Matematika pro chemické inženýry

Drahoslava Janovská

14. Parciální diferenciální rovnice

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Povinná látka. Bude v písemkách a bude se zkoušet při ústní zkoušce (žádné označení)

★ Příklady k procvičení - dobrovolné

★ Pro studenty, kteří chtějí vědět víc. Tato látka se nebude přednášet, nebude v písemkách, nebude se zkoušet.

Obsah

Klasifikace lineárních parciálních diferenciálních rovnic 2. řádu

Na rozdíl od obyčejných diferenciálních rovnic, jejichž teorie se odvíjí z věty o existenci a jenoznačnosti řešení, neexistuje žádná podobná věta pro parciální diferenciální rovnice (PDR). Každý typ PDR má vlastní teorii.

Lineární PDR 2.řádu

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G\,,$$

kde obecně A, B, C, D, E, F, G jsou spojité funkce x a y v oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, přičemž alespoň jedna z funkcí A, B, C je nenulová v každém bodě $(x, y) \in \Omega$.

Je-li

$$\begin{array}{lll} AC - B^2 > 0 & \dots & \text{eliptické PDR} \\ AC - B^2 < 0 & \dots & \text{hyperbolické PDR} \\ AC - B^2 = 0 & \dots & \text{parabolické PDR} \end{array}$$

Poznámka: $\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2\,.$

Příklad Uvažujme rovnici

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0\,.$$

Zde $A = 1, B = 0, C = y, D = E = F = G = 0$, tedy $AC - B^2 = y$. Rovnice je tedy eliptického typu pro všechny body horní poloroviny, tj. pro $y > 0$, je hyperbolického typu v dolní polorovině, tj. pro $y < 0$, a je parabolického typu v bodech osy x, t.j. pro $y = 0$.

Příklad Nyní uvažujme rovnici

$$4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0\,.$$

Tato rovnice je parabolická, protože $AC - B^2 = 4 - 4 = 0$.

Transformace proměnných

Věta Každou lineární parciální diferenciální rovnici druhého řádu dvou proměnných, eliptickou, hyperbolickou, nebo parabolickou, lze vhodnou lokální transformací souřadnic převést v okolí každého bodu $(x_0, y_0) \in \Omega$ na kanonický tvar. Tj. u rovnice eliptického typu na tvar

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a_1(x, y)\frac{\partial u}{\partial x} + b_1(x, y)\frac{\partial u}{\partial y} + c_1(x, y)u = f_1(x, y),$$

u rovnice hyperbolického typu na tvar

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a_2(x, y)\frac{\partial u}{\partial x} + b_2(x, y)\frac{\partial u}{\partial y} + c_2(x, y)u = f_2(x, y)$$

a u rovnice parabolického typu na tvar

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a_3(x, y)\frac{\partial u}{\partial x} + b_3(x, y)\frac{\partial u}{\partial y} + c_3(x, y)u = f_3(x, y), \quad a_3(x, y) \neq 0.$$

Lineární PDR 2. řádu s konstantními koeficienty

Mějme nyní lineární PDR 2. řádu s konstantními koeficienty

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D\frac{\partial u}{\partial x} + E\frac{\partial u}{\partial y} + Gu - F = 0\,, \tag{1}$$

kde $|A| + |B| + |C| \neq 0$. K dané rovnici přiřadíme charakteristickou rovnici

$$A(\mathrm{d}y)^2 - B\mathrm{d}x\mathrm{d}y + C(\mathrm{d}x)^2 = 0\,. \tag{2}$$

Řešením charakteristické rovnice je každá dvojice funkcí

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad t \in (\alpha, \beta)\,, \tag{3}$$

která splňuje danou rovnici. Přitom za $\mathrm{d}x$ dosadíme výraz $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$, za $\mathrm{d}y$ výraz $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ a nakonec celou rovnici vydělíme výrazem $(\mathrm{d}t)^2$.

Definice Jestliže jsou funkce $x(t) = \varphi(t)$, $y(t) = \psi(t)$ řešením rovnice (2) a jsou-li rovnice (3) parametrickými rovnicemi hladké křivky, pak tuto křivku nazveme charakteristikou.

Příklad Najděte charakteristiky rovnice

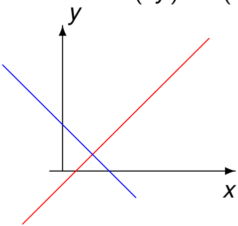
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 .$$

Řešení K rovnici přiřadíme charakteristickou rovnici:

$$(\mathrm{d}y)^2 - (\mathrm{d}x)^2 = 0 ,$$

neboli

$$(\mathrm{d}y)^2 = (\mathrm{d}x)^2 \implies \frac{(\mathrm{d}y)^2}{(\mathrm{d}x)^2} = 1 \implies \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \pm 1 .$$



Charakteristikami dané rovnice jsou přímky

$$y = x + P \quad \text{a} \quad y = -x + Q,$$

kde $P, Q \in \mathbb{R}$.
Máme tak dvě třídy přímek a každým bodem roviny $0xy$ prochází právě jedna přímka z každé třídy.

Poznámka Bodem (x, y) může procházet právě jedna charakteristika, nebo charakteristik může být více a nebo nemusí existovat žádná.

Příklad Najděte charakteristiky pro rovnici vedení tepla

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0\,.$$

Řešení Rovnici přiřadíme charakteristickou rovnici:

$$(\mathrm{d}y)^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{d}y = 0 \quad \Longrightarrow \quad y = P,\ P \in \mathbb{R}\,.$$

Charakteristiky rovnice vedení tepla jsou přímky $y = konst$.

