Matematika pro chemické inženýry

Drahoslava Janovská

2. Křivky. Křivkový integrál. Plochy. Tečná rovina k ploše, normála plochy, metrický tenzor plochy. Plošný integrál vektorového pole. Gaussova a Stokesova věta.

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Povinná látka. Bude v písemkách a bude se zkoušet při ústní zkoušce (žádné označení)

★ Příklady k procvičení - dobrovolné

★ Pro studenty, kteří chtějí vědět víc. Tato látka se nebude přednášet, nebude v písemkách, nebude se zkoušet.

Obsah

Křivky

$$\mathcal{K} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ \underbrace{x = x(t), y = y(t), z = z(t)}_{\text{parametrické rovnice křivky } \mathcal{K}},\ \underbrace{t \in \langle a, b\rangle}_{\text{parametr}}\}$$

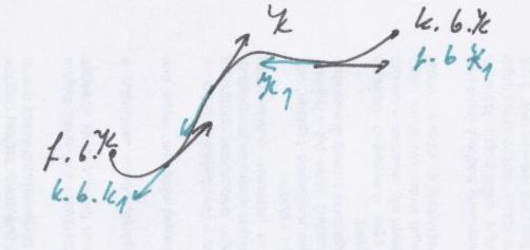
$$\varphi : \langle a, b\rangle \longrightarrow \mathbb{R}^3 \ \ldots\ \text{parametrizace } \mathcal{K}$$

$$r(t) = (x(t), y(t), z(t)),\ t \in \langle a, b\rangle\ \ldots\ \text{parametrizace } \mathcal{K},$$

$$\vec{r}\,'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)),\ \ldots \text{tečný vektor ke křivce } \mathcal{K} \text{ v bodě } \mathbf{r}(t_0).$$

Vektorové pole jednotkových tečných vektorů na $\mathcal{K}$:

$$\tau_0(P) = \frac{\vec{\tau}(P)}{||\vec{\tau}(P)||} \quad \forall P,\ P = \mathbf{r}(t),\ t \in \langle a, b\rangle\ .$$



Orientovaná křivka $\mathcal{K}$,
opačně orientovaná křivka $\mathcal{K}_1 = \dot{-}\mathcal{K}$

$$\underbrace{\text{p.b.}\,\mathcal{K} = r(a), \quad k.b.\mathcal{K} = r(b)}$$

křivka souhlasně orientovaná s parametrizací

$\mathcal{K}_1$ křivka opačně orientovaná, orientovaná nesouhlasně s parametrizací

Křivkový integrál skalárního pole

$\mathcal{K}$ křivka, $r(t)$, $t \in \langle a, b\rangle$, její parametrizace, $f : \mathcal{K} \longrightarrow \mathbb{R}$ skalární pole

$$\int_{\mathcal{K}} f \mathrm{d}s = \int_a^b f(r(t)) || \vec{r}\,'(t) || \mathrm{d}t\,.$$

Vlastnosti

- nezávisí na orientaci křivky
- linearita

$$\int_{\mathcal{K}} (\alpha f + \beta g) \mathrm{d}s = \alpha \int_a^b f \mathrm{d}s + \beta \int_a^b g \mathrm{d}s, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

- aditivita

$$\int_{\mathcal{K}_1 \dot{+} \mathcal{K}_2} f \mathrm{d}s = \int_{\mathcal{K}_1} f \mathrm{d}s + \int_{\mathcal{K}_2} f \mathrm{d}s$$

Křivkový integrál vektorového pole

$\mathcal{K}$ křivka, $r(t)$, $t \in \langle a, b \rangle$, její parametrizace,

$$\int_{\mathcal{K}} \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(r(t)) \cdot \vec{r}\,'(t)\mathrm{d}t\,,$$

$$\vec{F} = (F_1, F_2, F_3), \quad \int_{\mathcal{K}} \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{r} = \int_{\mathcal{K}} F_1\mathrm{d}x + F_2\mathrm{d}y + F_3\mathrm{d}z$$

Vlastnosti

- **závisí na orientaci křivky** $\displaystyle\int_{\dot{-}\mathcal{K}} \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{r} = -\int_{\mathcal{K}} \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{r}\,.$
- linearita

$$\int_{\mathcal{K}} (\alpha\vec{F} + \beta\vec{G})\mathrm{d}\vec{r} = \alpha\int_{\mathcal{K}} \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{r} + \beta\int_{\mathcal{K}} \vec{G}\,\mathrm{d}\vec{r}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

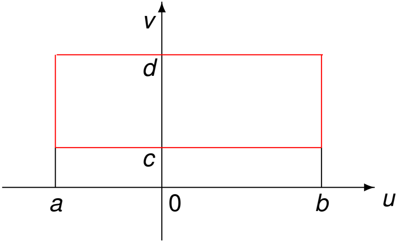
- aditivita

$$\int_{\mathcal{K}_1 \dot{+} \mathcal{K}_2} \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{r} = \int_{\mathcal{K}_1} \vec{F}\,\mathrm{d}r + \int_{\mathcal{K}_2} \vec{F}\,\mathrm{d}r$$

- + potenciál vektorového pole

Parametrické rovnice plochy

Parametrizace plochy:



$$D = \langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle$$

$$D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2,\ a \le u \le b, c \le v \le d\}$$

$u - v \ldots$ kartézská soustava souřadnic

Uvažujme zobrazení

$$\Phi : D \longrightarrow \mathbb{R}^3,$$

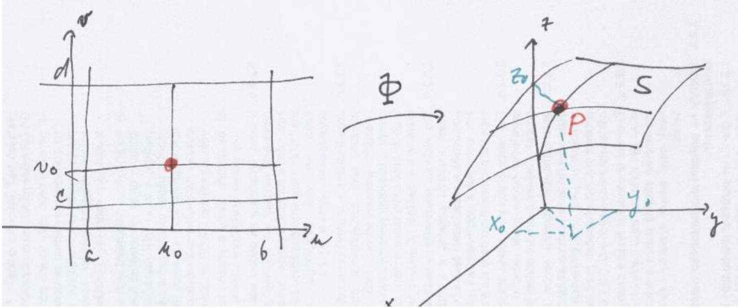
Φ je parametrizace plochy S.

