Matematika pro chemické inženýry

Drahoslava Janovská

10. Soustavy lineárních DR s konstantními koeficienty.

Řešení lineárních soustav DR pomocí vlastních čísel, vlastních a zobecněných vlastních vektorů.

Fázové portréty lineárních soustav v rovině

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Povinná látka. Bude v písemkách a bude se zkoušet při ústní zkoušce (žádné označení)

★ Příklady k procvičení - dobrovolné

★ Pro studenty, kteří chtějí vědět víc. Tato látka se nebude přednášet, nebude v písemkách, nebude se zkoušet.

Obsah

Několik připomenutí úvodem

Lineární soustavy diferenciálních rovnic vznikají jako modely systémů, ve kterých je vstup přímo úměrný výstupu.

Lineární zobrazení

Necht U, V jsou lineární prostory. Zobrazení $\mathcal{L} : U \longrightarrow V$ je lineární $\Longleftrightarrow$

1. $\mathcal{L}(u+v) = \mathcal{L}(u) + \mathcal{L}(v) \quad \forall u, v \in U$,
2. $\mathcal{L}(cu) = c\,\mathcal{L}(u) \quad \forall u \in U \; \forall c \in \mathbb{R}$.

Příklad Necht zobrazení $\mathcal{L} : \mathcal{C}^2(I) \longrightarrow \mathcal{C}(I)$ je dáno předpisem $\mathcal{L}(f) = \alpha f'' + \beta f' + \gamma f$. $\mathcal{L}$ je diferenciální operátor 2. řádu. Ukažte, že je lineární.

1. $f, g \in \mathcal{C}^2(I)$, $\mathcal{L}(f+g) = \alpha(f+g)'' + \beta(f+g)' + \gamma(f+g) = \alpha(f''+g'') + \beta(f'+g') + \gamma(f+g) = \alpha f'' + \beta f' + \gamma f + \alpha g'' + \beta g' + \gamma g = \mathcal{L}(f) + \mathcal{L}(g)$.
2. $f \in \mathcal{C}^2(I), c \in \mathbb{R}$, $\mathcal{L}(cf) = (cf)'' + (cf)' + (cf) = cf'' + cf' + cf = c(f'' + f' + f) = c\,\mathcal{L}(f)$.

Cvičení Obdobně ukažte, že zobrazení $\mathcal{L} : U \longrightarrow V$ definované předpisem $\mathcal{L}(f) = \displaystyle\int_a^b f \mathrm{d}x$ je lineární. Co jsou v tomto případě prostory U a V?

Lineární zobrazení v konečné dimenzi

Věta Zobrazení $\mathcal{L} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ je lineární $\Longleftrightarrow$ je reprezentováno maticí $\mathbf{A}_{m\times n}$, t.j. $\mathcal{L}\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{A}\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$.

Aplikace na soustavu lineárních diferenciálních rovnic

Je-li $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ lineární zobrazení, je

$$f_i(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \quad \text{pro } i = 1, \ldots, n, \qquad \mathbf{A} = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^{n}, \ \text{t.j.} \ \mathbf{A}_{n\times n}.$$

Pak vektorové pole je zadáno maticově:

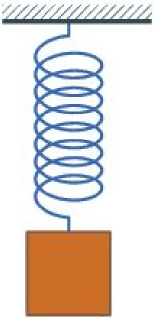
$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}, \qquad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,$$

a diferenciální rovnice má tvar

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{A}\mathbf{x}.$$

★ Harmonický oscilátor

Příklad Harmonický oscilátor modeluje pohyb hmoty připevněné k pružině. Na pružinu působí (lineární) síla $F = -k(x - L)$, kde L je délka pružiny v rovnovážném stavu, k je materiálový koeficient.



Newtonův zákon pohybu pro pružinu má tvar $m\ddot{x} = F = -k(x - L)$ ... diferenciální rovnice 2. řádu, ale není lineární, ale pouze afinní, protože v rovnici pro vektorové pole F je člen kL a rovnice je lineární pouze pro $kL = 0$. Přesto můžeme rovnici zlinearizovat odečtením rovnovážného stavu $x^* = L$: Necht $\xi = x - x^*$ je odchylka od ekvilibria. Pak $\dot{\xi} = \dot{x}$ a $\ddot{\xi} = \ddot{x}$. Dostaneme $m\ddot{\xi} = -k(x - x^*) \implies \ddot{\xi} = -\frac{k}{m} \cdot \xi$.

★

Lineární diferenciální rovnici 2. řádu

$$\ddot{\xi} = -\frac{k}{m} \cdot \xi. \tag{1}$$

převedeme na soustavu dvou diferenciálních rovnic 1. řádu:

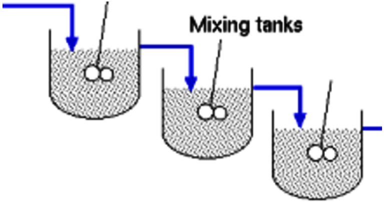
$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \eta \\ \dot{\eta} &= \ddot{\xi} = -\frac{k}{m}\xi \end{aligned} \quad \text{t.j.} \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Cvičení Vyřešte rovnici (1) jako lineární diferenciální rovnici 2. řádu a rovnici (2) jako soustavu dvou diferenciálních rovnic 1. řádu a řešení porovnejte.

Poznámka: Vlastní čísla matice soustavy:

$$\det\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + \frac{k}{m} \Longrightarrow \lambda_{1,2} = \pm \mathrm{i}\sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Kaskáda ideálních mísičů s přívodem stopovací látky



Předpokládejme, že objem mísiče V je konstantní a že objemový průtok $\dot{V}$ kapaliny všemi mísiči je také konstantní. Označme $V_i, i = 1, \ldots, N$, i–tý mísič. Parametr c_0 udává vstupní koncentraci stopovací látky do prvního mísiče, c_1 koncentrace stopovací látky po průchodu prvním mísičem, ..., c_{N-1} koncentrace stopovací látky před vstupem do posledního mísiče, c_N koncentrace stopovací látky po průchodu všemi N mísiči.

Poznámka Kvalita promíchávání se určí pomocí metody vzruchu a odezvy: nejprve všemi mísiči protéká čistá kapalina (voda), tj. $c_0 = 0$, a v okamžiku $t = 0$ se do prvního mísiče počne trvale přivádět stopovací látka o koncentraci $c_0 > 0$. Po dlouhém čase se koncentrace ve všech mísičích ustálí na hodnotě c_0 (viz následující stránka).