Příklad Najděte charakteristiky Laplaceovy rovnice

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0\,.$$

Řešení Laplaceově rovnici přiřadíme charakteristickou rovnici:

$$(\mathrm{d}y)^2 + (\mathrm{d}x)^2 = 0\,,$$

Součet dvou nezáporných hodnot je roven nule tehdy a jen tehdy, pokud obě hodnoty jsou současně nulové, takže máme

$$dy = 0 \quad \Longrightarrow \quad y = P\,, \quad dx = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = Q\,,\ P, Q \in \mathbb{R}\,.$$

Vztahy $x = Q\,,\ y = P$, ale nepopisují žádnou křivku, proto Laplaceova rovnice nemá žádnou charakteristiku.

★ Převod na kanonický tvar - rovnice hyperbolického typu

Ukážeme si, jak lze PDR 2. řádu s konstantními koeficienty (1) převést pomocí charakteristik na kanonický tvar.
Mějme rovnici hyperbolického typu, tj. $B^2 - 4AC > 0$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $A \neq 0$. Charakteristickou rovnici

$$A(\mathrm{d}y)^2 - B\mathrm{d}x\mathrm{d}y + C(\mathrm{d}x)^2 = 0$$

upravíme na tvar

$$A\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 - B\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + C = 0\,.$$

Zaveďme substituci $\lambda := \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ a hledejme řešení rovnice

$$A\lambda^2 - B\lambda + C = 0\,.$$

Vzhledem k podmínce pro rovnici hyperbolického typu, má tato kvadratická rovnice dvě reálná různá řešení. Označme je $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

Potom

$$\lambda_1 := \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{d}y = \lambda_1 \mathrm{d}x \quad \Longrightarrow \quad y = \lambda_1 x + \xi\,,\ \xi \in \mathbb{R}\,.$$

Analogicky $$y = \lambda_2 x + \eta,\ \eta \in \mathbb{R}.$$

Charakteristikami jsou tedy dvě třídy přímek

$$y = \lambda_1 x + \xi\,, \quad \text{a} \quad y = \lambda_2 x + \eta\,,\ \xi, \eta \in \mathbb{R}\,.$$

Každým bodem prochází právě jedna přímka z každé třídy, Jinak řečeno, známe-li bod (x, y), známe i čísla ξ, η a naopak, známe-li čísla ξ, η, známe i souřadnice průsečíku charakteristik:

$$x = \frac{\xi - \eta}{\lambda_2 - \lambda_1}\,, \qquad y = \frac{\lambda_2 \xi - \lambda_1 \eta}{\lambda_2 - \lambda_1}\,,$$

a naopak

$$\xi = y - \lambda_1 x\,, \qquad \eta = y - \lambda_2 x\,.$$

Tedy každou funkci proměnných x, y můžeme považovat za funkci proměnných ξ, η. Přitom platí:

$$u(x,y) = u\left(\frac{\xi - \eta}{\lambda_2 - \lambda_1}, \frac{\lambda_2\xi - \lambda_1\eta}{\lambda_2 - \lambda_1}\right) = U(\xi, \eta)\,.$$

A naopak

$$U(\xi,\eta) = U(y - \lambda_1 x, y - \lambda_2 x) = u(x,y)\,.$$

Zkoumejme, jakou rovnici splňuje funkce U, jestliže funkce u je řešením rovnice (1). Musíme tedy vypočítat parciální derivace složené funkce

$$u(x,y) = U(\xi,\eta), \quad \xi = \xi(x,y),\ \eta = \eta(x,y)\,.$$

★

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial U}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x} = -\lambda_1\frac{\partial U}{\partial \xi} - \lambda_2\frac{\partial U}{\partial \eta}\,,\\
\frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial U}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{\partial U}{\partial \eta}\,,\\
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \lambda_1^2\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + 2\lambda_1\lambda_2\frac{\partial^2 U}{\partial \xi\partial \eta} + \lambda_2^2\frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2}\,,\\
\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} &= -\lambda_1\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} - (\lambda_1+\lambda_2)\frac{\partial^2 U}{\partial \xi\partial \eta} - \lambda_2\frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2}\,,\\
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 U}{\partial \xi\partial \eta} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2}\,.
\end{aligned}
$$

Dosadíme tyto hodnoty do rovnice (1) a dostaneme

$$
A\left(\lambda_1^2\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + 2\lambda_1\lambda_2\frac{\partial^2 U}{\partial \xi\partial \eta} + \lambda_2^2\frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2}\right) + B\left(-\lambda_1\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} - (\lambda_1+\lambda_2)\frac{\partial^2 U}{\partial \xi\partial \eta} - \lambda_2\frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2}\right) +
$$

$$
+C\left(\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 U}{\partial \xi\partial \eta} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2}\right) + D\left(-\lambda_1\frac{\partial U}{\partial \xi} - \lambda_2\frac{\partial U}{\partial \eta}\right) + E\left(\frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{\partial U}{\partial \eta}\right) + Gu - F = 0\,.
$$

Po úpravě dostaneme (zajímají nás jen členy, které obsahují 2. derivace):

$$(A\lambda_1^2-B\lambda_1+C)\frac{\partial^2 U}{\partial\xi^2}+(2A\lambda_1\lambda_2-B(\lambda_1+\lambda_2)+2C)\frac{\partial^2 U}{\partial\xi\partial\eta}+(A\lambda_2^2-B\lambda_2+C)\frac{\partial^2 U}{\partial\eta^2}+\cdots=0\,.$$

Nyní upravíme koeficienty těchto derivací. Protože λ_1, λ_2 byly kořeny kvadratické rovnice $A\lambda^2 - B\lambda + C = 0$, jsou koeficienty druhých parciálních derivací podle ξ^2 a η^2 nulové. Koeficient $2A\lambda_1\lambda_2 - B(\lambda_1 + \lambda_2) + 2C$ upravíme pomocí Vietových vzorců. Platí

$$\lambda_1+\lambda_2=-\frac{-B}{A}=\frac{B}{A}\,,\quad \lambda_1\lambda_2=\frac{C}{A}\,.\qquad \text{Tedy}$$

$$2A\lambda_1\lambda_2-B(\lambda_1+\lambda_2)+2C=2A\frac{C}{A}-B\frac{B}{A}+2C=\frac{1}{A}(-B^2+4AC)\neq 0\,,$$

protože rovnice byla hyperbolická. Tedy koeficient u smíšené druhé parciální derivace bude nenulový a můžeme jím vydělit celou rovnici. Dostaneme kanonický tvar hyperbolické rovnice, který se používá k řešení:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial\xi\partial\eta}+\cdots=0\,.$$

Lineární vlnová rovnice 2. řádu

Příklad Lineární vlnová rovnice 2. řádu

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \tag{4}$$

$A = -c^2,\ B = 0,\ C = 1,\ AC - B^2 = -c^2 < 0 \quad \Longrightarrow$ vlnová rovnice je hyperbolická .

