# Matematika pro chemické inženýry

Drahoslava Janovská

## 11. Soustavy nelineárních DR.

### Klasifikace rovnovážných stavů nelineárních soustav. Konstrukce fázových portrétů v rovině. Věta Grobmanova-Hartmanova, uzavřené trajektorie.

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Povinná látka. Bude v písemkách a bude se zkoušet při ústní zkoušce (žádné označení)

★ Příklady k procvičení - dobrovolné

★ Pro studenty, kteří chtějí vědět víc. Tato látka se nebude přednášet, nebude v písemkách, nebude se zkoušet.

# Obsah

# Úvod

Fázové portréty lineárních soustav v rovině jsou globální fázové portréty - systém trajektorií pokrývá celou rovinu. U nelineárních soustav obvykle vyšetřujeme lokální fázové portréty v okolí rovnovážných stavů a ty pak skládáme, abychom získali výsledný globální fázový portrét.

**Poznámka** Následující náčrty fázových portrétů jsou převzaty ze skript A. Klíč, M. Kubíček: Matematika III - Diferenciální rovnice, VŠCHT Praha, 1992, ISBN 80-7080-162-X.

# Klasifikace rovnovážných stavů nelineárních soustav

Mějme nelineární soustavu

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v_1(x,y) \\ \dot{y} &= v_2(x,y). \end{aligned}$$

Nechť $S_0 = (x_0, y_0)$ je izolovaný rovnovážný stav této soustavy, t.j. platí

$$v_1(x_0, y_0) = v_2(x_0, y_0) = 0\,,$$

a existuje okolí r.s. $S_0$ takové, že v něm neleží žádný další r.s.

Taylorův rozvoj $v_1, v_2$ v bodě $(x_0, y_0)$, $(x,y) \in \mathcal{O}(x_0, y_0)$,

$$\begin{aligned} v_1(x,y) &= \underbrace{v_1(x_0,y_0)}_{=0} + \frac{\partial v_1(x_0,y_0)}{\partial x}(x-x_0) + \frac{\partial v_1(x_0,y_0)}{\partial y}(y-y_0) + R_1(x,y) \\ v_2(x,y) &= \underbrace{v_2(x_0,y_0)}_{=0} + \frac{\partial v_2(x_0,y_0)}{\partial x}(x-x_0) + \frac{\partial v_2(x_0,y_0)}{\partial y}(y-y_0) + R_2(x,y) \end{aligned}$$

Označme

$$a_{11} = \frac{\partial v_1(x_0, y_0)}{\partial x} \qquad a_{12} = \frac{\partial v_1(x_0, y_0)}{\partial y}$$
$$a_{21} = \frac{\partial v_2(x_0, y_0)}{\partial x} \qquad a_{22} = \frac{\partial v_2(x_0, y_0)}{\partial y}$$

Dostaneme Jacobiho matici $J$ v bodě $S_0$, $S_0 = (x_0, y_0)$:

$$J(S_0) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1(x_0, y_0)}{\partial x} & \frac{\partial v_1(x_0, y_0)}{\partial y} \\ \frac{\partial v_2(x_0, y_0)}{\partial x} & \frac{\partial v_2(x_0, y_0)}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Zaveďme transformaci souřadnic $z_1 := x - x_0,\ z_2 := y - y_0$ . Pak

r.s. $S_0 = (x_0, y_0)$ přejde v r.s. $(z_1, z_2) = (0, 0)$ .

Dostaneme soustavu

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= a_{11} z_1 + a_{12} z_2 + R_1(z_1, z_2) \\ \dot{z}_2 &= a_{21} z_1 + a_{22} z_2 + R_2(z_1, z_2) . \end{aligned}$$

# Linearizace nelineární soustavy

Je-li okolí bodu $S_0$ dostatečně malé, budou čísla $z_1 = x - x_0$, $z_2 = y - y_0$ a zbytky $R_1(z_1, z_2)$, $R_2(z_1, z_2)$ velmi malá, t.j.

$$R_1 = \mathcal{O}(\underbrace{x - x_0}_{z_1})^2, \quad R_2 = \mathcal{O}(\underbrace{y - y_0}_{z_2})^2.$$

Zanedbáním zbytků dostaneme soustavu lineárních diferenciálních rovnic:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= a_{11} z_1 + a_{12} z_2 \\ \dot{z}_2 &= a_{21} z_1 + a_{22} z_2 \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \underbrace{\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{J}(S_0)\,\mathbf{z}}$$

linearizace nelineární soustavy v okolí r.s. $S_0 = (x_0, y_0)$

$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{J}(S_0)\,\mathbf{z}$ ... rovnice ve variacích soustavy $\dot{x} = v_1(x, y)$, $\dot{y} = v_2(x, y)$,
$\mathbf{J}(S_0)$ ... matice linearizace.