Parametrické rovnice plochy S:

$$\begin{aligned} x &= x(u, v) \\ y &= y(u, v), \quad u, v \in D \\ z &= z(u, v) \end{aligned}$$

Pro každé $(u_0, v_0) \in D$, $D = \langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle$, je

$$P = \Phi(u_0, v_0) = (x\underbrace{(u_0, v_0)}_{x_0}, y\underbrace{(u_0, v_0)}_{y_0}, z\underbrace{(u_0, v_0)}_{z_0}) \in \mathbb{R}^3$$



Definice

a) Nechť funkce $x = x(u,v), y = y(u,v), z = z(u,v)$ jsou spojité na D,

b) $x(u,v), y(u,v), z(u,v) \in \mathcal{C}^3(D)$

c) Jacobiova matice parametrizace Φ,

$$\Phi'(u,v) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x(u,v)}{\partial u} & \dfrac{\partial x(u,v)}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y(u,v)}{\partial u} & \dfrac{\partial y(u,v)}{\partial v} \\ \dfrac{\partial z(u,v)}{\partial u} & \dfrac{\partial z(u,v)}{\partial v} \end{pmatrix}$$

má hodnost 2 pro každé $(u,v) \in D$.

Pak množinu $S = \{\Phi(u,v) \in \mathbb{R}^3, (u,v) \in D\}$ nazýváme plochou v $\mathbb{R}^3$. Zobrazení $\Phi : D \to \mathbb{R}^3$ nazýváme parametrizací plochy S a rovnice

$$x = x(u,v),\ y = y(u,v),\ z = z(u,v), \quad (u,v) \in D$$

nazýváme parametrickými rovnicemi plochy S. Čísla u, v nazýváme parametry bodů plochy S.

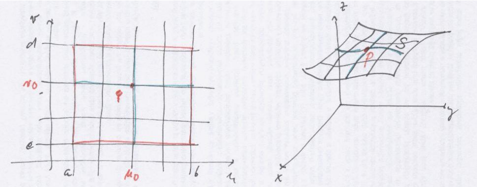
Poznámka

1. Místo uzavřeného dvourozměrného intervalu D lze uvažovat libovolnou oblast $G \subseteq \mathbb{R}^2$, popř. uzavřenou oblast.
2. Podmínky b), c) mohou být splněny všude, až na konečný počet bodů. Body, ve kterých b), c) neplatí, jsou tzv. singulární body plochy.
3. Souřadnicové křivky na ploše:

$$\text{pevné } v_0, \quad u \in \langle a, b\rangle \qquad\qquad \text{pevné } u_0, \quad v \in \langle c, d\rangle$$

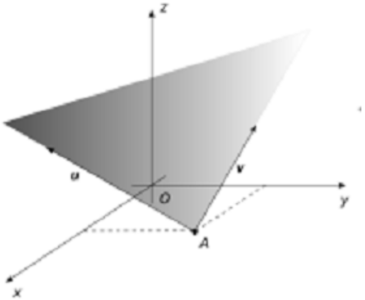
$$\underbrace{\begin{aligned} x &= x(u, v_0) \\ y &= y(u, v_0) \\ z &= z(u, v_0) \end{aligned}}_{\text{parametrické rovnice u-křivky}} \qquad \underbrace{\begin{aligned} x &= x(u_0, v) \\ y &= y(u_0, v) \\ z &= z(u_0, v) \end{aligned}}_{\text{parametrické rovnice v-křivky}}$$

$u-$křivky a $v-$křivky tvoří na ploše S síť křivek, které lze chápat jako souřadnicové křivky na ploše S. Čísla u, v jsou křivočarými souřadnicemi bodů na ploše S.



★ Příklady ploch

- Rovina procházející bodem $A = (x_0, y_0, z_0)$ mající dva směrové vektory $\vec{\mathbf{u}} = (u_1, u_2, u_3)$ a $\vec{\mathbf{v}} = (v_1, v_2, v_3)$, $\vec{u} \nparallel \vec{v}$



$$\begin{aligned} x &= x_0 + tu_1 + sv_1 \\ y &= y_0 + tu_2 + sv_2\,, \qquad s, t \in \mathbb{R} \\ z &= z_0 + tu_3 + sv_3 \end{aligned}$$

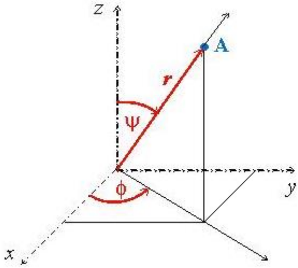
Cvičení

Zjistěte, zda bod $A = (-4; -3; 3)$ leží v rovině dané rovnicemi

$$x = -4 + 4\alpha\,, \quad y = -1 + 2\beta\,, \quad z = -\alpha - 3\beta\,, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

a napište parametrické rovnice přímky, která tímto bodem prochází a je k dané rovině kolmá.

- Parametrické rovnice kulové plochy



$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi\sin\psi & \varphi &\in \langle 0, 2\pi\rangle, \\ y &= r\sin\varphi\sin\psi, & \psi &\in \langle 0, \pi\rangle, \\ z &= r\cos\psi. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \varphi} &= -r\sin\varphi\sin\psi & \frac{\partial x}{\partial \psi} &= r\cos\varphi\cos\psi \\ \frac{\partial y}{\partial \varphi} &= r\cos\varphi\sin\psi & \frac{\partial y}{\partial \psi} &= r\sin\varphi\cos\psi \\ \frac{\partial z}{\partial \varphi} &= 0 & \frac{\partial z}{\partial \psi} &= -r\sin\psi \end{aligned}$$

★

$$\Phi'(\varphi,\psi) = \begin{pmatrix} -r\sin\varphi\sin\psi & r\cos\varphi\cos\psi \\ r\cos\varphi\sin\psi & r\sin\varphi\cos\psi \\ 0 & -r\sin\psi \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim r\cdot\begin{pmatrix} -\sin\varphi\sin\psi\cos\varphi & \cos^2\varphi\cos\psi \\ \sin\varphi\sin\psi\cos\varphi & \sin^2\varphi\cos\psi \\ 0 & -\sin\psi \end{pmatrix} \sim r\cdot\begin{pmatrix} -\sin\varphi\sin\psi\cos\varphi & \cos^2\varphi\cos\psi \\ 0 & \cos\psi \\ 0 & -\sin\psi \end{pmatrix} \sim$$