Bezrozměrný model

Látková bilance stopovací látky v $i-$tém mísiči:

$$\dot{V} c_{i-1} = \dot{V} c_i + V \frac{\mathrm{d} c_i}{\mathrm{d} t}, \quad i = 1, \ldots, N. \tag{3}$$

Zavedeme bezrozměrný čas $\tau = \frac{t}{\overline{\tau}}$, kde $\overline{\tau} = \frac{V}{\dot{V}}$ je střední doba prodlení. Rovnici (3) pak lze zapsat ve formě

$$\frac{\mathrm{d} \vec{c}}{\mathrm{d} \tau} = \mathbf{A} \vec{c} + \vec{c}_0, \quad \text{kde} \tag{4}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & \ldots & 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} \vec{c} &= (c_1, \ldots, c_N)^{\mathrm{T}} \\ \vec{c}_0 &= (c_0, 0, \ldots, 0)^{\mathrm{T}} \end{aligned}$$

Stacionární stav: $\vec{c}_s = (c_0, c_0, \ldots, c_0)^{\mathrm{T}}$.

Po transformaci $\triangle\vec{c} = \vec{c} - \vec{c}_s$ přejde nehomogenní soustava (4) na homogenní soustavu

$$\frac{\mathrm{d}\triangle\vec{c}}{\mathrm{d}\tau} = \mathbf{A}\triangle\vec{c}\,, \tag{5}$$

matice **A** má jedno vlastní číslo $\lambda = -1$ s algebraickou násobností N.

Poznámka Řešení soustavy rovnic (5) je z inženýrského hlediska důležité pro vyjádření míry promíchávání. Toto řešení je dáno vlastními čísly a vlastními vektory matice **A** včetně případu s násobnými vlastními čísly.

Dvě lineární diferenciální rovnice 1. řádu

Nechť $n = 2$ a uvažujme lineární autonomní soustavu, **A** je matice soustavy,

$$\mathbf{z}'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \mathbf{A}\mathbf{z}(t), \qquad \mathbf{z}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Nechť fundamentální systém soustavy tvoří funkce $\{\mathbf{z}_1(t), \mathbf{z}_2(t)\}$. Pak všechna řešení naší soustavy mají tvar

$$\mathbf{z}(t) = C_1\mathbf{z}_1(t) + C_2\mathbf{z}_2(t), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}, \ t \in \mathbb{R},$$

tedy množina všech řešení je lineární prostor, jeho dimenze je $\dim = 2$. Nulovým prvkem tohoto prostoru je stacionární řešení soustavy $x(t) \equiv 0, y(t) \equiv 0$.

Které funkce tvoří fundamentální systém?

Fundamentální systém, dvě rovnice

Necht $n = 2$, Řešení lineární autonomní soustavy (6) hledáme ve tvaru $\mathbf{z}(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}\mathbf{h}$, kde λ je vlastní číslo matice soustavy $\mathbf{A}$, $\mathbf{h} \neq \mathbf{0}$ je odpovídající vlastní vektor. Tedy λ je kořenem charakteristické rovnice, tj. platí

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = \mathbf{0} \iff \lambda^2 - \operatorname{tr}(\mathbf{A}) + \det\mathbf{A} = 0.$$

Vlastní čísla jsou pro $n = 2$ kořeny kvadratické rovnice. Postupně probereme tři možné případy kořenů.

I. $\lambda_1 \neq \lambda_2$ jsou dvě reálná různá vlastní čísla $\implies$ f.s.= $\{\mathrm{e}^{\lambda_1 t}\mathbf{h}_1, \mathrm{e}^{\lambda_2 t}\mathbf{h}_2\}$ a obecné řešení je

$$\mathbf{z}(t) = C_1\mathrm{e}^{\lambda_1 t}\mathbf{h}_1 + C_2\mathrm{e}^{\lambda_2 t}\mathbf{h}_2\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}\,.$$

Obecně pro $n > 2$, $\mathbf{A}_{n\times n}$, má-li charakteristická rovnice n reálných různých kořenů $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, $\mathbf{h}_i$ jsou odpovídající vlastní vektory, má obecné řešení tvar

$$\mathbf{z}(t) = C_1\mathrm{e}^{\lambda_1 t}\mathbf{h}_1 + C_2\mathrm{e}^{\lambda_2 t}\mathbf{h}_2 + \cdots + C_n\mathrm{e}^{\lambda_n t}\mathbf{h}_n\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}\,.$$

II. $\lambda_{1,2} = a \pm \mathrm{i}b$ ... dvě navzájem komplexně sdružená vlastní čísla.
Vlastní čísla jsou imaginární $\Longrightarrow$ také vlastní vektory jsou imaginární $\Longrightarrow$ i fundamentální systém je imaginární $\Longrightarrow$ každé řešení je imaginární.
Ale fundamentální systém je báze dvoudimenzionálního prostoru všech řešení, takový prostor má nekonečně mnoho bází, vyberme si tedy nějakou reálnou.
Konkrétně, je-li $\lambda_1 = a + \mathrm{i}b$ vlastní číslo, $\mathbf{h}_1 = \mathbf{u} + \mathrm{i}\mathbf{v}$ imaginární vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu λ_1, pak první funkce fundamentálního systému je

$$\mathbf{z}_1(t) = \mathrm{e}^{(a+\mathrm{i}b)t}\mathbf{h}_1 = \mathrm{e}^{at}(\cos(bt) + \mathrm{i}\sin(bt)) \begin{bmatrix} u_1 + \mathrm{i}v_1 \\ u_2 + \mathrm{i}v_2 \end{bmatrix}$$

Vynásobíme a oddělíme reálnou a imaginární část $\mathbf{z}_1$:

$$\mathbf{z}_1(t) = \mathrm{e}^{at} \begin{bmatrix} \cos(bt)u_1 - \sin(bt)v_1 \\ \cos(bt)u_2 - \sin(bt)v_2 \end{bmatrix} + \mathrm{i}\mathrm{e}^{at} \begin{bmatrix} \sin(bt)u_1 + \cos(bt)v_1 \\ \sin(bt)u_2 + \cos(bt)v_2 \end{bmatrix}.$$

Je-li $\mathbf{z}_1 = \Re(\mathbf{z}_1) + \Im(\mathbf{z}_1)$ řešením soustavy diferenciálních rovnic, jsou také $\Re(\mathbf{z}_1)$ a $\Im(\mathbf{z}_1)$ řešením této soustavy. Tedy reálný fundamentální systém tvoří vektorové funkce

$$\mathbf{z}_1(t) = \mathrm{e}^{at}(\cos(bt)\mathbf{u} - \sin(bt)\mathbf{v}), \quad \mathbf{z}_2(t) = \mathrm{e}^{at}(\sin(bt)\mathbf{u} + \cos(bt)\mathbf{v}), \tag{7}$$

viz skripta MII.

