kde p značí tlak plynu, V objem plynu, a, b, R jsou reálné konstanty.

Výsledek:

$$\mathrm{d}T = \frac{\left(V - b + \frac{a}{R}T^{-\frac{3}{2}}\right)\,\mathrm{d}p + p\,\mathrm{d}V}{R + \frac{3}{2}p\frac{a}{R}T^{-\frac{5}{2}}}\,.$$

Zpět

Příklad 8.2.6

Vypočtěte totální diferenciál dT pro jeden mol reálného plynu, který se řídí Redlich-Kwongovou stavovou rovnicí $pV = RT + p\left(b - \dfrac{a}{RT^{\frac{3}{2}}}\right)$, kde p značí tlak plynu, V objem plynu, a, b, R jsou reálné konstanty.

Návod:

$$\mathrm{d}T = \frac{\partial T}{\partial p}\,\mathrm{d}p + \frac{\partial T}{\partial V}\,\mathrm{d}V$$

Zpět

Příklad 8.2.6

Vypočtěte totální diferenciál dT pro jeden mol reálného plynu, který se řídí Redlich-Kwongovou stavovou rovnicí $pV = RT + p\left(b - \dfrac{a}{RT^{\frac{3}{2}}}\right)$, kde p značí tlak plynu, V objem plynu, a, b, R jsou reálné konstanty.

Řešení:

Danou stavovou rovnicí je teplota T zadána jako implicitní funkce tlaku a objemu, tj. $T = T(p, V)$, pro totální diferenciál teploty tedy platí

$$\mathrm{d}T = \frac{\partial T}{\partial p}\,\mathrm{d}p + \frac{\partial T}{\partial V}\,\mathrm{d}V.$$

Příslušné parciální derivace vypočteme pomocí věty o implicitní funkci. Označme

$$F(p, V, T) = pV - RT - p\left(b - \frac{a}{RT^{\frac{3}{2}}}\right) = 0\,,$$

potom

$$\frac{\partial T}{\partial p} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial p}}{\dfrac{\partial F}{\partial T}} = -\frac{V - \left(b - \frac{a}{R}T^{-\frac{3}{2}}\right)}{-R - \frac{3}{2}\frac{pa}{R}\cdot T^{-\frac{5}{2}}}\,,$$

Další

Příklad 8.2.6

Vypočtěte totální diferenciál dT pro jeden mol reálného plynu, který se řídí Redlich-Kwongovou stavovou rovnicí $pV = RT + p\left(b - \dfrac{a}{RT^{\frac{3}{2}}}\right)$, kde p značí tlak plynu, V objem plynu, a, b, R jsou reálné konstanty.

Řešení:

$$\frac{\partial T}{\partial V} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial V}}{\dfrac{\partial F}{\partial T}} = -\frac{p}{-R - \frac{3}{2}\frac{pa}{R} \cdot T^{-\frac{5}{2}}} .$$

Celkem dostáváme

$$\mathrm{d}T = \frac{\left(V - b + \frac{a}{R}T^{-\frac{3}{2}}\right)\,\mathrm{d}p + p\,\mathrm{d}V}{R + \frac{3}{2}p\frac{a}{R}T^{-\frac{5}{2}}} .$$

Zpět

Příklad 8.2.6

Vypočtěte totální diferenciál dT pro jeden mol reálného plynu, který se řídí Redlich-Kwongovou stavovou rovnicí $pV = RT + p\left(b - \frac{a}{RT^{\frac{3}{2}}}\right)$, kde p značí tlak plynu, V objem plynu, a, b, R jsou reálné konstanty.

Maple:

Nejprve zavedeme potřebné označení:

```
> F:=(p,V,T)->p*V-R*T-p*(b-a/(R*T^(3/2)));
```

$$F := (p,\, V,\, T) \to p\,V - R\,T - p\,(b - \frac{a}{R\,T^{(3/2)}})$$

A dále počítáme příslušné parciální derivace $T(p, V)$:

```
> dTdp:=implicitdiff(F(p,V,T),T,p);
```

$$dTdp := \frac{2\,(V\,R\,T^{(5/2)} - b\,R\,T^{(5/2)} + a\,T)}{2\,R^2\,T^{(5/2)} + 3\,p\,a}$$

```
> dTdV:=implicitdiff(F(p,V,T),T,V);
```

$$dTdV := \frac{2\,p\,R\,T^{(5/2)}}{2\,R^2\,T^{(5/2)} + 3\,p\,a}$$

Na závěr dosadíme do formule totálního diferenciálu:

```
> dT:=dTdp*dp+dTdV*dV;
```

$$dT := \frac{2\,(V\,R\,T^{(5/2)} - b\,R\,T^{(5/2)} + a\,T)\,dp}{2\,R^2\,T^{(5/2)} + 3\,p\,a} + \frac{2\,p\,R\,T^{(5/2)}\,dV}{2\,R^2\,T^{(5/2)} + 3\,p\,a}$$

Zpět

Příklad 8.2.6

Vypočtěte totální diferenciál dT pro jeden mol reálného plynu, který se řídí Redlich-Kwongovou stavovou rovnicí $pV = RT + p\left(b - \frac{a}{RT^{\frac{3}{2}}}\right)$, kde p značí tlak plynu, V objem plynu, a, b, R jsou reálné konstanty.

Mathematica:

Nejprve zavedeme potřebné označení:

F[p_, V_, T_] = $pV - RT - p(b - a/(RT$^(3/2)))

$$-p\left(b - \frac{a}{RT^{3/2}}\right) - RT + pV$$

A dále počítáme příslušné parciální derivace $T(p, V)$:

rp = $D[F[p, V, T[p, V]] == 0, p]$

$$-b + V + \frac{a}{RT[p,V]^{3/2}} - RT^{(1,0)}[p, V] - \frac{3apT^{(1,0)}[p,V]}{2RT[p,V]^{5/2}} == 0$$

derp = Solve$\left[\text{rp}, T^{(1,0)}[p, V]\right]$

$$\left\{\left\{T^{(1,0)}[p, V] \to -\frac{2T[p,V]\left(-a+bRT[p,V]^{3/2}-RVT[p,V]^{3/2}\right)}{3ap+2R^2T[p,V]^{5/2}}\right\}\right\}$$

rV = $D[F[p, V, T[p, V]] == 0, V]$

$$p - RT^{(0,1)}[p, V] - \frac{3apT^{(0,1)}[p,V]}{2RT[p,V]^{5/2}} == 0$$

Další

Příklad 8.2.6

Vypočtěte totální diferenciál dT pro jeden mol reálného plynu, který se řídí Redlich-Kwongovou stavovou rovnicí $pV = RT + p\left(b - \frac{a}{RT^{\frac{3}{2}}}\right)$, kde p značí tlak plynu, V objem plynu, a, b, R jsou reálné konstanty.

Mathematica:

$$\mathbf{derV = Solve}\left[\mathbf{rV}, \boldsymbol{T^{(0,1)}[p, V]}\right]$$

$$\left\{\left\{T^{(0,1)}[p,V] \to -\frac{2pRT[p,V]^{5/2}}{-3ap-2R^2T[p,V]^{5/2}}\right\}\right\}$$

Na závěr dosadíme do formule totálního diferenciálu:

$$\mathbf{dT = Simplify[derp[[1]][[1]][[2]]dp + derV[[1]][[1]][[2]]dV/.\{\boldsymbol{T[p,V]} \to \boldsymbol{T}\}]}$$

$$\frac{2\left(a\mathrm{dp}T+RT^{5/2}(-b\mathrm{dp}+\mathrm{dV}p+\mathrm{dp}V)\right)}{3ap+2R^2T^{5/2}}$$

Zpět

Aplikace integrálů funkcí jedné proměnné

- Plošný obsah obrazce
- Délka rovinné křivky
- Objem rotačního tělesa
- Fyzikální aplikace

Zpět

Plošný obsah obrazce

- **Příklad 9.1.1** Určete plošný obsah P rovinného obrazce ohraničeného grafem funkce $y = \sin x,\ x \in \langle 0, \pi \rangle$ a osou x.
- **Příklad 9.1.2** Určete plošný obsah P rovinného obrazce ohraničeného grafem funkce $y = \frac{1}{x},\ x \in \langle 1, 3 \rangle$ a osou x.
- **Příklad 9.1.3** Určete plošný obsah P rovinného obrazce ohraničeného grafem funkce $y = \frac{1}{x},\ x \in \langle 1, \infty)$ a osou x.
- **Příklad 9.1.4** Určete plošný obsah P rovinného obrazce ohraničeného grafem funkce $y = \frac{1}{x^2},\ x \in \langle 1, \infty)$ a osou x.
- **Příklad 9.1.5** Určete plošný obsah P rovinného obrazce ohraničeného grafem funkce $y = x^{\frac{3}{2}},\ x \in \langle 0, 4 \rangle$ a osou x.
- **Příklad 9.1.6** Určete plošný obsah P rovinného obrazce ohraničeného grafy funkcí $y = \sin |x|$ a $y = (x - 2\pi)(x + 2\pi)/10,\ x \in \langle -2\pi, 2\pi \rangle$.
- **Příklad 9.1.7** Určete plošný obsah P rovinného obrazce ohraničeného polární osou a jedním závitem Archimedovy spirály dané v polárních souřadnicích rovnicí $r = \varphi$.

Zpět

Příklad 9.1.1

Určete plošný obsah P rovinného obrazce ohraničeného grafem funkce
$y = \sin x, \;\; x \in \langle 0, \pi \rangle$ a osou x.

? Zpět

Příklad 9.1.1

Určete plošný obsah P rovinného obrazce ohraničeného grafem funkce
$y = \sin x,\ x \in \langle 0, \pi \rangle$ a osou x.

Výsledek:

Plošný obsah je $P = 2\,.$

Zpět

Příklad 9.1.1

Určete plošný obsah P rovinného obrazce ohraničeného grafem funkce
$y = \sin x, \ x \in \langle 0, \pi \rangle$ a osou x.

Návod:

Použijte vztah

$$P = \int_a^b |f(x)| \, dx.$$

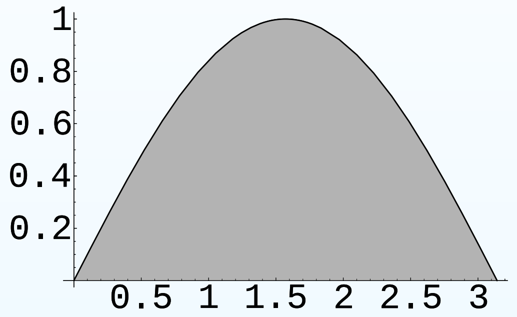
Zpět

Příklad 9.1.1

Určete plošný obsah P rovinného obrazce ohraničeného grafem funkce $y = \sin x,\ x \in \langle 0, \pi\rangle$ a osou x.

Řešení:

Nakreslíme obrázek plochy, jejíž obsah počítáme ($f(x) = \sin x$):



Nyní vypočteme obsah plochy:

$$P = \int_0^{\pi} |f(x)|\,dx = \int_0^{\pi} \sin x\,dx = \Big[-\cos x\Big]_0^{\pi} = -\cos\pi - (-\cos 0) = 2.$$

Zpět

Příklad 9.1.1

Určete plošný obsah P rovinného obrazce ohraničeného grafem funkce $y = \sin x,\ x \in \langle 0, \pi \rangle$ a osou x.

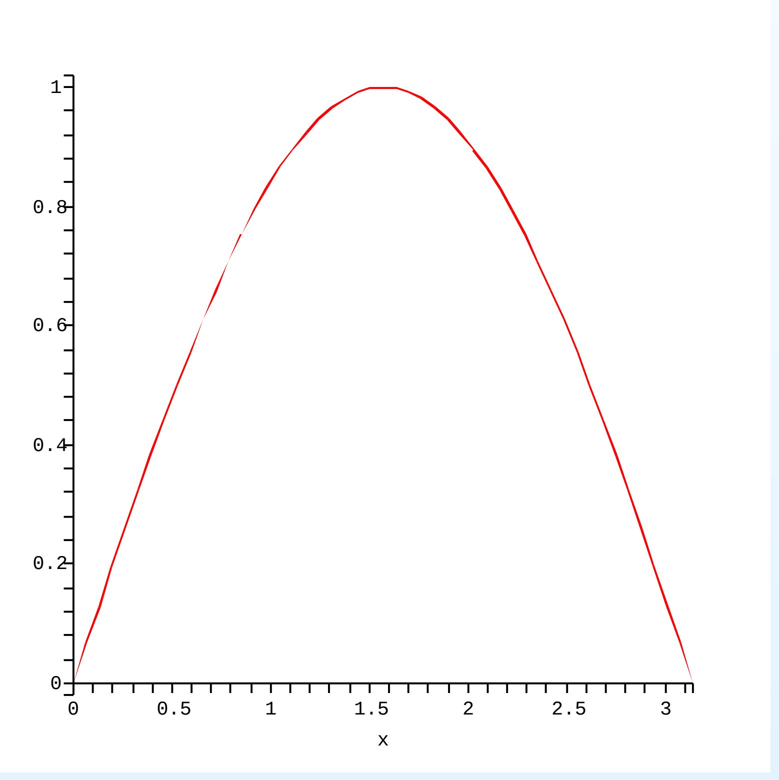
Maple:

Výpočet obsahu plochy a nakreslení plochy.

```
> int(sin(x),x=0..Pi);
```

$$2$$

```
> plot(sin(x),x=0..Pi);
```



Zpět

Příklad 9.1.1

Určete plošný obsah P rovinného obrazce ohraničeného grafem funkce
$y = \sin x, \;\; x \in \langle 0, \pi \rangle$ a osou x.

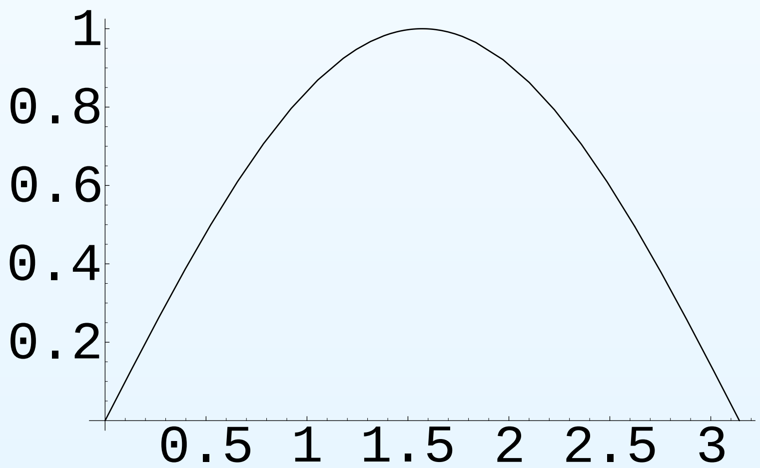
Mathematica:

Výpočet obsahu plochy a nakreslení plochy.

P = Integrate[Sin[x], {x, 0, Pi}]

2

Plot[Sin[x], {x, 0, Pi}];



Zpět

Příklad 9.1.2

Určete plošný obsah P rovinného obrazce ohraničeného grafem funkce $y = \frac{1}{x},\ x \in \langle 1, 3 \rangle$ a osou x.

Zpět

Příklad 9.1.2

Určete plošný obsah P rovinného obrazce ohraničeného grafem funkce $y = \frac{1}{x}$, $x \in \langle 1, 3 \rangle$ a osou x.

Výsledek:

Plošný obsah je $P = \ln 3$.

Zpět

Příklad 9.1.2

Určete plošný obsah P rovinného obrazce ohraničeného grafem funkce $y = \frac{1}{x},\ x \in \langle 1, 3\rangle$ a osou x.

Návod:

Použijte vztah

$$P = \int_a^b |f(x)|\, dx.$$

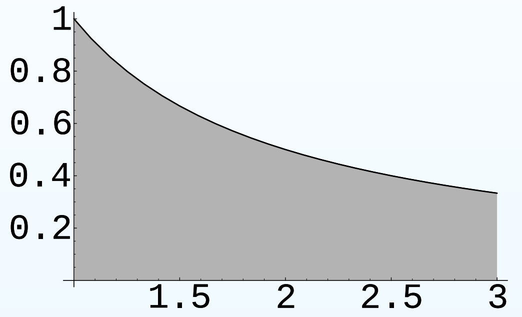
Zpět

Příklad 9.1.2

Určete plošný obsah P rovinného obrazce ohraničeného grafem funkce $y = \frac{1}{x},\ x \in \langle 1, 3\rangle$ a osou x.

Řešení:

Nakreslíme obrázek plochy, jejíž obsah počítáme ($f(x) = \frac{1}{x}$):



Nyní vypočteme obsah plochy:

$$P = \int_1^3 |f(x)|\,dx = \int_1^3 \frac{1}{x}\,dx = \Big[\ln x\Big]_1^3 = \ln 3 - \ln 1 = \ln 3.$$

Zpět

Příklad 9.1.2

Určete plošný obsah P rovinného obrazce ohraničeného grafem funkce $y = \frac{1}{x},\ x \in \langle 1, 3 \rangle$ a osou x.

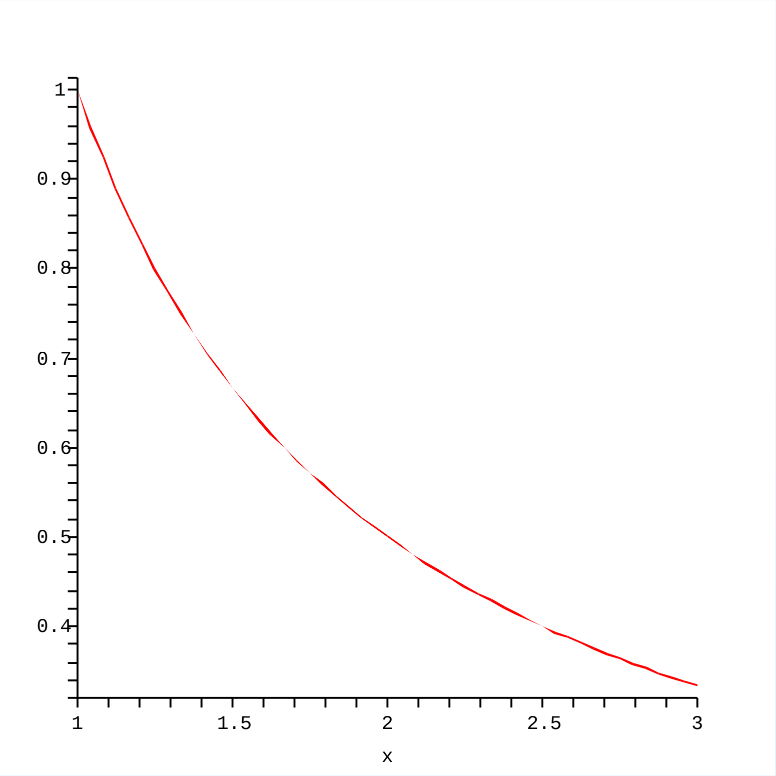
Maple:

Výpočet obsahu plochy a nakreslení plochy.

```
> int(1/x,x=1..3);
```

$$\ln(3)$$

```
> plot(1/x,x=1..3);
```



Zpět

Příklad 9.1.2

Určete plošný obsah P rovinného obrazce ohraničeného grafem funkce $y = \frac{1}{x}$, $x \in \langle 1, 3 \rangle$ a osou x.

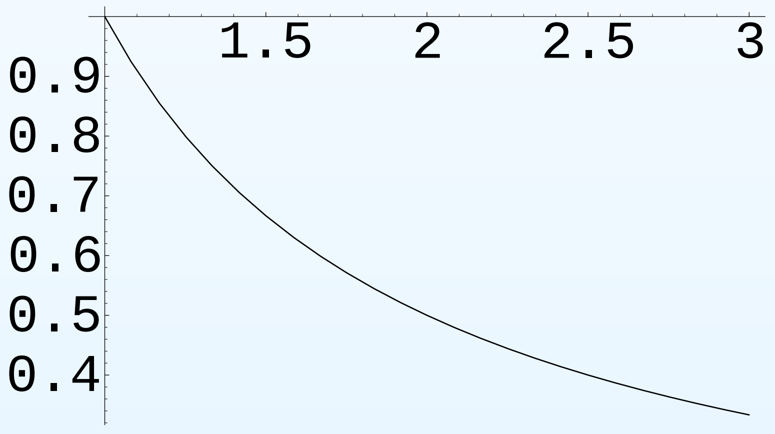
Mathematica:

Výpočet obsahu plochy a nakreslení plochy.

Integrate[1/x, {x, 1, 3}]

Log[3]

Plot[1/x, {x, 1, 3}];



Zpět

Příklad 9.1.3

Určete plošný obsah P rovinného obrazce ohraničeného grafem funkce $y = \frac{1}{x}$, $x \in \langle 1, \infty)$ a osou x.

? Zpět

Příklad 9.1.3

Určete plošný obsah P rovinného obrazce ohraničeného grafem funkce $y = \frac{1}{x},\ x \in \langle 1, \infty)$ a osou x.

Výsledek:

Plošný obsah je $P = \infty$.

Zpět

Příklad 9.1.3

Určete plošný obsah P rovinného obrazce ohraničeného grafem funkce $y = \frac{1}{x},\ x \in \langle 1, \infty)$ a osou x.

Návod:

Použijte vztah

$$P = \int_a^b |f(x)|\, dx.$$

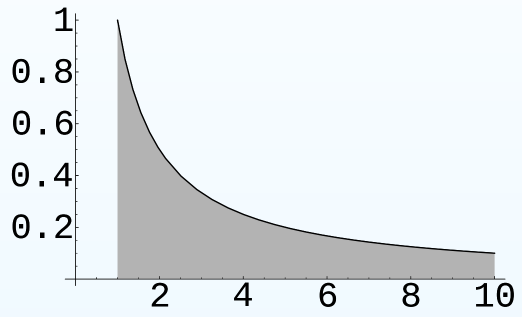
Zpět

Příklad 9.1.3

Určete plošný obsah P rovinného obrazce ohraničeného grafem funkce $y = \frac{1}{x}, \ x \in \langle 1, \infty)$ a osou x.

Řešení:

Nakreslíme obrázek plochy, jejíž obsah počítáme ($f(x) = \frac{1}{x}$):



Nyní vypočteme obsah plochy:

$$P = \int_1^\infty |f(x)|\, dx = \int_1^\infty \frac{1}{x}\, dx = \Big[\ln x\Big]_1^\infty = \lim_{x -> \infty} \ln x - \ln 1 = \infty.$$

Zpět

Příklad 9.1.3

Určete plošný obsah P rovinného obrazce ohraničeného grafem funkce $y = \frac{1}{x}$, $x \in \langle 1, \infty)$ a osou x.

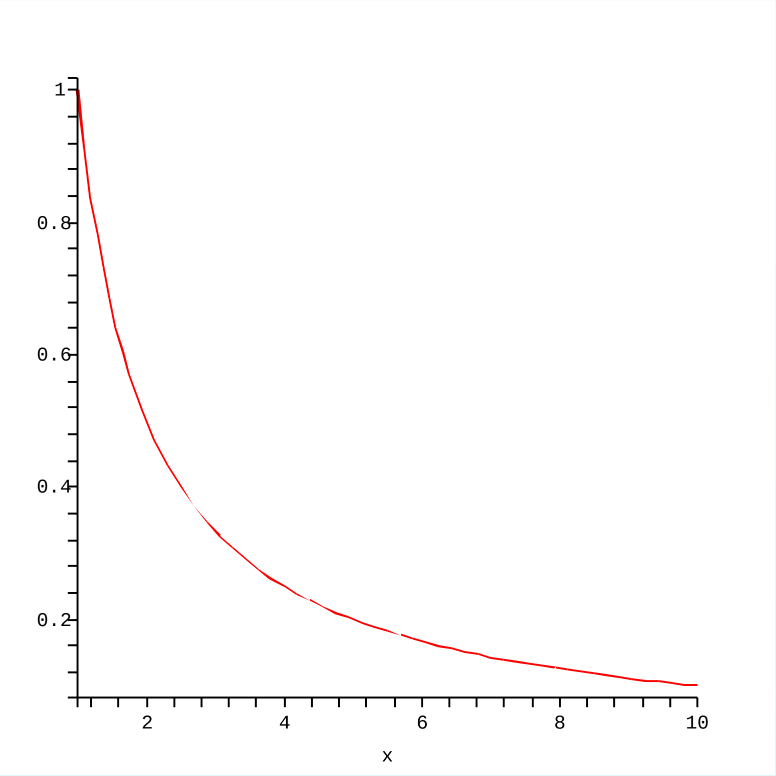
Maple:

Výpočet obsahu plochy a nakreslení plochy.

```
> int(1/x,x=1..infinity);
```

$$\infty$$

```
> plot(1/x,x=1..10);
```



Zpět

Příklad 9.1.3

Určete plošný obsah P rovinného obrazce ohraničeného grafem funkce $y = \frac{1}{x}$, $x \in \langle 1, \infty)$ a osou x.

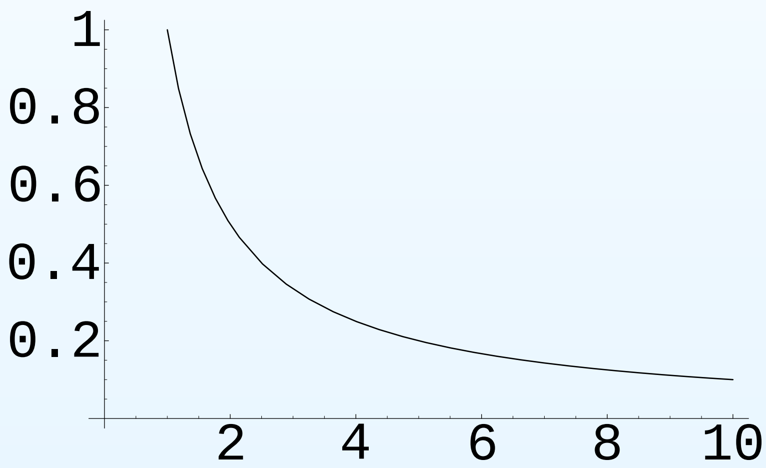
Mathematica:

Výpočet obsahu plochy a nakreslení plochy.

Limit[Integrate[1/x, {x, 1, b}], b → Infinity]

∞

Plot[1/x, {x, 1, 10}];



Zpět

Příklad 9.1.4

Určete plošný obsah P rovinného obrazce ohraničeného grafem funkce
$y = \frac{1}{x^2}$, $x \in \langle 1, \infty)$ a osou x.

? Zpět

Příklad 9.1.4

Určete plošný obsah P rovinného obrazce ohraničeného grafem funkce
$y = \frac{1}{x^2}$, $x \in \langle 1, \infty)$ a osou x.

Výsledek:

Plošný obsah je $P = 1$.

Zpět

Příklad 9.1.4

Určete plošný obsah P rovinného obrazce ohraničeného grafem funkce
$y = \frac{1}{x^2}, \ x \in \langle 1, \infty)$ a osou x.

Návod:

Použijte vztah

$$P = \int_a^b |f(x)| \, dx.$$

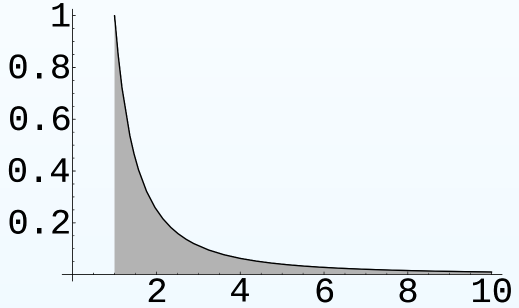
Zpět

Příklad 9.1.4

Určete plošný obsah P rovinného obrazce ohraničeného grafem funkce $y = \frac{1}{x^2}$, $x \in \langle 1, \infty)$ a osou x.