Fázové portréty soustav lineárních diferenciálních rovnic už umíme, jen je teď provádíme jen v malém okolí rovnovážného stavu.

★

**Příklad 1** Načrtněte fázový portrét soustavy nelineárních diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \ln(y^2 - x) \\ \dot{y} &= x - y - 1\,. \end{aligned}$$

**Řešení** Nejprve určíme rovnovážné stavy:

$$\begin{aligned} \ln(y^2 - x) &= 0 \\ x - y - 1 &= 0 \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} y^2 - x &= 1 \\ -y + x &= 1 \end{aligned} \quad \Longrightarrow$$

soustava má dva rovnovážné stavy $S_1 = (0, -1)$, $S_2 = (3, 2)$.

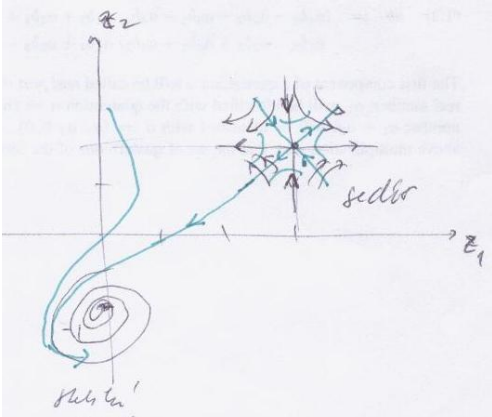
$$\mathbf{J}(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{-1}{y^2 - x} & \frac{2y}{y^2 - x} \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \mathbf{J}(S_1) = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{J}(S_2) = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Charakteristická rovnice a vlastní čísla $\mathbf{J}(S_1)$:
$\lambda^2 + 2\lambda + 3 = 0 \implies \lambda_{1,2} = -1 \pm \mathrm{i}\sqrt{2} \implies$ $S_1$ je stabilní ohnisko.

Obdobně, charakteristická rovnice a vlastní čísla $\mathbf{J}(S_2)$:
$\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0 \implies \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -3 \implies$ $S_2$ je sedlo (nestabilní).

★

**Poznámka** Vlastnímu číslu $\lambda_1 = 1$ odpovídá vlastní vektor $\mathbf{h}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ a vlastnímu číslu $\lambda_2 = -3$ odpovídá vlastní vektor $\mathbf{h}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Vektory $\mathbf{h}_1$ a $\mathbf{h}_2$ určují směry, ve kterých z $S_2$ (pro $\lambda > 0$) vycházejí separatrix sedla, resp. (pro $\lambda < 0$) vcházejí separatrix do $S_2$.



**Věta** Necht $S_0 = (x_0, y_0)$ je rovnovážný stav nelineární soustavy

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \mathbf{v}_1(x, y), \\ \dot{y} &= \mathbf{v}_2(x, y). \end{aligned} \tag{1}$$

Necht $\mathbf{J}(S_0)$ je příslušná matice linearizace a necht obě vlastní čísla matice $\mathbf{J}$ mají nenulové reálné části.
Pak je fázový portrét nelineární soustavy (1) v jistém okolí rovnovážného stavu $S_0$ kvalitativně stejný jako fázový portrét soustavy

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{J}(S_0)\mathbf{z} \quad \text{v okolí počátku} \,. \tag{2}$$

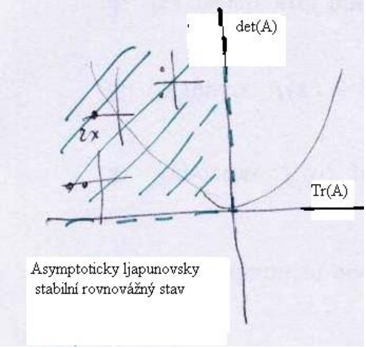
**Definice** Nechť $S_0 = (x_0, y_0)$ je izolovaný rovnovážný stav soustavy (1), $\mathbf{J}(S_0)$ příslušná matice linearizace s vlastními čísly $\lambda_1, \lambda_2$, která neleží na imaginární ose. Pak

1) Je-li $\lambda_1 \lambda_2 > 0$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, nazýváme rovnovážný stav $S_0$ uzlem.
2) Je-li $\lambda_1 \lambda_2 < 0$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, nazýváme rovnovážný stav $S_0$ sedlem.
3) Je-li $\lambda_{1,2} = a \pm ib$, $a\, b \neq 0$, nazýváme rovnovážný stav $S_0$ ohniskem.