Proč vlnová rovnice?
Necht $f(\cdot)$ je libovolná funkce jedné proměnné dvakrát spojitě diferencovatelná. Necht $u(x,t) = f(x - ct)$. Pak

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x,t) = f'(x - ct).(-c)\,, \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x,t) = f''(x - ct) \cdot c^2\,,$$

$$\frac{\partial}{\partial x} u(x,t) = f'(x - ct)\,, \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,t) = f''(x - ct)\,.$$

Dosadíme-li $u(x,t) = f(x - ct)$ a příslušné derivace do rovnice (4), dostaneme $f''(x - ct) \cdot c^2 - c^2 f''(x - ct) = 0$, a tedy $u(x,t) = f(x - ct)$ řeší rovnici (4) pro libovolnou funkci jedné proměnné, která má dvě spojité derivace. Obdobně, $u(x,t) = f(x + ct)$ je také řešení vlnové rovnice (4).

Jak se funkce $u(x,t) = f(x - ct)$ chová?
V čase $t = 0$ je řešení jednoduše $u(x,0) = f(x)$. Jak se čas zvětšuje, profil $f(x)$ se pohybuje vpravo rychlostí c , t.j.

$$u(x,t_1) = f(x - ct_1) = f(x - ct_1 + ct_2 - ct_2) = f((x + c(t_2 - t_1)) - ct_2) =$$

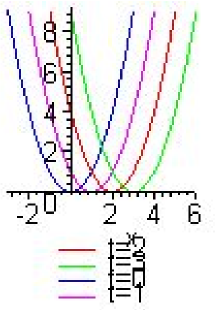
$$= u(x + c(t_2 - t_1), t_2)\,.$$

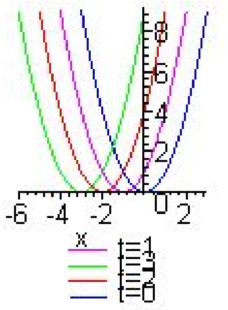
Obdobně je-li $u(x,t) = f(x + ct)$, pohybuje se profil $f(x)$ doleva s rychlostí c:

$$u(x,t_1) = f(x + ct_1) = f(x + ct_1 - ct_2 + ct_2) = f((x - c(t_2 - t_1) + ct_2) =$$

$$= u(x - c(t_2 - t_1), t_2)\,.$$

Např: $f(x) = x^2,\ c = 1,\ t_1 = 1,\ u(x, t_1) = f(x - ct_1) = (x - ct_1)^2 \Longrightarrow$
$u(x, 1) = (x - 1)^2,\ u(x, 2) = (x - 2)^2,\ u(x, 3) = (x - 3)^2,\ \ldots$



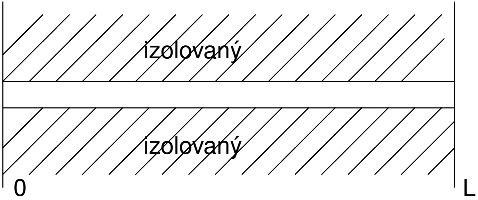


$u(x, t) = f(x - ct) \longrightarrow$ $\longleftarrow u(x, t) = f(x + ct)$

Rovnice vedení tepla a vlnová rovnice v 1D na konečné oblasti

Rovnice vedení tepla

Kovový drát délky ℓ vede teplo jen v jednom směru (v jedné dimenzi), drát nemusí být na koncích nutně izolovaný



Rozložení teploty	$u_t - \gamma^2 u_{xx} = 0\,,$	$0 < x < L,\ 0 < t < \infty\,,$
okrajová podmínka	$u(0,t) = g_1\,, \quad u(L,t) = g_L$	$0 < t < \infty\,,$
nebo	$u(0,t) = g_1(t),\ u(L,t) = g_L(t)$	$0 < t < \infty\,,$
počáteční podmínka	$u(x,0) = f(x)\,,$	$0 \le x \le L\,.$

Poznámka: $A = -\gamma^2,\ E = 1,\ AC - B^2 = 0 \implies$ parabolická PDR.

Řešení existuje, a to právě jedno.

Označme $\varphi(x)$ tok tepla = proudění tepla za jednotku času jednotkovou plochou.

Fourierův zákon vedení tepla

$$\varphi(x) = -k_0 \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\,, \quad \text{kde}$$

k_0 je tepelná vodivost materiálu (k_0 malé ... izolátor, k_0 velké ... dobrý vodič)

Drát na konci upevněný

rovnice	$u_t - \gamma^2 u_{xx} = 0\,,$	$0 < x < L,\ 0 < t < \infty$
okr.pod.	$u(0,t) = 0,\ u(L,t) = 0\,,$	$0 < t < \infty,$ (homogenní)
poč.pod.	$u(x,0) = f(x)\,,$	$0 \le x \le L\,.$

Řešíme metodou separace proměnných, tj. hledáme řešení ve tvaru

$$u(x,t) = X(x)\cdot T(t)\,.$$

Dosadíme do naší úlohy: $\dfrac{\partial u}{\partial x} = X'(x)\cdot T(t)\,,\quad \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''(x)\cdot T(t)\,,\quad \Longrightarrow$

$$X(x)T'(t) - \gamma^2 X''(x)T(t) = 0\,,$$

$$\underbrace{\frac{T'(t)}{\gamma^2 T(t)}} = \underbrace{\frac{X''(x)}{X(x)}} = k\,.$$

Tedy funkce proměnné t je rovna funkci proměnné x a jediná možnost, jak se mohou rovnat je, že se rovnají nějaké konstantě k, k ... separační konstanta.