Řešení:

Nakreslíme obrázek plochy, jejíž obsah počítáme $(f(x) = \frac{1}{x^2})$:



Nyní vypočteme obsah plochy:

$$P = \int_1^\infty |f(x)|\,dx = \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^\infty = 1.$$

Zpět

Příklad 9.1.4

Určete plošný obsah P rovinného obrazce ohraničeného grafem funkce $y = \frac{1}{x^2}$, $x \in \langle 1, \infty)$ a osou x.

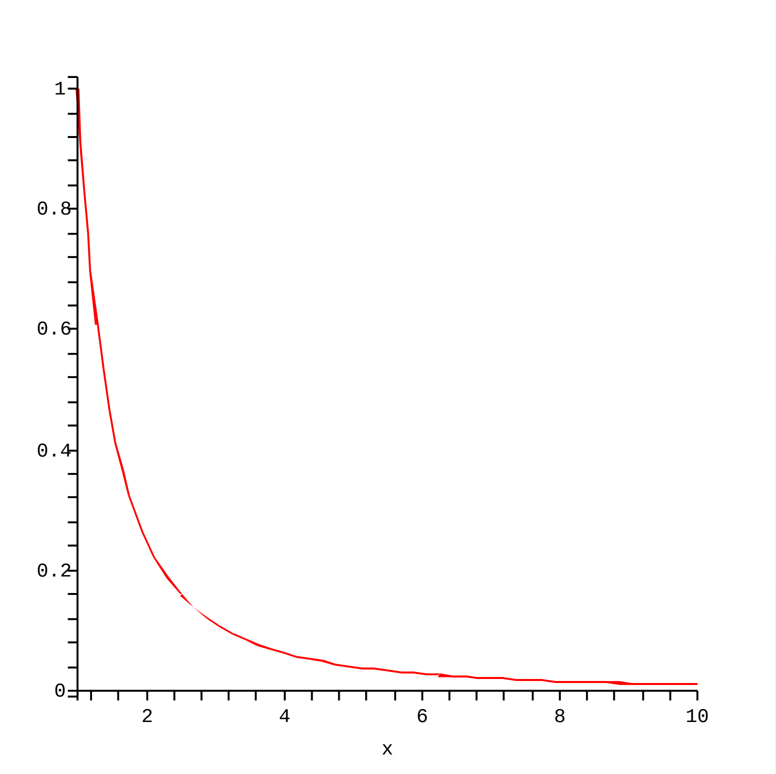
Maple:

Výpočet obsahu plochy a nakreslení plochy.

```
> int(1/x^2,x=1..infinity);
```

$$1$$

```
> plot(1/x^2,x=1..10);
```



Zpět

Příklad 9.1.4

Určete plošný obsah P rovinného obrazce ohraničeného grafem funkce $y = \frac{1}{x^2}$, $x \in \langle 1, \infty)$ a osou x.

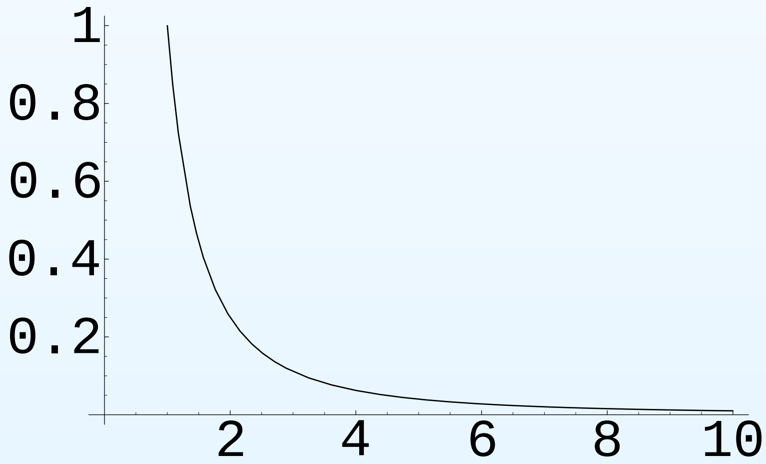
Mathematica:

Výpočet obsahu plochy a nakreslení plochy.

Integrate[1/x^2, {x, 1, Infinity}]

1

Plot[1/x^2, {x, 1, 10}];



Zpět

Příklad 9.1.5

Určete plošný obsah P rovinného obrazce ohraničeného grafem funkce $y = x^{\frac{3}{2}}$, $x \in \langle 0, 4 \rangle$ a osou x.

? Zpět

Příklad 9.1.5

Určete plošný obsah P rovinného obrazce ohraničeného grafem funkce $y = x^{\frac{3}{2}}$, $x \in \langle 0, 4 \rangle$ a osou x.

Výsledek:

Plošný obsah je $P = \frac{64}{5}$.

Zpět

Příklad 9.1.5

Určete plošný obsah P rovinného obrazce ohraničeného grafem funkce $y = x^{\frac{3}{2}},\ x \in \langle 0, 4\rangle$ a osou x.

Návod:

Použijte vztah

$$P = \int_a^b |f(x)|\, dx.$$

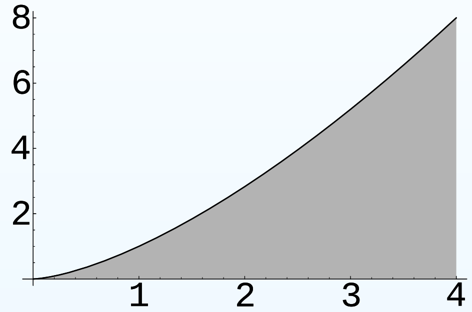
Zpět

Příklad 9.1.5

Určete plošný obsah P rovinného obrazce ohraničeného grafem funkce $y = x^{\frac{3}{2}}$, $x \in \langle 0, 4\rangle$ a osou x.

Řešení:

Nakreslíme obrázek plochy, jejíž obsah počítáme ($f(x) = x^{\frac{3}{2}}$):



Nyní vypočteme obsah plochy:

$$P = \int_0^4 |f(x)|\, dx = \int_0^4 x^{\frac{3}{2}}\, dx = \left[\frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}}\right]_0^4 = \frac{2}{5} \cdot 32 = \frac{64}{5}.$$

Zpět

Příklad 9.1.5

Určete plošný obsah P rovinného obrazce ohraničeného grafem funkce $y = x^{\frac{3}{2}}$, $x \in \langle 0, 4 \rangle$ a osou x.

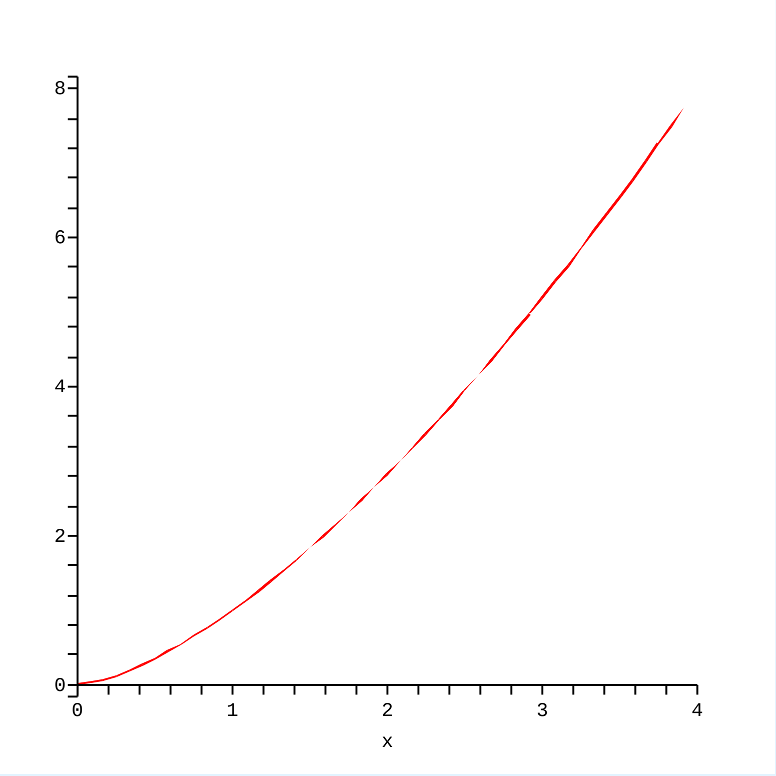
Maple:

Výpočet obsahu plochy a nakreslení plochy.

```
> int(x^(3/2),x=0..4);
```

$$\frac{64}{5}$$

```
> plot(x^(3/2),x=0..4);
```



Zpět

Příklad 9.1.5

Určete plošný obsah P rovinného obrazce ohraničeného grafem funkce $y = x^{\frac{3}{2}}$, $x \in \langle 0, 4\rangle$ a osou x.

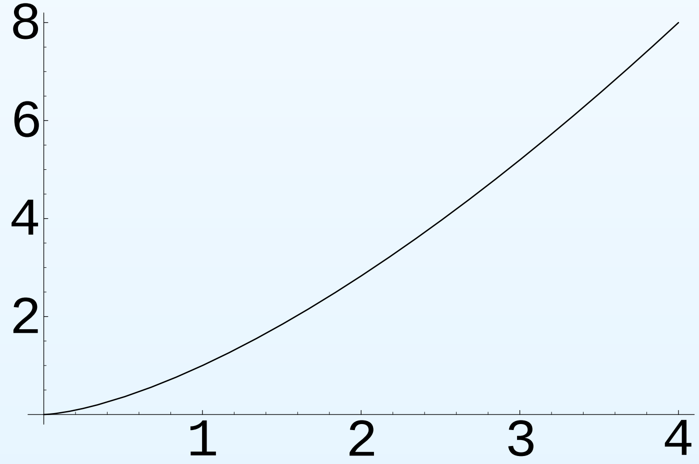
Mathematica:

Výpočet obsahu plochy a nakreslení plochy.

Integrate[*x*^(3/2), {*x*, 0, 4}]

$\frac{64}{5}$

Plot[*x*^(3/2), {*x*, 0, 4}];



Zpět

Příklad 9.1.6

Určete plošný obsah P rovinného obrazce ohraničeného grafy funkcí $y = \sin|x|$ a $y = (x - 2\pi)(x + 2\pi)/10,\ x \in \langle -2\pi, 2\pi \rangle$.

?

Zpět

Příklad 9.1.6

Určete plošný obsah P rovinného obrazce ohraničeného grafy funkcí $y = \sin|x|$ a $y = (x - 2\pi)(x + 2\pi)/10,\ x \in \langle -2\pi, 2\pi\rangle$.

Výsledek:

Plošný obsah je $P = \frac{16}{15}\pi^3$.

Zpět

Příklad 9.1.6

Určete plošný obsah P rovinného obrazce ohraničeného grafy funkcí $y = \sin|x|$ a $y = (x - 2\pi)(x + 2\pi)/10,\ x \in \langle -2\pi, 2\pi \rangle$.

Návod:

Použijte vztah

$$P = \int_a^b |f_1(x) - f_2(x)|\, dx\,,$$

kde $f_1(x) = \sin|x|$ a $f_2(x) = (x - 2\pi)(x + 2\pi)/10\,.$

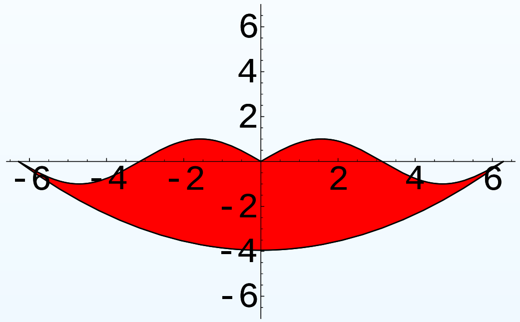
Zpět

Příklad 9.1.6

Určete plošný obsah P rovinného obrazce ohraničeného grafy funkcí $y = \sin|x|$ a $y = (x-2\pi)(x+2\pi)/10,\ x \in \langle -2\pi, 2\pi\rangle$.

Řešení:

Nakreslíme obrázek plochy, jejíž obsah počítáme ($f_1(x) = \sin|x|$, $f_2(x) = (x-2\pi)(x+2\pi)/10$):



Postup: Obě funkce jsou sudé (ověřte!), proto můžeme integrovat pouze od nuly do 2π a výsledek vynásobit dvěma. Na tomto intervalu je x nezáporné, lze tedy odstranit absolutní hodnotu ve funkci f_1. Protože na tomto intervalu platí $f_1 \geq f_2$, můžeme odstranit i absolutní hodnotu u rozdílu funkcí. Tím dostáváme

$$P = \int_{-2\pi}^{2\pi} |f_1(x) - f_2(x)|\,dx = 2\int_0^{2\pi} (f_1(x) - f_2(x))\,dx = 2\int_0^{2\pi} (\sin x - (x-2\pi)(x+2\pi)/10)\,dx =$$

$$= 2\Big[-\cos x - (\frac{x^3}{3} - 4\pi^2 x)/10\Big]_0^{2\pi} = \frac{16}{15}\pi^3.$$

Zpět

Příklad 9.1.6

Určete plošný obsah P rovinného obrazce ohraničeného grafy funkcí $y = \sin|x|$ a $y = (x - 2\pi)(x + 2\pi)/10,\ x \in \langle -2\pi, 2\pi \rangle$.

Maple:

Výpočet obsahu plochy a nakreslení plochy.

```
> y1:=sin(abs(x));
```

$$f1 := \sin(|x|)$$

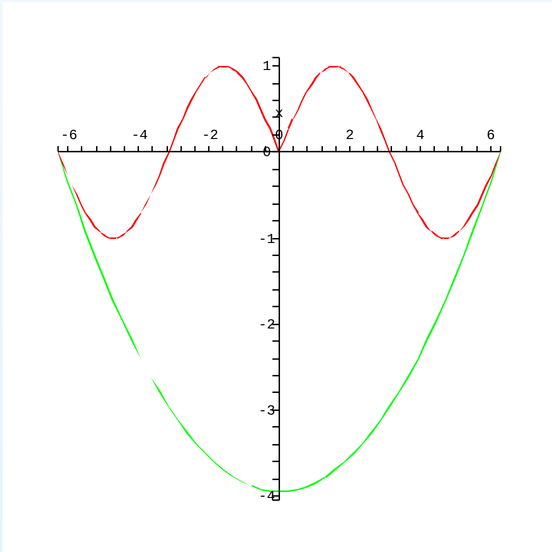
```
> f2:=(x-2*Pi)*(x+2*Pi)/10;
```

$$f2 := 1/10\,(x - 2\,\pi)\,(x + 2\,\pi)$$

```
> int(abs(f1-f2),x=-2*Pi..2*Pi);
```

$$\frac{16}{15}\,\pi^3$$

```
> plot([f1,f2],x=-2*Pi..2*Pi);
```



Zpět

Příklad 9.1.6

Určete plošný obsah P rovinného obrazce ohraničeného grafy funkcí $y = \sin|x|$ a $y = (x - 2\pi)(x + 2\pi)/10,\ x \in \langle -2\pi, 2\pi \rangle$.

Mathematica:

Výpočet obsahu plochy a nakreslení plochy.

f1 = Sin[Abs[x]]

Sin[Abs[x]]

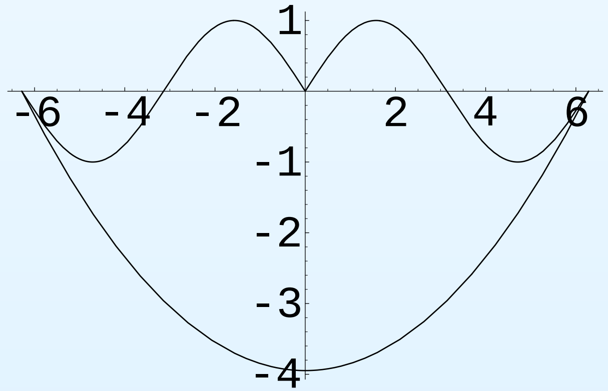
f2 = (x − 2 ∗ Pi) ∗ (x + 2 ∗ Pi)/10

$\frac{1}{10}(-2\pi + x)(2\pi + x)$

Integrate[Abs[f1 − f2], {x, −2 ∗ Pi, 2 ∗ Pi}]

$\frac{16\pi^3}{15}$

Plot[{f1, f2}, {x, −2 ∗ Pi, 2 ∗ Pi}];



Zpět

Příklad 9.1.7

Určete plošný obsah P rovinného obrazce ohraničeného polární osou a jedním závitem Archimedovy spirály dané v polárních souřadnicích rovnicí $r = \varphi$.

? Zpět

Příklad 9.1.7

Určete plošný obsah P rovinného obrazce ohraničeného polární osou a jedním závitem Archimedovy spirály dané v polárních souřadnicích rovnicí $r = \varphi$.

Výsledek:

Plošný obsah je $P = \frac{4}{3}\pi^3$.

Zpět

Příklad 9.1.7

Určete plošný obsah P rovinného obrazce ohraničeného polární osou a jedním závitem Archimedovy spirály dané v polárních souřadnicích rovnicí $r = \varphi$.

Návod:

Použijte vztah

$$P = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} r^2 \, \mathrm{d}\varphi.$$

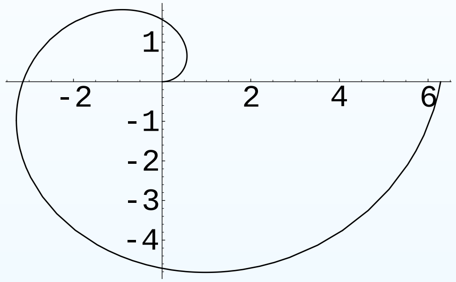
Zpět

Příklad 9.1.7

Určete plošný obsah P rovinného obrazce ohraničeného polární osou a jedním závitem Archimedovy spirály dané v polárních souřadnicích rovnicí $r = \varphi$.

Řešení:

Nakreslíme si plochu v polárních souřadnicích.



Nyní vypočteme plochu obrazce.

$$P = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} r^2 \, \mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \varphi^2 \, \mathrm{d}\varphi = \frac{1}{6} \Big[\varphi^3 \Big]_0^{2\pi} = \frac{1}{6} (2\pi)^3 = \frac{4}{3} \pi^3.$$

Zpět

Příklad 9.1.7

Určete plošný obsah P rovinného obrazce ohraničeného polární osou a jedním závitem Archimedovy spirály dané v polárních souřadnicích rovnicí $r = \varphi$.

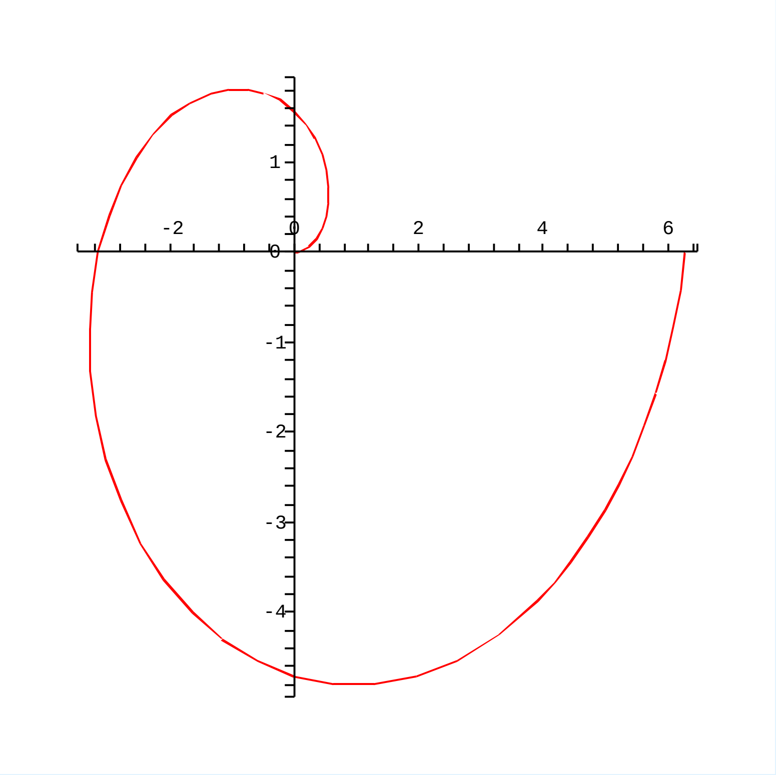
Maple:

Výpočet obsahu plochy a nakreslení plochy.

```
> r:=phi:
> int(r^2/2,phi=0..2*Pi);
```

$$\frac{4\,\pi^3}{3}$$

```
> plot([r,phi,phi=0..2*Pi],coords=polar);
```



Zpět

Příklad 9.1.7

Určete plošný obsah P rovinného obrazce ohraničeného polární osou a jedním závitem Archimedovy spirály dané v polárních souřadnicích rovnicí $r = \varphi$.

Mathematica:

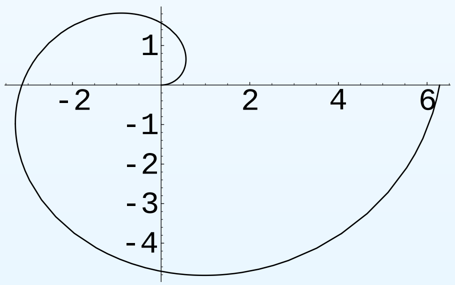
Výpočet obsahu plochy a nakreslení plochy.

$\boldsymbol{r{:=}\phi;}$

Integrate[r^2/2, {ϕ, 0, 2Pi}]

$\frac{4\pi^3}{3}$

ParametricPlot[{$r * $Cos[$\phi$], $r *$ Sin[ϕ]},{ϕ, 0, 2 * Pi}];



Zpět

Délka rovinné křivky

- Příklad 9.2.1 Určete délku l grafu funkce $y = x^{\frac{3}{2}}, \; x \in \langle 0, 4 \rangle$.
- Příklad 9.2.2 Spočtěte délku l křivky dané parametrickými rovnicemi

$$\begin{aligned} x &= \cos t \\ y &= \sin t \\ t &\in \langle 0, 2\pi \rangle. \end{aligned}$$

- Příklad 9.2.3 Spočtěte délku l křivky dané parametrickými rovnicemi

$$\begin{aligned} x &= \cos^3 t \\ y &= \sin^3 t \\ t &\in \langle 0, 2\pi \rangle. \end{aligned}$$

Zpět

Příklad 9.2.1

Určete délku l grafu funkce $y = x^{\frac{3}{2}}, \ x \in \langle 0, 4 \rangle$.

? Zpět

Příklad 9.2.1

Určete délku l grafu funkce $y = x^{\frac{3}{2}}$, $x \in \langle 0, 4 \rangle$.

Výsledek:

$l = \frac{8}{27}(10^{\frac{3}{2}} - 1) \doteq 9{,}07342\,.$

Zpět

Příklad 9.2.1

Určete délku l grafu funkce $y = x^{\frac{3}{2}}$, $x \in \langle 0, 4 \rangle$.

Návod:

Použijte vztah

$$l = \int\limits_a^b \sqrt{1 + (y')^2}\,\mathrm{d}x.$$

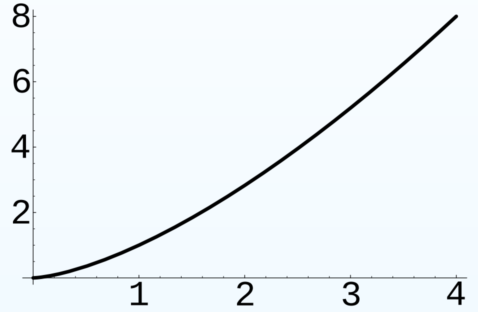
Zpět

Příklad 9.2.1

Určete délku l grafu funkce $y = x^{\frac{3}{2}}$, $x \in \langle 0, 4\rangle$.

Řešení:

Nakreslíme si křivku do kartézských souřadnic.



Nyní vypočteme délku křivky.

$$l = \int_0^4 \sqrt{1 + (y')^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^4 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\right)^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \left[\frac{8}{27}(1 + \frac{9}{4}x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^4 = \frac{8}{27}(10^{\frac{3}{2}} - 1) \doteq 9{,}07342.$$

Zpět

Příklad 9.2.1

Určete délku l grafu funkce $y = x^{\frac{3}{2}}$, $x \in \langle 0, 4 \rangle$.

Maple:

```
> y:=x^(3/2);
```

$$y := x^{3/2}$$

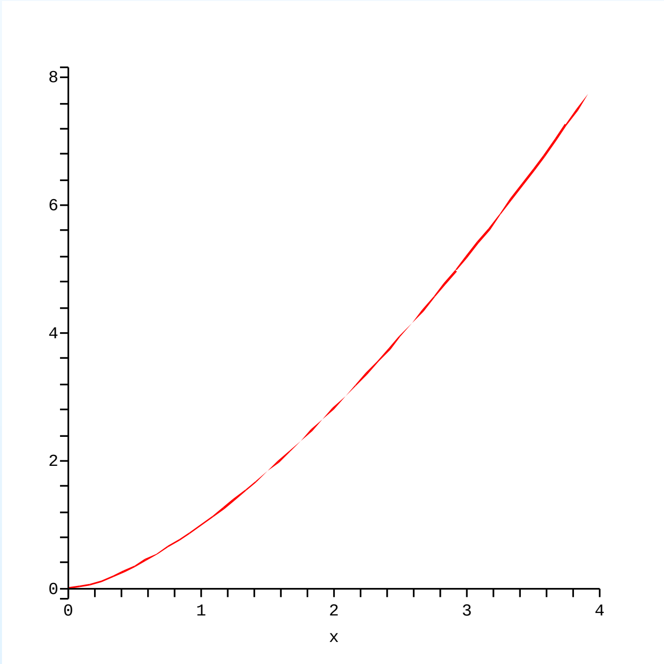
```
> l:=simplify(int(sqrt(1+(diff(y,x))^2), x=0..4));
```

$$l := \frac{80}{27}\sqrt{10} - \frac{8}{27}$$

```
> evalf(l);
```

$$9.073415289$$

```
> plot(x^(3/2),x=0..4);
```



Zpět

Příklad 9.2.1

Určete délku l grafu funkce $y = x^{\frac{3}{2}},\ x \in \langle 0, 4\rangle$.

Mathematica:

Vypočteme délku křivky a nakreslíme si křivku.

y = x^(3/2);

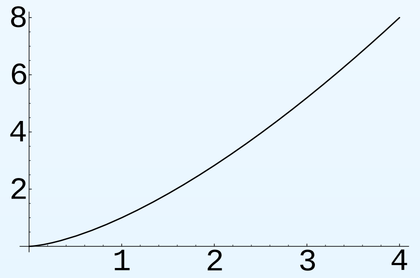
l = Integrate[Sqrt[1 + D[y, x]^2], {x, 0, 4}]

$\frac{8}{27}\left(-1 + 10\sqrt{10}\right)$

N[%]

9.07342

Plot[x^(3/2), {x, 0, 4}];



Zpět

Příklad 9.2.2

Spočtěte délku l křivky dané parametrickými rovnicemi

$$\begin{aligned} x &= \cos t \\ y &= \sin t \\ t &\in \langle 0, 2\pi \rangle. \end{aligned}$$

Příklad 9.2.2

Spočtěte délku l křivky dané parametrickými rovnicemi

$$\begin{aligned} x &= \cos t \\ y &= \sin t \\ t &\in \langle 0, 2\pi \rangle. \end{aligned}$$

Výsledek:

Délka je $l = 2\pi$, je to jednotková kružnice.

Zpět

Příklad 9.2.2

Spočtěte délku l křivky dané parametrickými rovnicemi

$$\begin{array}{rcl} x & = & \cos t \\ y & = & \sin t \\ t & \in & \langle 0, 2\pi\rangle. \end{array}$$

Návod:

Použijte vztah

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x')^2 + (y')^2}\ \mathrm{d}t.$$

Zpět

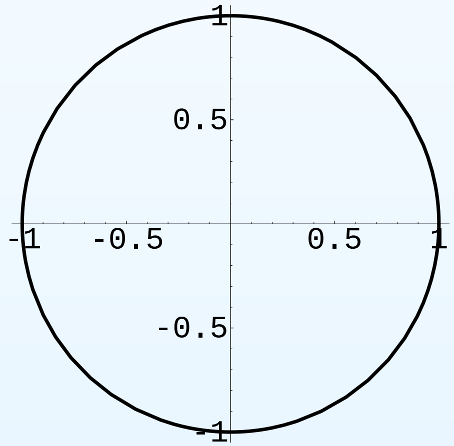
Příklad 9.2.2

Spočtěte délku l křivky dané parametrickými rovnicemi

$$\begin{aligned} x &= \cos t \\ y &= \sin t \\ t &\in \langle 0, 2\pi \rangle. \end{aligned}$$

Řešení:

Nejdříve si křivku nakreslíme, je to jednotková kružnice.