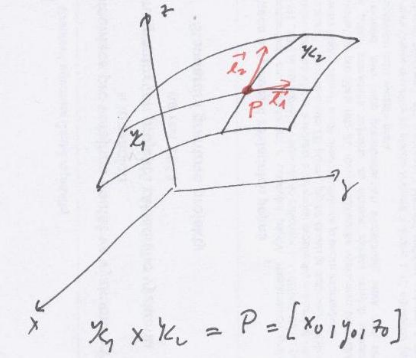
$$\sim r\cdot\begin{pmatrix} -\sin\varphi\sin\psi\cos\varphi & \cos^2\varphi\cos\psi \\ 0 & -\sin\psi \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow h(\Phi'(\varphi,\psi)) = 2 \text{ pro } \psi\neq 0, \psi\neq\pi\,.$$

Pro $\psi = 0$ nebo $\psi = \pi$ je hodnost $\Phi'(\varphi,\psi)$ rovna 1. Dostáváme 2 singulární body kulové plochy:

$$P_1 = (0,0,r\cos 0) = (0,0,r) \quad \text{a} \quad P_2 = (0,0,r\cos\pi) = (0,0,-r)\,.$$

Tečná rovina a normála plochy



Plocha S

$\Phi(u)\ldots$ parametrizace $\mathcal{K}_1$, $u-$křivky

$$\Phi(u): \begin{array}{rcl} x & = & x(u, v_0) \\ y & = & y(u, v_0), \ u \in \langle a, b \rangle \\ z & = & z(u, v_0) \end{array}$$

$\Psi(v)\ldots$ parametrizace $\mathcal{K}_2$, $v-$křivky

$$\Psi(v): \begin{array}{rcl} x & = & x(u_0, v) \\ y & = & y(u_0, v), \ v \in \langle c, d \rangle \\ z & = & z(u_0, v) \end{array}$$

$$x_0 = x(u_0, v_0), \ y_0 = y(u_0, v_0), \ z_0 = z(u_0, v_0)$$

Označme

$$\vec{\mathbf{e}}_1(P)\ldots\ \text{tečný vektor k } u-\text{křivce},\qquad \vec{\mathbf{e}}_2(P)\ldots\ \text{tečný vektor k } v-\text{křivce}$$

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{e}}_1(P)=\Phi'(u) &= (x_u(u_0,v_0),y_u(u_0,v_0),z_u(u_0,v_0))\\ \vec{\mathbf{e}}_2(P)=\Psi'(v) &= (x_v(u_0,v_0),y_v(u_0,v_0),z_v(u_0,v_0))\end{aligned}$$

Vyčíslíme $\Phi'(u,v)$ v bodě (u_0,v_0)

$$\Phi'(u_0,v_0)=\left.\begin{pmatrix} x_u & x_v\\ y_u & y_v\\ \underbrace{z_u}_{\vec{\mathbf{e}}_1(P)} & \underbrace{z_v}_{\vec{\mathbf{e}}_2(P)}\end{pmatrix}\right|_{(u_0,v_0)}\qquad h(\Phi'(u_0,v_u))=2\iff$$

$\vec{\mathbf{e}}_1(P)$ a $\vec{\mathbf{e}}_2(P)$ jsou lineárně nezávislé vektory, a tedy určují rovinu, která prochází bodem P (dotykový bod) a je tečná k ploše S.

Definice Zaměření tečné roviny s dotykovým bodem P = množina všech tečných vektorů k ploše S v bodě P. Označujeme ji T_PS. T_PS je lineární prostor generovaný vektory $\vec{\mathbf{e}}_1(P)$ a $\vec{\mathbf{e}}_2(P)$.

Obecná rovnice tečné roviny - potřebuji normálový vektor.

Přímka, která prochází bodem P kolmo k tečné rovině se nazývá normálou plochy S v bodě P. Nenulový vektor kolmý k tečné rovině, vycházející z bodu P ... normálový vektor plochy S v bodě P, označujeme $\vec{\mathbf{n}}(P)$,

$$\vec{\mathbf{n}}(P) = \vec{\mathbf{e}}_1(P) \times \vec{\mathbf{e}}_2(P) = \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix},$$

parciální derivace jsou vyčísleny v bodě (u_0, v_0).

★ **Příklad** Napište parametrické rovnice tečné roviny a normály ke kulové ploše v bodě P, který odpovídá hodnotám parametrů $u = \frac{\pi}{4}, v = \frac{3\pi}{4}$ pro $R = 1$. Napište také obecnou rovnici této roviny.

Řešení Parametrické rovnice kulové plochy

$$\begin{aligned} x &= R\cos u \sin v, \\ y &= R\sin u \sin v, \\ z &= R\cos v. \end{aligned} \qquad R = 1, u = \frac{\pi}{4}, v = \frac{3\pi}{4} \quad \Longrightarrow \quad P = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

★

Parciální derivace:

$$
\begin{array}{llll}
x_u = -\sin u \sin v & x_u(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}) = -\frac{1}{2} & x_v = \cos u \cos v & x_v(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}) = -\frac{1}{2} \\
y_u = \cos u \sin v & y_u(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}) = \frac{1}{2} & y_v = \sin u \cos v & y_v(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}) = -\frac{1}{2} \\
z_u = 0 & z_u(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}) = 0 & z_v = -\sin v & z_v(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}
\end{array}
$$

Tečné vektory

$$\vec{\mathbf{e}}_1 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right), \quad \vec{\mathbf{e}}_2 = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Parametrická rovnice tečné roviny v bodě P:

$$
\begin{aligned}
x &= \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}t - \tfrac{1}{2}s \\
y &= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}t - \tfrac{1}{2}s \qquad t, s \in \mathbb{R}. \\
z &= -\tfrac{\sqrt{2}}{2} - \tfrac{\sqrt{2}}{2}s
\end{aligned}
$$

★

Normálový vektor

$$\vec{\mathbf{n}}(P) = \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{vmatrix} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{1}{2}\right).$$

Obecná rovnice tečné roviny τ:

$$-\frac{\sqrt{2}}{4}x - \frac{\sqrt{2}}{4}y + \frac{1}{2}z + d = 0, \quad P \in \tau \implies d = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Tečná rovina:

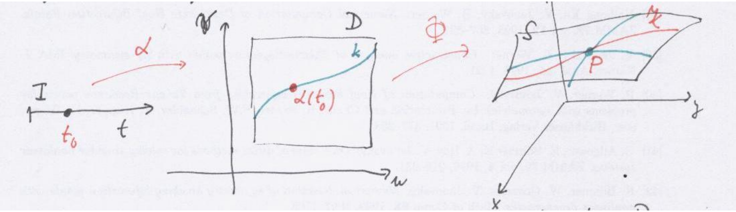
$$\tau \equiv x + y - \sqrt{2}z - 2 = 0.$$