$\Longrightarrow$ 2 rovnice

$$\begin{aligned} T'(t) - k\gamma^2 T(t) &= 0 \\ X''(x) - kX(x) &= 0 \end{aligned}$$

Řešení $T'(t) - k\gamma^2 T(t) = 0$:

$$T(t) = C\mathrm{e}^{-A(t)}\,, \quad A(t) = \int a(t)\mathrm{d}t = \int -k\gamma^2 \mathrm{d}t = -k\gamma^2 t$$

$$T(t) = C\mathrm{e}^{k\gamma^2 t}\,, \quad C \in \mathbb{R}\,.$$

Omezení na k: kdyby $k > 0 \implies k\gamma^2 > 0 \implies \lim_{t \longrightarrow +\infty} T(t) = +\infty \ \ldots$ nefyzikální $\implies$ předpoklad $k \leq 0$. Necht například $k = -\lambda^2$. Pak

$$T(t) = C\mathrm{e}^{-\lambda^2\gamma^2 t}\,, \quad C \in \mathbb{R}\,.$$

Řešení $X''(x) - kX(x) = 0$, t.j. $X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0 \implies$ charakteristická rovnice $\tau^2 + \lambda^2 = 0 \implies \tau = \pm\lambda\mathrm{i} \implies$

$$X(x) = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x\,, \quad A,\ B \in \mathbb{R},\ \lambda \in \mathbb{R}\,.$$

Hledané řešení:

$$u(x,t) = (A\cos\lambda x + B\sin\lambda x)\cdot C\cdot \mathrm{e}^{-\lambda^2\gamma^2 t}$$

Okrajové podmínky:

$$\begin{aligned} u(0,t) &= T(t)X(0) = 0 \quad 0 < t < +\infty \\ u(L,t) &= T(t)X(L) = 0 \quad T(t) \neq 0 \text{ (chceme netriviální řešení)} \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow X(0) = 0\,,\ \text{t.j.}\quad X(0) = A\cos 0 + B\sin 0 = A = 0\,,$$

$$X(L) = 0\,,\quad X(L) = A\cos\lambda L + B\sin\lambda L = B\sin\lambda L = 0\,,\ B \neq 0\,,$$

nechceme triviální řešení . Tedy $\lambda L = n\pi$,

$$\lambda = n\cdot\frac{\pi}{L}\,,\qquad n \in \mathbb{N}\,.$$

Označme jedno z řešení

$$X_n(x) = B_n \sin\lambda_n x = B_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\,.$$

Dostaneme

$$u_n(x,t) = T_n(t)X_n(x) = C_n \mathrm{e}^{-\lambda^2\gamma^2 t} B_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right),$$

$$u_n(x,t) = b_n\, \mathrm{e}^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}\gamma^2 t} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad b_n := C_n B_n .$$

Tedy můžeme zvolit libovolné přirozené n a dostaneme řešení.

Jak je to s počátečními podmínkami?
Rovnice vedení tepla je lineární $\implies$ lineární kombinace řešení je opět řešení. Necht tedy řešení má tvar

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \mathrm{e}^{-\lambda^2\gamma^2 t} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right).$$

$$t = 0 \implies u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right).$$

Zbývá určit konstanty b_n . Jestliže bude platit

$$f(x) = u(x,0) = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)}_{\text{Fourierova sinová řada na } \langle 0, L\rangle},$$

dostaneme jednoznačné řešení .
Sinová řada (rozvoj funkce $f(x)$ do sinů)

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad \text{kde} \quad b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\mathrm{d}x\,.$$

Výsledné řešení :

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \mathrm{e}^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}\gamma^2 t} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \ \text{kde } b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\mathrm{d}x\,.$$

Poznámka: Pro $t \longrightarrow +\infty$ konverguje řešení k nule, t.j. k okrajovým podmínkám $u(0,t) = u(L,t) = 0$.
Funkce $u(x,t) \equiv 0$ je, zanedbáme-li počáteční podmínky, konstantní řešení naší úlohy.

Drát na koncích perfektně izolovaný

Drát na koncích izolovaný $\Rightarrow$ na koncích žádný tok ("nic nevchází ani nevychází") . Metodou separace proměnných tentokrát řešíme úlohu

rovnice	$u_t - \gamma^2 u_{xx} = 0\,,$	$0 < x < L,\ 0 < t < \infty$	
okr.pod.	$u_x(0,t) = 0,\ u_x(L,t) = 0\,,$	$0 < t < \infty,$	žádný tok
poč.pod.	$u(x,0) = f(x)\,,$	$0 \le x \le L\,.$	

Řešení hledáme ve tvaru

$$u(x,t) = X(x) \cdot T(t)\,.$$

Dostaneme

$$X(x) = A\cos(\lambda x) + B\sin(\lambda x)\,,$$

Z počátečních podmínek

$$u_x(0,t) = X'(0) = 0 \implies -A\lambda\sin(\lambda x) + B\lambda\cos(\lambda x) = 0,\ \lambda \neq 0 \implies B = 0$$

$$\implies \quad X(x) = A\cos(\lambda x)\,,$$

Dále $\quad X'(L) = -A\lambda\sin(\lambda L) = 0 \implies \lambda L = n\pi,\ n = 0, 1, \ldots$

Položme $$\lambda_n := \frac{n\pi}{L}, \quad n = 0, 1, \ldots$$

Dostaneme

$$X_n(x) = A_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad T_n(x) = C_n \,\mathrm{e}^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}\gamma^2 t},$$

$$u_n(x,t) = T_n(t)X_n(x) = a_n \,\mathrm{e}^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}\gamma^2 t} \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad a_n := A_n C_n\,.$$

Z linearity

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \,\mathrm{e}^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}\gamma^2 t} \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right).$$

Z počáteční podmínky

$$u(x,0) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) ,$$

koeficienty a_n definujeme z cosinového rozvoje $f(x)$ pro $0 \le x \le L$.