Nyní vypočteme délku křivky.

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{(x')^2 + (y')^2}\ \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t}\ \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} 1\, dt = 2\pi.$$

Zpět

Příklad 9.2.2

Spočtěte délku l křivky dané parametrickými rovnicemi

$$\begin{aligned} x &= \cos t \\ y &= \sin t \\ t &\in \langle 0, 2\pi \rangle. \end{aligned}$$

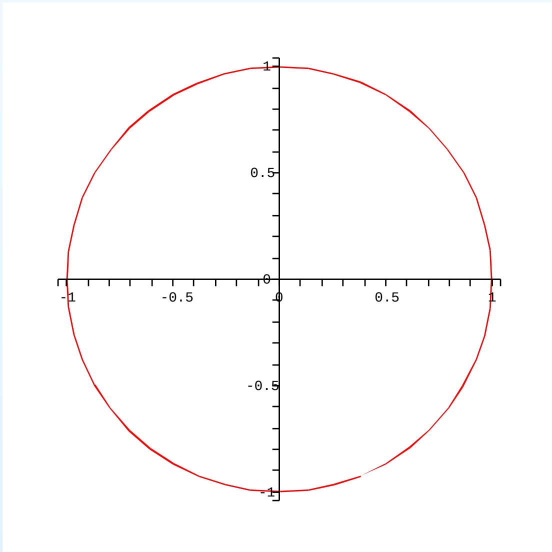
Maple:

Vypočteme délku křivky a nakreslíme si křivku.

```
> x:=sin(t): y:=cos(t):
> l:=int(sqrt(diff(x,t)^2+diff(y,t)^2),t=0..2*Pi);
```

$$l := 2\pi$$

```
> plot([sin(t), cos(t), t=0..2*Pi]);
```



Zpět

Příklad 9.2.2

Spočtěte délku l křivky dané parametrickými rovnicemi

$$\begin{aligned} x &= \cos t \\ y &= \sin t \\ t &\in \langle 0, 2\pi \rangle. \end{aligned}$$

Mathematica:

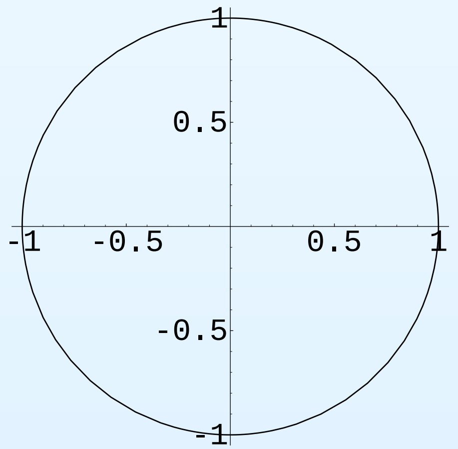
Vypočteme délku křivky a nakreslíme si křivku.

$\boldsymbol{x = \mathrm{Cos}[t]; y = \mathrm{Sin}[t];}$

$\boldsymbol{l = \mathrm{Integrate}[\mathrm{Sqrt}[D[x, t]\hat{}2 + D[y, t]\hat{}2], \{t, 0, 2\mathrm{Pi}\}]}$

2π

$\boldsymbol{\mathrm{ParametricPlot}[\{x, y\}, \{t, 0, 2 * \mathrm{Pi}\}, \mathrm{AspectRatio} \to 1];}$



Zpět

Příklad 9.2.3

Spočtěte délku l křivky dané parametrickými rovnicemi

$$\begin{aligned} x &= \cos^3 t \\ y &= \sin^3 t \\ t &\in \langle 0, 2\pi \rangle . \end{aligned}$$

? Zpět

Příklad 9.2.3

Spočtěte délku l křivky dané parametrickými rovnicemi

$$\begin{aligned} x &= \cos^3 t \\ y &= \sin^3 t \\ t &\in \langle 0, 2\pi \rangle. \end{aligned}$$

Výsledek:

Délka je $l = 6$, tato křivka se nazývá asteroida.

Zpět

Příklad 9.2.3

Spočtěte délku l křivky dané parametrickými rovnicemi

$$\begin{array}{rcl} x & = & \cos^3 t \\ y & = & \sin^3 t \\ t & \in & \langle 0, 2\pi \rangle. \end{array}$$

Návod:

Použijte vztah

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x')^2 + (y')^2}\, \mathrm{d}t.$$

Zpět

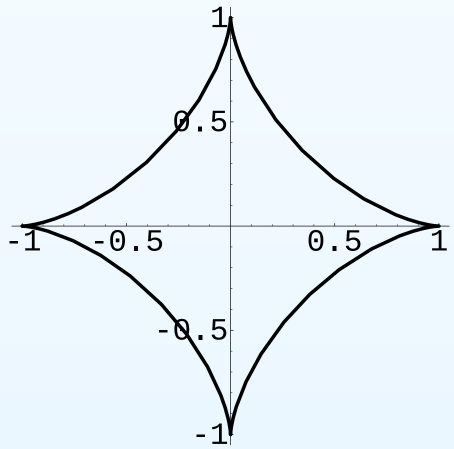
Příklad 9.2.3

Spočtěte délku l křivky dané parametrickými rovnicemi

$$\begin{aligned} x &= \cos^3 t \\ y &= \sin^3 t \\ t &\in \langle 0, 2\pi \rangle. \end{aligned}$$

Řešení:

Nejdříve si křivku nakreslíme.



$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{(x')^2 + (y')^2}\ \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-3\cos^2 t \sin t)^2 + (3\sin^2 t \cos t)^2}\ \mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{9\cos^4 t \sin^2 t + 9\sin^4 t \cos^2 t}\ \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \sqrt{9\cos^2 t \sin^2 t\ (\cos^2 t + \sin^2 t)}\ \mathrm{d}t =$$

Další

Příklad 9.2.3

Spočtěte délku l křivky dané parametrickými rovnicemi

$$\begin{aligned} x &= \cos^3 t \\ y &= \sin^3 t \\ t &\in \langle 0, 2\pi \rangle. \end{aligned}$$

Řešení:

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{9\cos^2 t \sin^2 t}\ \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} |3\cos t \sin t|\, dt = \frac{3}{2}\int_0^{2\pi} |2\cos t \sin t|\ \mathrm{d}t =$$

$$= \frac{3}{2}\int_0^{2\pi} |\sin 2t|\ \mathrm{d}t = 6.$$

Zpět

Příklad 9.2.3

Spočtěte délku l křivky dané parametrickými rovnicemi

$$\begin{aligned} x &= \cos^3 t \\ y &= \sin^3 t \\ t &\in \langle 0, 2\pi \rangle. \end{aligned}$$

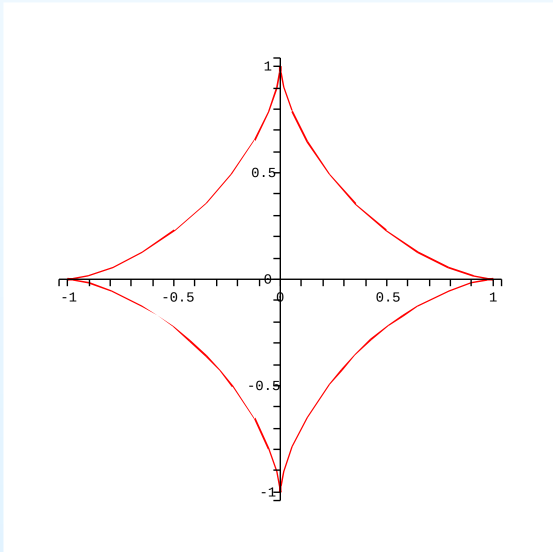
Maple:

Vypočteme délku křivky a nakreslíme si křivku.

```
> x:=sin(t)^3: y:=cos(t)^3:
> l:=int(sqrt(diff(x,t)^2+diff(y,t)^2),t=0..2*Pi);
```

$$l := 6$$

```
> plot([sin(t)^3, cos(t)^3, t=0..2*Pi]);
```



Zpět

Příklad 9.2.3

Spočtěte délku l křivky dané parametrickými rovnicemi

$$\begin{aligned} x &= \cos^3 t \\ y &= \sin^3 t \\ t &\in \langle 0, 2\pi \rangle. \end{aligned}$$

Mathematica:

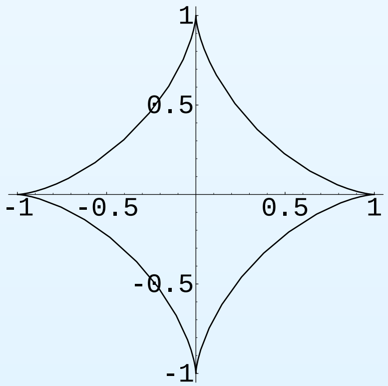
Vypočteme délku křivky a nakreslíme si křivku.

x = Cos[t]^3; y = Sin[t]^3;

l = Integrate[Sqrt[D[x, t]^2 + D[y, t]^2], {t, 0, 2Pi}]

6

ParametricPlot[{x, y}, {t, 0, 2 * Pi}, AspectRatio → 1];



Zpět

Objem rotačního tělesa

- Příklad 9.3.1 Určete objem V rotačního tělesa vzniklého rotací plochy ohraničené grafem funkce $y = x^{\frac{3}{2}},\ x \in \langle 0, 4 \rangle$ okolo osy x.
- Příklad 9.3.2 Určete objem V rotačního tělesa vzniklého rotací plochy, která je ohraničená grafy funkcí $y = \sqrt{1 - x^2},\ y = 1 - x$ okolo osy x.

Zpět

Příklad 9.3.1

Určete objem V rotačního tělesa vzniklého rotací plochy ohraničené grafem funkce $y = x^{\frac{3}{2}},\ x \in \langle 0, 4 \rangle$ okolo osy x.

? Zpět

Příklad 9.3.1

Určete objem V rotačního tělesa vzniklého rotací plochy ohraničené grafem funkce $y = x^{\frac{3}{2}}, \; x \in \langle 0, 4 \rangle$ okolo osy x.

Výsledek:

Objem je $V = 64\pi$.

Zpět

Příklad 9.3.1

Určete objem V rotačního tělesa vzniklého rotací plochy ohraničené grafem funkce $y = x^{\frac{3}{2}}, \; x \in \langle 0, 4 \rangle$ okolo osy x.

Návod:

Použijte vztah

$$V = \pi \int_a^b y^2 \, \mathrm{d}x.$$

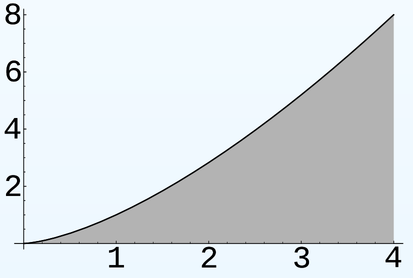
Zpět

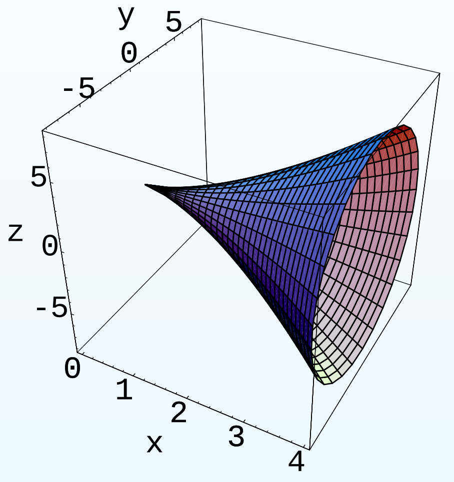
Příklad 9.3.1

Určete objem V rotačního tělesa vzniklého rotací plochy ohraničené grafem funkce $y = x^{\frac{3}{2}}$, $x \in \langle 0, 4 \rangle$ okolo osy x.

Řešení:

Nakreslíme si plochu, která rotuje a rotační těleso jehož objem počítáme.





(

Nyní vypočteme objem rotačního tělesa.

$$V = \pi \int_0^4 y^2 \, \mathrm{d}x = \pi \int_0^4 x^3 \, \mathrm{d}x = \pi \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^4 = 64\pi \, .$$

Zpět

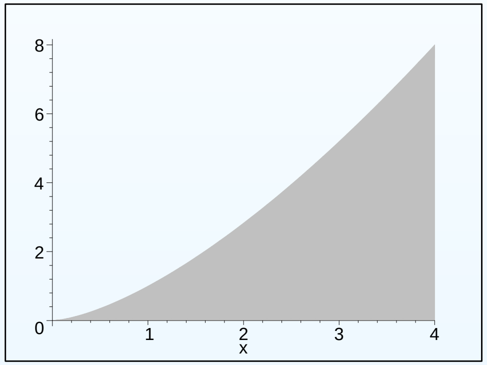
Příklad 9.3.1

Určete objem V rotačního tělesa vzniklého rotací plochy ohraničené grafem funkce $y = x^{\frac{3}{2}}$, $x \in \langle 0, 4\rangle$ okolo osy x.

Maple:

Nejdříve nakreslíme plochu, která rotuje.

```
> plot([0,x^(3/2)],x=0..4,filled=true,color=[white,grey]);
```



Nyní vypočteme objem tělesa.

```
> y:=x^(3/2):
> v:=int(Pi*y^2,x=0..4);
```

$$v := 64\,\pi$$

Zpět

Příklad 9.3.1

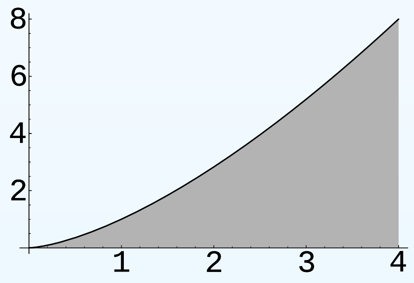
Určete objem V rotačního tělesa vzniklého rotací plochy ohraničené grafem funkce $y = x^{\frac{3}{2}}$, $x \in \langle 0, 4 \rangle$ okolo osy x.

Mathematica:

Nejdříve nakreslíme plochu, která rotuje.

<< Graphics`FilledPlot`

FilledPlot[x^(3/2), {x, 0, 4},Fills → {{{Axis, 1}, GrayLevel[.7]}}];



Nyní vypočteme objem tělesa.

y = x^(3/2);

v = Integrate[Pi y^2, {x, 0, 4}]

64π

Zpět

Příklad 9.3.2

Určete objem V rotačního tělesa vzniklého rotací plochy, která je ohraničená grafy funkcí $y = \sqrt{1-x^2}$, $y = 1 - x$ okolo osy x.

? Zpět

Příklad 9.3.2

Určete objem V rotačního tělesa vzniklého rotací plochy, která je ohraničená grafy funkcí $y = \sqrt{1 - x^2}$, $y = 1 - x$ okolo osy x.

Výsledek:

$\frac{\pi}{3}$.

Zpět

Příklad 9.3.2

Určete objem V rotačního tělesa vzniklého rotací plochy, která je ohraničená grafy funkcí $y = \sqrt{1 - x^2}$, $y = 1 - x$ okolo osy x.

Návod:

Objem se v daném případě vypočte podle vzorce:

$$V = \pi \int_0^1 1 - x^2 \ \mathrm{d}x \ - \ \pi \int_0^1 (1 - x)^2 \ \mathrm{d}x \, .$$

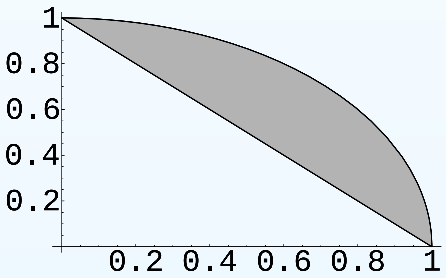
Zpět

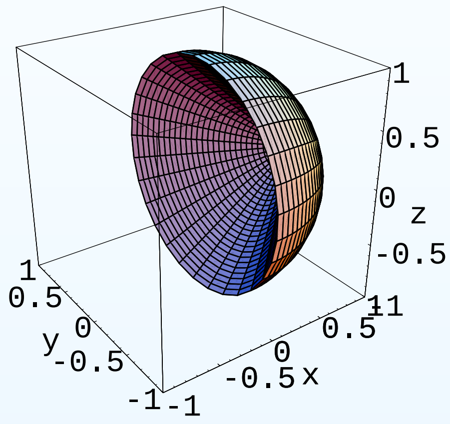
Příklad 9.3.2

Určete objem V rotačního tělesa vzniklého rotací plochy, která je ohraničená grafy funkcí $y = \sqrt{1-x^2}$, $y = 1 - x$ okolo osy x.

Řešení:

Nakreslíme si plochu, která rotuje a rotační těleso jehož objem počítáme.





Nyní vypočteme objem rotačního tělesa.

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^1 1 - x^2 \, \mathrm{d}x - \pi \int_0^1 (1-x)^2 \, \mathrm{d}x = \pi \left(\left[x - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 - \left[x - x^2 + \frac{x^3}{3} \right]_0^1 \right) \\ &= \pi \left(1 - \frac{1}{3} - (1 - 1 + \frac{1}{3} \right) = \frac{\pi}{3} \,. \end{aligned}$$

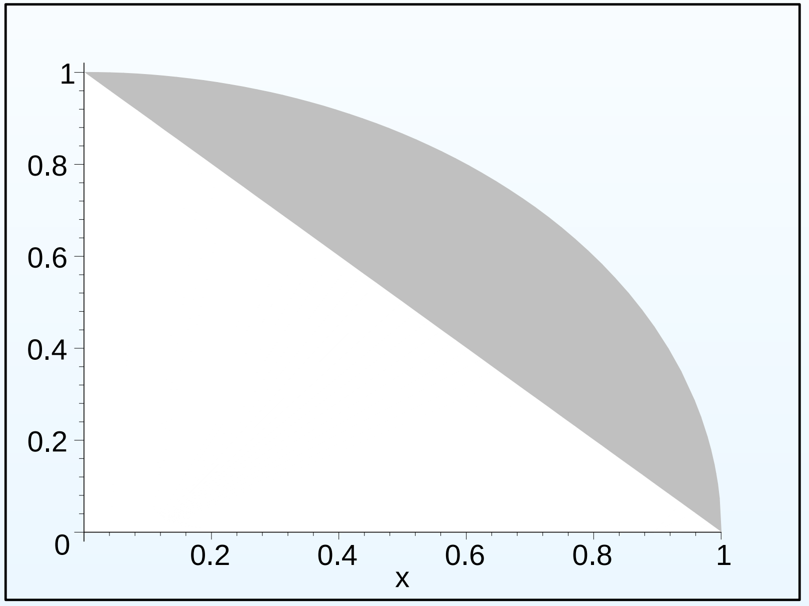
Zpět

Příklad 9.3.2

Určete objem V rotačního tělesa vzniklého rotací plochy, která je ohraničená grafy funkcí $y = \sqrt{1-x^2}$, $y = 1-x$ okolo osy x.

Maple:

```
> plot([1-x,sqrt(1-x^2)],x=0..1,filled=true,color=[white,grey]);
```




```
> V:=Pi*int(1-x^2,x=0..1)-Pi*int((1-x)^2,x=0..1);
```

$$V := \frac{\pi}{3}$$

Zpět

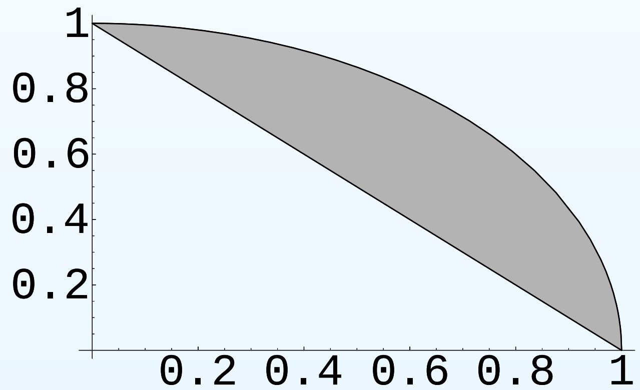
Příklad 9.3.2

Určete objem V rotačního tělesa vzniklého rotací plochy, která je ohraničená grafy funkcí $y = \sqrt{1 - x^2}$, $y = 1 - x$ okolo osy x.

Mathematica:

<< Graphics\`FilledPlot\`

FilledPlot[{Sqrt[1 − x^2], 1 − x}, {x, 0, 1},
Fills → {{{1, 2}, GrayLevel[.7]}}];



V = Pi Integrate[1 − x^2, {x, 0, 1}]−
Pi Integrate[(1 − x)^2, {x, 0, 1}]

$\frac{\pi}{3}$

Zpět

Fyzikální aplikace

- **Příklad 9.4.1** Určete práci, kterou je třeba vykonat pro přenesení vaší milé (vašeho milého) z povrchu Země do nekonečna, uvažujeme-li pouze gravitační pole Země.

Zpět

Příklad 9.4.1

Určete práci, kterou je třeba vykonat pro přenesení vaší milé (vašeho milého) z povrchu Země do nekonečna, uvažujeme-li pouze gravitační pole Země.

? Zpět

Příklad 9.4.1

Určete práci, kterou je třeba vykonat pro přenesení vaší milé (vašeho milého) z povrchu Země do nekonečna, uvažujeme-li pouze gravitační pole Země.

Výsledek:

Označíme-li si hmotnost Země $M \doteq 6{,}0 \times 10^{24}$ kg, hmotnost přenášené osoby $m = 60$ kg, poloměr Země $R \doteq 6{,}4 \times 10^{6}$ m a Newtonovu gravitační konstantu $\kappa \doteq 6{,}7 \times 10^{-11}$ m^{2}Nkg^{-2}, je práce

$$W = \frac{\kappa M m}{R} \doteq 3{,}8 \times 10^{9} \text{ J}.$$

Zpět

Příklad 9.4.1

Určete práci, kterou je třeba vykonat pro přenesení vaší milé (vašeho milého) z povrchu Země do nekonečna, uvažujeme-li pouze gravitační pole Země.

Návod:

Označíme-li si hmotnost Země $M \doteq 6{,}0 \times 10^{24}$ kg, hmotnost přenášené osoby $m = 60$ kg, poloměr Země $R \doteq 6{,}4 \times 10^{6}$ m a Newtonovu gravitační konstantu $\kappa \doteq 6{,}7 \times 10^{-11}\ \mathrm{m^2Nkg^{-2}}$, je podle Newtonova gravitačního zákona přitažlivá gravitační síla F, kterou musíme překonávat, rovna

$$F = \frac{\kappa M m}{x^2},$$

kde x je vzdálenost od středu Země. Mechanická práce W je pak integrál této síly .

Zpět

Příklad 9.4.1

Určete práci, kterou je třeba vykonat pro přenesení vaší milé (vašeho milého) z povrchu Země do nekonečna, uvažujeme-li pouze gravitační pole Země.

Řešení:

Označíme-li si hmotnost Země $M \doteq 6{,}0 \times 10^{24}$ kg, hmotnost přenášené osoby $m = 60$ kg, poloměr Země $R \doteq 6{,}4 \times 10^{6}$ m a Newtonovu gravitační konstantu
$\kappa \doteq 6{,}7 \times 10^{-11}$ m^{2}Nkg^{-2}, je podle Newtonova gravitačního zákona přitažlivá gravitační síla F, kterou musíme překonávat, rovna

$$F = \frac{\kappa M m}{x^2},$$

kde x je vzdálenost od středu Země. Mechanická práce W je pak integrál této síly

$$W = \int\limits_R^\infty F\,dx = \int\limits_R^\infty \frac{\kappa M m}{x^2}\,dx = \kappa M m \Big[-\frac{1}{x} \Big]_R^\infty = \frac{\kappa M m}{R} \doteq 3{,}8 \times 10^{9}.$$

Zpět

Příklad 9.4.1

Určete práci, kterou je třeba vykonat pro přenesení vaší milé (vašeho milého) z povrchu Země do nekonečna, uvažujeme-li pouze gravitační pole Země.

Maple:

Nejdříve vypočteme vzorec pro práci.

```
> unassign('r','x','k','M','m');
> f:=k*M*m/x^2;
```

$$f := \frac{k\,M\,m}{x^2}$$

```
> w:=int(f,x=r..infinity) assuming r>0;
```

$$w := \frac{k\,M\,m}{r}$$

Nyní dosadíme konstanty.

```
> k:=6.7e-11: M:=6e24: m:=60: r:=6.4e6:
> w;
```

$$3768750000.0$$

Zpět

Příklad 9.4.1

Určete práci, kterou je třeba vykonat pro přenesení vaší milé (vašeho milého) z povrchu Země do nekonečna, uvažujeme-li pouze gravitační pole Země.

Mathematica:

Nejdříve vypočteme vzorec pro práci.

$\boldsymbol{f = k * M * m/x\hat{}2;}$

$\boldsymbol{w = \textbf{Integrate}[f, \{x, r, \textbf{Infinity}\}]}$

$\frac{k\,m\,M}{r}$

Nyní dosadíme konstanty.

$\boldsymbol{k = 6.7 * 10\hat{} - 11; M = 6 * 10\hat{}24; m = 60; r = 6.4 * 10\hat{}6;}$

$\boldsymbol{w}$

3.76875×10^{9}

Zpět

Dvojný a trojný integrál

Zpět

Výpočet dvojného integrálu

- Příklad 10.1.1 Zaměňte pořadí integrace dvojnásobného integrálu
$$\int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{x}} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$$
- Příklad 10.1.2 Zaměňte pořadí integrace dvojnásobného integrálu
$$\int_0^1 \left(\int_0^{x} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x + \int_1^2 \left(\int_0^{2-x} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$$
- Příklad 10.1.3 Vypočtěte dvojný integrál $\iint\limits_M x\,y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde $M \in \mathbb{R}^2$ je množina ohraničená grafy funkcí $y = 2 - x^2$ a $y = -x$.
- Příklad 10.1.4 Vypočtěte dvojný integrál $\iint\limits_M x\,y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde $M \in \mathbb{R}^2$ je množina ohraničená grafy funkcí $y = 2 - x^2$ a $y = |x|$.

Zpět

Příklad 10.1.1

Zaměňte pořadí integrace dvojnásobného integrálu $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{x}} f(x, y)\, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$

? Zpět

Příklad 10.1.1

Zaměňte pořadí integrace dvojnásobného integrálu $\int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^{\sqrt{x}} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right)\,\mathrm{d}x.$

Výsledek:

$$\int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^{\sqrt{x}} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_{y^2}^{1} f(x,y)\,\mathrm{d}x \right)\,\mathrm{d}y\,.$$

Zpět

Příklad 10.1.1

Zaměňte pořadí integrace dvojnásobného integrálu $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{x}} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$

Návod:

Převeďte nejdříve na dvojný integral $\displaystyle\iint_G f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$. Nakreslete si obrázek množiny G a napište integrál pomocí dvojnásobného integrálu se záměnou integrace.