Obecné řešení má tedy tvar

$$\mathbf{z}(t) = C_1\mathrm{e}^{at}\,(\cos(bt)\mathbf{u} - \sin(bt)\mathbf{v}) + C_2\mathrm{e}^{at}\,(\sin(bt)\mathbf{u} + \cos(bt)\mathbf{v}),$$

kde $\quad C_1, C_2 \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}$.

Obecně pro $n > 2$, $\mathbf{A}_{n\times n}$, jsou-li mezi kořeny charakteristické rovnice dvě komplexně sdružená vlastní čísla, mají jim odpovídající funkce fundamentálního systému vždy tvar (7).

Dvojnásobné vlastní číslo

III. Chrakteristická rovnice má jeden reálný dvojnásobný kořen λ .
První vektorová funkce fundamentálního systému bude $\mathbf{z}_1(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}\mathbf{h}$, kde $\mathbf{h} \neq \mathbf{0}$ je vlastní vektor příslušný k λ. Chybí nám ještě jeden vlastní vektor, tedy druhá funkce fundamentálního systému. Toto druhé řešení najdeme pomocí zobecněného vlastního vektoru $\mathbf{k}$, $\mathbf{k} \neq \mathbf{0}$.
Zobecněný vlastní vektor je řešením nehomogenní soustavy lineárních algebraických rovnic:

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{k} = \mathbf{h}\,.$$

Druhá funkce fundamentálního systému pak je

$$\mathbf{z}_2(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}(t\,\mathbf{h} + \mathbf{k}) \tag{8}$$

Cvičení Ukažte, že je-li $\lambda \in \mathbb{R}$ dvojnásobné vlastní číslo, tvoří $\mathbf{z}_1$, $\mathbf{z}_2$ lineárně nezávislý systém vektorových funkcí a každá z těchto funkcí řeší soustavu (6), tedy tvoří fundamentální systém řešení soustavy (6).

Mějme nyní soustavu lineárních diferenciálních rovnic prvního řádu

$$\mathbf{z}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{z}(t), \quad \mathbf{A}_{n\times n}\,, \tag{9}$$

a nechť $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ jsou vlastní vektory matice $\mathbf{A}$. Pak každé řešení soustavy (9) lze zapsat jako

$$\mathbf{w} = \sum_{i=1}^{n} C_i \mathbf{v}_i, \quad \mathbf{C} = (C_1, C_2, \ldots, C_n) \in \mathbb{R}^n\,, \text{ t.j. } \mathbf{w} \in \underbrace{\mathrm{span}}_{\text{lineární obal}}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}\,.$$

Je-li $\mathrm{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\} = \mathbb{R}^n$, říkáme, že **A** má úplný systém vlastních vektorů, t.j. vlastní vektory tvoří bázi $\mathbb{R}^n$. Sestavíme-li z vlastních vektorů matici

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} | & & | \\ \mathbf{v}_1 & \ldots & \mathbf{v}_n \\ | & & | \end{pmatrix}, \tag{10}$$

pak **P** je regulární, t.j. $\det(\mathbf{P}) \neq 0$, a tedy existuje inverzní matice $\mathbf{P}^{-1}$.

★ Příklad, $n = 3$

Příklad $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \implies$ vlastní čísla jsou $\lambda_{1,2} = 1,\ \lambda_3 = 2$.

Algebraická násobnost $\lambda = 1$ je 2, λ_3 má algebraickou násobnost 1.
Vypočteme vlastní vektory, nejprve pro $\lambda = 1$:

$$(\mathbf{A} - 1\,\mathbf{E})\,\mathbf{h} = \mathbf{0}\,,\ \text{t.j.}\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Tedy hodnost matice $\mathbf{A} - \mathbf{E}$ je 2, $n = 3 \implies \dim \mathcal{N}(\mathbf{A} - \mathbf{E}) = 1$. Matice má deficit vlastních vektorů, protože geometrická násobnost vlastního čísla $\lambda = 1$ je menší, než jeho algebraická násobnost. Musíme tedy vypočítat jeden vlastní vektor $\mathbf{h}$ a jeden zobecněný vlastní vektor $\mathbf{k}$, které přísluší dvojnásobnému vlastnímu číslu $\lambda = 1$.

Ověřte, že $\mathcal{N}(\mathbf{A} - \mathbf{E}) = \{\mathbf{h} \in \mathbb{R}^3, \mathbf{h} = (t, 0, 0)^{\mathrm{T}}, t \in \mathbb{R}\}$.

Jako vlastní vektor volíme $\mathbf{h} = (1, 0, 0)^{\mathrm{T}}$.

★

Zobecněný vlastní vektor je řešením nehomogenní soustavy lineárních algebraických rovnic:

$$(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E})\mathbf{k}=\mathbf{h} \implies \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ověřte, že zobecněný vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu $\lambda = 1$ je $\mathbf{k} = (1, 1, 0)^{\mathrm{T}}$.

Pro vlastní číslo $\lambda_3 = 2$:

$$\mathbf{A} - 2\,\mathbf{E} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies \dim\mathcal{N}(\mathbf{A}-2\mathbf{E}) = 3 - 2 = 1\,.$$

Geometrická násobnost $\lambda_3 = 2$ je rovna jeho algebraické násobnosti $= 1$. V tomto případě se celý řetězec zobecněných vlastních vektorů skládá pouze z vlastního vektoru $\mathbf{h}_3 = (0, 0, 1)^{\mathrm{T}}$.

★ K čemu je to dobré při řešení soustav diferenciálních rovnic?