Normála:

$$\begin{aligned} x &= \tfrac{1}{2} - \tfrac{\sqrt{2}}{4}r \\ y &= \tfrac{1}{2} - \tfrac{\sqrt{2}}{4}r \qquad r \in \mathbb{R}. \\ z &= -\tfrac{\sqrt{2}}{2} + \tfrac{1}{2}r \end{aligned}$$

Křivky na ploše

S plocha, $\Phi(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)), (u,v) \in D$, její parametrizace.
$\mathcal{K}$ křivka na ploše S



Nejprve zadáme parametrizaci křivky k, která leží v D:

$$\alpha(t) = (u(t), v(t)),\ t \in I.$$

Pak zobrazíme $k \in D$ na plochu S pomocí parametrizace Φ. Dostaneme křivku $\mathcal{K} = \Phi(k)$, která leží na ploše S. Její parametrizace,

$$\varphi(t) = \Phi(\alpha(t)),\ t \in I, \quad \text{t.j.}$$

$$\varphi(t) = (x(u(t),v(t)), y(u(t),v(t)), z(u(t),v(t))) = (\tilde{x}(t), \tilde{y}(t), \tilde{z}(t)).$$

Zvolme $t_0 \in I$. Pak

$$\alpha(t_0) = (u(t_0), v(t_0)) = (u_0, v_0), \quad \alpha : I \to \mathbb{R}^2 .$$

$$\Phi(\alpha(t_0)) = \underbrace{P = (x_0, y_0, z_0),}_{\text{křivka prochází bodem } P} \text{ kde } \begin{array}{l} x_0 = x(u_0, v_0) \\ y_0 = y(u_0, v_0) \\ z_0 = z(u_0, v_0) \end{array}, \ \Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 .$$

$\vec{\tau}(P) \ldots$ tečný vektor ke křivce $\mathcal{K}$ v bodě P je také tečným vektorem k ploše S v bodě P, t.j. patří do $T_P S$. Protože $T_P S$ je lineární prostor generovaný $\vec{\mathbf{e}}_1(P)$, $\vec{\mathbf{e}}_2(P)$, musí být $\vec{\tau}(P)$ nějakou lineární kombinací $\vec{\mathbf{e}}_1(P)$, $\vec{\mathbf{e}}_2(P)$.

$$\vec{\tau}(P) = \vec{\varphi}'(t_0) = (\tilde{x}'(t_0), \tilde{y}'(t_0), \tilde{z}'(t_0)), \quad \varphi(t) = \Phi(\alpha(t)), \ t \in I$$

Derivace složeného zobrazení:

$$\vec{\varphi}'(t_0) = \underbrace{\Phi'(\alpha(t_0))}_{3 \times 2} \cdot \underbrace{\vec{\alpha}'(t_0)}_{2 \times 1} \quad \Longrightarrow$$

$\Phi'(\alpha(t_0)) \ldots$ Jacobiova matice parametrizace

$$\Longrightarrow \quad \vec{\varphi}'(t_0) = \begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix} x_u(u_0,v_0) \\ y_u(u_0,v_0) \\ z_u(u_0,v_0) \end{matrix}}_{\vec{\mathbf{e}}_1(P)} & \underbrace{\begin{matrix} x_v(u_0,v_0) \\ y_v(u_0,v_0) \\ z_v(u_0,v_0) \end{matrix}}_{\vec{\mathbf{e}}_2(P)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u'(t_0) \\ v'(t_0) \end{pmatrix} \quad \text{t.j.}$$

$$\vec{\varphi}'(t_0) = (\vec{\mathbf{e}}_1(P), \vec{\mathbf{e}}_2(P)) \cdot \begin{pmatrix} u'(t_0) \\ v'(t_0) \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow$$

$$\vec{\tau}(P) = u'(t_0)\,\vec{\mathbf{e}}_1(P) + v'(t_0)\,\vec{\mathbf{e}}_2(P) \ldots$$

lineární kombinace $\vec{\mathbf{e}}_1(P)$ a $\vec{\mathbf{e}}_2(P)$

Závěr tečné vektory ke všem křivkám, které procházejí bodem P a leží na ploše S, tvoří tečný prostor $T_P S$ . . . lineární prostor tečných vektorů k ploše S v bodě P generovaný vektory $\vec{\mathbf{e}}_1(P)$ a $\vec{\mathbf{e}}_2(P)$.

Metrický tenzor plochy

Na $T_P S$ definujeme skalární součin vektorů z $T_P S$. Zadáme ho pomocí metrického tenzoru. V bodě $P \in S$ definujeme

$$g_{ij}(P) = \overrightarrow{\mathbf{e}}_i(P) \cdot \overrightarrow{\mathbf{e}}_j(P), \quad i,j = 1,2.$$

Každému bodu $P \in S$ je tímto způsobem přiřazen tzv. metrický tenzor

$$\mathbf{g}(P) = (g_{ij}(P))_{i,j=1,2},$$

$\mathbf{g}(P)$ je tenzorové pole 2. řádu na ploše S. Toto tenzorové pole se nazývá metrickým tenzorem plochy.
Počítejme

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathbf{e}}_1(P) &= (x_u(u_0,v_0), y_u(u_0,v_0), z_u(u_0,v_0)) \\ \overrightarrow{\mathbf{e}}_2(P) &= (x_v(u_0,v_0), y_v(u_0,v_0), z_v(u_0,v_0)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_{11} &= \overrightarrow{\mathbf{e}}_1 \cdot \overrightarrow{\mathbf{e}}_1 = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2 \\ g_{12} &= \overrightarrow{\mathbf{e}}_1 \cdot \overrightarrow{\mathbf{e}}_2 = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v = \overrightarrow{\mathbf{e}}_2 \cdot \overrightarrow{\mathbf{e}}_1 = g_{21} \\ g_{22} &= \overrightarrow{\mathbf{e}}_2 \cdot \overrightarrow{\mathbf{e}}_2 = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2 \end{aligned}$$

★

Příklad Vypočtěte metrický tenzor plochy

$$\begin{array}{rcl} x & = & x_0 + ua_1 + vb_1 \\ y & = & y_0 + ua_2 + vb_2 \qquad u, v \in \mathbb{R} \\ z & = & z_0 + ua_3 + vb_3 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \vec{\mathbf{e}}_1 & = & (a_1, a_2, a_3) \\ \vec{\mathbf{e}}_2 & = & (b_1, b_2, b_3) \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} g_{11} & = & a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \\ g_{12} = g_{21} & = & a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \\ g_{22} & = & b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 \end{array}$$

$$\mathbf{g}(P) = \begin{pmatrix} a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 & a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \\ a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 & b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 \end{pmatrix}.$$

Obsah plochy

$S \ldots$ plocha, $\Phi : D \longrightarrow \mathbb{R}^3$ její parametrizace. Pomocí Riemannova integrálu odvodíme vzorec na výpočet obsahu plochy.