Zpět

Příklad 10.1.1

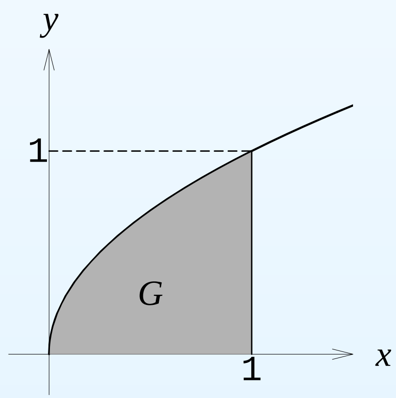
Zaměňte pořadí integrace dvojnásobného integrálu $\int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^{\sqrt{x}} f(x,y)\, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$

Řešení:

Za předpokladu, že funkce f je na množině G určené nerovnicemi

$$0 \leq x \leq 1\,,\ 0 \leq y \leq \sqrt{x}$$

(viz obrázek) spojitá, daný integrál se rovná dvojnému integrálu $\iint\limits_G f(x,y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y.$



Množinu G můžeme však popsat i nerovnicemi $0 \leq y \leq 1\,,\ y^2 \leq x \leq 1$, platí tedy

$$\int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^{\sqrt{x}} f(x,y)\, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_{y^2}^{1} f(x,y)\, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y\,.$$

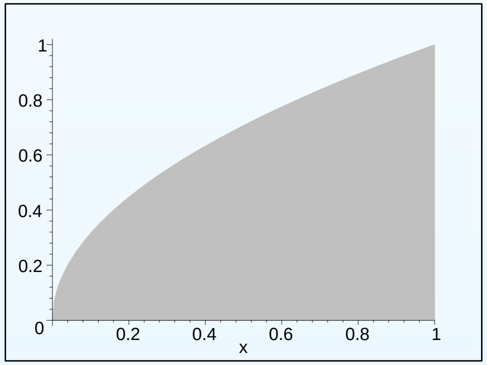
Příklad 10.1.1

Zaměňte pořadí integrace dvojnásobného integrálu $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{x}} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$

Maple:

V tomto příkladě si můžeme pouze zakreslit množinu přes kterou integrujeme, záměnu integrace si musíme udělat sami. Nejdříve si nakreslíme množinu přes kterou integrujeme

```
> plot([0,sqrt(x)],x=0..1,filled=true,color=[white,grey]);
```



Vyjádříme si hranici množiny jako x v závislosti na y

```
> solve(y=sqrt(x),x);
```

$$y^2$$

Nyní zaměníme pořadí integrace

```
> Int(Int(f(x,y),y=0..sqrt(x)),x=0..1)=Int(Int(f(x,y),x=y^2..1),y=0..1)
;
```

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{x}} \mathrm{f}(x,\ y)\, dy\, dx = \int_0^1 \int_{y^2}^1 \mathrm{f}(x,\ y)\, dx\, dy$$

Příklad 10.1.1

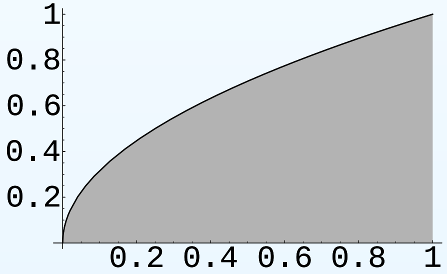
Zaměňte pořadí integrace dvojnásobného integrálu $\int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^{\sqrt{x}} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$

Mathematica:

V tomto příkladě si můžeme pouze zakreslit množinu přes kterou integrujeme, zaměnu integrace si musíme udělat sami. Nejdříve si nakreslíme množinu přes kterou integrujeme

<< Graphics`FilledPlot`

FilledPlot[Sqrt[x], {x, 0, 1},Fills → {{{Axis, 1}, GrayLevel[.7]}}];



Vyjádříme si hranici množiny jako x v závislosti na y

Solve[y == Sqrt[x], x]

$\{\{x \to y^2\}\}$

Nyní zaměníme pořadí integrace

Integrate[f[x, y], {x, 0, 1}, {y, 0, Sqrt[x]}]==Integrate[f[x, y], {y, 0, 1}, {x, y^2, 1}]

$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{x}} f[x,y]dydx == \int_0^1 \int_{y^2}^1 f[x,y]dxdy$

Zpět

Příklad 10.1.2

Zaměňte pořadí integrace dvojnásobného integrálu

$$\int_0^1 \left(\int_0^x f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x + \int_1^2 \left(\int_0^{2-x} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$$

? Zpět

Příklad 10.1.2

Zaměňte pořadí integrace dvojnásobného integrálu

$$\int_0^1 \left(\int_0^x f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \,\mathrm{d}x + \int_1^2 \left(\int_0^{2-x} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \,\mathrm{d}x.$$

Výsledek:

$$\int_0^1 \left(\int_0^x f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \,\mathrm{d}x + \int_1^2 \left(\int_0^{2-x} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\int_y^{2-y} f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \,\mathrm{d}y\,.$$

Zpět

Příklad 10.1.2

Zaměňte pořadí integrace dvojnásobného integrálu

$$\int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^x f(x,y)\,\mathrm{d}y \right)\,\mathrm{d}x + \int\limits_1^2 \left(\int\limits_0^{2-x} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right)\,\mathrm{d}x.$$

Návod:

Převeďte nejdříve na dvojný integral $\iint\limits_G f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$. Nakreslete si obrázek množiny G a napište integrál pomocí dvojnásobného integrálu se záměnou integrace.

Zpět

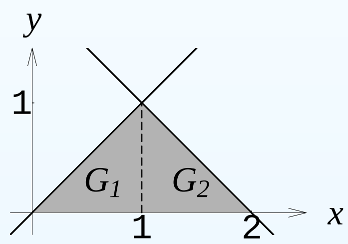
Příklad 10.1.2

Zaměňte pořadí integrace dvojnásobného integrálu

$$\int_0^1 \left(\int_0^x f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x + \int_1^2 \left(\int_0^{2-x} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$$

Řešení:

Předpokladejme, že funkce f je na množině G spojitá. $G = G_1 \cup G_2$, kde $G1$ je určená nerovnicemi $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le x$ a G_2 je určená nerovnicemi $1 \le x \le 2$, $0 \le y \le 2-x$ (viz obrázek).



Součet daných dvojnásobných integrálů se rovná dvojnému integrálu $\iint\limits_G f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

Množinu G můžeme však popsat i nerovnicemi $0 \le y \le 1$, $y \le x \le 2-y$, platí tedy

$$\int_0^1 \left(\int_0^x f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x + \int_1^2 \left(\int_0^{2-x} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\int_y^{2-y} f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y\,.$$

Zpět

Příklad 10.1.2

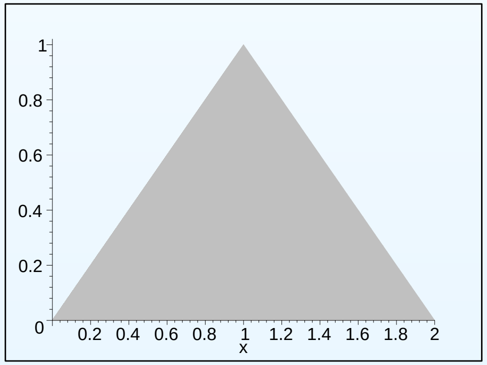
Zaměňte pořadí integrace dvojnásobného integrálu

$$\int_0^1 \left(\int_0^x f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x + \int_1^2 \left(\int_0^{2-x} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$$

Maple:

V tomto příkladě si můžeme pouze zakreslit množinu přes kterou integrujeme, záměnu integrace si musíme udělat sami. Nejdříve si nakreslíme množinu G_1 potom G_2, množina přes kterou integrujeme je $G = G_1 \cup G_2$.

```
> G2:=plot([0,2-x],x=1..2,filled=true,color=[white,grey]):
> plots[display](G1,G2);
```



Nyní zaměníme pořadí intagrace

```
> Int(Int(f(x,y),y=0..x),x=0..1)+Int(Int(f(x,y),y=0..2-x),x=1..2)=Int(I
nt(f(x,y),x=y..2-y),y=0..1);
```

$$\int_0^1 \int_0^x \mathrm{f}(x,\ y)\, dy\, dx + \int_1^2 \int_0^{2-x} \mathrm{f}(x,\ y)\, dy\, dx = \int_0^1 \int_y^{2-y} \mathrm{f}(x,\ y)\, dx\, dy$$

Zpět

Příklad 10.1.2

Zaměňte pořadí integrace dvojnásobného integrálu

$$\int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^x f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x + \int\limits_1^2 \left(\int\limits_0^{2-x} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$$

Mathematica:

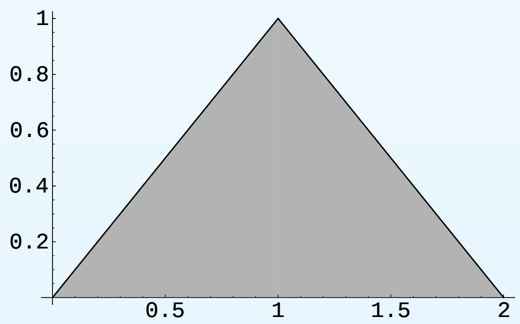
V tomto příkladě si můžeme pouze zakreslit množinu přes kterou integrujeme, zaměnu integrace si musíme udělat sami. Nejdříve si nakreslíme množinu G_1 potom G_2, množina přes kterou integrujeme je $G = G_1 \cup G_2$.

<< Graphics`FilledPlot`

G1 = FilledPlot[x, {x, 0, 1}, Fills → {{{Axis, 1}, GrayLevel[.7]}},DisplayFunction → Identity];

G2 = FilledPlot[2 − x, {x, 1, 2}, Fills → {{{Axis, 1}, GrayLevel[.7]}},DisplayFunction → Identity];

Show[{G1, G2}, DisplayFunction → $DisplayFunction];



Nyní zaměníme pořadí intagrace

Integrate[f[x, y], {x, 0, 1}, {y, 0, x}]+Integrate[f[x, y], {x, 1, 2}, {y, 0, 2 − x}]==
Integrate[f[x, y], {y, 0, 1}, {x, y, 2 − y}]

$\int_0^1 \int_0^x f[x,y]dydx + \int_1^2 \int_0^{2-x} f[x,y]dydx == \int_0^1 \int_y^{2-y} f[x,y]dxdy$

Zpět

Příklad 10.1.3

Vypočtěte dvojný integrál $\iint\limits_M x\,y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde $M \in \mathbb{R}^2$ je množina ohraničená grafy funkcí $y = 2 - x^2$ a $y = -x$.

? Zpět

Příklad 10.1.3

Vypočtěte dvojný integrál $\iint\limits_M x\,y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde $M \in \mathbb{R}^2$ je množina ohraničená grafy funkcí $y = 2 - x^2$ a $y = -x$.

Výsledek:

$$-\frac{9}{8}\,.$$

Zpět

Příklad 10.1.3

Vypočtěte dvojný integrál $\iint\limits_M x\,y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde $M \in \mathbb{R}^2$ je množina ohraničená grafy funkcí $y = 2 - x^2$ a $y = -x$.

Návod:

Nakreslete si obrázek množiny M. Protože funkce $f(x, y) = x\,y$ je spojitá na množině M, můžeme napsat integrál pomocí dvojnásobného integrálu.

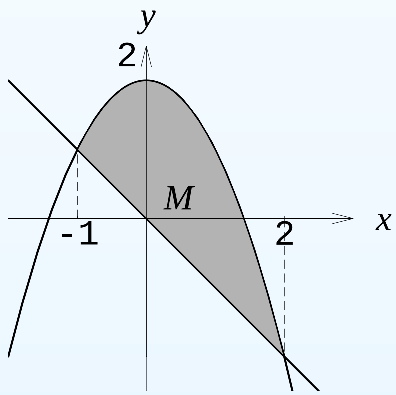
Zpět

Příklad 10.1.3

Vypočtěte dvojný integrál $\iint\limits_M x\,y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde $M \in \mathbb{R}^2$ je množina ohraničená grafy funkcí $y = 2 - x^2$ a $y = -x$.

Řešení:

Vypočteme si společné body funkcí $y = -x$ a $y = 2 - x^2$. Rovnice $-x = 2 - x^2$ má řešení $x_1 = -1$ a $x_2 = 2$. Nyní nakreslíme množinu M,
$M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; = -1 \le x \le 2\,,\ -x \le y \le 2 - x^2\}$ (viz obrázek).



Protože funkce $f(x, y) = x\,y$ je spojitá na množině M, můžeme napsat integrál pomocí dvojnásobného integrálu.

$$\iint\limits_M x\,y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-1}^{2}\left(\int_{-x}^{2-x^2} x\,y\ \mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{2}\left[\frac{x\,y^2}{2}\right]_{-x}^{2-x^2}\mathrm{d}x =$$

$$= \int_{-1}^{2}\left(2\,x - \frac{5\,x^3}{2} + \frac{x^5}{2}\right)\mathrm{d}x = \left[x^2 - \frac{5\,x^4}{8} + \frac{x^6}{12}\right]_{-1}^{2} = -\frac{2}{3} - \left(\frac{11}{24}\right) = -\frac{9}{8}\,.$$

Příklad 10.1.3

Vypočtěte dvojný integrál $\iint\limits_M x\,y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde $M \in \mathbb{R}^2$ je množina ohraničená grafy funkcí $y = 2 - x^2$ a $y = -x$.

Maple:

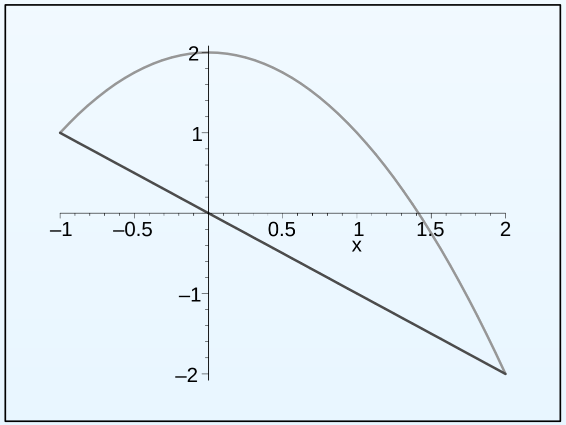
Vypočteme si společné body funkcí $y = -x$ a $y = 2 - x^2$.

```
> solve(-x=2-x^2,x);
```

$$2,\ -1$$

Nakreslíme grafy funkcí $y = -x$ a $y = 2 - x^2$ pro $x \in \langle -1, 2\rangle$.

```
> plot([-x,2-x^2],x=-1..2);
```



Protože funkce $f(x, y) = x\,y$ je spojitá na množině M, můžeme napsat integrál pomocí dvojnásobného integrálu.

```
> Int(Int(x*y,y=-x..2-x^2),x=-1..2)=int(int(x*y,y=-x..2-x^2),x=-1..2);
```

$$\int_{-1}^{2}\int_{-x}^{2-x^2} x\,y\,dy\,dx = \frac{-9}{8}$$

Zpět

Příklad 10.1.3

Vypočtěte dvojný integrál $\iint\limits_M x\,y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde $M \in \mathbb{R}^2$ je množina ohraničená grafy funkcí $y = 2 - x^2$ a $y = -x$.

Mathematica:

Vypočteme si společné body funkcí $y = -x$ a $y = 2 - x^2$.

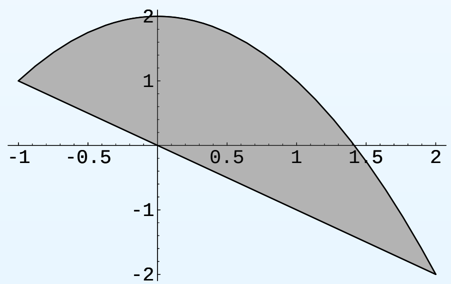
Solve[−x == 2 − x^2, x]

$\{\{x \to -1\}, \{x \to 2\}\}$

Nakreslíme si množinu M.

<< Graphics`FilledPlot`

FilledPlot[{−x, 2 − x^2}, {x, −1, 2}, Fills → {{{1, 2}, GrayLevel[.7]}}];



Protože funkce $f(x, y) = x\,y$ je spojitá na množině M, můžeme napsat integrál pomocí dvojnásobného integrálu.

Integrate[xy, {x, −1, 2}, {y, −x, 2 − x^2}]

$-\frac{9}{8}$

Zpět

Příklad 10.1.4

Vypočtěte dvojný integrál $\iint\limits_M x\,y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde $M \in \mathbb{R}^2$ je množina ohraničená grafy funkcí $y = 2 - x^2$ a $y = |x|$.

? Zpět

Příklad 10.1.4

Vypočtěte dvojný integrál $\iint\limits_M x\,y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde $M \in \mathbb{R}^2$ je množina ohraničená grafy funkcí $y = 2 - x^2$ a $y = |x|$.

Výsledek:

$\frac{76}{15}$.

Zpět

Příklad 10.1.4

Vypočtěte dvojný integrál $\displaystyle\iint\limits_M x\,y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde $M \in \mathbb{R}^2$ je množina ohraničená grafy funkcí $y = 2 - x^2$ a $y = |x|$.

Návod:

Nakreslete si obrázek množiny M. Protože funkce $f(x, y) = x\,y$ je spojitá na množině M, můžeme napsat integrál pomocí dvojnásobného integrálu. Integrál musíme rozdělit na dva integrály, přes množinu M_1 a přes množinu M_2, kde $M = M_1 \cup M_2$.

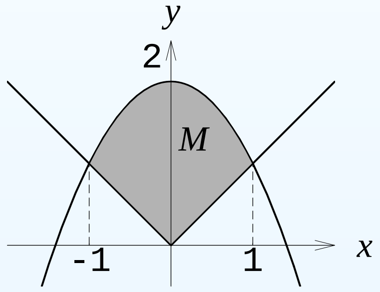
Zpět

Příklad 10.1.4

Vypočtěte dvojný integrál $\iint\limits_M x\,y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde $M \in \mathbb{R}^2$ je množina ohraničená grafy funkcí $y = 2 - x^2$ a $y = |x|$.

Řešení:

Vypočteme si společné body funkcí $y = |x|$ a $y = 2 - x^2$. Rovnice $|x| = 2 - x^2$ má řešení $x_1 = -1$ a $x_2 = 1$. Nyní nakreslíme množinu M,
$M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; = -1 \le x \le 1\,,\ |x| \le y \le 2 - x^2\}$ (viz obrázek).



Protože funkce $f(x, y) = x\,y$ je spojitá na množině M, můžeme napsat integrál pomocí dvojnásobného integrálu. Integrál musíme nejdřív rozdělit na dva integrály, přes množinu M_1 a přes množinu M_2, kde $M = M_1 \cup M_2$.

$$M_1 = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; = -1 \le x \le 0\,,\ -x \le y \le 2 - x^2\}$$

a

$$M_2 = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; = 0 \le x \le 1\,,\ x \le y \le 2 - x^2\}$$

Další

Příklad 10.1.4

Vypočtěte dvojný integrál $\iint\limits_M x\,y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde $M \in \mathbb{R}^2$ je množina ohraničená grafy funkcí $y = 2 - x^2$ a $y = |x|$.

Řešení:

$$
\begin{aligned}
\iint\limits_M (x+2y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \iint\limits_{M_1} (x+2y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint\limits_{M_2} (x+2y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \\
&= \int_{-1}^{0} \left(\int_{-x}^{2-x^2} x + 2y \;\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x + \int_{0}^{1} \left(\int_{x}^{2-x^2} x + 2y \;\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \\
&= \int_{-1}^{0} \left[x\,y + y^2 \right]_{-x}^{2-x^2} \mathrm{d}x + \int_{0}^{1} \left[x\,y + y^2 \right]_{x}^{2-x^2} \mathrm{d}x = \\
&= \int_{-1}^{0} \left(4 + 2x - 4x^2 - x^3 + x^4 \right) \mathrm{d}x + \int_{0}^{1} \left(4 + 2x - 6x^2 - x^3 + x^4 \right) \mathrm{d}x = \\
&= \left[4x + x^2 - \frac{4x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} \right]_{-1}^{0} + \left[4x + x^2 - 2x^3 - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} \right]_{0}^{1} = \\
&= \frac{127}{60} + \frac{59}{20} = \frac{76}{15}\,.
\end{aligned}
$$

Příklad 10.1.4

Vypočtěte dvojný integrál $\iint\limits_M x\,y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde $M \in \mathbb{R}^2$ je množina ohraničená grafy funkcí $y = 2 - x^2$ a $y = |x|$.

Maple:

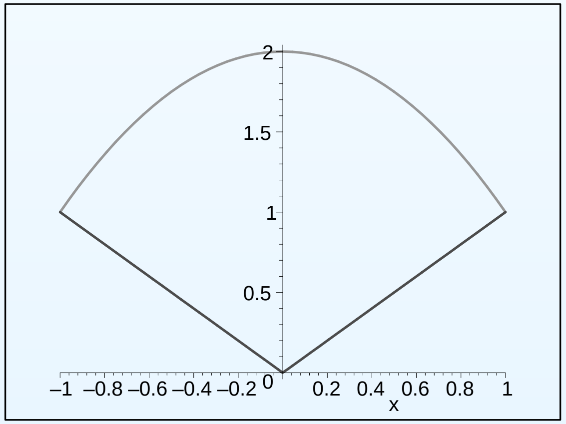
Vypočteme si společné body funkcí $y = |x|$ a $y = 2 - x^2$.

```
> solve(abs(x)=2-x^2,x);
```

$$1,\ -1$$

Nakreslíme si množinu M.

```
> plot([abs(x),2-x^2],x=-1..1);
```



Protože funkce $f(x,y) = x + 2y$ je spojitá na množině M, můžeme napsat integrál pomocí dvojnásobného integrálu.

```
> Int(Int(x+2*y,y=abs(x)..2-x^2),x=-1..1)=int(int(x+2*y,y=abs(x)..2-x^2
),x=-1..1);
```

$$\int_{-1}^{1}\int_{|x|}^{2-x^2} x + 2\,y\,dy\,dx = \frac{76}{15}$$

Zpět

Příklad 10.1.4

Vypočtěte dvojný integrál $\iint\limits_M x\,y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde $M \in \mathbb{R}^2$ je množina ohraničená grafy funkcí $y = 2 - x^2$ a $y = |x|$.

Mathematica:

Vypočteme si společné body funkcí $y = |x|$ a $y = 2 - x^2$.

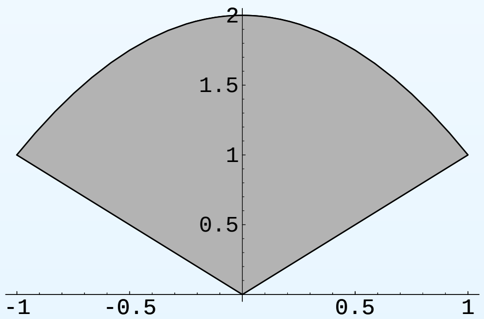
Solve[2 − x^2 == Abs[x], x]

$\{\{x \to -1\}, \{x \to 1\}\}$

Nakreslíme si množinu M.

<< Graphics`FilledPlot`

FilledPlot[{Abs[x], 2 − x^2}, {x, −1, 1},Fills → {{{1, 2}, GrayLevel[.7]}}];



Protože funkce $f(x, y) = x + 2y$ je spojitá na množině M, můžeme napsat integrál pomocí dvojnásobného integrálu.

Integrate[x + 2y, {x, −1, 1}, {y, Abs[x], 2 − x^2}]

$\frac{76}{15}$

Zpět

Substituční metoda pro dvojný integrál

- Příklad 10.2.1 Vypočtěte dvojný integrál $\iint\limits_M e^{x^2+y^2}\,dx\,dy$, kde $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; x^2+y^2 \le 4\}$.
- Příklad 10.2.2 Vypočtěte dvojný integrál $\iint\limits_M x\,y\,dx\,dy$, kde $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; 1 \le x^2+y^2 \le 4,\ x \ge 0,\ y \ge 0\}$.
- Příklad 10.2.3 Vypočtěte dvojný integrál $\iint\limits_M \frac{\ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\,dx\,dy$, kde $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; 1 \le x^2+y^2 \le e^2\}$.
- Příklad 10.2.4 Vypočtěte dvojný integrál $\iint\limits_M \sqrt{4-x^2-y^2}\,dx\,dy$, kde M je polovina kruhu, $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ (x-1)^2+y^2 \le 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0\}$.

Zpět

Příklad 10.2.1

Vypočtěte dvojný integrál $\iint\limits_M e^{x^2+y^2}\,dx\,dy$, kde $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 4\}$.

? Zpět

Příklad 10.2.1

Vypočtěte dvojný integrál $\displaystyle\iint\limits_M \mathrm{e}^{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; x^2+y^2 \le 4\}$.

Výsledek:

$\pi(\mathrm{e}^4 - 1)$.

Zpět

Příklad 10.2.1

Vypočtěte dvojný integrál $\iint\limits_M e^{x^2+y^2}\,dx\,dy$, kde $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; x^2+y^2 \leq 4\}$.

Návod:

Použijte substituci do polárních souřadnic.

$$\begin{aligned} x &= r\cos t\,, \quad r \in \langle 0, \infty) \\ y &= r\sin t\,, \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle\,. \end{aligned}$$

Zpět

Příklad 10.2.1

Vypočtěte dvojný integrál $\iint\limits_M \mathrm{e}^{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; x^2+y^2 \leq 4\}$.

Řešení:

Použijte substituci do polárních souřadnic.

$$\begin{aligned} x &= r\,\cos t\,, & r \in \langle 0, \infty) \\ y &= r\,\sin t\,, & t \in \langle 0, 2\pi\rangle\,. \end{aligned}$$

$$\iint\limits_M \mathrm{e}^{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_{\bar{M}} r\,\mathrm{e}^{r^2}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}t\,,$$

kde $\bar{M} = \{[r,t] \in \mathbb{R}^2\,;\ r \in \langle 0, 2\rangle\,,\ t \in \langle 0, 2\pi\rangle\}$.
Nyní vypočteme integrál po substituci.

$$\begin{aligned} \iint\limits_{\bar{M}} r\,\mathrm{e}^{r^2}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}t &= \int\limits_0^{2\pi}(\int\limits_0^2 r\,\mathrm{e}^{r^2}\,\mathrm{d}r)\,\mathrm{d}t = \int\limits_0^{2\pi}\left[\frac{1}{2}\mathrm{e}^{r^2}\right]_0^2\,\mathrm{d}t = \\ &= \int\limits_0^{2\pi}(\frac{1}{2}\mathrm{e}^4 - \frac{1}{2}\,\mathrm{d}t = 2\pi\frac{1}{2}(\mathrm{e}^4-1) = \pi(\mathrm{e}^4-1)\,. \end{aligned}$$

Zpět

Příklad 10.2.1

Vypočtěte dvojný integrál $\iint\limits_M \mathrm{e}^{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; x^2+y^2 \leq 4\}$.

Maple:

Substituci musíme provést sami, Maple nám spočítá integrál až po substituci.

```
>  int(int(r*exp(r^2),r=0..2),t=0..2*Pi);
```

$$e^4\,\pi - \pi$$

Zpět

Příklad 10.2.1

Vypočtěte dvojný integrál $\iint\limits_M \mathrm{e}^{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; x^2+y^2 \leq 4\}$.

Mathematica:

Substituci musíme provést sami, Mathematica nám spočítá integrál až po substituci.

Integrate[*r*Exp[*r*^2], {*t*, 0, 2Pi}, {*r*, 0, 2}]

$\left(-1+e^4\right)\pi$

Zpět

Příklad 10.2.2

Vypočtěte dvojný integrál $\iint\limits_M x\,y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde

$M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$.

? Zpět

Příklad 10.2.2

Vypočtěte dvojný integrál $\displaystyle\iint\limits_M x\,y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde

$M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; 1 \le x^2 + y^2 \le 4,\ x \ge 0,\ y \ge 0\}$.

Výsledek:

$\frac{15}{8}$.

Zpět

Příklad 10.2.2

Vypočtěte dvojný integrál $\displaystyle\iint\limits_M x\,y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde

$M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$.

Návod:

Použijte substituci do polárních souřadnic.

$$\begin{aligned} x &= r\,\cos t\,, \quad r \in \langle 0, \infty) \\ y &= r\,\sin t\,, \quad t \in \langle 0, 2\pi\rangle\,. \end{aligned}$$

Zpět

Příklad 10.2.2

Vypočtěte dvojný integrál $\iint\limits_M x\,y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde

$M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$.