Tedy kromě případu, kdy $\lambda_1, \lambda_2$ leží na imaginární ose, můžeme klasifikaci fázových portrétů nelineárních soustav v okolí rovnovážného stavu převést na klasifikaci fázových portrétů linearizace těchto soustav v okolí počátku.

# ★ Stabilita rovnovážných stavů

**Věta** Necht $S_0$ je rovnovážný stav soustavy (1). Necht $\mathbf{J}(S_0)$ je příslušná matice linearizace.




Mají-li obě vlastní čísla matice $\mathbf{J}(S_0)$ záporné reálné části, je $S_0$ asymptoticky ljapunovsky stabilním rovnovážným stavem.

Existuje-li vlastní číslo matice $\mathbf{J}(S_0)$ s kladnou reálnou částí, je rovnovážný stav $S_0$ ljapunovsky nestabilní.

Vratme se k Příkladu 1.

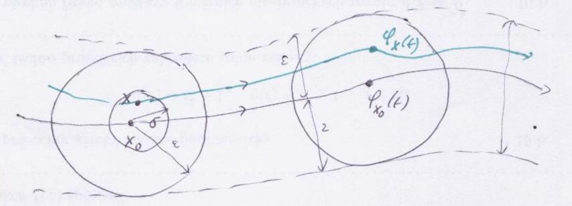
$S_1 = (0,1)$, $\mathbf{J}(S_1)$ má vl. č. $-1 \pm i\sqrt{2} \implies$ $S_1$ je ljapunovsky stabiní

$S_2 = (3,2)$, $\mathbf{J}(S_2)$ má vl. č. $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -3 \Rightarrow$ $S_2$ je ljapunovsky nestabiní.

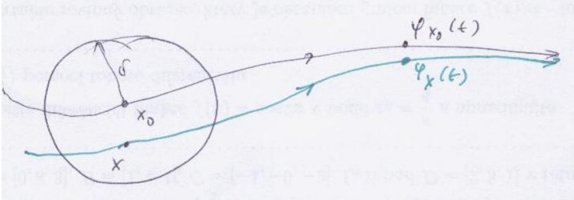
# ★ Definice

Rovnovážný stav soustavy $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{v}(\mathbf{x}(t))$ je ljapunovsky stabilní $\iff$

$$\forall \mathcal{O}_\varepsilon(x_0)\ \exists \mathcal{O}_\delta(x_0)\ \text{ takové, že }\ \forall x \in \mathcal{O}_\delta(x_0)\ \text{ je }\ \varphi_x(t) \in \mathcal{O}_\varepsilon(\varphi_{x_0}(t))\ \forall t \geq 0\,.$$




Rovnovážný stav soustavy $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{v}(\mathbf{x}(t))$ je asymptoticky ljapunovsky stabilní $\iff$ je ljapunovsky stabilní a $\lim\limits_{t\to\infty} \rho(\varphi_{x_0}(t) - \varphi_x(t)) = 0 \quad \forall x \in \mathcal{O}_\delta(x_0)$



# Homeomorfismus

Uvažujme nyní dvě soustavy

$$
\begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{v}(\mathbf{x}),\ \mathbf{x} \in M_1 \subseteq \mathbb{R}^2,\ \varphi(t,\mathbf{x}) \text{ fázový tok na } M_1, && (3)\\
\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{u}(\mathbf{x}),\ \mathbf{x} \in M_2 \subseteq \mathbb{R}^2,\ \psi(t,\mathbf{x}) \text{ fázový tok této soustavy na } M_2. && (4)
\end{aligned}
$$