Věta Nechť $g_{ij}(P)$ jsou složky metrického tenzoru plochy S. Pak platí

$$||\vec{\mathbf{e}}_1(P) \times \vec{\mathbf{e}}_2(P)|| = \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}\,.$$

Věta Plošný obsah $Po(S)$ plochy S je

$$Po(S) = \iint_D \sqrt{g_{11}(u,v) \cdot g_{22}(u,v) - (g_{12}(u,v))^2}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v\,.$$

Poznámka Element plošného obsahu (element plochy) označíme $\mathrm{d}S$, tj.

$\mathrm{d}S = \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$ Označíme-li $g = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{vmatrix} = \det(g_{ij}),$ je

$$\mathrm{d}S = \sqrt{g}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v \quad \Longrightarrow \quad Po(S) = \iint_D \mathrm{d}S\,.$$

★

Příklad Vypočítejme plošný obsah kulové plochy.

$$\begin{aligned} x &= R\cos u \sin v \\ y &= R\sin u \sin v \\ z &= R\cos v \end{aligned} \qquad \begin{aligned} u &\in \langle 0, 2\pi\rangle \\ v &\in \langle 0, \pi\rangle \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &x_u = -R\sin u \sin v,\ x_v = R\cos u\cos v \\ &y_u = R\cos u \sin v,\ y_v = R\sin u \cos v \\ &z_u = 0,\ z_v = -R\sin v \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{e}}_1 &= (-R\sin u\sin v, R\cos u \sin v, 0), \\ \vec{\mathbf{e}}_2 &= (R\cos u\cos v, R\sin u\cos v, -R\sin v) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_{11} &= R^2\sin^2 u \sin^2 v + R^2\cos^2 u\sin^2 v = R^2\sin^2 v \\ g_{12} &= R^2 \sin u\cos u\sin v\cos v - R^2\sin u\cos u\sin v\cos v = 0 \\ g_{22} &= R^2\cos^2 u\cos^2 v + R^2\sin^2 u\cos^2 v + R^2\sin^2 v = R^2 \end{aligned}$$

$$g = \begin{vmatrix} R^2\sin^2 v & 0 \\ 0 & R^2 \end{vmatrix} = R^4\sin^2 v\,, \quad Po(S) = \iint_D \sqrt{g}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v \Longrightarrow$$

$$Po(S) = \iint_D R^2\sin v\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v = R^2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}u\cdot\int_0^{\pi}\sin v\,\mathrm{d}v = \underbrace{4\pi R^2}_{\text{povrch koule o poloměru } R}$$

Speciální případ – plocha grafu funkce

Věta Necht funkce $z = f(x,y)$ je třídy $\mathcal{C}^1$ na svém definičním oboru $D(f)$. Pak plošný obsah grafu funkce f, který leží nad uzavřenou, omezenou oblastí $\Omega \subset D(f)$ je roven

$$Po(\mathrm{graf}(f)) = \iint_\Omega \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,.$$

Důkaz $\mathrm{graf}(f) = \{(x,y,z), (x,y) \in D(f), z = f(x,y)\}$

$$\vec{\mathbf{e}}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f_x \end{pmatrix}, \quad \vec{\mathbf{e}}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f_y \end{pmatrix}, \qquad g = \begin{pmatrix} 1 + f_x^2 & f_x f_y \\ f_x f_y & 1 + f_y^2 \end{pmatrix}$$

$$\det(g) = 1 + f_x^2 + f_y^2\,, \quad Po(S) = \iint_\Omega \sqrt{\det(g)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_\Omega \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

★

Příklad Vypočtěte plošný obsah rotační plochy S_r zadané rovnicemi

$$\begin{aligned} x &= f(v)\cos u \\ y &= f(v)\sin u \\ z &= g(v) \end{aligned} \qquad \begin{matrix} u \in \langle 0, 2\pi\rangle \\ v \in \langle c, d\rangle \end{matrix} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{aligned} \vec{\mathbf{e}}_1 &= (-f(v)\sin u, f(v)\cos u, 0) \\ \vec{\mathbf{e}}_2 &= (f'(v)\cos u, f'(v)\sin u, g'(v)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_{11} &= f^2(v)\sin^2 u + f^2(v)\cos^2 u = f^2(v) \\ g_{12} &= -f(v)f'(v)\sin u\cos u + f(v)f'(v)\sin u\cos u = 0 \\ g_{22} &= (f'(v))^2\cos^2 u + (f'(v))^2\sin^2 u + (g'(v))^2 = (f'(v))^2 + (g'(v))^2 \end{aligned}$$

$$Po(S_r) = \int_0^{2\pi}\int_c^d \sqrt{f^2(v)\left((f'(v))^2 + (g'(v))^2\right)}\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u \quad \Longrightarrow$$

$$Po(S_r) = 2\pi\int_c^d f(v)\sqrt{(f'(v))^2 + (g'(v))^2}\,\mathrm{d}v$$

Plošný integrál skalárního pole

S ...plocha zadaná parametrizací $\Phi : D \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $D = \langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle$,

$$\Phi = \Phi(x(u,v), y(u,v), z(u,v)), \quad u = u(t), v = v(t), \ (u,v) \in D\,.$$

f ...skalární pole zadané na ploše S, např. hustota elektrického náboje rozloženého na ploše S, $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$. Připomeňme, že

$$g(u,v) = \det \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{pmatrix}.$$

Pak plošný integrál skalárního pole f přes plochu S je

$$\iint_S f \mathrm{d}S = \iint_D f(\Phi(u,v)) \underbrace{\sqrt{g(u,v)}\mathrm{d}u\mathrm{d}v}_{} =$$

