Matematika pro chemické inženýry

Drahoslava Janovská

6. Implicitní funkce

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Povinná látka. Bude v písemkách a bude se zkoušet při ústní zkoušce (žádné označení)

★ Příklady k procvičení - dobrovolné

★ Pro studenty, kteří chtějí vědět víc. Tato látka se nebude přednášet, nebude v písemkách, nebude se zkoušet.

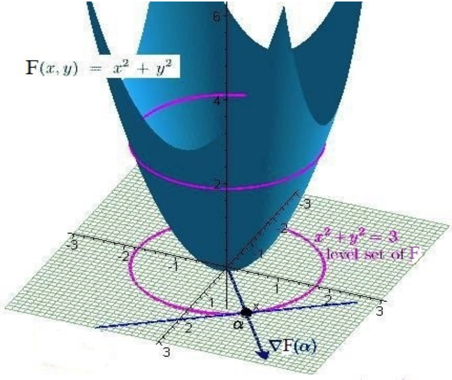
Obsah

Implicitní funkce jedné proměnné

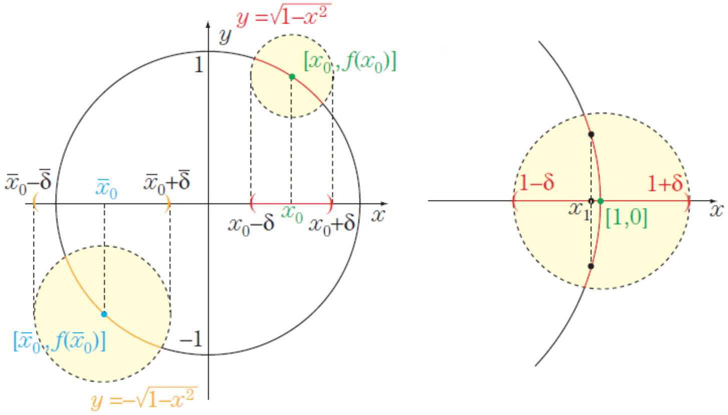
Definice Říkáme, že rovnice $F(x, y) = 0$ definuje na okolí bodu (x_0, y_0) implicitně funkci $y = f(x)$, jestliže

1. $F(x_0, y_0) = 0$,
2. $\exists \delta > 0, \epsilon > 0 \ : \ \forall x \in (x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$ je $y = f(x)$ jediné číslo z intervalu $(y_0 - \epsilon,\ y_0 + \epsilon)$, které splňuje rovnici $F(x, y) = 0$.

Poznámka:
$F(x, y) = 0 \ \ldots$ nulová vrstevnice funkce dvou proměnných $F = F(x, y)$.
Na intervalu $(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$ lze tuto nulovou vrstevnici popsat jako graf funkce $y = f(x)$ (jedné proměnné), $\mathcal{D}(f) = (x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$.



z_0-vrstevnice funkce $F(x, y)$ = kolmý průmět průniku grafu funkce $\underbrace{z = F(x, y)}_{\text{plocha}}$ s rovinou $z = z_0$. Zde $F(x, y) = x^2 + y^2$, $z_0 = 3$.



Rovnice $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ definuje implicitní funkci $y = f(x)$ jedné proměnné na okolí bodů $[x_0, f(x_0)]$, $[\bar{x}_0, f(\bar{x}_0)]$. Na okolí bodu $[1, 0]$ není rovnicí implicitně definována žádná funkce $y = f(x)$.

Věta o existenci implicitní funkce jedné proměnné

Necht $F \in \mathrm{C}^k(G)$, $G \subset \mathbb{R}^2$ otevřená množina, $k \geq 1$. Necht $(x_0, y_0) \in G$ je takový bod, že

1. $F(x_0, y_0) = 0$,
2. $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$.

Pak rovnice $F(x, y) = 0$ definuje na okolí bodu (x_0, y_0) implicitně funkci jedné proměnné $y = f(x)$. Navíc $f \in \mathrm{C}^k(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ pro jisté $\delta > 0$.

Věta o derivaci implicitní funkce jedné proměnné

Jsou-li splněny předpoklady věty o existenci implicitní funkce, pak derivace implicitně zadané funkce $y = f(x)$ je dána vztahem

$$f'(x) = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}(x, f(x))}{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))} \quad \text{pro} \quad x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) .$$

★

Příklad

Závislost času t potřebného k dosažení koncentrace c_B látky B ve vsádkovém reaktoru se řídí rovnicí

$$t = \frac{k_1}{k_2} \ln \frac{c_B}{c_B^0} + \frac{c_B - c_B^0}{k_2},$$

kde k_1 a k_2 jsou konstanty. Zjistěte rychlost reakce $r_B = \frac{\mathrm{d}c_B}{\mathrm{d}t}$ látky B v čase $t = 3600\,\mathrm{s}$.