**Definice** Říkáme, že fázové portréty soustav (3) a (4) jsou topologicky ekvivalentní, jestliže existuje homeomorfismus $h : M_1 \longrightarrow M_2$, který zobrazuje trajektorie první soustavy na trajektorie druhé soustavy při zachování orientace, t.j. platí

$$h(\varphi(t,\mathbf{x})) = \psi(t, h(\mathbf{x}))\,.$$

**Poznámka** $h : M_1 \longrightarrow M_2$ je homeomorfismus $\iff$ $h$ je prosté, $h$ a $h^{-1}$ jsou spojitá.

★

**Poznámka** Necht soustavy (3) a (4) jsou topologicky ekvivalentní prostřednictvím homeomorfismu $h$. Pak

**(i)** $h$ zobrazuje stabilní (nestabilní) r.s. soustavy (3) na stabilní (nestabilní) r.s. soustavy (4),

**(ii)** $h$ zobrazuje uzavřené trajektorie na uzavřené o stejné periodě,

**(iii)** $h$ zobrazuje $\omega-$limitní množiny trajektorií soustavy (3) na $\omega-$limitní množiny trajektorií soustavy (4),

**(iv)** $h$ zobrazuje homokliniky (heteroknliniky) soustavy (3) na homokliniky (heterokliniky) soustavy (4).

**Definice** Necht trajektorie $\gamma_{\mathbf{x}}$ odpovídá řešení $\varphi_{\mathbf{x}}(t)$ soustavy $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(\mathbf{x}(t))$.

Existuje-li posloupnost $\{t_i\}_{i=1}^{\infty}$, $\lim\limits_{i \longrightarrow \infty} t_i = \infty$ taková, že existuje $\lim\limits_{i \longrightarrow \infty} \varphi_{\mathbf{x}}(t_i) = \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$, nazýváme bod $\mathbf{z}$ $\omega-$limitním bodem trajektorie $\gamma_{\mathbf{x}}$.

Množina všech $\omega-$limitních bodů = $\omega-$limitní množina trajektorie $\gamma_{\mathbf{x}}$.

Značíme $\omega(\gamma_{\mathbf{x}})$ nebo jen $\omega(\mathbf{x})$.

Je-li $\mathbf{x}_1$ rovnovážný stav soustavy $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(\mathbf{x}(t))$, $\gamma_{\mathbf{a}}$ trajektorie řešení $\varphi_{\mathbf{a}}(t)$, pro které platí

**(i)** $\lim\limits_{t\to\infty} \varphi_{\mathbf{a}}(t) = \mathbf{x}_1$

**(ii)** $\lim\limits_{t\to\infty} \varphi'_{\mathbf{a}}(t) = \vec{\tau}_1$

Říkáme, že trajektorie $\gamma_{\mathbf{a}}$ vchází do r.s. $\mathbf{x}_1$ ve směru vektoru $\vec{\tau}_1$.

Podobně, platí-li pro r.s. $\mathbf{x}_2$

**(i)** $\lim\limits_{t\to-\infty} \varphi_{\mathbf{b}}(t) = \mathbf{x}_2$

**(ii)** $\lim\limits_{t\to-\infty} \varphi'_{\mathbf{b}}(t) = \vec{\tau}_2$

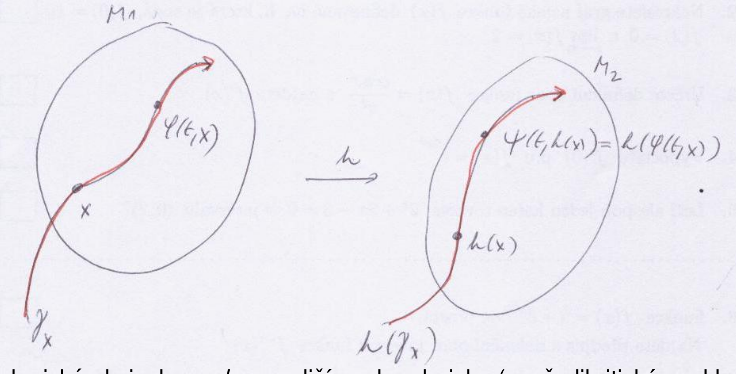
Říkáme, že trajektorie $\gamma_{\mathbf{b}}$ příslušná řešení $\varphi_{\mathbf{b}}(t)$ vychází z r.s. $\mathbf{x}_2$ ve směru vektoru $\vec{\tau}_2$.