Řešení:

Použijte substituci do polárních souřadnic.

$$\begin{aligned} x &= r\,\cos t\,, & r \in \langle 0, \infty) \\ y &= r\,\sin t\,, & t \in \langle 0, 2\pi\rangle\,. \end{aligned}$$

$$\iint\limits_M x\,y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_{\bar{M}} r^3\ \cos t\ \sin t\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}t\,,$$

kde $\bar{M} = \{[r, t] \in \mathbb{R}^2\,;\ r \in \langle 1, 2\rangle\,,\ t \in \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle\}$.
Nyní vypočteme integrál po substituci.

$$\begin{aligned} \iint\limits_{\bar{M}} r^3\ \cos t\ \sin t\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}t &= \iint\limits_{\bar{M}} r^3\,\frac{\sin 2t}{2}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}t = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\int\limits_1^2 r^3\,\frac{\sin 2t}{2}\,\mathrm{d}r)\,\mathrm{d}t = \\ &= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^4}{4}\,\frac{\sin 2t}{2}\right]_1^2 \mathrm{d}t = \int\limits_1^{\frac{\pi}{2}} \frac{15}{4}\,\frac{\sin 2t}{2}\,\mathrm{d}t = \int\limits_1^{\frac{\pi}{2}} \frac{15}{8} \sin 2t\,\mathrm{d}t = \\ &= \frac{15}{8}\left[-\frac{\cos 2t}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{15}{8}\left(-\frac{\cos\pi}{2} + \frac{\cos 0}{2}\right) = \frac{15}{8}\left(-\frac{-1}{2} + \frac{1}{2}\right) = \frac{15}{8}\,. \end{aligned}$$

Zpět

Příklad 10.2.2

Vypočtěte dvojný integrál $\iint\limits_M x\,y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde

$M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; 1 \le x^2 + y^2 \le 4,\ x \ge 0,\ y \ge 0\}$.

Maple:

Substituci musíme provést sami, Maple nám spočítá integrál až po substituci.

```
> int(int(r^3*cos(t)*sin(t),r=1..2),t=0..Pi/2);
```

$$\frac{15}{8}$$

Zpět

Příklad 10.2.2

Vypočtěte dvojný integrál $\iint\limits_M x\,y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde

$M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$.

Mathematica:

Substituci musíme provést sami, Mathematica nám spočítá integrál až po substituci.

Integrate[*r*^3Sin[*t*]Cos[*t*], {*t*, 0, Pi/2}, {*r*, 1, 2}]

$\frac{15}{8}$

Zpět

Příklad 10.2.3

Vypočtěte dvojný integrál $\displaystyle\iint\limits_M \frac{\ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde

$M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; 1 \leq x^2+y^2 \leq \mathrm{e}^2\}$.

? Zpět

Příklad 10.2.3

Vypočtěte dvojný integrál $\displaystyle\iint\limits_M \frac{\ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde

$M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; 1 \leq x^2 + y^2 \leq \mathrm{e}^2\}$.

Výsledek:

2π .

Zpět

Příklad 10.2.3

Vypočtěte dvojný integrál $\iint\limits_M \frac{\ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; 1 \le x^2+y^2 \le \mathrm{e}^2\}$.

Návod:

Použijte substituci do polárních souřadnic.

$$
\begin{aligned}
x &= r\cos t\,, \quad r \in \langle 0, \infty)\\
y &= r\sin t\,, \quad t \in \langle 0, 2\pi\rangle\,.
\end{aligned}
$$

Zpět

Příklad 10.2.3

Vypočtěte dvojný integrál $\displaystyle\iint_M \frac{\ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde $M = \{[x,y]\in\mathbb{R}^2; 1 \le x^2+y^2 \le \mathrm{e}^2\}$.

Řešení:

Použijte substituci do polárních souřadnic.

$$\begin{array}{rcll} x & = & r\,\cos t\,, & r\in\langle 0,\infty)\\ y & = & r\,\sin t\,, & t\in\langle 0,2\pi\rangle\,. \end{array}$$

$$\iint_M \frac{\ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{\bar M} \frac{\ln(r^2)}{r}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}t\,,$$

kde $\bar M = \{[r,t]\in\mathbb{R}^2\,;\ r\in\langle 1,\mathrm{e}\rangle\,,\ t\in\langle 0,2\pi\rangle\}$.
Nyní vypočteme integrál po substituci.

$$\iint_{\bar M} \frac{\ln(r^2)}{r}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi}\left(\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln(r^2)}{r}\,\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}t = \left|\begin{array}{ll} \text{substituce} & u=\ln r\\ \mathrm{d}u=\frac{1}{r}\,\mathrm{d}r & \\ \alpha=0 & \beta=1 \end{array}\right| =$$

$$= \int_0^{2\pi}\Big(\int_0^1 2\,u\,\mathrm{d}u\Big)\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi}\left[u^2\right]_0^1\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} 1\ \mathrm{d}t = 2\,\pi\,.$$

Zpět

Příklad 10.2.3

Vypočtěte dvojný integrál $\iint\limits_M \frac{\ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; 1 \le x^2+y^2 \le \mathrm{e}^2\}$.

Maple:

Substituci musíme provést sami, Maple nám spočítá integrál až po substituci.

```
> Int(Int(ln(r^2)/r,r=1..exp(1)),t=0..2*Pi)=int(int(ln(r^2)/r,r=1..exp(
1)),t=0..2*Pi);
```

$$\int_0^{2\,\pi}\int_1^{e}\frac{\ln(r^2)}{r}\,dr\,dt = 2\,\pi$$

Zpět

Příklad 10.2.3

Vypočtěte dvojný integrál $\displaystyle\iint\limits_M \frac{\ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde

$M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; 1 \leq x^2+y^2 \leq \mathrm{e}^2\}$.

Mathematica:

Substituci musíme provést sami, Mathematica nám spočítá integrál až po substituci.

Integrate[Log[r^2]/r, {t, 0, 2Pi}, {r, 1, E}]

2π

Zpět

Příklad 10.2.4

Vypočtěte dvojný integrál $\iint\limits_M \sqrt{4 - x^2 - y^2}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$, kde M je polovina kruhu,

$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ (x-1)^2 + y^2 \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}.$

?

Zpět

Příklad 10.2.4

Vypočtěte dvojný integrál $\iint\limits_M \sqrt{4 - x^2 - y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde M je polovina kruhu,

$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ (x-1)^2 + y^2 \le 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0\}$.

Výsledek:

$$\frac{8}{3}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\right).$$

Zpět

Příklad 10.2.4

Vypočtěte dvojný integrál $\iint\limits_M \sqrt{4 - x^2 - y^2}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$, kde M je polovina kruhu,

$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ (x-1)^2 + y^2 \le 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0\}$.

Návod:

Použijte substituci do polárních souřadnic.

$$\begin{aligned} x &= r\,\cos t\,, \quad r \in \langle 0, \infty) \\ y &= r\,\sin t\,, \quad t \in \langle 0, 2\pi\rangle\,. \end{aligned}$$

Hranice množiny M je částečně popsána kružnicí $(x-1)^2 + y^2 = 1$, tato kružnice má v polárních souřadnicích tvar $r = 2\,\cos t$.

Zpět

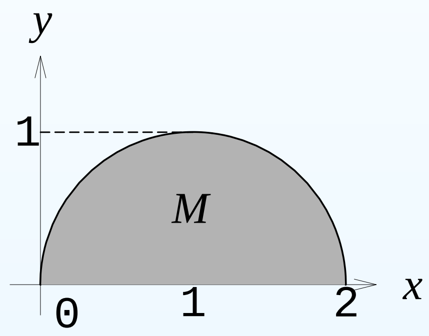
Příklad 10.2.4

Vypočtěte dvojný integrál $\iint\limits_M \sqrt{4-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde M je polovina kruhu,

$M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ (x-1)^2 + y^2 \le 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0\}$.

Řešení:

Nakreslíme si množinu M:



Použijeme substituci do polárních souřadnic.

$$\begin{aligned} x &= r\cos t\,, \quad r \in \langle 0, \infty) \\ y &= r\sin t\,, \quad t \in \langle 0, 2\pi\rangle\,. \end{aligned}$$

$$\iint\limits_M \sqrt{4-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_{\bar{M}} r\sqrt{4-r^2}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}t\,.$$

Hranice množiny M je částečně popsána kružnicí $(x-1)^2 + y^2 = 1$. Než určíme množinu $\bar{M}$, vyjádříme si kružnici $(x-1)^2 + y^2 = 1$ v polárních souřadnicích.

Další

Příklad 10.2.4

Vypočtěte dvojný integrál $\iint\limits_M \sqrt{4-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde M je polovina kruhu,

$M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ (x-1)^2 + y^2 \le 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0\}$.

Řešení:

$$\begin{aligned}
(x-1)^2 + y^2 &= 1\\
(r\,\cos t\,-\,1)^2\,+\,y^2 &= 1\\
r^2\,\cos^2 t\,-\,2\,r\,\cos t\,+\,1 + r^2\,\sin^2 t &= 1\\
r^2\,-\,2\,r\,\cos t &= 0 \qquad \text{vydělíme } r\\
r &= 2\,\cos t\,.
\end{aligned}$$

Množina $\bar{M} = \{[r,t] \in \mathbb{R}^2\,;\ r \in \langle 0, 2\,\cos t\rangle$ pro $t \in \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle\}$.
Nyní vypočteme integrál po substituci.

$$\begin{aligned}
\iint\limits_{\bar{M}} r\,\sqrt{4-r^2}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}t &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2\cos t} r\,\sqrt{4-r^2}\,\mathrm{d}r \right) \mathrm{d}t = \left| \begin{array}{ll} \text{substituce} & u = 4-r^2 \\ \mathrm{d}u = -2\,r\,\mathrm{d}r & \\ \alpha = 4 & \beta = 4\,\sin^2 t \end{array} \right| = \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big(\int_4^{4\sin^2 t} \left(-\frac{1}{2}\right) \sqrt{u}\,\mathrm{d}u \Big)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[-\frac{u^{\frac{3}{2}}}{3} \right]_4^{4\sin^2 t} \mathrm{d}t \\
&= \int_4^{\frac{\pi}{2}} \frac{8}{3}(1-\sin^3 t)\,\mathrm{d}t = \left[t + \frac{3\cos(t)}{4} - \frac{1}{12}\cos(3t) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{8}{3}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \right)\,.
\end{aligned}$$

Zpět

Příklad 10.2.4

Vypočtěte dvojný integrál $\iint\limits_M \sqrt{4 - x^2 - y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde M je polovina kruhu,

$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ (x-1)^2 + y^2 \le 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0\}$.

Maple:

Substituci musíme provést sami, Maple nám spočítá integrál až po substituci.

```
>  Int(Int(r*sqrt(4-r^2),r=0..2*cos(t)),t=0..Pi/2)=int(int(r*sqrt(4-r^2)
,r=0..2*cos(t)),t=0..Pi/2);
```

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\cos(t)} r\sqrt{4 - r^2}\,dr\,dt = \frac{4\,\pi}{3} - \frac{16}{9}$$

Zpět

Příklad 10.2.4

Vypočtěte dvojný integrál $\iint\limits_M \sqrt{4-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde M je polovina kruhu,

$M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ (x-1)^2 + y^2 \le 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0\}$.

Mathematica:

Substituci musíme provést sami, Mathematica nám spočítá integrál až po substituci.

Integrate[*r*Sqrt[4 − *r*^2], {*t*, 0, Pi/2}, {*r*, 0, 2Cos[*t*]}]

$\frac{4}{9}(-4+3\pi)$

Zpět

Nevlastní integrál

- **Příklad 10.3.1** Vypočtěte dvojný integrál $\displaystyle\iint\limits_D \frac{1}{(x^2+y^2+4)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde $D = \langle 0,\infty) \times \langle 0,\infty)$.
- **Příklad 10.3.2** Vypočtěte dvojný integrál $\displaystyle\iint\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{1+x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

Zpět

Příklad 10.3.1

Vypočtěte dvojný integrál $\displaystyle\iint_D \frac{1}{(x^2+y^2+4)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde $D = \langle 0, \infty) \times \langle 0, \infty)$.

? Zpět

Příklad 10.3.1

Vypočtěte dvojný integrál $\iint\limits_D \frac{1}{(x^2+y^2+4)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde $D = \langle 0,\infty) \times \langle 0,\infty)$.

Výsledek:

$\frac{\pi}{16}$.

Zpět

Příklad 10.3.1

Vypočtěte dvojný integrál $\iint\limits_D \frac{1}{(x^2+y^2+4)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde $D = \langle 0,\infty) \times \langle 0,\infty)$.

Návod:

$$\iint\limits_D \frac{1}{(x^2+y^2+4)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \lim_{n\to\infty} \iint\limits_{D_n} \frac{1}{(x^2+y^2+4)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,,$$

kde $D_n = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; x^2+y^2 \le n^2,\ x \ge 0,\ y \ge 0\}$. Pro výpočet integrálu pod limitou použijte substituci do polárních souřadnic.

Zpět

Příklad 10.3.1

Vypočtěte dvojný integrál $\iint\limits_D \frac{1}{(x^2+y^2+4)^2}\,dx\,dy$, kde $D = \langle 0,\infty) \times \langle 0,\infty)$.

Řešení:

Pro nevlastní integrál platí $\iint\limits_D \frac{1}{(x^2+y^2+4)^2}\,dx\,dy = \lim\limits_{n\to\infty} \iint\limits_{D_n} \frac{1}{(x^2+y^2+4)^2}\,dx\,dy$,
kde $D_n = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; x^2+y^2 \le n^2,\ x \ge 0,\ y \ge 0\}$. Vypočteme nejdříve integrál pod limitou. Použijeme substituci do polárních souřadnic.

$$\iint\limits_{D_n} \frac{1}{(x^2+y^2+4)^2}\,dx\,dy = \iint\limits_{\bar{D}_n} r\,\frac{1}{(r^2+4)^2}\,dr\,dt\,,$$

kde $\bar{D}_n = \{[r,t] \in \mathbb{R}^2;\ r \in \langle 0,n\rangle\,,\ t \in \langle 0,\frac{\pi}{2}\rangle\}$. Platí

$$\begin{aligned}
\iint\limits_{\bar{D}_n} r\,\frac{1}{(r^2+4)^2}\,dr\,dt &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^n r\,\frac{1}{(r^2+4)^2}\,dr\right) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[-\frac{1}{2}\,\frac{1}{r^2+4}\right]_0^n dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2+4} - \frac{1}{4}\right) dt = -\frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{n^2+4} - \frac{1}{4}\right).
\end{aligned}$$

Platí tedy

$$\iint\limits_D \frac{1}{(x^2+y^2+4)^2}\,dx\,dy = \lim_{n\to\infty} -\frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{n^2+4} - \frac{1}{4}\right) = \frac{\pi}{16}.$$

Zpět

Příklad 10.3.1

Vypočtěte dvojný integrál $\displaystyle\iint_D \frac{1}{(x^2+y^2+4)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde $D = \langle 0,\infty) \times \langle 0,\infty)$.

Maple:

Maple nám tento nevlastní integrál spočte přímo:

```
>  Int(Int(1/(x^2+y^2+4)^2,y=0..infinity),x=0..infinity)=int(int(1/(x^2+
y^2+4)^2,y=0..infinity),x=0..infinity);
```

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{1}{(x^2+y^2+4)^2}\,dy\,dx = \frac{\pi}{16}$$

Zpět

Příklad 10.3.1

Vypočtěte dvojný integrál $\iint\limits_D \frac{1}{(x^2+y^2+4)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde $D = \langle 0, \infty) \times \langle 0, \infty)$.

Mathematica:

Mathematica nám tento nevlastní integrál spočte přímo:

Integrate[1/(*x*^2 + *y*^2 + 4)^2, {*x*, 0, Infinity}, {*y*, 0, Infinity}]

$\frac{\pi}{16}$

Zpět

Příklad 10.3.2

Vypočtěte dvojný integrál $\iint\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{1+x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$

? Zpět

Příklad 10.3.2

Vypočtěte dvojný integrál $\displaystyle\iint\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{1+x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$

Výsledek:

∞ , dvojný integrál nekonverguje.

Zpět

Příklad 10.3.2

Vypočtěte dvojný integrál $\iint\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{1+x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

Návod:

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{(x^2+y^2+1)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \lim_{n\to\infty} \iint\limits_{D_n} \frac{1}{(x^2+y^2+1)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,,$$

kde $D_n = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; x^2+y^2 \le n^2\}$. Pro výpočet integrálu pod limitou použijte substituci do polárních souřadnic.

Zpět

Příklad 10.3.2

Vypočtěte dvojný integrál $\iint\limits_{\mathbb{R}^2} \dfrac{1}{1+x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

Řešení:

Pro nevlastní integrál platí $\iint\limits_{\mathbb{R}^2} \dfrac{1}{(x^2+y^2+1)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \lim\limits_{n\to\infty} \iint\limits_{D_n} \dfrac{1}{(x^2+y^2+1)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$,
kde $D_n = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; x^2+y^2 \leq n^2\}$. Vypočteme nejdříve integrál pod limitou. Použijeme substituci do polárních souřadnic.

$$\iint\limits_{D_n} \frac{1}{(x^2+y^2+1)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_{\bar{D}_n} r\,\frac{1}{(r^2+1)}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}t\,,$$

kde $\bar{D}_n = \{[r,t] \in \mathbb{R}^2\,;\ r \in \langle 0,n\rangle\,,\ t \in \langle 0, 2\pi\rangle\}$. Platí

$$\begin{aligned}
\iint\limits_{\bar{D}_n} r\,\frac{1}{(r^2+1)}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}t &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^n r\,\frac{1}{(r^2+1)}\,\mathrm{d}r\right)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi} \left[\frac{1}{2}\ln(r^2+1)\right]_0^n\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\left(\ln(n^2+1)\right)\,\mathrm{d}t = \pi\left(\ln(n^2+1)\right).
\end{aligned}$$

Platí tedy

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{(x^2+y^2+1)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \lim_{n\to\infty} 2\pi\,\ln(n^2+1) = \infty.$$

Integrál nekonveruje.

Příklad 10.3.2

Vypočtěte dvojný integrál $\iint\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{1+x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

Maple:

```
> Int(Int(1/(x^2+y^2+1),y=-infinity..infinity),x=-infinity..infinity)=i
nt(int(1/(^2+y^2+1),y=-infinity..infinity),x=-infinity..infinity);
```

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+y^2+1}\,dy\,dx = \infty$$

Výsledek je ∞, integrál tedy nekonverguje.

Zpět

Příklad 10.3.2

Vypočtěte dvojný integrál $\displaystyle\iint\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{1+x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

Mathematica:

Integrate[1/(x^2 + y^2 + 1), {x, −Infinity, Infinity},{y, −Infinity, Infinity}]

Integrate::idiv : Integral of $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ does not converge on $\{-\infty, \infty\}$. More. . .

$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\pi}{\sqrt{1+x^2}}\, dx$

Mathematica nám sdělí, že integrál nekonverguje.

Zpět

Výpočet trojného integrálu

- Příklad 10.4.1 Vypočtěte trojný integrál $\iiint\limits_I x^2\, y\, z^3 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, kde

  $I = \langle 0, 1\rangle \times \langle 0, 1\rangle \times \langle 0, 2\rangle$

- Příklad 10.4.2 Vypočtěte trojný integrál $\iiint\limits_M y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, kde

  $M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3\,;\ x \geq 0\,;\ y \geq 0\,;\ \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 2\}.$

Zpět

Příklad 10.4.1

Vypočtěte trojný integrál $\iiint\limits_I x^2\, y\, z^3 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, kde $I = \langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle \times \langle 0,2\rangle$

? Zpět

Příklad 10.4.1

Vypočtěte trojný integrál $\iiint\limits_I x^2\, y\, z^3 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, kde $I = \langle 0, 1\rangle \times \langle 0, 1\rangle \times \langle 0, 2\rangle$

Výsledek:

$\dfrac{2}{3}$.

Zpět

Příklad 10.4.1

Vypočtěte trojný integrál $\iiint\limits_I x^2\, y\, z^3 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, kde $I = \langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle \times \langle 0,2\rangle$

Návod:

Použijte Fubiniovu větu a vypočtěte trojnásoný integral $\int\limits_0^1 (\int\limits_0^1 (\int\limits_0^2 x^2\, y\, z^3 \,\mathrm{d}z)\,\mathrm{d}y)\,\mathrm{d}x$.

Zpět

Příklad 10.4.1

Vypočtěte trojný integrál $\iiint\limits_I x^2\, y\, z^3 \; \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z$, kde $I = \langle 0, 1\rangle \times \langle 0, 1\rangle \times \langle 0, 2\rangle$

Řešení:

Použijeme Fubiniovu větu a vypočteme trojnásoný integral $\int\limits_0^1 (\int\limits_0^1 (\int\limits_0^2 x^2\, y\, z^3 \; \mathrm{d}z)\, \mathrm{d}y)\, \mathrm{d}x$.

$$\begin{aligned}
\int\limits_0^1 (\int\limits_0^1 (\int\limits_0^2 x^2\, y\, z^3 \; \mathrm{d}z)\, \mathrm{d}y)\, \mathrm{d}x &= (\int\limits_0^2 z^3 \; \mathrm{d}z) \int\limits_0^1 (\int\limits_0^1 x^2\, y \; \mathrm{d}y)\, \mathrm{d}x \\
&= (\int\limits_0^2 z^3 \; \mathrm{d}z)(\int\limits_0^1 y \; \mathrm{d}y)(\int\limits_0^1 x^2 \; \mathrm{d}x) \\
&= \left[\frac{z^4}{4}\right]_0^2 \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^1 \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{16}{4}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{3} = \frac{2}{3}\,.
\end{aligned}$$

Zpět

Příklad 10.4.1

Vypočtěte trojný integrál $\iiint\limits_I x^2\, y\, z^3 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, kde $I = \langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle \times \langle 0,2\rangle$

Maple:

```
> Int(Int(Int(x^2*y*z^3,z=0..2),y=0..1),x=0..1)=int(int(int(x^2*y*z^3,z
=0..2),y=0..1),x=0..1);
```

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^2 x^2\, y\, z^3\, dz\, dy\, dx = \frac{2}{3}$$

Zpět

Příklad 10.4.1

Vypočtěte trojný integrál $\iiint\limits_I x^2\,y\,z^3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, kde $I = \langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle \times \langle 0,2\rangle$

Mathematica:

Integrate[*x*^2 *y* *z*^3, {*x*, 0, 1}, {*y*, 0, 1}, {*z*, 0, 2}]

$\frac{2}{3}$

Zpět

Příklad 10.4.2

Vypočtěte trojný integrál $\iiint\limits_M y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, kde

$M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3\,;\; x \geq 0\,;\; y \geq 0\,;\; \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 2\}.$

? Zpět

Příklad 10.4.2

Vypočtěte trojný integrál $\iiint\limits_M y \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z$, kde

$M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 \, ; \; x \geq 0 \, ; \; y \geq 0 \, ; \; \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 2\}$.

Výsledek:

$$\frac{4}{3} \, .$$

Zpět

Příklad 10.4.2

Vypočtěte trojný integrál $\iiint\limits_M y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, kde

$M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3\,;\ x \geq 0\,;\ y \geq 0\,;\ \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 2\}$.

Návod:

Použijte Fubiniovu větu a vypočtěte trojnásoný integral $\int\limits_0^2 (\int\limits_0^{\sqrt{4-x^2}} (\int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}}^2 y \,\mathrm{d}z)\,\mathrm{d}y)\,\mathrm{d}x$.

Zpět

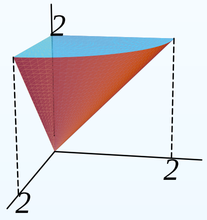
Příklad 10.4.2

Vypočtěte trojný integrál $\iiint\limits_M y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, kde

$M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3\,;\; x \geq 0\,;\; y \geq 0\,;\; \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 2\}$.

Řešení:

Nejdříve popíšeme množinu M nerovnicemi tak, abychom mohli použít Fubiniovu větu. Nakreslíme si množinu M. Množina M se dá vyjádřit nerovnicemi



$$\begin{array}{rcccl} 0 & \leq & x & \leq & 2 \\ 0 & \leq & y & \leq & \sqrt{4-x^2} \\ \sqrt{x^2+y^2} & \leq & z & \leq & 2 \end{array} .$$

Nyní platí

$$\begin{aligned}
\iiint\limits_M y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z &= \int_0^2 \left(\int_0^{\sqrt{4-x^2}} \left(\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^2 y \,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \\
&= \int_0^2 \left(\int_0^{\sqrt{4-x^2}} y \Big[z \Big]_{\sqrt{x^2+y^2}}^2 \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_0^2 \left(\int_0^{\sqrt{4-x^2}} y\,(2 - \sqrt{x^2+y^2})\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \\
&= \int_0^2 \left[y^2 - \frac{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}{3} \right]_0^{\sqrt{4-x^2}} \mathrm{d}x = \int_0^2 \frac{4}{3} - x^2 + \frac{x^3}{3}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{4}{3}x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{12} \right]_0^2 \\
&= \frac{8}{3} - \frac{8}{3} + \frac{16}{12} = \frac{4}{3}\,.
\end{aligned}$$

Zpět

Příklad 10.4.2

Vypočtěte trojný integrál $\iiint\limits_M y \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z$, kde

$M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 \,;\; x \geq 0 \,;\; y \geq 0 \,;\; \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 2\}.$

Maple:

```
> Int(Int(Int(y,z=sqrt(x^2+y^2)..2),y=0..sqrt(4-x^2)),x=0..2)=int(int(i
nt(y,z=sqrt(x^2+y^2)..2),y=0..sqrt(4-x^2)),x=0..2);
```

$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^2 y \, dz \, dy \, dx = \frac{4}{3}$$

Zpět

Příklad 10.4.2

Vypočtěte trojný integrál $\iiint\limits_M y \, dx \, dy \, dz$, kde

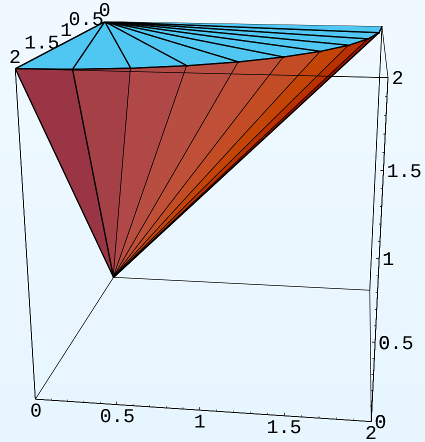
$M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 \, ; \; x \geq 0 \, ; \; y \geq 0 \, ; \; \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 2\}.$

Mathematica:

Těleso přes které počítáme integrál je čtvrt kužele. Těleso si nakreslíme.

<< Graphics\`Shapes\`

**Show[{TranslateShape[Graphics3D[Helix[2, 0.000001, 2, 40]], {0, 0, 2}],
TranslateShape[Graphics3D[Cone[4, −2, 40]], {0, 0, 2}]},
PlotRange → {{0, 2}, {0, 2}, {0, 2}}, ViewPoint->{3.136, 0.422, 0.977},
Axes → True];**



Integrate[y, {x, 0, 2}, {y, 0, Sqrt[4 − x^2]}, {z, Sqrt[x^2 + y^2], 2}]

$\frac{4}{3}$

Zpět

Substituční metoda pro trojný integrál

- Příklad 10.5.1 Vypočtěte trojný integrál $\iiint\limits_M z \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z$, kde
  $M = \left\{ [x, y, z] \in \mathbb{R}^3 \, ; \; x \geq 0 \, , \; y \geq 0 \, , \; 0 \leq z \leq \sqrt{9 - x^2 - y^2} \right\} .$
- Příklad 10.5.2 Vypočtěte trojný integrál $\iiint\limits_M (x^2 + y^2 + z^2) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z$, kde
  $M = \{ [x, y, z] \in \mathbb{R}^3 \, ; \; x > 0 \, , \; y > 0 \, , \; z > 0 \, , \; x^2 + y^2 + z^2 < 1 \} .$

Zpět

Příklad 10.5.1

Vypočtěte trojný integrál $\iiint\limits_M z \, dx \, dy \, dz$, kde

$$M = \left\{ [x, y, z] \in \mathbb{R}^3 \, ; \; x \geq 0 \, , \; y \geq 0 \, , \; 0 \leq z \leq \sqrt{9 - x^2 - y^2} \right\} .$$

? Zpět

Příklad 10.5.1

Vypočtěte trojný integrál $\iiint\limits_M z \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z$, kde

$M = \left\{ [x, y, z] \in \mathbb{R}^3 \, ; \; x \geq 0 \, , \; y \geq 0 \, , \; 0 \leq z \leq \sqrt{9 - x^2 - y^2} \right\}$.