Uvažujme soustavu tří diferenciálních rovnic, kde maticí soustavy je matice $\mathbf{A}$:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}\,.$$

Už víme, že matice má vlastní číslo $\lambda_{1,2} = 1$ s geometrickou násobností 1 a algebr. násobností 2, příslušný vlastní vektor $\mathbf{h}$ a zobecněný vlastní vektor $\mathbf{k}$. Vlastní číslo $\lambda_3 = 2$ má geometrickou i algebraickou násobnost 1, příslušný vlastní vektor je $\mathbf{h}_3$. Fundamentální systém $\mathrm{f.s.} = \{\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t), \mathbf{x}_3(t)\}$, kde

$$\mathbf{x}_1(t) = \mathrm{e}^t\,\mathbf{h}, \quad \mathbf{x}_2(t) = \mathrm{e}^t(t\,\mathbf{h} + \mathbf{k}), \quad \mathbf{x}_3(t) = \mathrm{e}^{2t}\,\mathbf{h}_3\,.$$

For $\mathbf{x}_2$, see (8) . Obecné řešení je

$$\mathbf{x}(t) = C_1\mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2\mathrm{e}^t \left(t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) + C_3\mathrm{e}^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$t \in \mathbb{R},\ C_i \in \mathbb{R},\ i = 1, 2, 3.$

★

Sestavme z vektorů $\mathbf{h}, \mathbf{k}$ a $\mathbf{h}_3$ matici $\mathbf{P} = (\mathbf{h}, \mathbf{k}, \mathbf{h}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, viz (10).

Ověřte, že $\mathbf{P}$ je regulární, a že $\mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Nyní vypočtěme

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 \end{array}\right).$$

Poslední matice je tzv. Jordanův kanonický tvar matice **A**. V našem případě se skládá ze dvou Jordanových bloků (klecí). První blok přísluší vlastnímu číslu $\lambda = 1$. Jeho geometrická násobnost je 1, je to tedy jeden blok, algebraická násobnost je 2, tedy blok má rozměr 2×2. Blok má na diagonále vlastní číslo, tedy jedničku, a nad diagonálou ve sloupci, který odpovídá zobecněnému vlastnímu vektoru **k**, také jedničku. Pod diagonálou je 0. Druhý blok přísluší vlastnímu číslu $\lambda = 2$. Zde algebraická =geometrická násobnost= 1 $\implies$ jeden blok velikosti 1×1 s vlastním číslem 2 na "diagonále".

Jordanův kanonický tvar

Pro libovolnou matici $\mathbf{A}_{n\times n}$ existuje nesingulární matice $\mathbf{P}$ taková, že

$$\mathbf{J} := \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \operatorname{diag}(\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \dots, \mathbf{C}_p)\,, \quad \text{kde} \quad \mathbf{C}_j = \lambda_j \mathbf{E} + \mathbf{R}_j\,, \quad \mathbf{C}_j \in \mathbb{R}^{n_j\times n_j}\,,$$

$$\mathbf{R}_j = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

λ_j, $j = 1, \dots, p$, jsou, obecně ne různá, vlastní čísla matice $\mathbf{A}$.

$\mathbf{J}$ ... Jordanův kanonický tvar matice $\mathbf{A}_{n\times n}$.

Pro matici $\mathbf{A}$ platí $\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{J}\mathbf{P}^{-1}$, tedy $\mathbf{A} \sim \mathbf{J}$, matice $\mathbf{A}$ a $\mathbf{J}$ jsou podobné, mají stejná vlastní čísla, ale matice $\mathbf{J}$ má mnohem jednodušší tvar. Je téměř diagonální: na diagonále má vlastní čísla, nad diagonálou, ve sloupcích, které odpovídají zobecněným vlastním vektorům, má 1 a všude jinde má nuly.

Tento obecný tvar uvádíme jen pro zvídavé čtenáře. Zde se budeme zabývat převážně soustavami dvou nebo tří diferenciálních rovnic.

Transformace matice soustavy na Jordanův kanonický tvar

Věta Nechť $n = 2$, $\mathbf{A}_{2\times 2}$ je reálná čtvercová matice.
Pak existuje regulární transformační matice $\mathbf{S}_{2\times 2}$ (závislá na vlastních číslech λ_1, λ_2 matice **A**) taková, že matice $\mathbf{B} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}$ má jeden z následujících čtyř tvarů:

(i) λ_1 i λ_2 mají algebraickou i geometrickou násobnost =1, t.j.

$$\lambda_1 \neq \lambda_2,\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{B} = \left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 & 0 \\ \hline 0 & \lambda_2 \end{array}\right),$$

(pro každé vlastní číslo je na diagonále **B** 1 blok velikosti 1×1)

(ii) λ_1, λ_2 imaginární, jejich algebraická násobnost = geometrické = 1, t.j.

$$\lambda_{1,2} = a \pm \mathrm{i}b,\ b \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{B} = \left(\begin{array}{c|c} a & -b \\ \hline b & a \end{array}\right),$$

(iii) **A** má jedno (dvojnásobné) vlastní číslo $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, pro něž platí, že jeho algebraická i geometrická násobnost je 2, λ_0 odpovídají dva lineárně nezávislé vlastní vektory, t.j.

$$\lambda_0 \in \mathbb{R},\ \lambda_0 \text{ odpovídají dva LN vlastní vektory} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix},$$

(dva bloky, každý velikosti 1×1)

(iv) **A** má jedno (dvojnásobné) vlastní číslo $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, pro něž platí, že jeho algebraická násobnost=2, geometrická násobnost je 1, λ_0 odpovídá jeden vlastní vektor a jeden zobecněný vlastní vektor, t.j.

$\lambda_0 \in \mathbb{R}$, λ_0 odpovídá jeden vlastní vektor a jeden zobecněný vlastní vektor

$$\Longrightarrow \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix},$$

(jeden blok velikosti 2×2) .

Dvoudimenzionální lineární systémy s konstantními koeficienty

Necht $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Označme $\varrho(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})$ její charakteristický polynom. Pak charakteristická rovnice matice **A** je $\varrho(\lambda) = \lambda^2 - \tau\lambda + \delta = 0$, kde $\tau = \mathrm{tr}(\mathbf{A}) = a + d$ je stopa matice **A**, $\delta = \det(\mathbf{A}) = ad - bc$ je determinant matice **A**. Tedy vlastní čísla závisí na stopě $tr(\mathbf{A})$ matice **A** a na determinantu $\det(\mathbf{A})$ matice **A**.

Kořeny $\varrho(\lambda)$:

$$\lambda_{\pm} = \frac{\tau \pm \sqrt{D}}{2}, \quad \text{kde } D = \tau^2 - 4\delta = a^2 + 2ad + d^2 - 4ad + 4bc = (a-d)^2 + 4bc.$$

V rovině $\tau - D$ $(\mathrm{tr}(\mathbf{A}) - \det(\mathbf{A}))$ je 5 různých ”oblastí”vlastních čísel.