$\mathrm{d}S$... element plošného obsahu

$$\iint_D f(x(u,v), y(u,v), z(u,v))\sqrt{g(u,v)}\mathrm{d}u\mathrm{d}v\,.$$

★

Příklad Vypočtěte $\iint_S f \mathrm{d}S$, kde $f(x,y) = 2 - xyz$ a parametrizace $\Phi : D \longrightarrow \mathbb{R}^3$:

$$\Phi(u,v) = (u, v, u^2 + v^2), \quad D = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2, u^2 + v^2 \leq 4\}.$$

$$\vec{\mathbf{e}}_1 = (1, 0, 2u), \quad \vec{\mathbf{e}}_2 = (0, 1, 2v)$$

$$g_{11} = 1 + 4u^2,\ g_{12} = 4uv,\ g_{22} = 1 + 4v^2 \implies g = 1 + 4u^2 + 4v^2.$$

$$\mathrm{d}S = \sqrt{1 + 4u^2 + 4v^2}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$\iint_S f \mathrm{d}S = \iint_D (2 - uv(u^2 + v^2))\sqrt{1 + 4(u^2 + v^2)}\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \left| \begin{array}{c} u = r\cos\varphi \\ v = r\sin\varphi \end{array} \right| =$$

$$= \int_0^2 \sqrt{1 + 4r^2} \left(\int_0^{2\pi} (2 - r^4 \sin\varphi\cos\varphi)\mathrm{d}\varphi \right) \underbrace{r}_{\text{Jacobián}} \mathrm{d}r =$$

$$= 4\pi \int_0^2 r\sqrt{4r^2 + 1}\mathrm{d}r = \frac{\pi}{3}(17\sqrt{17} - 1).$$

Orientace plochy

Místo "integrál vektorového pole přes plochu S"se používá termín "tok vektorovou plochou S". Motivace z hydrodynamiky.

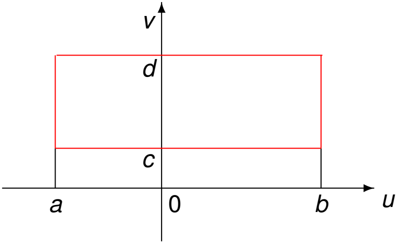
Definice Plochu S nazýváme orientovanou, jestliže na ní existuje (resp. lze na ní definovat) spojité vektorové pole jednotkových normálových vektorů.

Poznámka Existují i neorientované plochy, např. Moebiův list, ale my budeme předpokládat, že pracujeme jen s orientovanými plochami.

Označme $$\operatorname{int} S = \text{vnitřek plochy } S\,.$$

Orientace plochy s krajem

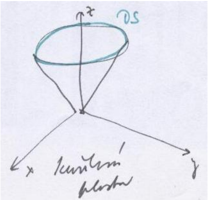
S . . . plocha, Φ její parametrizace, $\Phi : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $H(\Omega)$ . . . hranice Ω.

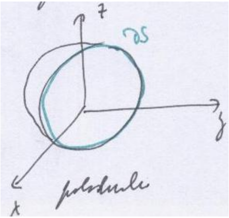


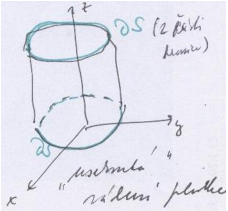
$\Omega = \langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle$ uzavřená oblast

Obraz $H(\Omega)$ při parametrizaci Φ je obvykle křivka, kterou nazýváme krajem plochy nebo konturou plochy nebo hranicí plochy:

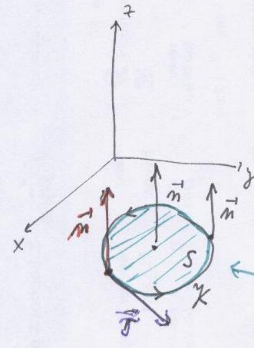
$\partial S =$ hranice S .

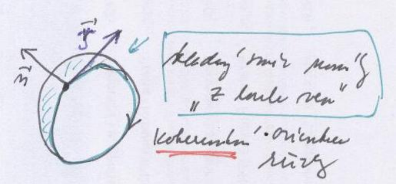






Definice Říkáme, že orientace křivky $\mathcal{K}$ - hranice plochy S, $\mathcal{K} = \partial S$, je koherentní s orientací plochy S, jestliže pozorovatel pohybující se po křivce $\mathcal{K}$ ve směru její orientace a s hlavou směřující ve směru kladné normály k ploše S, má plochu S po levé ruce.





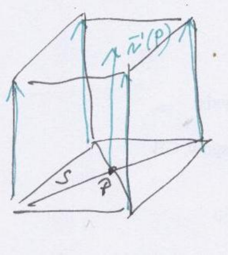
Na obrázku vlevo je kladný směr normály = kladný směr osy z, $\mathcal{K}$ koherentně orientována s kruhem S.

Uzavřené plochy orientujeme tak, že za kladný směr normálových vektorů bereme ten směr, který směřuje ven z plochy. Část omezená uzavřenou plochou ... vnitřek plochy S, $\mathrm{int}\, S$.

★ Tok vektoru plochou

Představme si prostor nebo jeho část vyplněnou proudící tekutinou. Pohyb tekutiny popisuje rychlostní pole $\vec{\mathbf{v}}(P)$ (= pole rychlostí proudící tekutiny). Necht toto pole nezávisí na čase. Vektor $\vec{\mathbf{v}}(P)$ určuje velikost a směr rychlosti částic tekutiny. Částice se pohybují po křivkách ... proudnicích. Do proudící tekutiny umístíme plochu S, např. obdélník.

? Kolik tekutiny proteče plochou S za jednotku času?

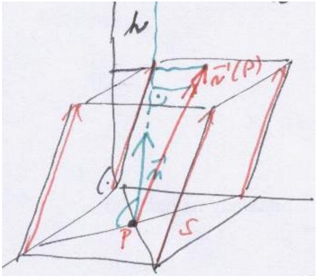


$\vec{\mathbf{v}}(P)$ je konstantní na ploše S a kolmé k ploše S. Celkové množství tekutiny, které proteče plochou S za jednotku času:

$$m = Po(S) \cdot ||\vec{\mathbf{v}}||,$$

kde m je objem kvádru, $Po(S)$ je plocha podstavy kvádru a $\vec{\mathbf{v}}$ je výška kvádru.