Výsledek:

$\dfrac{81}{16}\pi$.

Zpět

Příklad 10.5.1

Vypočtěte trojný integrál $\iiint\limits_M z \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z$, kde

$M = \left\{ [x, y, z] \in \mathbb{R}^3 \,;\; x \geq 0\,,\; y \geq 0\,,\; 0 \leq z \leq \sqrt{9 - x^2 - y^2} \right\}.$

Návod:

Použijte substituci do cylindrických souřadnic.

$$\begin{aligned} x &= r\cos t\,, & r &\in \langle 0, \infty) \\ y &= r\sin t\,, & t &\in \langle 0, 2\pi\rangle \\ z &= z\,. \end{aligned}$$

Zpět

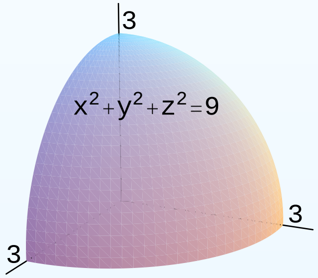
Příklad 10.5.1

Vypočtěte trojný integrál $\iiint\limits_M z \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, kde

$M = \left\{ [x, y, z] \in \mathbb{R}^3 \,;\; x \geq 0\,,\; y \geq 0\,,\; 0 \leq z \leq \sqrt{9 - x^2 - y^2} \right\}.$

Řešení:

Nakreslíme si těleso přes které integrujeme.



Pro výpočet integralu použijeme substituci do cylindrických souřadnic.

$$
\begin{aligned}
x &= r\,\cos t\,, & r &\in \langle 0, \infty) \\
y &= r\,\sin t\,, & t &\in \langle 0, 2\pi \rangle \\
z &= z\,. & &
\end{aligned}
$$

Zobrazení z kartézských do cylindrických souřadnic je regulární a jeho jakobián je

$$J(r, t, z) = \begin{vmatrix} \cos t & \sin t & 0 \\ -r\,\sin t & r\,\cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r\,\cos^2 t + r\,\sin^2 t = r\,.$$

Další

Příklad 10.5.1

Vypočtěte trojný integrál $\iiint\limits_M z \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z$, kde

$M = \left\{ [x, y, z] \in \mathbb{R}^3 \, ; \; x \geq 0 \, , \; y \geq 0 \, , \; 0 \leq z \leq \sqrt{9 - x^2 - y^2} \right\}$.

Řešení:

Platí tedy:

$$\iiint\limits_M z \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z = \iiint\limits_{\bar{M}} z \, r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}z \, ,$$

kde $\bar{M} = \left\{ [r, t, z] \in \mathbb{R}^3 \, , 0 < r < 3 \, , \; 0 < t < \frac{\pi}{2} \, , \; 0 < z < \sqrt{9 - r^2} \right\}$.
Nyní vypočteme integrál po substituci

$$\begin{aligned}
\iiint\limits_{\bar{M}} z \, r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}z &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^3 \left(\int_0^{\sqrt{9-r^2}} z \, r \, \mathrm{d}z \right) \mathrm{d}r \right) \mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^3 r \left[\frac{z^2}{2} \right]_0^{\sqrt{9-r^2}} \mathrm{d}r \right) \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^3 r \, \frac{9 - r^2}{2} \, \mathrm{d}r \right) \mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[-\frac{1}{8} (9 - r^2)^2 \right]_0^3 \mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{8} (9)^2 \, \mathrm{d}t \\
&= \frac{81}{16} \pi
\end{aligned}$$

Zpět

Příklad 10.5.1

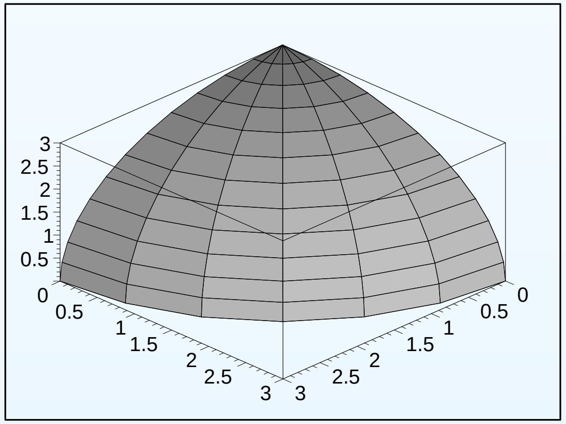
Vypočtěte trojný integrál $\iiint\limits_{M} z \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, kde

$$M = \left\{ [x, y, z] \in \mathbb{R}^3 \,;\; x \geq 0\,,\; y \geq 0\,,\; 0 \leq z \leq \sqrt{9 - x^2 - y^2} \right\}.$$

Maple:

Množina přes kterou počítáme trojný integrál je osmina koule. Nakreslíme si ji.

```
>  c := plottools[sphere]([0,0,0], 3):
plots[display](c,view=[0..3,0..3,0..3], axes=boxed);
```



Nyní vypočteme trojný integrál bez substituce nebo se substitucí do sférických souřadnic.

```
>  Int(Int(Int(z,z=0..sqrt(9-x^2-y^2)),y=0..sqrt(9-x^2)),x=0..3)=int(int
(int(z,z=0..sqrt(9-x^2-y^2)),y=0..sqrt(9-x^2)),x=0..3);
```

$$\int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} \int_0^{\sqrt{9-x^2-y^2}} z\,dz\,dy\,dx = \frac{81\,\pi}{16}$$

Další

Příklad 10.5.1

Vypočtěte trojný integrál $\iiint\limits_M z \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z$, kde

$$M = \left\{ [x, y, z] \in \mathbb{R}^3 \, ; \; x \geq 0 \, , \; y \geq 0 \, , \; 0 \leq z \leq \sqrt{9 - x^2 - y^2} \right\} .$$

Maple:

```
>  Int(Int(Int(r*z,z=0..sqrt(9-r^2)),r=0..3),t=0..Pi/2)=int(int(int(r*z,
z=0..sqrt(9-r^2)),r=0..3),t=0..Pi/2);
```

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-r^2}} r \, z \, dz \, dr \, dt = \frac{81 \, \pi}{16}$$

Zpět

Příklad 10.5.1

Vypočtěte trojný integrál $\iiint\limits_M z \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, kde

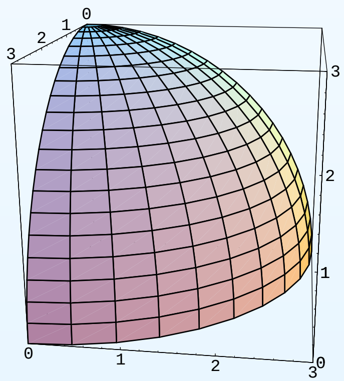
$$M = \left\{ [x,y,z] \in \mathbb{R}^3 \,;\; x \geq 0\,,\; y \geq 0\,,\; 0 \leq z \leq \sqrt{9 - x^2 - y^2} \right\}.$$

Mathematica:

Množina přes kterou počítáme trojný integrál je osmina koule. Nakreslíme si ji.

<< Graphics`Shapes`

Show[Graphics3D[Sphere[3, 40, 40]], PlotRange → {{0, 3}, {0, 3}, {0, 3}}, ViewPoint->{3.136, 0.422, 0.977}, Axes → True];



Nyní vypočteme trojný integrál bez substituce nebo se substitucí do sférických souřadnic.

Integrate[z, {x, 0, 3}, {y, 0, Sqrt[9 − x^2]}, {z, 0, Sqrt[9 − x^2 − y^2]}]

$\frac{81\pi}{16}$

Další

Příklad 10.5.1

Vypočtěte trojný integrál $\iiint\limits_M z \, dx \, dy \, dz$, kde

$M = \left\{ [x, y, z] \in \mathbb{R}^3 \, ; \; x \geq 0 \, , \; y \geq 0 \, , \; 0 \leq z \leq \sqrt{9 - x^2 - y^2} \right\}$.

Mathematica:

```
Integrate[r z, {t, 0, Pi/2}, {r, 0, 3}, {z, 0, Sqrt[9 - r^2]}]
```

$\frac{81\pi}{16}$

Zpět

Příklad 10.5.2

Vypočtěte trojný integrál $\iiint\limits_M (x^2 + y^2 + z^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, kde

$M = \{\,[x, y, z] \in \mathbb{R}^3\,;\; x > 0\,,\; y > 0\,,\; z > 0\,,\; x^2 + y^2 + z^2 < 1\,\}\,.$

? Zpět

Příklad 10.5.2

Vypočtěte trojný integrál $\displaystyle\iiint\limits_M (x^2 + y^2 + z^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, kde

$M = \{\,[x, y, z] \in \mathbb{R}^3\,;\; x > 0\,,\; y > 0\,,\; z > 0\,,\; x^2 + y^2 + z^2 < 1\,\}\,.$

Výsledek:

$\dfrac{\pi}{10}\,.$

Zpět

Příklad 10.5.2

Vypočtěte trojný integrál $\iiint\limits_M (x^2 + y^2 + z^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, kde

$M = \{ [x, y, z] \in \mathbb{R}^3 ;\ x > 0\,,\ y > 0\,,\ z > 0\,,\ x^2 + y^2 + z^2 < 1 \}\,.$

Návod:

Protože těleso přes které integrujeme je osmina koule, použijte substituci do sférických souřadnic.

$$
\begin{aligned}
x &= r \sin u \, \cos t\,, & r &\in \langle 0, \infty) \\
y &= r \sin u \, \sin t\,, & t &\in \langle 0, 2\pi \rangle \\
z &= r \cos u\,, & u &\in \langle 0, \pi \rangle\,.
\end{aligned}
$$

Zpět

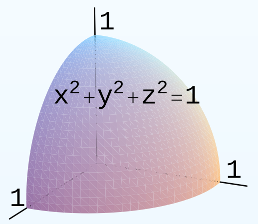
Příklad 10.5.2

Vypočtěte trojný integrál $\iiint\limits_M (x^2 + y^2 + z^2)\, dx\, dy\, dz$, kde

$M = \{ [x, y, z] \in \mathbb{R}^3 ;\ x > 0 ,\ y > 0 ,\ z > 0 ,\ x^2 + y^2 + z^2 < 1 \}$.

Řešení:

Nakreslíme si těleso přes které integrujeme.



Protože těleso přes které integrujeme je osmina koule, použijeme substituci do sférických souřadnic.

$$\begin{aligned} x &= r \sin u \cos t\,, & r &\in \langle 0, \infty) \\ y &= r \sin u \sin t\,, & t &\in \langle 0, 2\pi \rangle \\ z &= r \cos u\,, & u &\in \langle 0, \pi \rangle\,. \end{aligned}$$

Zobrazení do sférických souřadnic je regulární, jeho jakobián je $J(r, t, u) = r^2 \sin u$.

Další

Příklad 10.5.2

Vypočtěte trojný integrál $\iiint\limits_M (x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, kde

$M = \{\,[x,y,z]\in\mathbb{R}^3\,;\; x>0\,,\; y>0\,,\; z>0\,,\; x^2+y^2+z^2<1\,\}\,.$

Řešení:

Platí tedy:

$$\iiint\limits_M (x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint\limits_{\bar M} r^2\, r^2\, \sin u\; \mathrm{d}r\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}u\,,$$

kde $\bar M = \{\,[r,t,u]\in\mathbb{R}^3\,, 0<r<1\,,\; 0<t<\frac{\pi}{2}\,,\; 0<u<\frac{\pi}{2}\,\}$.
Nyní vypočteme integrál po substituci

$$\begin{aligned}
\iiint\limits_{\bar M} r^4\,\sin u\;\mathrm{d}r\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}u &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^1 r^4\,\sin u\;\mathrm{d}r\right)\,\mathrm{d}t\right)\,\mathrm{d}u \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin u\left[\frac{r^5}{5}\right]_0^1\,\mathrm{d}t\right)\,\mathrm{d}u = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{5}\,\sin u\;\mathrm{d}t\right)\,\mathrm{d}u \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin u\left[t\,\frac{1}{5}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\,\mathrm{d}u = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\pi}{10}\,\sin u\;\mathrm{d}u \\
&= \frac{\pi}{10}\,[-\cos u]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{10}\,.
\end{aligned}$$

Zpět

Příklad 10.5.2

Vypočtěte trojný integrál $\iiint\limits_M (x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, kde

$M = \{\,[x,y,z] \in \mathbb{R}^3\,;\; x>0\,,\; y>0\,,\; z>0\,,\; x^2+y^2+z^2<1\,\}\,.$

Maple:

Množina přes kterou počítáme trojný integrál je osmina koule. Obrázek viz předchozí příklad, jen poloměr koule je 1.
Vypočteme integrál bez substituce i se substitucí do sférických souřadnic.

```
> Int(Int(Int((x^2+y^2+z^2),z=0..sqrt(1-x^2-y^2)),y=0..sqrt(1-x^2)),x=0
..1)=int(int(int((x^2+y^2+z^2),z=0..sqrt(1-x^2-y^2)),y=0..sqrt(1-x^2))
,x=0..1);
```

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} x^2+y^2+z^2\,dz\,dy\,dx = \frac{\pi}{10}$$

```
> Int(Int(Int(r^4*cos(u),r=0..1),t=0..Pi/2),u=0..Pi/2)=int(int(int(r^4*
cos(u),r=0..1),t=0..Pi/2),u=0..Pi/2);
```

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 r^4\cos(u)\,dr\,dt\,du = \frac{\pi}{10}$$

Zpět

Příklad 10.5.2

Vypočtěte trojný integrál $\iiint\limits_M (x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, kde

$M = \{\,[x,y,z] \in \mathbb{R}^3\,;\ x > 0\,,\ y > 0\,,\ z > 0\,,\ x^2+y^2+z^2 < 1\,\}$.

Mathematica:

Množina přes kterou počítáme trojný integrál je osmina koule. Obrázek viz předchozí příklad, jen poloměr koule je 1.

Vypočteme integrál bez substituce i se substitucí do sférických souřadnic.

Integrate[x^2 + y^2 + z^2, {x, 0, 1}, {y, 0, Sqrt[1 − x^2]},{z, 0, Sqrt[1 − x^2 − y^2]}]

$\frac{\pi}{10}$

Integrate[r^4Sin[u], {u, 0, Pi/2}, {t, 0, Pi/2}, {r, 0, 1}]

$\frac{\pi}{10}$

Zpět

- Příklad 10.6.1 Vypočtěte objem tělesa ohraničeného rovinami $x = 0\,,\ y = 0\,,\ z = 0\,,\ x = 2\,,\ y = 3\,,\ x + y + z = 4\,.$
- Příklad 10.6.2 Vypočtěte objem tělesa ohraničeného plochou $y = x^2$, a rovinami $y = 0\,,\ y + z = 2\,.$
- Příklad 10.6.3 Vypočtěte objem tělesa ohraničeného rovinou $z = 0$ a částí plochy $z = \mathrm{e}^{-x^2-y^2}\,.$

Zpět

Příklad 10.6.1

Vypočtěte objem tělesa ohraničeného rovinami
$x = 0\,,\ y = 0\,,\ z = 0\,,\ x = 2\,,\ y = 3\,,\ x + y + z = 4\,.$

? Zpět

Příklad 10.6.1

Vypočtěte objem tělesa ohraničeného rovinami
$x = 0\,,\ y = 0\,,\ z = 0\,,\ x = 2\,,\ y = 3\,,\ x + y + z = 4\,.$

Výsledek:

$$V = \frac{55}{6}\,.$$

Zpět

Příklad 10.6.1

Vypočtěte objem tělesa ohraničeného rovinami
$x = 0\,,\ y = 0\,,\ z = 0\,,\ x = 2\,,\ y = 3\,,\ x + y + z = 4\,.$

Návod:

$V = \iint\limits_G (4 - x - y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde $G = G_1 \cup G_2$, $G_1 = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2\,;\ 0 \le x \le 1\,,\ 0 \le y \le 3\}$ a $G_2 = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2\,;\ 1 \le x \le 2\,,\ 0 \le y \le 4 - x\}$

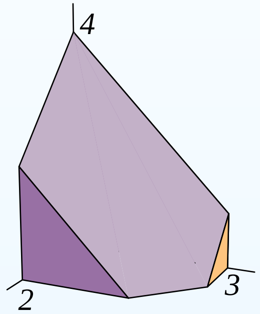
Zpět

Příklad 10.6.1

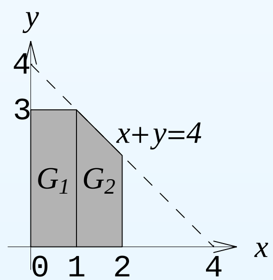
Vypočtěte objem tělesa ohraničeného rovinami
$x = 0\,,\; y = 0\,,\; z = 0\,,\; x = 2\,,\; y = 3\,,\; x + y + z = 4\,.$

Řešení:

Nakreslíme si obrázek uvažovaného tělesa a množinu $G = G_1 \cup G_2$ přes kterou budeme integrovat.



$$V = \iint_G (4 - x - y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{G_1} (4 - x - y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint_{G_2} (4 - x - y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$



$$G_1 = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2\,;\; 0 \le x \le 1\,,\; 0 \le y \le 3\}$$
$$G_2 = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2\,;\; 1 \le x \le 2\,,\; 0 \le y \le 4 - x\}$$

$$\iint_{G_1} (4 - x - y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \left(\int_0^3 (4 - x - y)\,\mathrm{d}y \right)\,\mathrm{d}x = 6$$

$$\iint_{G_2} (4 - x - y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_1^2 \left(\int_0^{4-x} (4 - x - y)\,\mathrm{d}y \right)\,\mathrm{d}x = \frac{19}{6}\,, \quad V = 6 + \frac{19}{6} = \frac{55}{6}\,.$$

Zpět

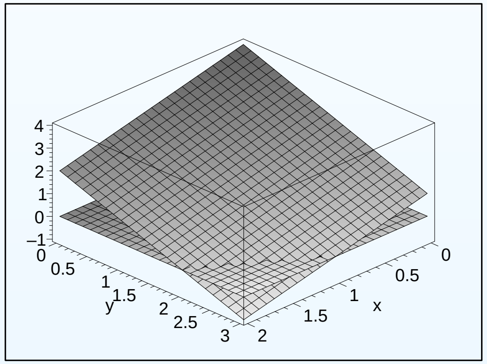
Příklad 10.6.1

Vypočtěte objem tělesa ohraničeného rovinami
$x = 0\,,\ y = 0\,,\ z = 0\,,\ x = 2\,,\ y = 3\,,\ x + y + z = 4\,.$

Maple:

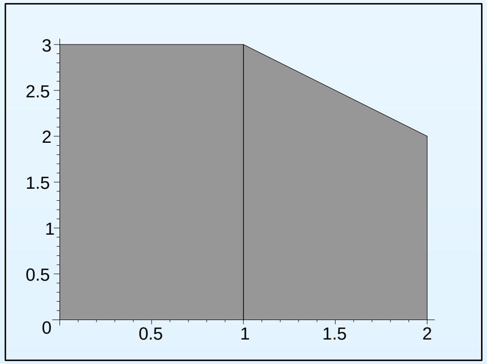
Abychom měli představu o tělese jehož objem počítáme, nakreslíme si roviny $x + y + z = 4$ a $z = 0$ na obdelníku $x \in \langle 0, 2\rangle \times \langle 0, 3\rangle$.

```
> plot3d([4-x-y,0],x=0..2,y=0..3,axes=boxed);
```



Nyní si nakreslíme množinu $G = G_1 \cup G_2$ přes kterou integrujeme.

```
> G1 := plottools[polygon]([[1,0], [1,3],[2,2],[2,0],[1,0]],
color=green): G2 :=plottools[polygon]([[0,0], [0,3],
[1,3],[1,0],[0,0]],color=green): plots[display](G1,G2);
```



Další

Příklad 10.6.1

Vypočtěte objem tělesa ohraničeného rovinami
$x = 0\,,\ y = 0\,,\ z = 0\,,\ x = 2\,,\ y = 3\,,\ x + y + z = 4\,.$

Maple:

Nakonec vypočteme objem daného tělesa.

```
> V:=Int(Int(4-x-y,y=0..3),x=0..1)+Int(Int(4-x-y,y=0..4-x),x=1..2)=int(
int(4-x-y,y=0..3),x=0..1)+int(int(4-x-y,y=0..4-x),x=1..2);
```

$$V := \int_0^1 \int_0^3 4 - x - y\,dy\,dx + \int_1^2 \int_0^{4-x} 4 - x - y\,dy\,dx = \frac{55}{6}$$

Zpět

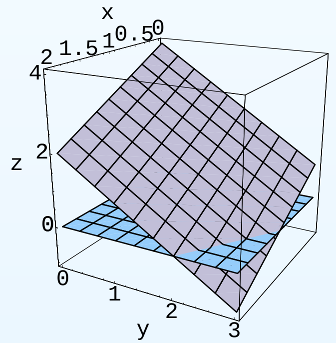
Příklad 10.6.1

Vypočtěte objem tělesa ohraničeného rovinami
$x = 0\,,\ y = 0\,,\ z = 0\,,\ x = 2\,,\ y = 3\,,\ x + y + z = 4\,.$

Mathematica:

Abychom měli představu o tělese jehož objem počítáme, nakreslíme si roviny
$x + y + z = 4$ a $z = 0$ na obdelníku $x \in \langle 0, 2\rangle \times \langle 0, 3\rangle$.

```
r1 = Plot3D[4 − x − y, {x, 0, 2}, {y, 0, 3}, PlotPoints → 10,DisplayFunction → Identity];
r2 = Plot3D[0, {x, 0, 2}, {y, 0, 3}, PlotPoints → 10, DisplayFunction → Identity];
Show[{r1, r2}, DisplayFunction → $DisplayFunction, AxesLabel → {x, y, z},
BoxRatios → {1, 1, 1}, ViewPoint->{2.728, 1.516, 1.103}];
```



Nyní si nakreslíme množinu $G = G_1 \cup G_2$ přes kterou integrujeme.

```
G = Graphics[{GrayLevel[.7], Polygon[{{0, 0}, {0, 3}, {1, 3}, {1, 0}, {0, 0}}],
Polygon[{{1, 0}, {1, 3}, {2, 2}, {2, 0}, {1, 0}}]}];
```

```
L = Graphics[{Line[{{0, 0}, {0, 3}, {1, 3}, {1, 0}, {0, 0}}],
Line[{{1, 0}, {1, 3}, {2, 2}, {2, 0}, {1, 0}}]}];
```

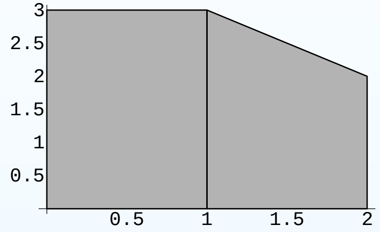
Další

Příklad 10.6.1

Vypočtěte objem tělesa ohraničeného rovinami
$x = 0\,,\; y = 0\,,\; z = 0\,,\; x = 2\,,\; y = 3\,,\; x + y + z = 4\,.$

Mathematica:

Show[{*G*, *L*}, Axes → True];



$\boldsymbol{V = \text{Integrate}[4 - x - y, \{x, 0, 1\}, \{y, 0, 3\}] + \text{Integrate}[4 - x - y, \{x, 1, 2\}, \{y, 0, 4 - x\}]}$

$\frac{55}{6}$

Zpět

Příklad 10.6.2

Vypočtěte objem tělesa ohraničeného plochou $y = x^2$, a rovinami $y = 0$, $y + z = 2$.

? Zpět

Příklad 10.6.2

Vypočtěte objem tělesa ohraničeného plochou $y = x^2$, a rovinami $y = 0$, $y + z = 2$.

Výsledek:

$\frac{32}{15}\sqrt{2}$.

Zpět

Příklad 10.6.2

Vypočtěte objem tělesa ohraničeného plochou $y = x^2$, a rovinami $y = 0$, $y + z = 2$.

Návod:

$V = \iint\limits_G (2 - y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde $G =$, $G = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2\,;\ -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}\,,\ x^2 \leq y \leq 2\}$.

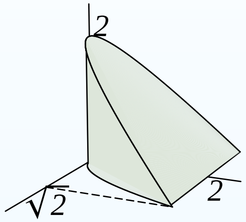
Zpět

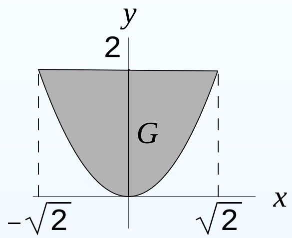
Příklad 10.6.2

Vypočtěte objem tělesa ohraničeného plochou $y = x^2$, a rovinami $y = 0$, $y + z = 2$.

Řešení:

Nakreslíme si obrázek uvažovaného tělesa a množinu G přes kterou budeme integrovat.





$$V = \iint_G (2-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \qquad G = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2\,;\ -\sqrt{2} \le x \le \sqrt{2},\ x^2 \le y \le 2\}$$

$$\begin{aligned} V = \iint_G (2-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left(\int_{x^2}^{2} (2-y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left[2\,y - \frac{y^2}{2} \right]_{x^2}^{2} \mathrm{d}x \\ &= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left(2 - 2\,x^2 + \frac{x^4}{2}) \right) \mathrm{d}x = \left[2\,x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^5}{10} \right]_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \\ &= 2\left(2\sqrt{2} - \frac{4}{3}\sqrt{2} + \frac{2}{5}\sqrt{2} \right) = \frac{32}{15}\sqrt{2}\,. \end{aligned}$$

Zpět

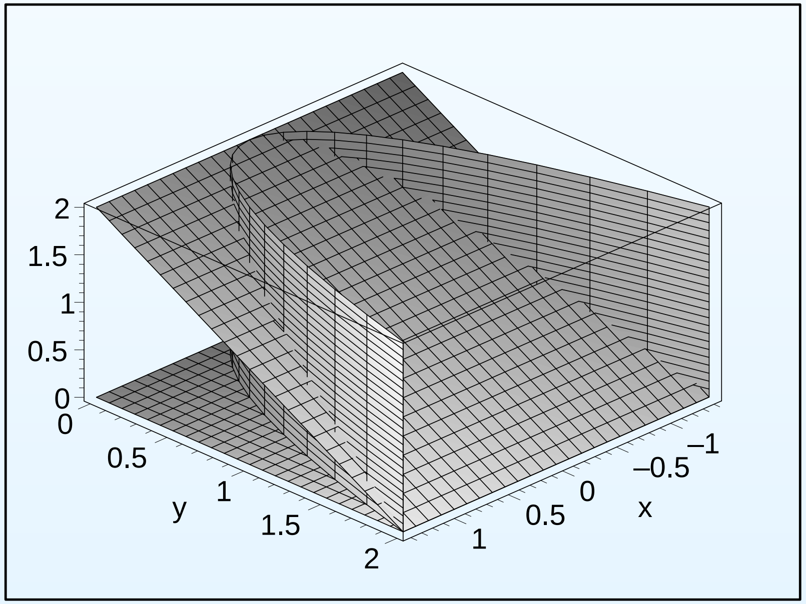
Příklad 10.6.2

Vypočtěte objem tělesa ohraničeného plochou $y = x^2$, a rovinami $y = 0$, $y + z = 2$.