Hodnoty konstant jsou $k_1 = 0,3175\,\mathrm{mol\,dm^{-3}}$, $k_2 = 0,0002\,\mathrm{mol\,dm^{-3}s^{-1}}$, $c_B^0 = 1,0\,\mathrm{mol\,dm^{-3}}$ a koncentrace c_B v čase $t = 3600\,\mathrm{s}$ je $0,5\,\mathrm{mol\,dm^{-3}}$.

★

Řešení

$$F(t, c_B) = \frac{k_1}{k_2} \ln \frac{c_B}{c_B^0} + \frac{c_B - c_B^0}{k_2} - t = 0\,,$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial c_B} \frac{\mathrm{d} c_B}{\mathrm{d} t} = 0\,.$$

$$-1 + \left(\frac{k_1}{k_2} \frac{1}{c_B} + \frac{1}{k_2} \right) \frac{\mathrm{d} c_B}{\mathrm{d} t} = 0\,,$$

$$\frac{\mathrm{d} c_B}{\mathrm{d} t} = \frac{k_2 c_B}{k_1 + c_B}\,.$$

$$r_B = \frac{\mathrm{d} c_B}{\mathrm{d} t} = \frac{0,0002 \cdot 0,5}{0,3175 + 0,5} \doteq 1,223 \cdot 10^{-4} \mathrm{mol\,dm}^{-3}\mathrm{s}^{-1}\,.$$

★ Bilanční rovnice reaktoru (CSTR)

$$f(x,\alpha) = 0\,, \quad x \in \mathbb{R}^n,\ f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n\,,\ \alpha \in \mathbb{R} \ldots \text{parametr}\,.$$

Budeme zkoumat závislost x na parametru α.

1) Pokud je závislost $x = x(\alpha)$ jednoznačná, pak

$$f(x(\alpha),\alpha) = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\alpha} + \frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0; \qquad (2)$$

matice $\mathbf{J} = \left\{\frac{\partial f}{\partial x}\right\}$ je regulární.

Dostaneme soustavu obyčejných diferenciálních rovnic s počátečními podmínkami, kterou máme řešit:

$$(\mathrm{R}) \qquad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\alpha} = -(\mathbf{J}(x))^{-1}\frac{\partial f(x)}{\partial \alpha}\,, \quad x(\alpha_0) = x_0, \qquad (3)$$

a je splněno $f(x_0,\alpha_0) = 0\,.$

i) x_0, α_0 najdeme Newtonovou metodou

ii) rovnici (R) lze řešit numericky, např. metodami R-K

★

2) Pokud závislost $x(\alpha)$ není jednoznačná, pak **J** může být pro některé $x(\alpha)$ singulární. V tom případě zavedeme parametr s jako délku oblouku křivky v $\mathbb{R}^{n+1}$, tj.

$$\mathrm{d}s = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\mathrm{d}x_i)^2 + (\mathrm{d}\alpha)^2}\,.$$

Pak derivací

$$f(x(s), \alpha(s)) = 0\,,$$

dostaneme n rovnic

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} + \frac{\partial f}{\partial \alpha}\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s} = 0 \quad \text{a} \quad \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}s} = 1 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}s}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}\right)^2}\,.$$

Implicitní funkce více proměnných

Definice Říkáme, že rovnice $F(x_1, x_2, \ldots, x_n, z) = 0$ definuje na okolí bodu $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, z_0)$ implicitně funkci $z = f(x_1, \ldots, x_n)$, jestliže

1. $F(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, z_0) = 0$,
2. $\exists \delta > 0, \epsilon > 0 \; : \; \forall x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathcal{O}_\delta(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ je $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ jediné číslo z intervalu $(z_0 - \epsilon, z_0 + \epsilon)$, které splňuje rovnici $F(x_1, x_2, \ldots, x_n, z) = 0$.

Věta o existenci implicitní funkce více proměnných

Nechť $F \in \mathrm{C}^k(G)$, $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ otevřená množina, $k \geq 1$. Nechť $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\mathbf{x}_0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ a nechť $(\mathbf{x}_0, z_0) \in G$ je takový bod,že

1. $F(\mathbf{x}_0, z_0) = 0$,
2. $\dfrac{\partial F}{\partial z}(\mathbf{x}_0, z_0) \neq 0$.

Pak rovnice $F(\mathbf{x}, z) = 0$ definuje na okolí bodu $(\mathbf{x}_0, z_0)$ implicitně nějakou funkci $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Navíc $f \in \mathrm{C}^k(\mathcal{O}_\delta(\mathbf{x}_0))$ pro jisté $\delta > 0$.