★



$\vec{\mathbf{v}}(P)$ je konstantní, ale není kolmé k S.
m = objem rovnoběžnostěnu, h ... výška,

$$h = \vec{\mathbf{v}}(P) \cdot \vec{\mathbf{n}}(P),$$

h je kolmý průmět rychlosti tekutiny $\vec{\mathbf{v}}(P)$ do směru normály $\vec{\mathbf{n}}$ k ploše S,

$$m = \vec{\mathbf{v}}(P) \cdot \vec{\mathbf{n}}(P)\, \underbrace{Po(S)}_{\text{plocha podstavy}}$$

Obecný případ – řešíme pomocí plošného integrálu vektorového pole $\vec{\mathbf{v}}$

S ... orientovaná plocha, $\vec{\mathbf{n}}(P)$ ... pole normálových vektorů (orientuje plochu S), $P \in S$, $\vec{\mathbf{v}}(P)$ ... zadané vektorové pole na S. Označme

$$\underbrace{f(P)}_{\text{skalární pole } (= \text{"}h\text{"})} = \vec{\mathbf{v}}(P) \cdot \vec{\mathbf{n}}(P) \qquad \text{(skalární součin)}$$

Definice Plošným integrálem vektorového pole $\vec{\mathbf{v}}$ přes plochu S, resp. tokem vektorového pole $\vec{\mathbf{v}}$ plochou S, rozumíme číslo

$$\iint_S \vec{\mathbf{v}} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iint_\Omega f \mathrm{d}S\,. \tag{1}$$

Praktický výpočet

$\Phi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3$ ... parametrizace plochy S, Ω ... uzavřená oblast v parametrické rovině. Pak

$$\iint_S \vec{\mathbf{v}} \cdot \underbrace{\mathrm{d}\vec{S}}_{\mathrm{d}\vec{S} = \vec{\mathbf{n}} \cdot \mathrm{d}S} = \iint_\Omega \underbrace{\vec{\mathbf{v}}(\Phi(u,v)) \cdot \vec{\mathbf{n}}(\Phi(u,v))}_{f(P)} \cdot \underbrace{\sqrt{g(u,v)}\mathrm{d}u\mathrm{d}v}_{\mathrm{d}S}\,.$$

Na levé straně stojí plošný integrál vektorového pole, vpravo je nahrazen dvojným integrálem, konkrétně pravou stranou rovnice (1).

Plošný integrál vektorového pole

★

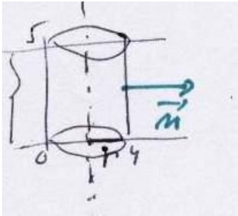
Příklad Mějme zadáno vektorové pole

$$\vec{\mathbf{a}}(x, y, z) = (z, x, -3y^2 z), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 .$$

Plocha S je válcová plocha, jejíž osou je osa z, má poloměr $r = 4$ a leží mezi rovinami $z = 0$ a $z = 5$. Vypočtěte tok vektorového pole $\vec{\mathbf{a}}$ touto plochou, která je orientována tak, že směr kladné normály směřuje z válce ven.

Řešení $\vec{\mathbf{a}} = (a_1, a_2, a_3)$,

$$\begin{aligned} a_1(x, y, z) &= z \\ a_2(x, y, z) &= x \\ a_3(x, y, z) &= -3y^2 z \end{aligned}$$



Parametrizace plochy S:

$$\begin{aligned} x &= 4\cos u \\ y &= 4\sin u \\ z &= v \end{aligned} \qquad \begin{aligned} u &\in \langle 0, 2\pi\rangle \\ v &\in \langle 0, 5\rangle \end{aligned} \qquad D = \langle 0, 2\pi\rangle \times \langle 0, 5\rangle$$

$\vec{\mathbf{e}}_1(P) = (-4\sin u, 4\cos u, 0)$, $\vec{\mathbf{e}}_2(P) = (0, 0, 1)$, $g_{11} = 16$, $g_{22} = 1$, $g_{12} = 0$

★

Metrický tenzor plochy: $g = \det \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 16,\ \mathrm{d}S = \sqrt{g}\mathrm{d}u\mathrm{d}v = 4\mathrm{d}u\mathrm{d}v$.

$\vec{\mathbf{n}}(P)$ ... pole jednotkových normálových vektorů:

$$\vec{\mathbf{e}}_1(P) \times \vec{\mathbf{e}}_2(P) = \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}} \\ -4\sin u & 4\cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (4\cos u, 4\sin u, 0)$$

$$||\vec{\mathbf{e}}_1(P) \times \vec{\mathbf{e}}_2(P)|| = \sqrt{16\cos^2 u + 16\sin^2 u} = 4$$

$$\underbrace{\vec{\mathbf{n}}(P)}_{\text{pole jednotkových normálových vektorů}} = \frac{\vec{\mathbf{e}}_1(P) \times \vec{\mathbf{e}}_2(P)}{||\vec{\mathbf{e}}_1(P) \times \vec{\mathbf{e}}_2(P)||} = (\cos u, \sin u, 0)$$

$$\vec{\mathbf{a}}(\Phi(u,v)) \cdot \vec{\mathbf{n}}(\Phi(u,v)) = (v, 4\cos u, -3 \cdot 16\sin^2 u \cdot v) \cdot (\cos u, \sin u, 0) =$$

$$= \cos u(v + 4\sin u)$$

★

Tedy

$$\iint_S \vec{\mathbf{a}} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 4 \iint_D (v \cos u + 4 \sin u \cos u)\mathrm{d}u\mathrm{d}v =$$

$$= 4 \int_0^5 \int_0^{2\pi} (v \cos u + 4 \sin u \cos u)\mathrm{d}u\mathrm{d}v = 0$$

Zkontrolujte si.

Závěr Celkový tok vektorového pole $\vec{\mathbf{a}}$ válcovou plochou je nulový.

Interpretace Jistou částí válcové plochy tekutina vytéká z válce ven a jinou částí vtéká dovnitř tak, že celkové množství tekutiny, které proteče válcovou plochou, je nulové.

Poznámka To, zda tekutina vtéká resp. vytéká, závisí na úhlu, který svírá vektor $\vec{\mathbf{a}}(P)$ s kladnou normálou k ploše.

Domácí úkol: Vypočtěte tok vektorového pole pouze pro část válcové plochy: $x > 0, y > 0, z > 0$. [Výsledek $90[j^3]$]

Gaussova divergenční věta

Tato věta udává vztah mezi plošným integrálem a trojným integrálem.