Výsledné řešení:

$$u(x,t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \, \mathrm{e}^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}\gamma^2 t} \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) , \quad \text{kde}$$

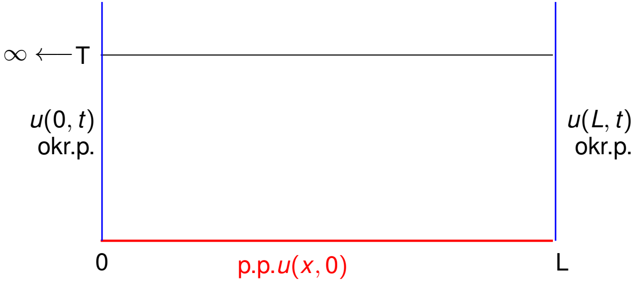
$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{L}\int_0^L f(x)\mathrm{d}x , \\ a_n &= \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\mathrm{d}x . \end{aligned}$$

Poznámka Co se stane pro $t \longrightarrow \infty$?

Opět všechny členy pro $n > 0$ konvergují k 0, ale teplota pro $t \longrightarrow \infty$ je tentokrát konstanta a_0. Povšimněte si, že a_0 je průměrná hodnota počáteční teploty, nebot podle věty o střední hodnotě integrálního počtu je

$$\mathrm{prm}(f(x), \langle 0, L\rangle) = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)\mathrm{d}x$$

a řešení dasáhne této hodnoty.



Stacionární řešení (steady state solutions)

Stacionární řešení je takové řešení, které nezávisí na čase, je pouze funkcí x, t.j.

$$u(x,t) = U(x)\,.$$

Poznamenejme, že v předchozích dvou problémech vedení tepla (difuze) platilo, že $\lim\limits_{t\longrightarrow\infty} u(x,t) = U(x)$.

Dosaďme stacionární řešení do rovnice difuze

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}U(x)}_{=\,0} - \gamma^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}U(x) = 0 \iff U''(x) \equiv 0\,, \quad \text{t.j. grafem } U \text{ je přímka}\,.$$

Funkce $U(x)$ musí také splňovat okrajové podmínky, t.j.

$$\forall t > 0 \quad U(0) = U(L) = 0 \implies U(x) \equiv 0\,.$$

Pro řešení úlohy s okrajovými podmínkami $u_x(0,t) = u_x(L,t)$ je řešením jakákoliv konstantní funkce.

Homogenizace

Zatím jsme měli homogenní okrajové podmínky. Obecné nehomogenní lineární okrajové podmínky mají tvar

$$\begin{aligned} \alpha_1 u(0,t) + \beta_1 u_x(0,t) &= p_1(t)\,, \quad \alpha_1\beta_1 \neq 0 \\ \alpha_2 u(L,t) + \beta_2 u_x(L,t) &= p_2(t)\,, \quad \alpha_2\beta_2 \neq 0\,. \end{aligned}$$

Úlohu s takovými okrajovými podmínkami nelze řešit separací. Co s tím? Uvažujme například úlohu

rovnice	$u_t - \gamma^2 u_{xx} = 0\,,$	$0 < x < L,\ 0 < t < \infty$
okr.pod.	$u(0,t) = A,\ u(L,t) = B\,,$	$0 < t < \infty,$
poč.pod.	$u(x,0) = f(x)\,,$	$0 \leq x \leq L\,.$

Tento problém převedeme na úlohu s homogenními okrajovými podmínkami – tzv. homogenizace.

$$\text{Necht} \quad u(x,t) = \widetilde{u}(x,t) + h(x) \quad \Longrightarrow \quad \widetilde{u}(x,t) = u(x,t) - h(x)\,,$$

kde $h(x)$ je nějaká funkce. Jaká?
Už víme, že stacionární řešení U je přímka, která splňuje okrajové podmínky.
Tedy obecně $U(x) = mx + b$, kde m a b určíme z okrajových podmínek,

$$\begin{aligned} U(0) &= b \quad \Longrightarrow \quad b = A \\ U(L) &= mL + b = mL + A = B \quad \Longrightarrow \quad m = \frac{B-A}{L}\,. \end{aligned}$$

Stacionární řešení je $\quad U(x) = \dfrac{B-A}{L}x + A = \dfrac{A(L-x)}{L} + \dfrac{Bx}{L}\,.$

Tedy řešení zapíšeme ve tvaru

$$\underbrace{u(x,t)}_{\text{nehomog.okr.p.}} = \underbrace{\widetilde{u}(x,t)}_{\text{homog.okr.p.}} + \underbrace{U(x)}_{\text{"nafitují"žádané okr.p.}}$$

$\widetilde{u}(x,t)\ldots\underbrace{\text{částečné řešení}}_{\text{mezivýsledek}}$ (přechodné, "transient solution")

Nyní dosadíme $u(x,t) = \widetilde{u}(x,t) + U(x)$ do rovnice $u_t - \gamma^2 u_{xx} = 0$.
Dostaneme

$$\frac{\partial \widetilde{u}(x,t)}{\partial t} - \gamma^2 \frac{\partial^2 \widetilde{u}(x,t)}{\partial x^2} - \gamma^2 \underbrace{U''(x)}_{=0} = 0 \qquad \Longrightarrow$$

$$\frac{\partial \widetilde{u}(x,t)}{\partial t} - \gamma^2 \frac{\partial^2 \widetilde{u}(x,t)}{\partial x^2} = 0 \quad \text{stejná rovnice jako pro } u(x,t)$$

$$\widetilde{u}(0,t) = u(0,t) - A = 0, \; \widetilde{u}(L,t) = u(L,t) - B = 0 \quad \text{homogenní okrajová podmínka}$$

$$\widetilde{u}(x,0) = f(x) - U(x) := g(x) = f(x) - \frac{B-A}{l} x - A \quad \text{počáteční podmínka}$$