Maple:

Abychom měli představu o tělese jehož objem počítáme, nakreslíme si roviny $y + z = 2$ a $z = 0$ a plochu $y = x^2$ na obdelníku $x \in \langle -\sqrt{2}, \sqrt{2} \rangle \times \langle 0, 2 \rangle$.

```
> g1:=plot3d(2-y,x=-sqrt(2)..sqrt(2),y=0..2,axes=boxed):
> g2:=plot3d([x,xˆ2,z],x=-sqrt(2)..sqrt(2),z=0..2):
> g3:=plot3d(0,x=-sqrt(2)..sqrt(2),y=0..2,axes=boxed):
> plots[display](g1,g2,g3);
```



Další

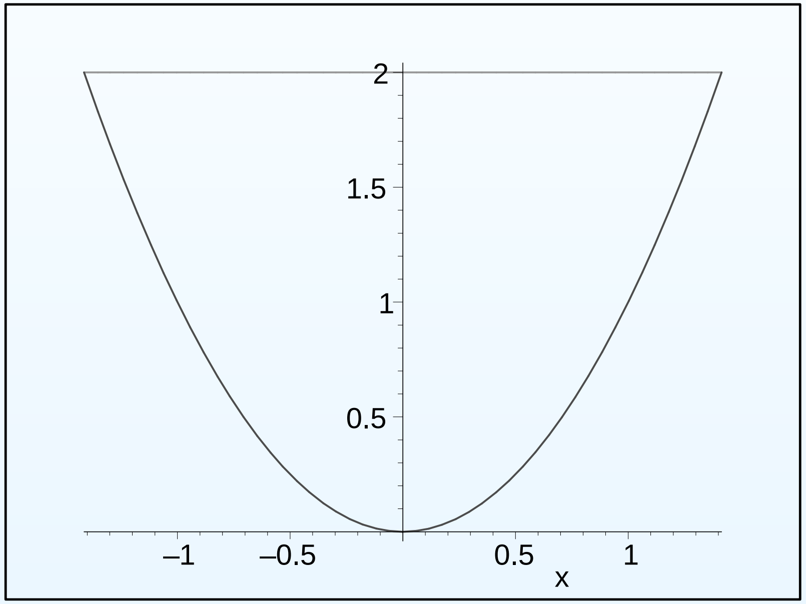
Příklad 10.6.2

Vypočtěte objem tělesa ohraničeného plochou $y = x^2$, a rovinami $y = 0$, $y + z = 2$.

Maple:

Nyní si nakreslíme množinu G přes kterou integrujeme.

```
> plot([x^2,2],x=-sqrt(2)..sqrt(2),thickness=3);
```



Nakonec vypočteme objem daného tělesa.

```
> V:=Int(Int(2-y,y=x^2..2),x=-sqrt(2)..sqrt(2))=int(int(2-y,y=x^2..2),x
=-sqrt(2)..sqrt(2));
```

$$V := \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \int_{x^2}^{2} 2 - y \, dy \, dx = \frac{32\sqrt{2}}{15}$$

Zpět

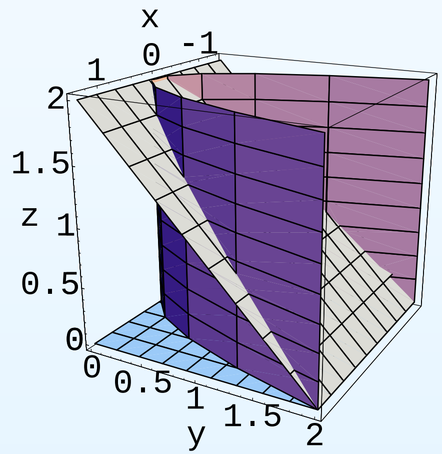
Příklad 10.6.2

Vypočtěte objem tělesa ohraničeného plochou $y = x^2$, a rovinami $y = 0$, $y + z = 2$.

Mathematica:

Abychom měli představu o tělese jehož objem počítáme, nakreslíme si roviny $y + z = 2$ a $z = 0$ a plochu $y = x^2$ na obdelníku $x \in \langle -\sqrt{2}, \sqrt{2} \rangle \times \langle 0, 2 \rangle$.

r1 = Plot3D[2 − y, {x, −Sqrt[2], Sqrt[2]}, {y, 0, 2}, PlotPoints → 10,DisplayFunction → Identity];
r2 = Plot3D[0, {x, −Sqrt[2], Sqrt[2]}, {y, 0, 2}, PlotPoints → 10,DisplayFunction → Identity];
r3 = ParametricPlot3D[{x, x^2, z}, {x, −Sqrt[2], Sqrt[2]}, {z, 0, 2},PlotPoints → 10, DisplayFunction →
Show[{r1, r2, r3}, DisplayFunction → $DisplayFunction, AxesLabel → {x, y, z},
BoxRatios → {1, 1, 1}, ViewPoint->{2.728, 1.516, 1.103}];



Další

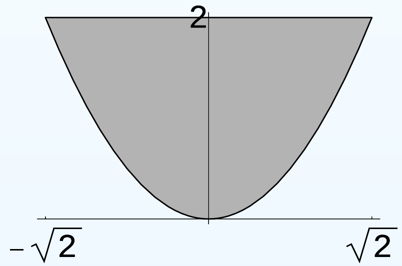
Příklad 10.6.2

Vypočtěte objem tělesa ohraničeného plochou $y = x^2$, a rovinami $y = 0$, $y + z = 2$.

Mathematica:

Nyní si nakreslíme množinu G přes kterou integrujeme.

FilledPlot[{2, x^2}, {x, −Sqrt[2], Sqrt[2]}, Fills → {{{1, 2}, GrayLevel[.7]}}, Ticks → $\left\{\left\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right\}, \{2\}\right\}$] ;



Nakonec vypočteme objem daného tělesa.

V = Integrate[2 − y, {x, −Sqrt[2], Sqrt[2]}, {y, x^2, 2}]

$\frac{32\sqrt{2}}{15}$

Zpět

Příklad 10.6.3

Vypočtěte objem tělesa ohraničeného rovinou $z = 0$ a částí plochy $z = \mathrm{e}^{-x^2-y^2}$.

? Zpět

Příklad 10.6.3

Vypočtěte objem tělesa ohraničeného rovinou $z = 0$ a částí plochy $z = \mathrm{e}^{-x^2-y^2}$.

Výsledek:

$V = \pi$.

Zpět

Příklad 10.6.3

Vypočtěte objem tělesa ohraničeného rovinou $z = 0$ a částí plochy $z = \mathrm{e}^{-x^2-y^2}$.

Návod:

$V = \iint\limits_G \mathrm{e}^{-x^2-y^2}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$, kde $G = \mathbb{R}^2$. Jedná se o nevlastní integrál.

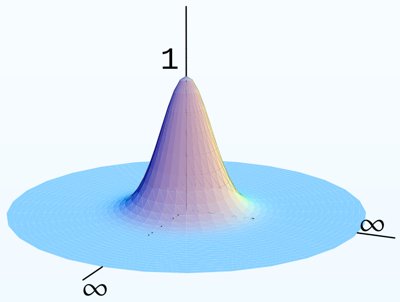
Zpět

Příklad 10.6.3

Vypočtěte objem tělesa ohraničeného rovinou $z = 0$ a částí plochy $z = \mathrm{e}^{-x^2-y^2}$.

Řešení:

Nakreslíme si obrázek uvažovaného tělesa



Množina přes kterou integrujeme je $G = \mathbb{R}^2$.
Nyní vypočteme objem tělesa:

$$V = \iint\limits_G \mathrm{e}^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

Integrál je nevlastní.

$$V = \lim_{n\to\infty} \iint\limits_{G_n} \mathrm{e}^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,,.$$

kde $D_n = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq n^2\}$.

Další

Příklad 10.6.3

Vypočtěte objem tělesa ohraničeného rovinou $z = 0$ a částí plochy $z = \mathrm{e}^{-x^2-y^2}$.

Řešení:

Při výpočtu integrálu pod limitou použijeme substituci do polárních souřadnic.

$$V_n = \iint_{G_n} \mathrm{e}^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{\bar{G}_n} r\mathrm{e}^{-r^2}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}t\,.$$

$$\begin{aligned} V_n &= \iint_{\bar{G}_n} r\mathrm{e}^{-r^2}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^n r\mathrm{e}^{-r^2}\,\mathrm{d}r\right)\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi}\left[-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-r^2}\right]_0^n\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-n^2}\right)\,\mathrm{d}t = \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-n^2}\right)[t]_0^{2\pi} = \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-n^2}\right)2\,\pi\,. \end{aligned}$$

Objem uvažovaného tělesa je

$$V = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-n^2}\right)2\,\pi \;=\; \pi\,.$$

Zpět

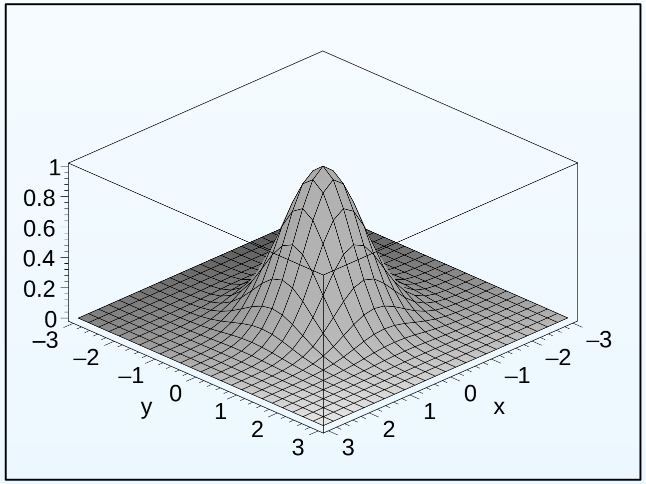
Příklad 10.6.3

Vypočtěte objem tělesa ohraničeného rovinou $z = 0$ a částí plochy $z = e^{-x^2-y^2}$.

Maple:

Abychom měli představu o tělese jehož objem počítáme, nakreslíme si plochu
$z = e^{-x^2-y^2}$

```
> plot3d(exp(-x^2-y^2),x=-3..3,y=-3..3,axes=boxed);
```



Maple nám nevlastní integrál spočte přímo:

```
> V:=Int(Int(exp(-x^2-y^2),y=-infinity..infinity),x=-infinity..infinity
)=int(int(exp(-x^2-y^2),y=-infinity..infinity),x=-infinity..infinity);
```

$$V := \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{(-x^2-y^2)}\, dy\, dx = \pi$$

Zpět

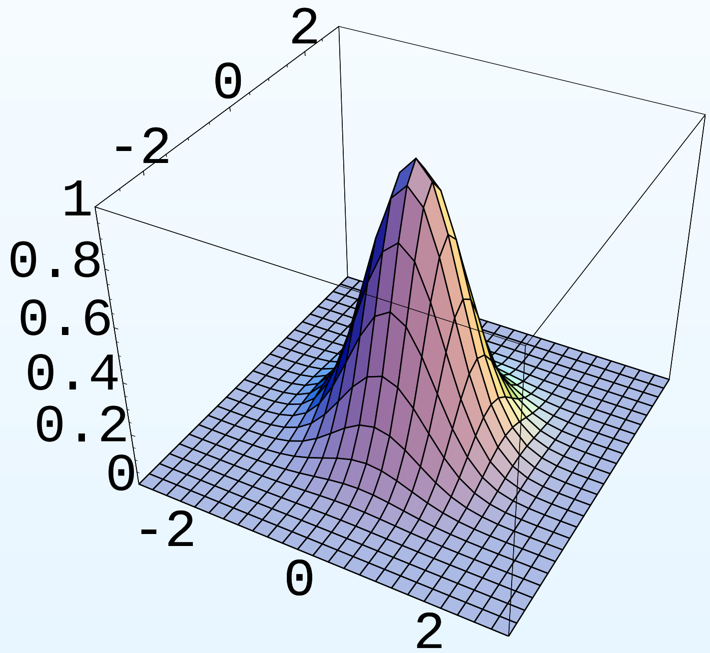
Příklad 10.6.3

Vypočtěte objem tělesa ohraničeného rovinou $z = 0$ a částí plochy $z = e^{-x^2-y^2}$.

Mathematica:

Abychom měli představu o tělese jehož objem počítáme, nakreslíme si plochu $z = e^{-x^2-y^2}$

Plot3D[Exp[−x^2 − y^2], {x, −3, 3}, {y, −3, 3}, PlotRange → {0, 1.0},BoxRatios → {1, 1, 0.8}];



Mathematica nám nevlastní integrál spočte přímo:

V = Integrate[Exp[−x^2 − y^2], {x, −Infinity, Infinity},{y, −Infinity, Infinity}]

π

Zpět

Křivkový integrál skalárního a vektorového pole

- Výpočet křivkového integrálu skalárního pole
- Výpočet křivkového integrálu vektorového pole
- Výpočet potenciálu

Zpět

Výpočet křivkového integrálu skalárního pole

- Příklad 11.1.1 Vypočtěte křivkový integrál

$$I = \int_C (5x - 9y)\, ds,$$

kde C je úsečka s krajními body $A = [1; 2]$ a $B = [5; 7]$.

- Příklad 11.1.2 Vypočtěte

$$I = \int_C (8x^2 - 5y^2)\ \mathrm{d}s,$$

kde C je křivka $x = 2\cos t,\ y = 2\sin t,\ t \in \langle 0, \pi\rangle$.

- Příklad 11.1.3 Vypočtěte

$$\int_C (2x + 3y)\ \mathrm{d}s,$$

kde C je úsečka vyťatá na přímce $y = 4x + 8$ souřadnicovými osami.

- Příklad 11.1.4 Vypočtěte

$$I = \int_K xy\ \mathrm{d}s,$$

kde křivka K je obvod trojúhelníku ABC s vrcholy
$A = [1; 2; 3],\ B = [2; 3; 5],\ C = [8; 0; 1]$.

Zpět

Příklad 11.1.1

Vypočtěte křivkový integrál

$$I = \int_C (5x - 9y)\, ds,$$

kde C je úsečka s krajními body $A = [1; 2]$ a $B = [5; 7]$.

? Zpět

Příklad 11.1.1

Vypočtěte křivkový integrál

$$I = \int_C (5x - 9y)\, ds,$$

kde C je úsečka s krajními body $A = [1; 2]$ a $B = [5; 7]$.

Výsledek:

$I = -\frac{51}{2}\sqrt{41}.$.

Zpět

Příklad 11.1.1

Vypočtěte křivkový integrál

$$I = \int_C (5x - 9y)\, ds,$$

kde C je úsečka s krajními body $A = [1; 2]$ a $B = [5; 7]$.

Návod:

Použijte vztah

$$I = \int_C f(x,y)\ \mathrm{d}s = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t), y(t))\, \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\ \mathrm{d}t,$$

kde $\vec{r}(t) = [x(t), y(t)]\,,\ t \in \langle t_1, t_2 \rangle$ je parametrizace křivky C.

Zpět

Příklad 11.1.1

Vypočtěte křivkový integrál

$$I = \int_C (5x - 9y)\, ds,$$

kde C je úsečka s krajními body $A = [1; 2]$ a $B = [5; 7]$.

Řešení:

Použijeme parametrizaci úsečky AB

$$x = 1 + 4t; \quad y = 2 + 5t; \quad t \in \langle 0; 1 \rangle.$$

Potom velikost okamžité rychlosti je

$$v = \sqrt{x'^2 + y'^2} = \sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{16 + 25} = \sqrt{41}$$

a integrál je

$$I = \int_0^1 (5(1 + 4t) - 9(2 + 5t))\sqrt{41}\, dt = \sqrt{41}\Big[-13t - \frac{25}{2}t^2 \Big]_0^1 =$$

$$= \sqrt{41}(-13 - \frac{25}{2}) = -\frac{51}{2}\sqrt{41}.$$

Zpět

Příklad 11.1.1

Vypočtěte křivkový integrál

$$I = \int_C (5x - 9y)\, ds,$$

kde C je úsečka s krajními body $A = [1; 2]$ a $B = [5; 7]$.

Maple:

```
> f:=5*x-9*y:
> x:=1+4*t:
> y:=2+5*t:
> v:=sqrt(diff(x,t)^2+diff(y,t)^2):
> i:=int(f*v,t=0..1);
```

$$i := -\frac{51}{2}\sqrt{41}$$

Zpět

Příklad 11.1.1

Vypočtěte křivkový integrál

$$I = \int_C (5x - 9y)\, ds,$$

kde C je úsečka s krajními body $A = [1; 2]$ a $B = [5; 7]$.

Mathematica:

$\boldsymbol{f = 5x - 9y;}$

$\boldsymbol{x = 1 + 4t;}$

$\boldsymbol{y = 2 + 5t;}$

$\boldsymbol{v = \mathrm{Sqrt}[D[x, t]\hat{}2 + D[y, t]\hat{}2];}$

$\boldsymbol{i = \mathrm{Integrate}[f * v, \{t, 0, 1\}]}$

$-\frac{51\sqrt{41}}{2}$

Zpět

Příklad 11.1.2

Vypočtěte

$$I = \int_C (8x^2 - 5y^2)\ \mathrm{d}s,$$

kde C je křivka $x = 2\cos t,\ \ y = 2\sin t,\ \ t \in \langle 0, \pi \rangle$.

? Zpět

Příklad 11.1.2

Vypočtěte

$$I = \int_C (8x^2 - 5y^2)\ \mathrm{d}s,$$

kde C je křivka $x = 2\cos t,\ \ y = 2\sin t,\ \ t \in \langle 0, \pi \rangle$.

Výsledek:

$I = 12\pi\,.$

Zpět

Příklad 11.1.2

Vypočtěte

$$I = \int_C (8x^2 - 5y^2)\ \mathrm{d}s,$$

kde C je křivka $x = 2\cos t,\ \ y = 2\sin t,\ \ t \in \langle 0, \pi \rangle$.

Návod:

Použijte vztah

$$I = \int_C f(x,y)\ \mathrm{d}s = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t), y(t)) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\ \mathrm{d}t,$$

kde $\vec{r}(t) = [x(t), y(t)]\,,\ t \in \langle t_1, t_2 \rangle$ je parametrizace křivky C.

Zpět

Příklad 11.1.2

Vypočtěte

$$I = \int_C \left(8x^2 - 5y^2\right)\, \mathrm{d}s,$$

kde C je křivka $x = 2\cos t,\ y = 2\sin t,\ t \in \langle 0, \pi \rangle$.

Řešení:

Použijeme zadanou parametrizaci

$$x = 2\cos t,\ y = 2\sin t,\ t \in \langle 0, \pi \rangle.$$

Potom velikost okamžité rychlosti je

$$v = \sqrt{x'^2 + y'^2} = \sqrt{(-2\sin t)^2 + (2\cos t)^2} = 2$$

a integrál je

$$I = \int_0^{\pi} \left(32\cos^2 t - 20\sin^2 t\right) 2\, dt = 12\pi.$$

Zpět

Příklad 11.1.2

Vypočtěte

$$I = \int_C (8x^2 - 5y^2)\,\mathrm{d}s,$$

kde C je křivka $x = 2\cos t,\ y = 2\sin t,\ t \in \langle 0, \pi \rangle$.

Maple:

```
> f:=8*x^2-5*y^2:
> x:=2*cos(t):
> y:=2*sin(t):
> v:=sqrt(diff(x,t)^2+diff(y,t)^2):
> i:=int(f*v,t=0..Pi);
```

$$i := 12\,\pi$$

Zpět

Příklad 11.1.2

Vypočtěte

$$I = \int_C (8x^2 - 5y^2)\ \mathrm{d}s,$$

kde C je křivka $x = 2\cos t,\ \ y = 2\sin t,\ \ t \in \langle 0, \pi \rangle.$

Mathematica:

$\boldsymbol{f = 8x\hat{\ }2 - 5y\hat{\ }2;}$

$\boldsymbol{x = 2\mathrm{Cos}[t];}$

$\boldsymbol{y = 2\mathrm{Sin}[t];}$

$\boldsymbol{v = \mathrm{Sqrt}[D[x,t]\hat{\ }2 + D[y,t]\hat{\ }2];}$

$\boldsymbol{i = \mathrm{Integrate}[f\ v, \{t, 0, \mathrm{Pi}\}]}$

12π

Zpět

Příklad 11.1.3

Vypočtěte

$$\int_C (2x + 3y)\ \mathrm{d}s,$$

kde C je úsečka vyťatá na přímce $y = 4x + 8$ souřadnicovými osami.

? Zpět

Příklad 11.1.3

Vypočtěte

$$\int_C (2x + 3y)\ \mathrm{d}s,$$

kde C je úsečka vyťatá na přímce $y = 4x + 8$ souřadnicovými osami.

Výsledek:

$I = 20\sqrt{17}\,.$

Zpět

Příklad 11.1.3

Vypočtěte

$$\int_C (2x + 3y)\ \mathrm{d}s,$$

kde C je úsečka vyťatá na přímce $y = 4x + 8$ souřadnicovými osami.

Návod:

Použijte vztah

$$I = \int_C f(x, y)\ \mathrm{d}s = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t), y(t)) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\ \mathrm{d}t,$$

kde $\vec{r}(t) = [x(t), y(t)]\,,\ t \in \langle t_1, t_2 \rangle$ je parametrizace křivky C.

Zpět

Příklad 11.1.3

Vypočtěte

$$\int_C (2x+3y)\ \mathrm{d}s,$$

kde C je úsečka vyťatá na přímce $y=4x+8$ souřadnicovými osami.

Řešení:

Použijeme parametrizaci

$$x=t,\ \ y=4t+8,\ \ t\in\langle -2,0\rangle.$$

Potom velikost okamžité rychlosti je

$$v=\sqrt{x'^2+y'^2}=\sqrt{(1)^2+(4)^2}=\sqrt{17}$$

a integrál je

$$I=\int_{-2}^{0}(2t+3(4t+8))\sqrt{17}\ \mathrm{d}t=\sqrt{17}\Big[7t^2+24t\Big]_{-2}^{0}=\sqrt{17}(-28+48)=20\sqrt{17}.$$

Zpět

Příklad 11.1.3

Vypočtěte

$$\int_C (2x + 3y)\ \mathrm{d}s,$$

kde C je úsečka vyťatá na přímce $y = 4x + 8$ souřadnicovými osami.

Maple:

```
> f:=2*x+3*y:
> x:=t:
> y:=4*t+8:
> v:=sqrt(diff(x,t)^2+diff(y,t)^2):
> i:=int(f*v,t=-2..0);
```

$$i := 20\sqrt{17}$$

Zpět

Příklad 11.1.3

Vypočtěte

$$\int_C (2x + 3y)\ \mathrm{d}s,$$

kde C je úsečka vyťatá na přímce $y = 4x + 8$ souřadnicovými osami.

Mathematica:

$\boldsymbol{f = 2x + 3y;}$

$\boldsymbol{x = t;}$

$\boldsymbol{y = 4t + 8;}$

$\boldsymbol{v = \mathrm{Sqrt}[D[x, t]\hat{}2 + D[y, t]\hat{}2];}$

$\boldsymbol{i = \mathrm{Integrate}[f * v, \{t, -2, 0\}]}$

$2\sqrt{17}(-3 + 3\mathrm{Cos}[2] + 2\mathrm{Sin}[2])$

Zpět

Příklad 11.1.4

Vypočtěte

$$I = \int\limits_K xy \, \mathrm{d}s,$$

kde křivka K je obvod trojúhelníku ABC s vrcholy
$A = [1; 2; 3],\ B = [2; 3; 5],\ C = [8; 0; 1].$

? Zpět

Příklad 11.1.4

Vypočtěte

$$I = \int\limits_K xy \, \mathrm{d}s,$$

kde křivka K je obvod trojúhelníku ABC s vrcholy
$A = [1; 2; 3],\ B = [2; 3; 5],\ C = [8; 0; 1]$.

Výsledek:

$I = \frac{23}{6}\sqrt{6} + \frac{10}{3}\sqrt{57} + 6\sqrt{61}\,.$ Zpět

Příklad 11.1.4

Vypočtěte

$$I = \int_K xy \, \mathrm{d}s,$$

kde křivka K je obvod trojúhelníku ABC s vrcholy
$A = [1; 2; 3]$, $B = [2; 3; 5]$, $C = [8; 0; 1]$.

Návod:

Křivkový integrál přes tři úsečky nahradíme součtem třech integrálů přes jednotlivé úsečky. Na každý z těchto třech integrálu použijeme vztah

$$I = \int_K f(x, y, z) \, \mathrm{d}s = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} \, \mathrm{d}t.$$

kde $\vec{r}(t) = [x(t), y(t), z(t)]$, $t \in \langle t_1, t_2 \rangle$ je parametrizace křivky C.

Zpět

Příklad 11.1.4

Vypočtěte

$$I = \int_K xy \; \mathrm{d}s,$$

kde křivka K je obvod trojúhelníku ABC s vrcholy
$A = [1; 2; 3]$, $B = [2; 3; 5]$, $C = [8; 0; 1]$.

Řešení:

Pro parametrizaci úsečky AB použijeme vztah $X = A + t(B - A)$, kde $t \in \langle 0; 1\rangle$, tedy
$x = 1 + t$; $y = 2 + t$; $z = 3 + 2t$. Velikost rychlosti probíhání úsečky AB je

$$v = ||B - A|| = \sqrt{6}$$

a integrál přes úsečku AB je

$$I_{AB} = \int_0^1 (1+t)(2+t)\sqrt{6} \; \mathrm{d}t = \sqrt{6}\left[2t + \frac{3}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3\right]_0^1 = \frac{23}{6}\sqrt{6}.$$

Obdobně spočteme integrály přes úsečku BC a přes úsečku CA a tyto tři integrály sečteme a dostaneme

$$I = I_{AB} + I_{BC} + I_{CA} = \frac{23}{6}\sqrt{6} + \frac{10}{3}\sqrt{57} + 6\sqrt{61}.$$

Zpět

Příklad 11.1.4

Vypočtěte

$$I = \int_K xy \, \mathrm{d}s,$$

kde křivka K je obvod trojúhelníku ABC s vrcholy
$A = [1; 2; 3]$, $B = [2; 3; 5]$, $C = [8; 0; 1]$.

Maple:

```
> a:=[1,2,3]: b:=[2,3,5]: c:=[8,0,1]:
> f:=x->x[1]*x[2]:
> j:=(p,q)->int(f(evalm(p+t*(q-p)))*linalg[norm](q-p,2),t=0..1):
> i:=j(a,b)+j(b,c)+j(c,a);
```

$$i := \frac{23}{6}\sqrt{6} + 6\sqrt{61} + 10/3\sqrt{57}$$

Zpět

Příklad 11.1.4

Vypočtěte

$$I = \int_K xy \; \mathrm{d}s,$$

kde křivka K je obvod trojúhelníku ABC s vrcholy
$A = [1; 2; 3]$, $B = [2; 3; 5]$, $C = [8; 0; 1]$.

Mathematica:

```
A = {1, 2, 3}; B = {2, 3, 5}; CC = {8, 0, 1};
f[{x_, y_, z_}]:=x y;
j[p_, q_]:=Integrate[f[p + t * (q - p)] * Norm[q - p],{t, 0, 1}];
i = j[A, B] + j[B, CC] + j[CC, A]
```

$$\frac{23}{\sqrt{6}} + 10\sqrt{\frac{19}{3}} + 6\sqrt{61}$$

Zpět

Výpočet křivkového integrálu vektorového pole

- Příklad 11.2.1 Zjistěte, zda je vektorové pole $\vec{F}(x, y) = (y^2, x)$ potenciální, a vypočtěte křivkový integrál $I = \int\limits_C \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$, kde C je část paraboly $y = x^2$ s počátečním bodem $(0, 0)$ a koncovým bodem $(1, 1)$.
- Příklad 11.2.2 Zjistěte, zda je vektorové pole $\vec{F}(x, y) = (y^2, 2xy)$ potenciální, a vypočtěte křivkový integrál $I = \int\limits_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, kde C je jednotková kružnice obíhaná v kladném směru.
- Příklad 11.2.3 Zjistěte, zda je vektorové pole $\vec{F}(x, y, z) = (2, 6, 5)$ potenciální, a vypočtěte křivkový integrál $I = \int\limits_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, kde C je jeden závit šroubovice $x = \sin t, \quad y = \cos t, \quad z = t, \quad t_1 = 0, \quad t_2 = 2\pi.$

Zpět

Příklad 11.2.1

Zjistěte, zda je vektorové pole $\vec{F}(x,y) = (y^2, x)$ potenciální, a vypočtěte křivkový integrál $I = \int\limits_C \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$, kde C je část paraboly $y = x^2$ s počátečním bodem $(0,0)$ a koncovým bodem $(1,1)$.