Věta Necht uzavřené těleso $W \subset \mathbb{R}^3$, $S = \partial W$ ... hranice W (S je plocha). S orientujeme tak, že má vně orientovanou normálu,

$$\vec{\mathbf{F}}(x, y, z) = (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z)),$$

F_i mají spojité parciální derivace. Pak

$$\iint_S \vec{\mathbf{F}}\, \mathrm{d}\vec{S} = \iiint_W \underbrace{\operatorname{div} \vec{\mathbf{F}}(x, y, z)}_{} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\,.$$

$$\underbrace{\text{expanze}}_{\operatorname{div}\vec{\mathbf{F}} > 0} \text{ nebo } \underbrace{\text{kontrakce}}_{\operatorname{div}\vec{\mathbf{F}} < 0} \text{ tekutiny}$$

Věta říká:
Celková expanze (kontrakce) tekutiny ve W je rovna celkovému množství tekutiny, které vyteče (vteče) přes hranici $S = \partial W$.

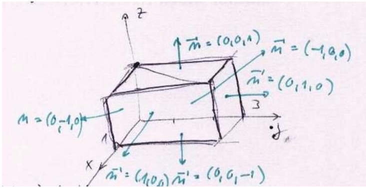
Poznámka $\vec{\mathbf{v}}(x, y, z)$ ... rychlostní pole v tekutině. Pak podmínka $\operatorname{div} \vec{\mathbf{v}} = 0$ je rovnice kontinuity nestlačitelné tekutiny.

★

Příklad Vypočtěte

$$\iint_S \vec{\mathbf{F}}\, \mathrm{d}\vec{S}, \quad \vec{\mathbf{F}}(x,y,z) = (3x + z^{77}, y^2 - \sin x^2 z, xz + y\mathrm{e}^{x^5}),$$

S ... povrch kvádru B : $0 \le x \le 1, 0 \le y \le 3, 0 \le z \le 2$, $\vec{\mathbf{n}}$ ... vnější jednotkový normálový vektor.



$$\mathrm{div}\, \vec{\mathbf{F}}(x,y,z) = 3 + 2y + x$$

Gausova věta $\Longrightarrow$

$$\iint_S \vec{\mathbf{F}}\, \mathrm{d}\vec{S} = \iiint_B \mathrm{div}\, \vec{\mathbf{F}}(x,y,z) \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\,.$$

Vlevo plošný integrál, vpravo trojný integrál, B ... kvádr

Vypočteme trojný integrál:

$$\iiint_B \mathrm{div}\, \vec{\mathbf{F}}(x,y,z) \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_B (3 + 2y + x) \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z =$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^3 \left(\int_0^2 (3 + 2y + x) \mathrm{d}z \right) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = 39[j^3] =$$

množství tekutiny, které vyteče přes hranici ∂S.

Stokesova věta

Tato věta udává vztah mezi křivkovým integrálem vektorového pole přes uzavřenou křivku a plošným integrálem vektorového pole.

Věta

$\overrightarrow{\mathbf{F}}(x, y, z) = (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z))$ dané vektorové pole na ploše S

$$F_i \in \mathcal{C}^1(S), \quad \partial S = C, \quad S \text{ a } \partial S \text{ jsou koherentně orientovány}.$$

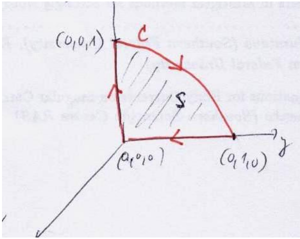
Pak

$$\int_C \overrightarrow{\mathbf{F}} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S} = \iint_S \operatorname{rot} \overrightarrow{\mathbf{F}} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S},$$

Poznámka Vlevo je křivkový integrál přes křivku $C \subset \mathbb{R}^3$, vpravo je plošný integrál vektorového pole $\operatorname{rot} \overrightarrow{\mathbf{F}} \ldots$ rotace vektorového pole $\overrightarrow{\mathbf{F}}$. Plochu orientujeme pomocí normálového vektoru.

★

Příklad $\vec{\mathbf{F}}(x,y,z) = (y,z,x)$, S = čtvrtkruh v rovině $y-z$, C jeho kladně orientovaná hranice.



Vypočteme $\int_C \vec{\mathbf{F}} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$ pomocí Stokesovy věty. Orientaci normálového vektoru $\vec{n}$ určíme podle pravidla pravé ruky. Zde orientace v záporném směru osy x.

$$F_1(x,y,z) = y,\, F_2(x,y,z) = z,\, F_3(x,y,z) = x\,.$$

$$\operatorname{rot}\vec{\mathbf{F}} = \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, -\frac{\partial F_3}{\partial x} + \frac{\partial F_1}{\partial z}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)$$

$$\operatorname{rot}\vec{\mathbf{F}} = (-1,-1,-1)$$

Parametrizace čtvrtkruhu v rovině $y-z$:

$$\Phi(r,\theta) = (0, r\cos\theta, r\sin\theta),\; 0 \le r \le 1,\; \theta \in \langle 0.\frac{\pi}{2}\rangle\,.$$

Výpočet jednotkového normálového vektoru $\vec{\mathbf{n}}$:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial r} = (0, \cos\theta, \sin\theta), \ \frac{\partial\Phi}{\partial\theta} = (0, -r\sin\theta, r\cos\theta)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial r} \times \frac{\partial\Phi}{\partial\theta} = \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}} \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -r\sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = \underbrace{(r, 0, 0)}$$

Normálový vektor $(r, 0, 0)$ je ale orientován do kladného směru osy x, my potřebujeme orientaci v záporném směru $\Longrightarrow$ $\vec{\mathbf{n}} = (-r, 0, 0)$

$$\int_C \vec{\mathbf{F}} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iint_S \mathrm{rot}\,\vec{\mathbf{F}} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_0^1 \int_0^{\pi/2} (-1, -1, -1)(-r, 0, 0)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r = \frac{\pi}{4}.$$

Poznámka Vektorové pole $\vec{\mathbf{v}}(x, y, z)$, pro které platí $\mathrm{rot}\,\vec{\mathbf{v}}(x, y, z) = 0$ ...tzv. nevírové vektorové pole.

Literatura k dalšímu studiu

- Davis, H. F., Snider, A. D.: Introduction to Vector Analysis, fourth edition. Allyn and Bacon, Inc., Boston, 1979.
- Fialka, M.: Diferenciální a integrální počet funkcí více proměnných s aplikacemi (Učební text). UTB Zlín, 2008. ISBN 978-80-7318-665-4.
- Klíč, A., Dubcová, M.: Základy tenzorového počtu s aplikacemi. Vydavatelství VŠCHT, Praha 1998.
- Pandey, R. K.: Vector Analysis. Discovery Publishing House, 2007.