Poznámka D ... diskriminant. Je-li $D > 0$ jsou vlastní čísla dvě reálná různá, jeli $D < 0$, jsou vlastní čísla imaginární, komplexně sdružená.

Transformační matice

Mějme soustavu $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$, $\mathbf{A}_{2\times 2}$, necht **S** je transformační matice a $\mathbf{B} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}$. Matice **A** a **B** jsou podobné, mají stejný charakteristický polynom, a tedy i stejná vlastní čísla. Dostaneme

$$\mathbf{A} = \mathbf{S}\mathbf{B}\mathbf{S}^{-1} \quad \Longrightarrow \quad \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{S}\mathbf{B}\mathbf{S}^{-1}\mathbf{x}\,.$$

Zavedeme substituci $\mathbf{y} := \mathbf{S}^{-1}\mathbf{x}$, t.j. $\mathbf{x} = \mathbf{S}\mathbf{y}$ a $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{S}\dot{\mathbf{y}}$. Nyní je

$$\mathbf{S}\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{S}\mathbf{B}\mathbf{y} \quad \Longrightarrow \quad \underbrace{\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{B}\mathbf{y}\,.}_{\text{soustava po transformaci}}$$

Cíl transformace: Zjednodušení soustavy diferenciálních rovnic na tzv.

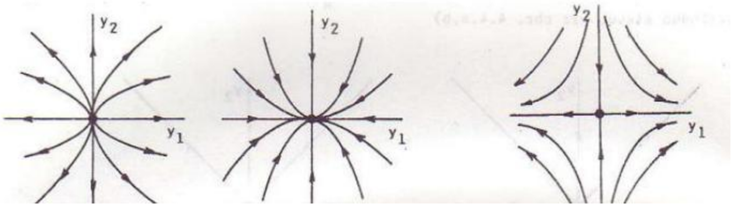
kanonický tvar soustavy diferenciálních rovnic.

Poznámka Následující náčrty fázových portrétů jsou převzaty ze skript A. Klíč, M. Kubíček: Matematika III - Diferenciální rovnice, VŠCHT Praha, 1992, ISBN 80-7080-162-X.

Fázové portréty soustav diferenciálních rovnic v kanonickém tvaru

Věta Nechť $n = 2$, $\mathbf{A}_{2\times 2}$ je reálná čtvercová matice. Pak existuje regulární matice $\mathbf{S}$ taková, že matice $\mathbf{B} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}$ má jeden ze čtyř tvarů (v posledním sloupci je název příslušného rovnovážného stavu):

$$\text{(i)} \quad \lambda_1 \neq \lambda_2, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$ uzel, sedlo



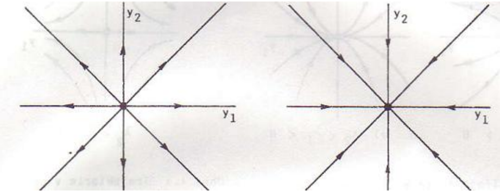
$\underbrace{\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0}$ nestabilní uzel

$\underbrace{\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0}$ stabilní uzel

$\underbrace{\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0}$ sedlo (nestabilní)

Do sedla vcházejí dvě trajektorie a dvě trajektorie z něj vycházejí. Tyto trajektorie nazýváme separatrix sedla.

$$\text{(ii)} \quad \lambda_1 = \lambda_2 := \lambda_0 \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$$ dikritický uzel

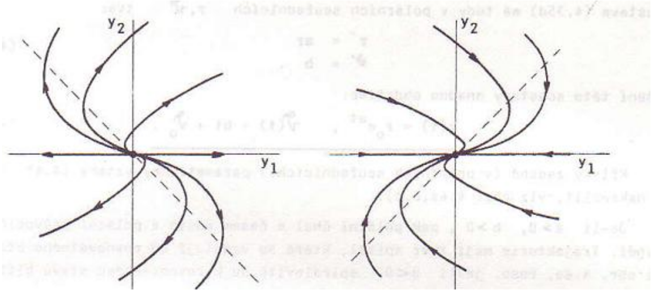


$\underbrace{\lambda_0 > 0}_{}$ nestabilní dikritický uzel

$\underbrace{\lambda_0 < 0}_{}$ stabilní dikritický uzel

Trajektorie jsou polopřímky vycházející ($\lambda_0 > 0$), resp. vcházející ($\lambda_0 < 0$) do rovnovážného stavu.

(iii) $\lambda_1 = \lambda_2 := \lambda_0 \in \mathbb{R}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$ Jordanův uzel



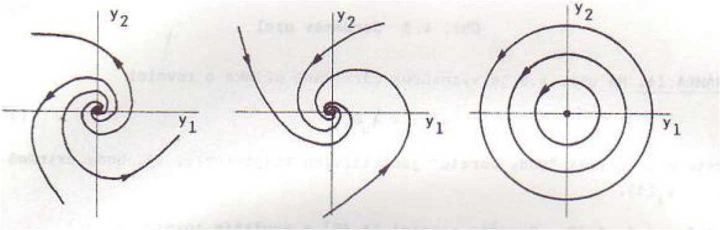
$\lambda_0 > 0$ nestabilní Jordanův uzel

$\lambda_0 < 0$ stabilní Jordanův uzel

Čárkovaná přímka má rovnici $y_2 = -\lambda_0 y_1$. Na této přímce leží "body obratu"jednotlivých trajektorií, t.j. body extrémů pro funkci $y_1(t)$.

Fázové portréty soustav diferenciálních rovnic v kanonickém tvaru

$$\text{(iv)} \quad \lambda_{1,2} = a \pm \mathrm{i}b,\, b \neq 0 \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$ ohnisko, centr



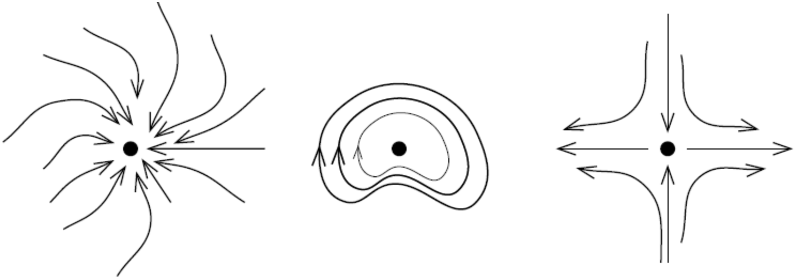
$\underbrace{a > 0}$ nestabilní ohnisko

$\underbrace{a < 0}$ stabilní ohnisko

$\underbrace{a = 0}$ centr

Je-li $a > 0$, mají trajektorie tvar spirál, které se vzdalují od rovnovážného stavu, je-li $a < 0$, spirálovitě se k rovnovážnému stavu blíží. Je-li $a = 0$, jsou trajektorie kružnice se středen v počátku, t.j. uzavřené trajektorie, kterým odpovídají periodická řešení.