Dostaneme úlohu pro ”mezivýsledek”

$$\begin{array}{lll}
\text{rovnice} & \widetilde{u}_t - \gamma^2 \widetilde{u}_{xx} = 0\,, & 0 < x < L,\; 0 < t < \infty \\
\text{okr.pod.} & \widetilde{u}(0,t) = \widetilde{u}(L,t) = 0\,, & 0 < t < \infty, \\
\text{poč.pod.} & \widetilde{u}(x,0) = g(x)\,, & 0 \le x \le L\,.
\end{array}$$

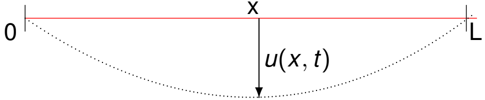
Hledané řešení je

$$u(x,t) = \underbrace{\widetilde{u}(x,t)}_{\text{částečné řešení}} + \underbrace{U(x)}_{\text{stacionární řešení}} .$$

Vlnová rovnice v 1D na konečném intervalu

Modelová rovnice: Elastická struna upevněná ve dvou bodech $x = 0$ a $x = L$

Struna je pevná, předpokládáme, že když nastane stacionární (rovnovážný) stav, struna je rovná přímka.



$$0 \le x \le L,\ u(x,t)\ \ldots\ \text{svislé posunutí}$$

$$\text{rovnice}\quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad 0 \le x \le L, \quad 0 < t < \infty,$$

c je parametr, který závisí na vlastnostech struny, konkrétně c je vlnová rychlost systému, t.j. rychlost, s jakou se profil vlny pohybuje.

dvě okr.p. $u(0,t) = u(L,t) = 0, \quad t > 0$ struna upevněná na obou koncích

dvě poč.p. $u(x,t) = f(x),\ u_t(x,0) = g(x), \quad 0 \le x \le L,$

$f(x)$ je poč. posunutí struny, $g(x)$ je poč. svislá rychlost struny v bodě x.

Za vhodných předpokladů na $f(x)$ a $g(x)$ má úloha jednoznačné řešení.

Úlohu řešíme separací, t.j. hledáme řešení rovnice (bez okr. a poč. podmínek) ve tvaru $u(x,t) = X(x)T(t)$. Dosadíme do rovnice a dostaneme

$$X(x)T''(t) - c^2 X''(x)T(t) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{T''(t)}{c^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = k\,,$$

tedy

$$\begin{aligned} T''(t) - kc^2 T(t) &= 0 \\ X''(x) - kX(x) &= 0\,. \end{aligned}$$

Tyto dvě rovnice vyřešíme.
Poznamenejme, že konstanta k může být pouze ≤ 0. Položíme $k := -\lambda^2$.

Dostaneme

$$\begin{aligned} T(t) &= A\sin(c\lambda t) + B\cos(c\lambda t), \quad A, B \in \mathbb{R} \\ X(x) &= C\sin(\lambda x) + D\cos(\lambda x), \quad C, D \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

Okrajové podmínky: $X(0) = C\sin(0) + D\cos(0) = D = 0$. Tedy

$$\begin{aligned} X(x) &= C\sin(\lambda x) \\ X(L) &= C\sin(\lambda L) = 0 \implies \begin{cases} C = 0, & \text{triviální řešení} \\ C \neq 0, & \lambda L = n\pi \ \Rightarrow \lambda = \frac{n\pi}{L}, \ n \in \mathbb{N} \end{cases} \end{aligned}$$

t.j. pro $C \neq 0$ splňuje nekonečně mnoho řešení naší rovnice struny okrajové podmínky. Pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ je

$$u_n(x,t) = T_n(t)X_n(x) = [A_n\sin(c\lambda_n t) + B_n\cos(c\lambda_n t)] \cdot C_n\sin(\lambda_n x),$$

kde $\lambda_n = \dfrac{n\pi}{L}$, $A_n, B_n, C_n \in \mathbb{R}$ libovolné konstanty.

Lineární kombinace řešení je také řešení:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \sin(c\frac{n\pi}{L}t) + B_n \cos(c\frac{n\pi}{L}t) \right] \cdot \sin(\frac{n\pi}{L}x)\,.$$

Poznamenejme, že C_n jsme se zbavili tak, že jsme položili

$$A_n := A_n C_n, \quad B_n := B_n C_n\,.$$

Z počátečních podmínek $u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = g(x), \; 0 \le x \le L$, je

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(\frac{n\pi}{L}x) = f(x), \text{ definujeme } B_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin(\frac{n\pi}{L}x)\mathrm{d}x\,.$$

$$u_t(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cos(c\frac{n\pi}{L}t)c\frac{\pi n}{L} - B_n \sin(c\frac{n\pi}{L}t)c\frac{n\pi}{L} \right] \cdot \sin(\frac{n\pi}{L}x)\,,$$

$$u_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n c\frac{n\pi}{L}\sin(\frac{n\pi}{L}x) = g(x), \text{ def. } A_n = \frac{2}{cn\pi}\int_0^L g(x)\sin(\frac{n\pi}{L}x)\mathrm{d}x\,.$$

Výsledné řešení

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \sin(c\frac{n\pi}{L}t) + B_n \cos(c\frac{n\pi}{L}t) \right] \cdot \sin(\frac{n\pi}{L}x)\,, \\
A_n &= \frac{2}{cn\pi} \int_0^L g(x) \sin(\frac{n\pi}{L}x)\mathrm{d}x\,, \\
B_n &= \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin(\frac{n\pi}{L}x)\mathrm{d}x\,.
\end{aligned}
$$

Poznamenejme, že celkové řešení je nekonečný součet všech řešení, které jsme našli separací:

$$
u_n(x,t) = \Bigg(\underbrace{A_n \sin(c\frac{n\pi}{L}t) + B_n \cos(c\frac{n\pi}{L}t)}_{T_n(t)} \Bigg) \cdot C_n \sin(\frac{n\pi}{L}x)\,,
$$

Jak se tato řešení chovají?