**Poznámka** Platí-li jen první vztah a $\lim\limits_{t\to\infty} \varphi'_{\mathbf{a}}(t)$ neexistuje, říkáme, že trajektorie končí v bodě $\mathbf{x}_1$ (trajektorie vchází do r.s. spirálovitě).

Obdobně neexistuje-li $\lim\limits_{t\to-\infty} \varphi'_{\mathbf{b}}(t)$, trajektorie začíná v r.s. $\mathbf{x}_2$.

**Poznámka** $h : M_1 \longrightarrow M_2$ homeomorphismus (prosté, spojité zobrazení, $h^{-1}$ také spojité)
Topologická ekvivalence = vztah mezi fázovými toky soustav:

$$\underbrace{h(\varphi(t, \mathbf{x}))} = \underbrace{\psi(t, h(\mathbf{x}))}$$




Topologická ekvivalence $h$ nerozliší uzel a ohnisko (např. dikritický uzel lze zobrazit homeomorfně na fázový portrét stabilního ohniska). Aby bylo možno rozlišit uzel a ohnisko, musí být $h$ difeomorfismus, t.j. $h$ musí být prosté, spojité a parciální derivace $h$ i $h^{-1}$ musí být také spojité.

# ★ Diferencovatelně ekvivalentní soustavy

Mějme opět dvě soustavy

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(\mathbf{x}),\ \mathbf{x} \in M_1 \subseteq \mathbb{R}^2, \tag{5}$$
$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{u}(\mathbf{x}),\ \mathbf{x} \in M_2 \subseteq \mathbb{R}^2, \tag{6}$$

kde $M_1, M_2$ jsou oblasti v $\mathbb{R}^2$, $h : M_1 \longrightarrow M_2$ homeomorfismus, který zobrazuje trajektorie první soustavy na trajektorie druhé soustavy při zachování orientace, t.j. fázové portréty soustav jsou topologicky ekvivalentní

$$\underbrace{h(\varphi(t,\mathbf{x})) = \psi(t, h(\mathbf{x}))}\ .$$

přepíšeme ve tvaru $\psi^t(h(\mathbf{x})) = h(\varphi^t(\mathbf{x}))$, kde $h$ je difeomorfismus,

$$h(\mathbf{x}) = h(x_1, x_2) = (h_1(x_1, x_2), h_2(x_1, x_2)) \quad \text{a}$$

$$h'(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial h_1(\mathbf{x})}{\partial x_2} \\ \frac{\partial h_2(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial h_2(\mathbf{x})}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}$$

je derivace difeomorfismu $h$ (Jacobiova matice zobrazení $h$) .

★

**Definice** Říkáme, že fázové portréty soustav (5) a (6) jsou diferencovatelně ekvivalentní, jestliže existuje difeomorfismus $h : M_1 \longrightarrow M_2$, který zobrazuje trajektorie první soustavy na trajektorie druhé soustavy při zachování orientace, t.j. platí

$$\psi^t(h(\mathbf{x})) = h(\varphi^t(\mathbf{x}))\,.$$

**Poznámka** $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(\mathbf{x}),\ \mathbf{x} \in M_1 \subseteq \mathbb{R}^2,\ \mathbf{x}^*$ r.s. této soustavy, $\mathbf{y}^* = h(\mathbf{x}^*) \ldots$ r.s. soustavy $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{u}(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in M_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ . Nechť

$$\begin{array}{lccl} & \mathbf{J}(\mathbf{x}^*) & \ldots & \text{matice linearizace 1. soustavy v r.s. } \mathbf{x}^* \\ & \mathbf{J}(\mathbf{y}^*) & \ldots & \text{matice linearizace 2. soustavy v r.s. } \mathbf{y}^* = h(\mathbf{x}^*) \\ \text{Pak} & \mathbf{J}(\mathbf{y}^*) & = & h'(\mathbf{x}^*)\,\mathbf{J}(\mathbf{x}^*)\,(h'(\mathbf{x}^*))^{-1} \quad \Longrightarrow \end{array}$$

Matice linearizace v rovnovážných stavech obou soustav, které si odpovídají při difeomorfismu $h$, jsou podobné. Mají tedy stejná vlastní čísla.