Poznámka ke stabilitě:



Pevné body se třemi různými typy stability.

Pevný bod vlevo je stabilní, prostřední pevný bod je „neutrální“ a pevný bod vpravo je nestabilní.

Rovina $\mathrm{tr}(\mathbf{A}) - \det(\mathbf{A})$

Charakteristická rovnice pro matici **A** je

$$\lambda^2 - \mathrm{tr}(\mathbf{A})\lambda + \det(\mathbf{A}) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda_{1,2} = \frac{\mathrm{tr}(\mathbf{A}) \pm \sqrt{\mathrm{tr}^2(\mathbf{A}) - 4\det(\mathbf{A})}}{2}, \quad \text{t.j.}$$

$$\begin{aligned}
\lambda_1 + \lambda_2 &= \frac{1}{2}\left(\mathrm{tr}(\mathbf{A}) + \sqrt{\mathrm{tr}^2(\mathbf{A}) - 4\det(\mathbf{A})} + \mathrm{tr}(\mathbf{A}) - \sqrt{\mathrm{tr}^2(\mathbf{A}) - 4\det(\mathbf{A})}\right) = \\
&= \mathrm{tr}(\mathbf{A}) \\
\lambda_1\,\lambda_2 &= \frac{1}{4}\left(\mathrm{tr}(\mathbf{A}) + \sqrt{\mathrm{tr}^2(\mathbf{A}) - 4\det(\mathbf{A})}\right)\left(\mathrm{tr}(\mathbf{A}) - \sqrt{\mathrm{tr}^2(\mathbf{A}) - 4\det(\mathbf{A})}\right) = \\
&= \frac{1}{4}(\mathrm{tr}^2(\mathbf{A}) - \mathrm{tr}^2(\mathbf{A}) + 4\det(\mathbf{A})) = \det(\mathbf{A})\,.
\end{aligned}$$

Budeme klasifikovat fázové portréty (resp. rovnovážné stavy) v závislosti na stopě matice **A** a determinantu matice **A**.

Poznámka Každé matici **A** je v rovině $\mathrm{tr}(\mathbf{A}) - \det(\mathbf{A})$ přiřazen právě jeden bod. Naopak, každému bodu v rovině $\mathrm{tr}(\mathbf{A}) - \det(\mathbf{A})$ odpovídá nekonečně mnoho matic.

Zkoumejme diskriminant charakteristické rovnice

$$D = \operatorname{tr}^2(\mathbf{A}) - 4\det(\mathbf{A}) \quad \Longrightarrow \quad D = 0 \iff \det(\mathbf{A}) = \frac{1}{4}\operatorname{tr}^2(\mathbf{A}) \ \ldots \text{parabola}$$

I. $D > 0 \quad \Longrightarrow$ **A** má dvě reálná různá vlastní čísla a platí

$$\det(\mathbf{A}) < \frac{1}{4}\operatorname{tr}^2\mathbf{A}\,.$$

(i) $\det(\mathbf{A}) < 0 \iff \lambda_1\,\lambda_2 < 0 \Longrightarrow$ rovnovážný stav typu sedlo

(ii) $\det(\mathbf{A}) > 0 \iff \lambda_1\,\lambda_2 > 0 \Longrightarrow$ rovnovážný stav typu uzel

stabilní uzel: $\underbrace{\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0,}_{\lambda_1 + \lambda_2 < 0 \ \Rightarrow\ \operatorname{tr}(\mathbf{A}) < 0}$ nestabilní uzel: $\underbrace{\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0}_{\lambda_1 + \lambda_2 > 0 \ \Rightarrow\ \operatorname{tr}(\mathbf{A}) > 0}$

(iii) $\det(\mathbf{A}) = 0$, t.j. např. $\lambda_1 = 0, \lambda_2 \neq 0 \Longrightarrow$

fázový portrét s přímkami rovnovážných stavů:

- $\operatorname{tr}(\mathbf{A}) = \lambda_2 < 0 \ldots$ trajektorie vcházejí do r.s.
- $\operatorname{tr}(\mathbf{A}) = \lambda_2 > 0 \ldots$ trajektorie vycházejí z r.s.

II. $D < 0 \quad \Longrightarrow$ **A** má imaginární, komplexně sdružená vlastní čísla

$\lambda_{1,2} = a \pm \mathrm{i}b,\ b \neq 0$ a platí

$$\det(\mathbf{A}) > \frac{1}{4}\mathrm{tr}^2\mathbf{A}\,.$$

V tomto případě $\mathrm{tr}(\mathbf{A}) = a + \mathrm{i}b + a - \mathrm{i}b = 2a$.

(i) $\mathrm{tr}(\mathbf{A}) < 0 \iff a < 0 \implies$ rovnovážný stav typu ohnisko, stabilní

(ii) $\mathrm{tr}(\mathbf{A}) > 0 \iff a > 0 \implies$ rovnovážný stav typu ohnisko, nestabilní

(iii) $\mathrm{tr}(\mathbf{A}) = 0, \implies a = 0 \implies \lambda_{1,2} = \pm\mathrm{i}b \implies$ rovnovážný stav typu centr