Pro pevné t je $\underbrace{T_n(t) konstanta}_{\text{má vzhledem k } x \text{ stále stejný profil}}$, kterou násobíme $\sin(\frac{n\pi}{L}x)$.

Říkáme, že $T_n(t)$ je amplituda $\sin(\frac{n\pi}{L}x)$. $T_n(t)$ osciluje v čase.

Tedy naše řešení je součtem řešení, která oscilují v čase. Každé z těchto řešení je stojatá vlna, t.j. vlna s pevným profilem a časově závislou amplitudou.

Pozor! Součet stojatých vln není nutně stajatá vlna.

Každé řešení $u_n(x, t)$ vzniklé separací je speciální typ stojaté vlny tzv. mód.

Každý mód má vlnovou délku $\dfrac{2L}{n}$. Pro $n = 1$ dostaneme tzv. fundamentální mód.

★

Řešme úlohu

$$
\begin{aligned}
u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0, \quad 0 < x < L,\ 0 < t < \infty, \quad \text{rovnice} \\
u(0,t) &= 0, \quad u(L,t) = 0,\ 0 < t < \infty, \quad \text{okrajové podmínky} \\
u(x,0) &= f(x), \quad u_t(x,0) = g(x),\ 0 \le x \le L, \quad \text{počáteční podmínky}\,.
\end{aligned}
$$

Necht $f(x) = 2\sin(\frac{\pi}{L}x) + \frac{1}{2}\sin(\frac{3\pi}{L}x)\,, \quad g(x) = 0\,.$

Tedy začali jsme s nenulovým počátečním profilem vlny, ale struna se na počátku nehýbá. Naše řešení:

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \sin(c\frac{n\pi}{L}t) + B_n \cos(c\frac{n\pi}{L}t)\right] \cdot \sin(\frac{n\pi}{L}x) \\
A_n &= \frac{2}{cn\pi}\int_0^L g(x)\sin(\frac{n\pi}{L}x)\mathrm{d}x, \quad g(x) = 0 \implies A_n = 0\ \forall n \\
B_n &= \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin(\frac{n\pi}{L}x)\mathrm{d}x = \frac{2}{L}\int_0^L \left[2\sin(\frac{\pi}{L}x) + \frac{1}{2}\sin(\frac{3\pi}{L}x)\right]\sin(\frac{n\pi}{L}x)\mathrm{d}x\,.
\end{aligned}
$$

Připomeňme si, že $\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta))$.

Ortogonalita:

$$\int_0^L \sin(\frac{m\pi}{L}x) \cdot \sin(\frac{n\pi}{L}x)\mathrm{d}x = 0 \quad \forall m \neq n,$$

$$\text{pro} \quad m = n \quad \text{je} \int_0^L (\sin(\frac{n\pi}{L}x))^2 \mathrm{d}x = \frac{L}{2} \implies$$

$$B_1 = 2, \ B_2 = 2, \ B_3 = \frac{1}{2}, \ B_n = 0 \ \forall n \neq 2, 3.$$

Naše řešení je součtem pouze dvou členů:

$$u(x,t) = 2\cos(\frac{c\pi}{L}t)\sin(\frac{\pi}{L}x) + \frac{1}{2}\cos(c\frac{3\pi}{L}t)\sin(\frac{3\pi}{L}x).$$

★ Vedení tepla a vlnová rovnice na obdélníku (ve 2D)

$$u_{tt} - c^2(u_{xx} + u_{yy}) = 0, \quad t > 0,\ 0 < x < L,\ 0 < y < H, \quad \text{rovnice}$$

$$\begin{aligned}
u(0,y,t) &= 0, \quad u(L,y,t) = 0, \quad t > 0,\ 0 < y < H, && \text{okrajové podmínky}\\
u(x,0,t) &= 0, \quad u(x,H,t) = 0, \quad t > 0,\ 0 < x < L, && \text{okrajové podmínky}\\
u(x,y,0) &= f(x,y), \quad 0 < x < L,\ 0 < y < H, && \text{počáteční podmínka}\\
u_t(x,y,0) &= g(x,y), \quad 0 < x < L, && \text{počáteční podmínka}.
\end{aligned}$$

Separace proměnných: řešení ve tvaru

$$u(x,y,t) = T(t)X(x)Y(y)$$

dosadíme do rovnice, abychom získali podmínky, které musí tyto funkce splňovat.

$$T''XY - c^2TX''Y - c^2TXY'' = 0 \qquad / : (c^2TXY)$$

$$\frac{T''}{c^2T} - \frac{X''}{X} - \frac{Y''}{Y} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \underbrace{\frac{T''}{c^2T}}_{\text{závisí jen na } t} = \underbrace{\frac{X''}{X} - \frac{Y''}{Y}}_{\text{závisí jen na } x \text{ a } y}$$

Tedy funkce vpravo se musí rovnat konstantě, označme ji $-k^2$ (že je menší než nula plyne z toho, že musí splňovat okr. podm.). Tedy

$$\frac{X''}{X} = -k^2 - \frac{Y''}{Y}, \quad \text{vlevo funkce } x, \text{ vpravo funkce y} \quad \Longrightarrow$$

$$\begin{array}{l} \frac{X''}{X} = -k_x^2, \quad \frac{Y''}{Y} + k^2 = k_x^2 \\ \frac{Y''}{Y} = -k_y^2, \quad \frac{X''}{X} + k^2 = k_y^2 \\ +\text{rovnice} \quad \frac{T''}{c^2T} = -k^2, \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{c} \text{obyč. rovnice pro } X, Y, T: \\ T'' + k^2c^2T = 0 \\ X'' + (k^2 - k_y^2)X = 0 \\ Y'' + (k^2 - k_x^2)Y = 0 \end{array} \right.$$