**Závěr** Diferencovatelná ekvivalence rozliší uzel a ohnisko.

# Věta Grobmanova–Hartmanova

**Věta** (Grobmanova–Hartmanova) Necht soustava $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, má izolovaný r.s. $\mathbf{x}^*$ takový, že příslušná matice linearizace $\mathbf{J}(\mathbf{x}^*)$ má všechna vlastní čísla s nenulovými reálnými částmi.
Pak existuje $\mathcal{O}(\mathbf{x}^*)$ takové, že na $\mathcal{O}(\mathbf{x}^*)$ je fázový portrét soustavy $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(\mathbf{x})$ topologicky ekvivalentní s fázovým portrétem lineární soustavy $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}(\mathbf{x}^*)\,\mathbf{x}$, t.j. fázové toky soustav

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(\mathbf{x}) \text{ (nelineární)} \quad \text{a} \quad \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}(\mathbf{x}^*)\,\mathbf{x} \text{ (lineární)}$$

jsou topologicky ekvivalentní prostřednictvím vhodného homeomorfismu.

**Poznámka** Připomeňme, že topologická ekvivalence nerozliší fázový portrét uzlu a ohniska. Pro $n = 2$ (rovinné soustavy) lze ukázat, že má-li matice linearizace $\mathbf{J}(\mathbf{x}^*)$ vlastní čísla $\lambda_{1,2} = a \pm ib, a\,b \neq 0$, pak trajektorie mají v okolí $\mathbf{x}^*$ tvar spirál, které končí v r.s. $\mathbf{x}^*$ (je-li $\mathbf{x}^*$ stabilní), je-li $\mathbf{x}^*$ nestabilní, trajektorie mají tvar spirál, které se odvíjejí od $\mathbf{x}^*$.

## Uzavřené trajektorie

**Věta** (Bendixonovo kritérium) Mějme soustavu diferenciálních rovnic v rovině,

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \qquad \text{i.e.,} \quad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= v_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 &= v_2(x_1, x_2)\,. \end{aligned}$$

Jestliže

$$\operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{x}) = \frac{\partial v_1(\mathbf{x})}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2(\mathbf{x})}{\partial x_2} \neq 0$$

na nějaké jednoduše souvislé oblasti $D \subset \mathbb{R}^2$, pak soustava $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(\mathbf{x})$ nemá v oblasti $D$ žádnou uzavřenou trajektorii $\gamma \subset D$.

★

**Příklad** Soustava diferenciálních rovnic v rovině:

$$\begin{aligned} x' &= -y + x(1 - x^2 - y^2), \\ y' &= x + y(1 - x^2 - y^2), \end{aligned} \quad \text{i.e.,} \quad \begin{aligned} v_1(x,y) &= -y + x(1 - x^2 - y^2), \\ v_2(x,y) &= x + y(1 - x^2 - y^2). \end{aligned}$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial x} = 1 - 3x^2 - y^2, \quad \frac{\partial v_2}{\partial y} = 1 - x^2 - 3y^2.$$

$$\mathrm{div}\mathbf{v}(\mathbf{x}) = 2(1 - 2(x^2 + y^2)) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 + y^2 = \frac{1}{2}.$$

$$\mathrm{div}\mathbf{v}(\mathbf{x}) > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 + y^2 < \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow$$

uvnitř kružnice nemůže podle Bendixonova kritéria ležet žádná celá uzavřená trajektorie.

**Poznámka** Vnějšek kružnice není jednoduše souvislá oblast a větu nelze použít. Nevím nic o existenci uzavřené trajektorie vně kruhu.

# Literatura k dalšímu studiu


- Hirsch, M. W., Smale S., Devaney R.L.: Differential equations, dynamical systems and introduction to chaos, 2nd ed.; Academic Press: San Diego, 2004. pdf
- Klíč, A.; Dubcová, M.; Buřič, L.; et al. Soustavy obyčejných diferenciálních rovnic – kvalitativní teorie, dynamické systémy, 1st ed.; VŠCHT Praha: Praha, 2009.
- Klíč A., Kubíček M.: Matematika III - Diferenciální rovnice, VŠCHT Praha, 1992.
- Meiss J.D.: Differential dynamical systems. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2007.
- Rasmuson A., Andersson B., Olsson L., Andersson R.: Mathematical Modeling in Chemical Engineering. Cambridge University Press, 2014.
- Scheinerman E. R.: Invitation to Dynamical Systems. The John Hopkins University, 1996.