III. $D = 0 \quad \Longrightarrow$ **A** má jedno dvojnásobné vlastní číslo λ_0 a platí

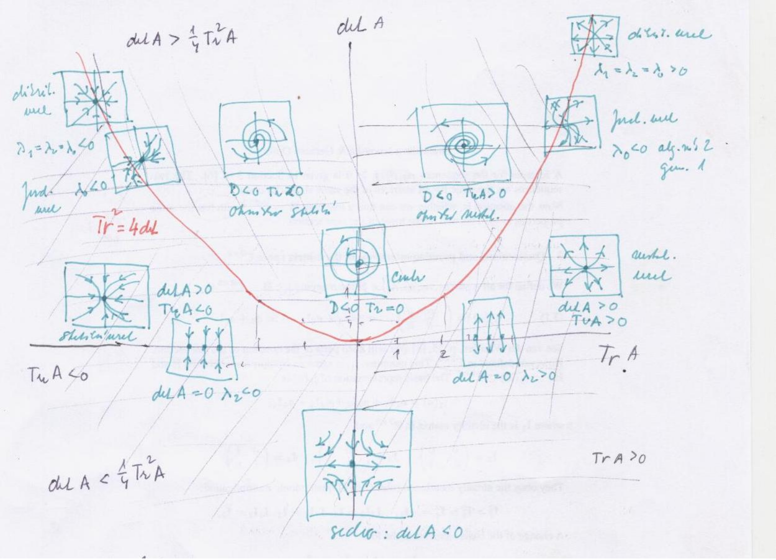
$$\det(\mathbf{A}) = \frac{1}{4}\mathrm{tr}^2\mathbf{A}\,.$$

(i) $\mathrm{tr}(\mathbf{A}) < 0 \iff \lambda_0 < 0 \implies$ r.s. typu dikritický uzel (Jordanův uzel), stabilní

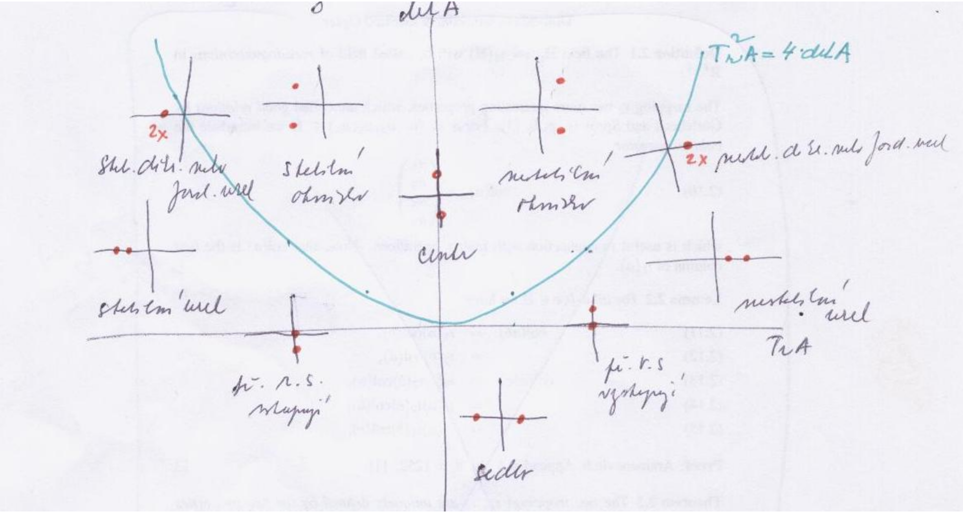
(ii) $\mathrm{tr}(\mathbf{A}) > 0 \iff \lambda_0 > 0 \implies$ nestabilní dikritický uzel (Jordanův uzel)

(iii) $\mathrm{tr}(\mathbf{A}) = 0 \implies \lambda_0 = 0 \implies$ fázový portrét s přímkou rovnovážných stavů a s ní rovnoběžnými trajektoriemi.

Klasifikace fázových portrétů v závislosti na $\operatorname{tr}(\mathbf{A})$ a $\det(\mathbf{A})$



Klasifikace fázových portrétů v závislosti na vlastních číslech (A)



★

Příklad Řešme soustavu

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 + x_2 \\ x_2' &= -5x_1 - x_2 \end{aligned}, \text{ t.j. } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} - \lambda\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -5 & -1-\lambda \end{pmatrix},$$

charakteristická rovnice: $\lambda^2 + 4 = 0 \implies \lambda_{1,2} = \pm 2\mathrm{i}, \quad \mathbf{h} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \pm \mathrm{i} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$

Tedy

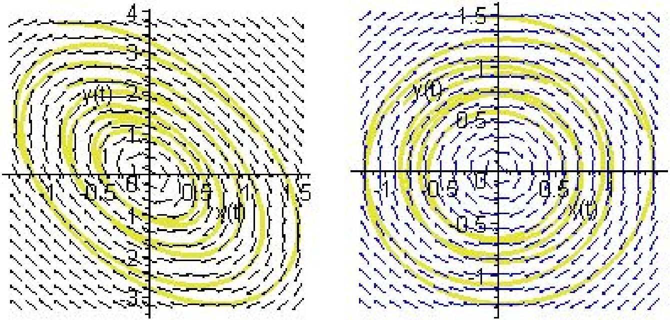
$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} := \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

a položíme-li $\mathbf{x} = \mathbf{S}\mathbf{y}$, dostaneme ekvivalentní soustavu diferenciálních rovnic

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{B}\mathbf{y} \quad \text{t.j.} \quad \begin{aligned} \dot{y}_1 &= 2y_2 \\ \dot{y}_2 &= -2y_1 \end{aligned}, \text{ a opět } \lambda_{1,2} = \pm 2\mathrm{i}.$$

Vlastní čísla leží na imaginární ose a platí $\det(\mathbf{A}) = 4$, $\operatorname{tr}(\mathbf{A}) = 0$, $D = -16$

$\implies$ rovnovážný stav typu centr



Fázový portrét: vlevo původní soustavy, vpravo soustavy po transformaci.

Cvičení Ukažte, že obecné řešení původní soustavy je

$$
\begin{aligned}
x_1(t) &= C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}, \\
x_2(t) &= (-C_1 + 2C_2)\cos 2t - (2C_1 + C_2)\sin 2t
\end{aligned}
$$

a vypočtěte partikulární řešení, jehož trajektorie prochází bodem $x_1(0) = 1,\ x_2(0) = 0.$

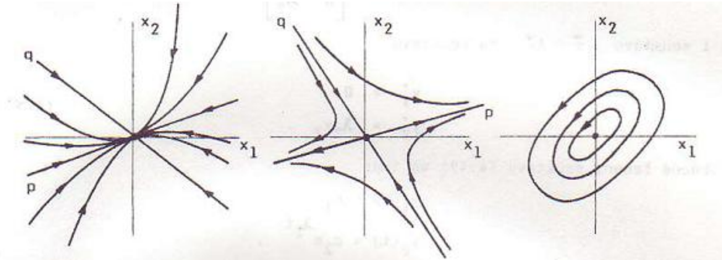
Zpětná transformace - fázové portréty v rovině $x_1 - x_2$

Zpětná transformace: $\mathbf{x} := \mathbf{S}\mathbf{y}$

I. $\det(\mathbf{A}) \neq 0$

(a) $\mathbf{A}$ má dvě reálná různá vlastní čísla λ_1, λ_2 s odpovídajícími vlastními vektory $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2 \implies$ transformace $\mathbf{x} := \mathbf{S}\mathbf{y}$ zobrazí osy y_1 a y_2 na přímky p, q se směrovými vektory $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2$. V případě uzlu vstupují trajektorie (kromě dvou) do uzlu ve směru té z přímek p, q, jejíž směrový vektor odpovídá vlastnímu číslu s menší absolutní hodnotou.