★

Řešení (bez okrajových podmínek)

$$\begin{aligned} T(t) &= A\sin(kct) + B\cos(kct)\,, \quad \text{kde} \quad k^2 = k_x^2 + k_y^2 \\ X(x) &= C\sin(k_x x) + D\cos(k_y y) \\ Y(y) &= E\sin(k_y y) + F\cos(k_y y) \end{aligned}$$

Nyní přidáme okrajové podmínky:

$$\begin{aligned} u(0,y,t) &= T(t)X(0)Y(y) = 0\,, \quad 0 < y < H\,, \\ u(L,y,t) &= T(t)X(L)Y(y) = 0\,, \quad 0 < y < H\,, \\ u(x,0,t) &= T(t)X(x)Y(0) = 0\,, \quad 0 < x < L\,, \\ u(x,H,t) &= T(t)X(x)Y(H) = 0\,, \quad 0 < x < L\,. \end{aligned}$$

Pro netriviální řešení tedy musí platit

$$X(0) = 0,\ X(L) = 0,\ Y(0) = 0,\ Y(H) = 0\,.$$

Z těchto podmínek máme

$$
\begin{aligned}
0 &= X(0) = D\cos(k_y y) \implies D = 0\\
0 &= X(L) = C\sin(k_x L) + D\cos(k_y L), \quad C \neq 0 \implies k_x = \frac{n\pi}{L}\\
0 &= Y(0) E\sin(0) + F\cos(0), \implies F = 0\\
0 &= Y(H) = E\sin(k_y H) \iff k_y H = m\pi \implies k_y = \frac{m\pi}{H}\\
k^2 &= k_x^2 + k_y^2 \implies k^2 = \frac{n^2\pi^2}{L^2} + \frac{m^2\pi^2}{H^2}, \quad m, n \in \mathbb{N}\,.
\end{aligned}
$$

Dostáváme

$$X_n(x) = C_n \sin(\frac{n\pi}{L}x)\,, \quad Y_m(y) = E_m \sin(\frac{m\pi}{H}y), \quad m, n \in \mathbb{N}\,.$$

Označme $k_{mn} = \sqrt{\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{H}\right)^2}$ a řešení vzešlé ze separace označíme

$$
\begin{aligned}
u_{mn}(x, y, t) &= T_{mn}(t) X_n(x) Y_m(y) =\\
&= \underbrace{[A_{mn}\sin(k_{mn}ct) + B_{mn}\cos(k_{mn}ct)]}_{T_{mn}(t)} \cdot \sin(\frac{n\pi}{L}x)\sin(\frac{m\pi}{H}y)\,,
\end{aligned}
$$

★

Výsledné řešení (využijeme Fourierovy řady):

$$u(x,y,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}[A_{mn}\sin(k_{mn}ct)+B_{mn}\cos(k_{mn}ct)]\cdot\sin(\frac{n\pi}{L}x)\sin(\frac{m\pi}{H}y)\,,$$

Počáteční podmínky:

$$u(x,y,0)=f(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\underbrace{B_{mn}\sin(\frac{n\pi}{L}x)\sin(\frac{m\pi}{H}y)}_{\text{2D sinová řada}}\,,$$

$$B_{mn} = \frac{4}{LH}\int_0^H\int_0^L f(x,y)\sin(\frac{n\pi}{L}x)\sin(\frac{m\pi}{H}y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$A_{mn} = \frac{4}{LHck_{mn}}\int_0^H\int_0^L g(x,y)\sin(\frac{n\pi}{L}x)\sin(\frac{m\pi}{H}y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

★ Laplaceova rovnice

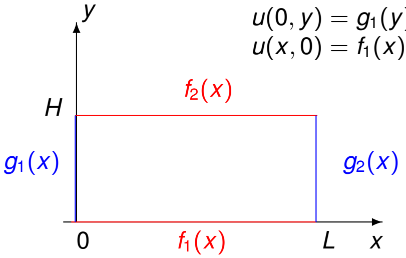
Časově nezávislá parciální diferenciální rovnice 2. řádu

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = 0\,, \quad \text{na obdélníku} \quad 0 < x < L,\ 0 < y < H\,. \qquad (5)$$

Řešení $\underbrace{u(x,y)}$ se s časem nemění, žádné počáteční podmínky.

tzv. harmonická funkce

Okrajové podmínky:



$$\begin{array}{ll} u(0,y) = g_1(y) & u(L,y) = g_2(y) \\ u(x,0) = f_1(x) & u(x,H) = f_2(x) \end{array} \qquad (6)$$

Podmínky kompatibility:

$$\begin{array}{ll} f_1(0) = g_1(0), & f_1(L) = g_2(0) \\ f_2(0) = g_1(H), & f_2(L) = g_2(H) \end{array}$$

Literatura k dalšímu studiu

- Evans L. C.: Partial Differential Equations: Second Edition. University of California, Berkeley. American Mathematical Society, 2010.
- Kubíček M., Dubcová M., Janovská D.: Numerické metody a algoritmy, VŠCHT Praha, 2005 (second edition).
- McKay B.: Partial Differential Equations for Engineers, University of Utah, 2002. http://www.math.utah.edu/ mckay/3150notes.pdf
- Rasmuson A., Andersson B., Olsson L., Andersson R.: Mathematical Modeling in Chemical Engineering. Cambridge University Press, 2014.
- Tolstov G. P.: Fourier Series. Dover Books on Mathematics, 1976.