? Zpět

Příklad 11.2.1

Zjistěte, zda je vektorové pole $\vec{F}(x,y) = (y^2, x)$ potenciální, a vypočtěte křivkový integrál $I = \int\limits_C \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$, kde C je část paraboly $y = x^2$ s počátečním bodem $(0,0)$ a koncovým bodem $(1,1)$.

Výsledek:

Toto vektorové pole není potenciální a $I = \frac{13}{15}$.

Zpět

Příklad 11.2.1

Zjistěte, zda je vektorové pole $\vec{F}(x,y) = (y^2, x)$ potenciální, a vypočtěte křivkový integrál $I = \int\limits_C \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$, kde C je část paraboly $y = x^2$ s počátečním bodem $(0,0)$ a koncovým bodem $(1,1)$.

Návod:

Porovnejte $\frac{\partial F_1}{\partial y}$ a $\frac{\partial F_2}{\partial x}$. Pro výpočet integrálu použijte vztah
$I = \int\limits_C \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int\limits_C (F_1 \,\mathrm{d}x + F_2 \,\mathrm{d}y)$.

Zpět

Příklad 11.2.1

Zjistěte, zda je vektorové pole $\vec{F}(x,y) = (y^2, x)$ potenciální, a vypočtěte křivkový integrál $I = \int\limits_C \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$, kde C je část paraboly $y = x^2$ s počátečním bodem $(0,0)$ a koncovým bodem $(1,1)$.

Řešení:

Označíme si složky pole $F_1(x,y) = y^2$ a $F_2(x,y) = x$ a spočteme parciální derivace

$$\frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) = 2y \qquad \frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) = 1.$$

Ty se nerovnají, proto pole $\vec{F}$ není potenciální a integrál závisí na integrační cestě (proto ji nemůžeme změnit). Pro výpočet integrálu zvolíme parametrizaci

$$x = t, \quad y = t^2, \quad t \in \langle 0, 1 \rangle.$$

Odtud

$$v_1 = x' = 1, \quad v_2 = y' = 2t,$$

takže

$$dx = v_1\,dt = dt, \quad dy = v_2\,dt = 2\,t\,dt$$

Další

Příklad 11.2.1

Zjistěte, zda je vektorové pole $\vec{F}(x,y) = (y^2, x)$ potenciální, a vypočtěte křivkový integrál $I = \int\limits_C \vec{F} \cdot \vec{dr}$, kde C je část paraboly $y = x^2$ s počátečním bodem $(0,0)$ a koncovým bodem $(1,1)$.

Řešení:

a integrál je

$$I = \int\limits_C \vec{F} \cdot \vec{dr} = \int\limits_C (F_1\, dx + F_2\, dy) = \int\limits_0^1 ((t^2)^2 + t\,2\,t)\, dt = \int\limits_0^1 (t^4 + 2t^2)\, dt =$$

$$= \left[\frac{t^5}{5} + \frac{2}{3}t^3\right]_0^1 = \frac{1}{5} + \frac{2}{3} = \frac{13}{15}.$$

Zpět

Příklad 11.2.1

Zjistěte, zda je vektorové pole $\vec{F}(x,y) = (y^2, x)$ potenciální, a vypočtěte křivkový integrál $I = \int\limits_C \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$, kde C je část paraboly $y = x^2$ s počátečním bodem $(0,0)$ a koncovým bodem $(1,1)$.

Maple:

```
> f1:=y^2: f2:=x: x:=t: y:=t^2:
> v1:=diff(x,t): v2:=diff(y,t):
> i:=int(f1*v1+f2*v2,t=0..1);
```

$$i := \frac{13}{15}$$

Zpět

Příklad 11.2.1

Zjistěte, zda je vektorové pole $\vec{F}(x,y) = (y^2, x)$ potenciální, a vypočtěte křivkový integrál $I = \int\limits_C \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$, kde C je část paraboly $y = x^2$ s počátečním bodem $(0,0)$ a koncovým bodem $(1,1)$.

Mathematica:

f1 = *y*^2; f2 = *x*; *x* = *t*; *y* = *t*^2;

v1 = *D*[*x*, *t*]; v2 = *D*[*y*, *t*];

***i* = Integrate[f1 * v1 + f2 * v2, {*t*, 0, 1}]**

$\frac{13}{15}$

Zpět

Příklad 11.2.2

Zjistěte, zda je vektorové pole $\vec{F}(x,y) = (y^2, 2xy)$ potenciální, a vypočtěte křivkový integrál $I = \int\limits_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, kde C je jednotková kružnice obíhaná v kladném směru.

? Zpět

Příklad 11.2.2

Zjistěte, zda je vektorové pole $\vec{F}(x,y) = (y^2, 2xy)$ potenciální, a vypočtěte křivkový integrál $I = \int\limits_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, kde C je jednotková kružnice obíhaná v kladném směru.

Výsledek:

Toto vektorové pole je potenciální a $I = 0$.

Zpět

Příklad 11.2.2

Zjistěte, zda je vektorové pole $\vec{F}(x,y) = (y^2, 2xy)$ potenciální, a vypočtěte křivkový integrál $I = \int\limits_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, kde C je jednotková kružnice obíhaná v kladném směru.

Návod:

Porovnejte $\frac{\partial F_1}{\partial y}$ a $\frac{\partial F_2}{\partial x}$. Křivkový integrál vektorového pole, které má potenciál (nutno ověřit), po uzavřené křivce (nutno ověřit) je nulový.

Zpět

Příklad 11.2.2

Zjistěte, zda je vektorové pole $\vec{F}(x,y) = (y^2, 2xy)$ potenciální, a vypočtěte křivkový integrál $I = \int\limits_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, kde C je jednotková kružnice obíhaná v kladném směru.

Řešení:

Označíme si složky pole $F_1 = y^2$ a $F_2 = 2xy$ a spočteme parciální derivace

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = 2y$$

a

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = 2y.$$

Ty se rovnají na $\mathbb{R}^2$, což je jednoduše souvislá množina, proto pole $\vec{F}$ má na $\mathbb{R}^2$ potenciál a integrál po uzavřené křivce (což zadaná křivka je) je rovný nule.

Zpět

Příklad 11.2.2

Zjistěte, zda je vektorové pole $\vec{F}(x,y) = (y^2, 2xy)$ potenciální, a vypočtěte křivkový integrál $I = \int\limits_C \vec{F} \cdot \vec{dr}$, kde C je jednotková kružnice obíhaná v kladném směru.

Maple:

Ověříme si zda je pole potenciální

```
> f1:=y^2: f2:=2*x*y:
> diff(f1,y)-diff(f2,x);
```

$$0$$

Zpět

Příklad 11.2.2

Zjistěte, zda je vektorové pole $\vec{F}(x,y) = (y^2, 2xy)$ potenciální, a vypočtěte křivkový integrál $I = \int\limits_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, kde C je jednotková kružnice obíhaná v kladném směru.

Mathematica:

Ověříme si zda je pole potenciální

```
f1 = y^2; f2 = 2x * y;
```

```
D[f1, y]==D[f2, x]
```

True

Zpět

Příklad 11.2.3

Zjistěte, zda je vektorové pole $\vec{F}(x, y, z) = (2, 6, 5)$ potenciální, a vypočtěte křivkový integrál $I = \int\limits_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, kde C je jeden závit šroubovice

$x = \sin t, \quad y = \cos t, \quad z = t, \quad t_1 = 0, \quad t_2 = 2\pi.$

? Zpět

Příklad 11.2.3

Zjistěte, zda je vektorové pole $\vec{F}(x, y, z) = (2, 6, 5)$ potenciální, a vypočtěte křivkový integrál $I = \int\limits_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, kde C je jeden závit šroubovice

$x = \sin t, \quad y = \cos t, \quad z = t, \quad t_1 = 0, \quad t_2 = 2\pi.$

Výsledek:

Toto vektorové pole je potenciální a $I = 10\pi$.

Zpět

Příklad 11.2.3

Zjistěte, zda je vektorové pole $\vec{F}(x,y,z) = (2,6,5)$ potenciální, a vypočtěte křivkový integrál $I = \int\limits_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, kde C je jeden závit šroubovice

$x = \sin t, \quad y = \cos t, \quad z = t, \quad t_1 = 0, \quad t_2 = 2\pi.$

Návod:

Porovnejte $\frac{\partial F_1}{\partial y}$ a $\frac{\partial F_2}{\partial x}$. Křivkový integrál vektorového pole, které má potenciál (nutno ověřit), nezávisí na integrační cestě.

Zpět

Příklad 11.2.3

Zjistěte, zda je vektorové pole $\vec{F}(x, y, z) = (2, 6, 5)$ potenciální, a vypočtěte křivkový integrál $I = \int\limits_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, kde C je jeden závit šroubovice
$x = \sin t, \quad y = \cos t, \quad z = t, \quad t_1 = 0, \quad t_2 = 2\pi.$

Řešení:

Označíme si složky pole $F_1 = 2$, $F_2 = 6$ a $F_3 = 5$. Všechny jejich první parciální derivace jsou nulové, tedy platí

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial y}$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial x}$$

na $\mathbb{R}^3$, což je jednoduše souvislá množina, proto pole $\vec{F}$ má na $\mathbb{R}^3$ potenciál a integrál nezávisí na integrační cestě. Proto můžeme místo po šroubovici integrovat po úsečce spojující její počáteční bod $(1, 0, 0)$ a její koncový bod $(1, 0, 2\pi)$. Zvolíme její parametrizaci

$$x = 1, \quad y = 0, \quad z = t, \quad t_1 = 0, \quad t_2 = 2\pi.$$

Další

Příklad 11.2.3

Zjistěte, zda je vektorové pole $\vec{F}(x, y, z) = (2, 6, 5)$ potenciální, a vypočtěte křivkový integrál $I = \int\limits_C \vec{F} \cdot \vec{dr}$, kde C je jeden závit šroubovice
$x = \sin t, \quad y = \cos t, \quad z = t, \quad t_1 = 0, \quad t_2 = 2\pi.$

Řešení:

Potom

$$dx = 0, \quad dy = 0, \quad dz = dt$$

a integrál je

$$I = \int\limits_C \vec{F} \cdot \vec{dr} = \int\limits_0^{2\pi} 5 \; dt = 10\pi.$$

Poznámka:
V tomto výjimečně jednoduchém případě je snadné integrovat i po původní křivce, tedy po šroubovici a dostaneme

$$I = \int\limits_C \vec{F} \cdot \vec{dr} = \int\limits_C (F_1 \; dx + F_2 \; dy + F_3 \; dz) = \int\limits_0^{2\pi} (2(-\sin t) + 6(\cos t) + 5) \; dt = 10\pi,$$

tedy stejný výsledek.

Zpět

Příklad 11.2.3

Zjistěte, zda je vektorové pole $\vec{F}(x,y,z) = (2,6,5)$ potenciální, a vypočtěte křivkový integrál $I = \int\limits_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$, kde C je jeden závit šroubovice

$x = \sin t, \quad y = \cos t, \quad z = t, \quad t_1 = 0, \quad t_2 = 2\pi.$

Maple:

Nejdříve výpočet integrálu po úsečce (vektorové pole je potenciální):

```
> f1:=2: f2:=6: f3:=5:
> x:=1: y:=0: z:=t:
> v1:=diff(x,t): v2:=diff(y,t): v3:=diff(z,t):
> i:=int(f1*v1+f2*v2+f3*v3,t=0..2*Pi);
```

$$i := 10\,\pi$$

Nyní výpočet integrálu po šroubovici:

```
> f1:=2: f2:=6: f3:=5:
> x:=cos(t): y:=sin(t): z:=t:
> v1:=diff(x,t): v2:=diff(y,t): v3:=diff(z,t):
> i:=int(f1*v1+f2*v2+f3*v3,t=0..2*Pi);
```

$$i := 10\,\pi$$

Zpět

Příklad 11.2.3

Zjistěte, zda je vektorové pole $\vec{F}(x,y,z) = (2,6,5)$ potenciální, a vypočtěte křivkový integrál $I = \int\limits_C \vec{F} \cdot \vec{dr}$, kde C je jeden závit šroubovice
$x = \sin t, \quad y = \cos t, \quad z = t, \quad t_1 = 0, \quad t_2 = 2\pi.$

Mathematica:

Nejdříve výpočet integrálu po úsečce (vektorové pole je potenciální):

f1 = 2; f2 = 6; f3 = 5;
***x* = 1; *y* = 0; *z* = *t*;**
v1 = *D*[*x*, *t*]; v2 = *D*[*y*, *t*]; v3 = *D*[*z*, *t*];
f1 = 2; f2 = 6; f3 = 5;
***i* = Integrate[f1 * v1 + f2 * v2 + f3 * v3, {*t*, 0, 2 * Pi}]**

10π

Nyní výpočet integrálu po šroubovici:

f1 = 2; f2 = 6; f3 = 5;
***x* = Cos[*t*]; *y* = Sin[*t*]; *z* = *t*;**
v1 = *D*[*x*, *t*]; v2 = *D*[*y*, *t*]; v3 = *D*[*z*, *t*];
***i* = Integrate[f1 * v1 + f2 * v2 + f3 * v3, {*t*, 0, 2 * Pi}]**

10π

Zpět

Výpočet potenciálu

- **Příklad 11.3.1** Ověřte, že vektorové pole $\vec{F}(x,y) = (2x+y, 3y^2+x)$ má potenciál na nějaké jednoduše souvislé množině G a najděte potenciál i množinu G.
- **Příklad 11.3.2** Ověřte, že vektorové pole $\vec{F}(x,y,z) = (y^2z^3, 2xyz^3, 3xy^2z^2)$ má potenciál na nějaké jednoduše souvislé množině G a najděte potenciál i množinu G.

Zpět

Příklad 11.3.1

Ověřte, že vektorové pole $\vec{F}(x, y) = (2x + y, 3y^2 + x)$ má potenciál na nějaké jednoduše souvislé množině G a najděte potenciál i množinu G.

? Zpět

Příklad 11.3.1

Ověřte, že vektorové pole $\vec{F}(x,y) = (2x + y, 3y^2 + x)$ má potenciál na nějaké jednoduše souvislé množině G a najděte potenciál i množinu G.

Výsledek:

Pole $\vec{F}$ má potenciál $U(x,y) = x^2 + y^3 + xy$ na množině $G = \mathbb{R}^2$.

Zpět

Příklad 11.3.1

Ověřte, že vektorové pole $\vec{F}(x,y) = (2x + y, 3y^2 + x)$ má potenciál na nějaké jednoduše souvislé množině G a najděte potenciál i množinu G.

Návod:

Porovnejte $\frac{\partial F_1}{\partial y}$ a $\frac{\partial F_2}{\partial x}$. Potenciál U vektorového pole $\vec{F}$ je takové skalární pole U, pro které platí grad $U = \vec{F}$.

Zpět

Příklad 11.3.1

Ověřte, že vektorové pole $\vec{F}(x,y) = (2x+y, 3y^2+x)$ má potenciál na nějaké jednoduše souvislé množině G a najděte potenciál i množinu G.

Řešení:

Označíme si složky pole $F_1 = 2x + y$ a $F_2 = 3y^2 + x$ a spočteme parciální derivace

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = 1 \qquad \frac{\partial F_2}{\partial x} = 1.$$

Ty se rovnají na $\mathbb{R}^2$, což je jednoduše souvislá množina, proto pole $\vec{F}$ má na $\mathbb{R}^2$ potenciál. Potenciál můžeme nalézt dvojím způsobem:

(a) pomocí křivkového integrálu,

(b) řešením soustavy parciálních diferenciálních rovnic.

Ukážeme si oba způsoby, nejprve pomocí křivkového integrálu.

(a) Je výhodné zvolit si integrační cestu sestávající ze dvou úseček rovnoběžných se souřadnicovými osami. Zvolme si počáteční bod v počátku a obecný koncový bod označme $(\tilde{x}, \tilde{y})$. Potom parametrizace úseček C_1, C_2 mohou být

$$\begin{aligned} C_1: &\quad x = t, \quad y = 0, \quad t_1 = 0, \quad t_2 = \tilde{x}, \quad \text{pak} \quad dx = dt, \quad dy = 0,\\ C_2: &\quad x = \tilde{x}, \quad y = t, \quad t_1 = 0, \quad t_2 = \tilde{y}, \quad \text{pak} \quad dx = 0, \quad dy = dt. \end{aligned}$$

Pro potenciál U platí

$$U(\tilde{x},\tilde{y}) - U(0,0) = \int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_C (F_1 dx + F_2 dy) = \int_{C_1} (F_1 dx + F_2 dy) + \int_{C_2} (F_1 dx + F_2 dy) =$$

$$= \int_0^{\tilde{x}} 2t\,dt + \int_0^{\tilde{y}} (3t^2 + \tilde{x})\,dt = \Big[t^2\Big]_0^{\tilde{x}} + \Big[t^3 + \tilde{x}t\Big]_0^{\tilde{y}} = \tilde{x}^2 + \tilde{y}^3 + \tilde{x}\tilde{y}.$$

Další

Příklad 11.3.1

Ověřte, že vektorové pole $\vec{F}(x, y) = (2x + y, 3y^2 + x)$ má potenciál na nějaké jednoduše souvislé množině G a najděte potenciál i množinu G.

Řešení:

Takže potenciál je

$$U(x, y) = x^2 + y^3 + xy + c.$$

(b) Potenciál lze také najít z podmínky grad $U = \vec{F}$, tedy řešením soustavy dvou parciálních diferenciálních rovnic

$$\frac{\partial U}{\partial x} = F_1 \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = F_2,$$

tedy

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 2x + y \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = 3y^2 + x.$$

Integrací první rovnice dostaneme

$$U = \int (2x + y)\, dx = x^2 + xy + k(y).$$

Zde $k(y)$ nezávisí na x, ale může záviset na y. Najdeme ji použitím druhé rovnice:

$$\frac{\partial U}{\partial y} = 3y^2 + x. \text{ tedy } x + k'(y) = 3y^2 + x \Rightarrow k'(y) = 3y^2 \Rightarrow k(y) = \int 3y^2\, dy = y^3 + c.$$

Takže potenciál je

$$U(x, y) = x^2 + xy + y^3 + c.$$

Zpět

Příklad 11.3.1

Ověřte, že vektorové pole $\vec{F}(x,y) = (2x+y, 3y^2+x)$ má potenciál na nějaké jednoduše souvislé množině G a najděte potenciál i množinu G.

Maple:

```
> f1:=2*x+y: f2:=3*y*y+x:
> linalg[potential]([f1,f2],[x,y],u);
```

$$true$$

```
> u;
```

$$x^2 + yx + y^3$$

Zpět

Příklad 11.3.1

Ověřte, že vektorové pole $\vec{F}(x,y) = (2x + y, 3y^2 + x)$ má potenciál na nějaké jednoduše souvislé množině G a najděte potenciál i množinu G.

Mathematica:

$\mathbf{v1 = \boldsymbol{D}[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t}]; v2 = \boldsymbol{D}[\boldsymbol{y}, \boldsymbol{t}]; v3 = \boldsymbol{D}[\boldsymbol{z}, \boldsymbol{t}];}$

$\mathbf{\boldsymbol{i} = Integrate[f1 * v1 + f2 * v2 + f3 * v3, \{\boldsymbol{t}, 0, 2 * Pi\}]}$

10π

$\mathbf{f1 = 2\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}; f2 = 3\boldsymbol{y}\hat{}2 + \boldsymbol{x};}$

$\mathbf{\boldsymbol{D}[f1, \boldsymbol{y}]{==}\boldsymbol{D}[f2, \boldsymbol{x}]}$

True

Vektorové pole je tedy potenciální. Potenciál vypočteme pomocí křivkového integrálu.

$\mathbf{\boldsymbol{x} = \boldsymbol{t}; \boldsymbol{y} = 0;}$

$\mathbf{v1 = \boldsymbol{D}[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t}]; v2 = \boldsymbol{D}[\boldsymbol{y}, \boldsymbol{t}];}$

$\mathbf{i1 = Integrate[f1 * v1 + f2 * v2, \{\boldsymbol{t}, 0, x1\}];}$

$\mathbf{\boldsymbol{x} = x1; \boldsymbol{y} = \boldsymbol{t};}$

$\mathbf{v1 = \boldsymbol{D}[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t}]; v2 = \boldsymbol{D}[\boldsymbol{y}, \boldsymbol{t}];}$

$\mathbf{i2 = Integrate[f1 * v1 + f2 * v2, \{\boldsymbol{t}, 0, y1\}];}$

$\mathbf{\boldsymbol{u} = i1 + i2}$

$\mathrm{x1}^2 + \mathrm{x1y1} + \mathrm{y1}^3$

Zpět

Příklad 11.3.2

Ověřte, že vektorové pole $\vec{F}(x, y, z) = (y^2z^3, 2xyz^3, 3xy^2z^2)$ má potenciál na nějaké jednoduše souvislé množině G a najděte potenciál i množinu G.

? Zpět

Příklad 11.3.2

Ověřte, že vektorové pole $\vec{F}(x, y, z) = (y^2 z^3, 2xyz^3, 3xy^2 z^2)$ má potenciál na nějaké jednoduše souvislé množině G a najděte potenciál i množinu G.

Výsledek:

Pole $\vec{F}$ má potenciál $U(x, y, z) = xy^2 z^3$ na množině $G = \mathbb{R}^3$.

Zpět

Příklad 11.3.2

Ověřte, že vektorové pole $\vec{F}(x,y,z) = (y^2z^3, 2xyz^3, 3xy^2z^2)$ má potenciál na nějaké jednoduše souvislé množině G a najděte potenciál i množinu G.

Návod:

Porovnejte $\frac{\partial F_1}{\partial y}$ a $\frac{\partial F_2}{\partial x}$, $\frac{\partial F_1}{\partial z}$ a $\frac{\partial F_3}{\partial x}$, $\frac{\partial F_2}{\partial z}$ a $\frac{\partial F_3}{\partial y}$. Potenciál U vektorového pole $\vec{F}$ je takové skalární pole U, pro které platí grad $U = \vec{F}$.

Zpět

Příklad 11.3.2

Ověřte, že vektorové pole $\vec{F}(x, y, z) = (y^2z^3, 2xyz^3, 3xy^2z^2)$ má potenciál na nějaké jednoduše souvislé množině G a najděte potenciál i množinu G.

Řešení:

Označíme si složky pole $F_1 = y^2z^3$, $F_2 = 2xyz^3$, $F_3 = 3xy^2z^2$ a spočteme parciální derivace

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = 2yz^3, \ \frac{\partial F_2}{\partial x} = 2yz^3; \quad \frac{\partial F_1}{\partial z} = 3y^2z^2, \ \frac{\partial F_3}{\partial x} = 3y^2z^2; \quad \frac{\partial F_2}{\partial z} = 6xyz^2, \ \frac{\partial F_3}{\partial y} = 6xyz^2.$$

Vidíme, že

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}, \qquad \frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial x}, \qquad \frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial y}$$

na $\mathbb{R}^3$, což je jednoduše souvislá množina, proto pole $\vec{F}$ má na $\mathbb{R}^3$ potenciál. Potenciál najdeme pomocí křivkového integrálu. Je výhodné zvolit si integrační cestu sestávající ze tří úseček rovnoběžných se souřadnicovými osami. Zvolme si počáteční bod v počátku a obecný koncový bod označme $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$. Potom parametrizace úseček C_1, C_2, C_3 mohou být

$$C_1: \quad x = t, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad t_1 = 0, \quad t_2 = \tilde{x} \ \Rightarrow \ dx = dt, \quad dy = 0, \quad dz = 0,$$

$$C_2: \quad x = \tilde{x}, \quad y = t, \quad z = 0, \quad t_1 = 0, \quad t_2 = \tilde{y} \ \Rightarrow \ dx = 0, \quad dy = dt, \quad dz = 0,$$

$$C_3: \quad x = \tilde{x}, \quad y = \tilde{y}, \quad z = t, \quad t_1 = 0, \quad t_2 = \tilde{z} \ \Rightarrow \ dx = 0, \quad dy = 0, \quad dz = dt.$$

Další

Příklad 11.3.2

Ověřte, že vektorové pole $\vec{F}(x, y, z) = (y^2 z^3, 2xyz^3, 3xy^2 z^2)$ má potenciál na nějaké jednoduše souvislé množině G a najděte potenciál i množinu G.

Řešení:

Takže pro potenciál U platí

$$U(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) - U(0, 0, 0) = \int_C \vec{F} \cdot \vec{dr} = \int_C (F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz) =$$

$$= \int_{C_1} (F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz) + \int_{C_2} (F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz) + \int_{C_3} (F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz) =$$

$$= 0 + 0 + \int_0^{\tilde{z}} 3\tilde{x}\tilde{y}^2 t^2 \, dt = \left[\tilde{x}\tilde{y}^2 t^3 \right]_0^{\tilde{z}} = \tilde{x}\tilde{y}^2 \tilde{z}^3.$$

Takže potenciál je

$$U(x, y, z) = xy^2 z^3 + c.$$

Zpět

Příklad 11.3.2

Ověřte, že vektorové pole $\vec{F}(x, y, z) = (y^2 z^3, 2xyz^3, 3xy^2 z^2)$ má potenciál na nějaké jednoduše souvislé množině G a najděte potenciál i množinu G.

Maple:

```
> f1:=y^2*z^3: f2:=2*x*y*z^3: f3:=3*x*y^2*z^2:
> linalg[potential]([f1,f2,f3],[x,y,z],'u');
```

$$true$$

```
> u;
```

$$y^2 z^3 x$$

Zpět

Příklad 11.3.2

Ověřte, že vektorové pole $\vec{F}(x,y,z) = (y^2z^3, 2xyz^3, 3xy^2z^2)$ má potenciál na nějaké jednoduše souvislé množině G a najděte potenciál i množinu G.

Mathematica:

```
f1 = y^2 * z^3;  f2 = 2 * x * y * z^3; f3 = 3 * x * y^2 * z^2;
```

```
D[f1, y]==D[f2, x]
```

True

```
D[f1, z]==D[f3, x]
```

True

```
D[f2, z]==D[f3, y]
```

True

Vektorové pole je tedy potenciální. Potenciál vypočteme pomocí křivkového integrálu.

```
x = t; y = 0; z = 0;
v1 = D[x, t]; v2 = D[y, t]; v3 = D[z, t];
i1 = Integrate[f1 * v1 + f2 * v2 + f3 * v3, {t, 0, x1}];
x = x1; y = t; z = 0;
v1 = D[x, t]; v2 = D[y, t]; v3 = D[z, t];
i2 = Integrate[f1 * v1 + f2 * v2 + f3 * v3, {t, 0, y1}];
x = x1; y = y1; z = t;
v1 = D[x, t]; v2 = D[y, t]; v3 = D[z, t];
```

Další

Příklad 11.3.2

Ověřte, že vektorové pole $\vec{F}(x, y, z) = (y^2 z^3, 2xyz^3, 3xy^2 z^2)$ má potenciál na nějaké jednoduše souvislé množině G a najděte potenciál i množinu G.

Mathematica:

$\mathbf{i3 = Integrate[f1 * v1 + f2 * v2 + f3 * v3, \{\boldsymbol{t}, 0, z1\}];}$

$\boldsymbol{u} \mathbf{= i1 + i2 + i3}$

$\mathrm{x1y1^2z1^3}$

Zpět