(b) Fázový portrét dikritického uzlu se transformací nemění, protože lineární transformace $\mathbf{x} = \mathbf{S}\mathbf{y}$ převádí polopřímky na polopřímky



stabilní uzel sedlo (nestabilní) centr

II. $\det(\mathbf{A}) = 0$. Pak má charakteristická rovnice tvar

$$\lambda^2 - \operatorname{tr}(\mathbf{A})\lambda = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = \operatorname{tr}(\mathbf{A})\,.$$

(a) $\lambda_2 \neq 0$

Necht $\mathbf{r}, \mathbf{s}$ jsou vlastní vektory příslušné λ_1, λ_2. Rovnovážné stavy soustavy $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ získáme řešením homogenní soustavy lineárních rovnic

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}\,.$$

Protože $\det(\mathbf{A}) = 0$, je nenulová matice $\mathbf{A}$ singulární, má hodnost 1 a množina všech řešení je jednodimenzionální podprostor $\mathbb{R}^2$, tedy přímka p procházející počátkem ve směru vlastního vektoru $\mathbf{r}$, který přísluší vlastnímu číslu $\lambda_1 = 0$. Přímku p nazýváme přímkou rovnovážných stavů, nebot každý bod přímky p je rovnovážným stavem soustavy $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$.

Transformační matice $\mathbf{S} = (\mathbf{r}, \mathbf{s})$ převede matici $\mathbf{A}$ na Jordanův kanonický tvar

$$\underbrace{\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}}_{=\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

a soustavu $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ transformuje na soustavu

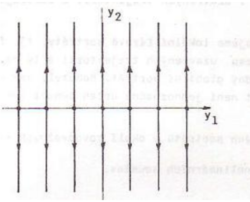
$$\begin{aligned} y_1' &= 0 \\ y_2' &= \lambda_2 y_2\,. \end{aligned}$$

Obecné řešení soustavy $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{B}\mathbf{y}$ má tvar

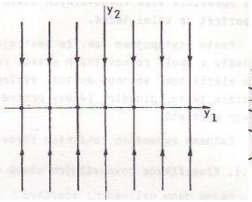
$$y_1(t) = C_1\,, \quad y_2(t) = C_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 t}\,.$$

To jsou parametrické rovnice trajektorií a můžeme nakreslit fázový portrét. Přímka rovnovážných stavů je osa y_1, trajektorie jsou polopřímky rovnoběžné s osou y_2. Při zpětné transformaci přejde osa y_1 v přímku rovnovážných stavů p se směrovým vektorem $\mathbf{r}$, osa y_2 přejde v přímku q se směrovým vektorem $\mathbf{s}$.

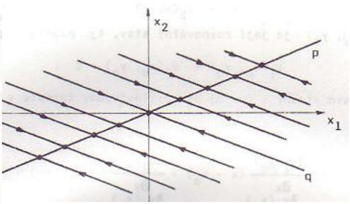
Poznámka Transformace $\mathbf{x} = \mathbf{S}\mathbf{y}$ zachovává rovnoběžnost přímek.



$\det(\mathbf{A}) = 0,\ \lambda_2 > 0$



$\det(\mathbf{A}) = 0,\ \lambda_2 < 0$



Fázový portrét v rovině $x_1 - x_2$

(b) Matice **A** má dvojnásobné nulové vlastní číslo, k němuž přísluší vlastní vektor **h** a zobecněný vlastní vektor **k**

Pak matice $\mathbf{S} = (\mathbf{hk})$ transformuje matici **A** na Jordanův kanonický tvar

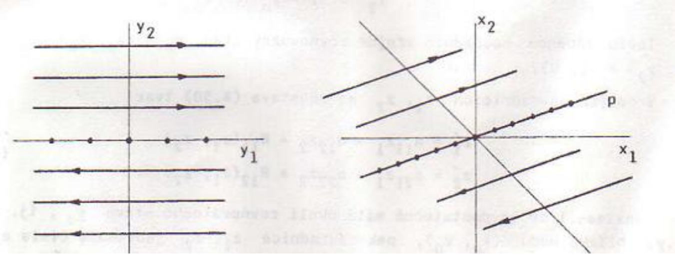
$$B := \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a soustavu $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ transformuje na soustavu

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= 0\,. \end{aligned}$$

Obecné řešení soustavy $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{B}\mathbf{y}$ má tvar

$$y_1(t) = C_1 + C_2 t, \quad y_2(t) = C_2\,.$$



Případ dvojnásobného nulového vlastního čísla

Cvičení

1. Klasifikujte rovnovážný stav a načrtněte fázový portrét soustavy

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 - 5x_2 \\ x_2' &= x_1 - x_2 \end{aligned} .$$

2. Vyšetřete fázový portrét soustavy $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$, kde $\mathbf{A}$ je nulová matice řádu 2.

Literatura k dalšímu studiu

- Hirsch, M. W. Differential equations, dynamical systems and introduction to chaos, 2nd ed.; Academic Press: San Diego, 2004. pdf
- Klíč, A.; Dubcová, M.; Buřič, L.; et al. Soustavy obyčejných diferenciálních rovnic – kvalitativní teorie, dynamické systémy, 1st ed.; VŠCHT Praha: Praha, 2009.
- Klíč A., Kubíček M.: Matematika III - Diferenciální rovnice, VŠCHT Praha, 1992.
- Meiss J.D.: Differential dynamical systems. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2007.
- Rasmuson A., Andersson B., Olsson L., Andersson R.: Mathematical Modeling in Chemical Engineering. Cambridge University Press, 2014.
- Scheinerman E. R.: Invitation to Dynamical Systems. The John Hopkins University, 1996.