Parciální derivace funkce $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ je dána vztahem

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x_i}(\mathbf{x}, f(\mathbf{x}))}{\dfrac{\partial F}{\partial z}(\mathbf{x}, f(\mathbf{x}))}, \quad \text{pro} \quad \mathbf{x} \in \mathcal{O}_\delta(\mathbf{x}_0), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Poznámka: Obdobná věta platí, chceme-li vyjádřit např. x_1 jako funkci $x_2, \ldots, x_n, z$, t.j. chceme, aby $x_1 = \psi(x_2, \ldots, x_n, z)$ na okolí bodu $(x_1^0, x_1^0, \ldots, z_0)$, pro který platí
$F(x_1^0, x_1^0 \ldots x_n^0, z_0) = 0$ a $\dfrac{\partial F}{\partial x_1}((x_1^0, x_2^0 \ldots x_n^0, z_0)) \neq 0$.

★ Příklad

Příklad Pomocí totálního diferenciálu vypočteme přibližnou změnu objemu jednoho molu plynu řídicího se van der Waalsovou stavovou rovnicí

$\left(p+\frac{a}{V^2}\right)(V-b)=RT$, kde a, b jsou konstanty, R je plynová konstanta,

jestliže se tlak p změní o $\mathrm{d}p$ a teplota T o $\mathrm{d}T$.

Řešení $V=V(p,T)$, V nelze z rovnice vyjádřit explicitně – je zadáno implicitně. Přibližná změna objemu ($\mathrm{d}V$ ... totální diferenciál $\doteq$ diference $V_{new}-V_{old}$):

$$\mathrm{d}V=\frac{\partial V}{\partial p}\mathrm{d}p+\frac{\partial V}{\partial T}\mathrm{d}T.$$

Položme

$$\underbrace{F(p,T,V)}_{\text{funkce tří proměnných}}=\left(p+\frac{a}{V^2}\right)(V-b)-RT$$

$$\underbrace{F(p,T,V)=0}_{\text{rovnice implicitní funkce } V=V(p,T)} \quad \ldots \text{ nulová vrstevnice funkce } F$$

Příklad - stavová rovnice

★

$$\frac{\partial F}{\partial p} = V - b\,, \quad \frac{\partial F}{\partial V} = -\frac{2a}{V^3}(V-b) + p + \frac{a}{V^2}\,, \quad \frac{\partial F}{\partial T} = -R$$

$$\frac{\partial V}{\partial p} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial p}}{\frac{\partial F}{\partial V}} = -\frac{V-b}{-\frac{2a}{V^3}(V-b) + p + \frac{a}{V^2}} = \frac{(b-V)V^3}{pV^3 - aV + 2ab}$$

$$\frac{\partial V}{\partial T} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial T}}{\frac{\partial F}{\partial V}} = -\frac{-RV^3}{-2a(V-b) + pV^3 + aV} = \frac{RV^3}{pV^3 - aV + 2ab}$$

$$\mathrm{d}V = \frac{\partial V}{\partial p}\mathrm{d}p + \frac{\partial V}{\partial T}\mathrm{d}T = \frac{(b-V)V^3}{pV^3 - aV + 2ab}\mathrm{d}p + \frac{RV^3}{pV^3 - aV + 2ab}\mathrm{d}T$$

$$\mathrm{d}V = \frac{V^3}{pV^3 - aV + 2ab}((b-V)\mathrm{d}p + R\mathrm{d}T)$$

Poznámka $$(p+\frac{a}{V^2})(V-b)=RT \quad \Longrightarrow \quad F(p,T,V)=0\,.$$

V je zadáno implicitně, p, T explicitně (lze je přímo z rovnice vyjádřit):

$$p=\frac{RT}{V-b}-\frac{a}{V^2}\,,\qquad T=\frac{V-b}{R}(p+\frac{a}{V^2})\,.$$

Příklady k procvičení

- ★ Stejné zadání, Soave–Redlich–Kwongova stavová rovnice

$$p=\frac{RT}{V-b}-\frac{\alpha a}{V(V+b)}\,,\qquad \alpha\,,\ a\,,\ b\,,\ R\ \text{konstanty}\,.$$

- ★ Stejné zadání, Peng–Robinsonova stavová rovnice

$$p=\frac{RT}{V-b}-\frac{\alpha(T)}{V(V+b)+b(V-b)}\,,\qquad \alpha(T)=\left(1+k(1-\sqrt{\frac{T}{T_c}})\right)^2\,,$$

T_c ... kritická teplota, b, R, k konstanty.

- ★ Zjistěte, zda v okolí bodu $A=(1,1,1)$ je rovnicí $3y^4-x^4z+4xyz^2-7yz^3+1=0$ definovaná funkce $z=f(x,y)$ a zjistěte, zda bod $(1,1)$ je stacionárním bodem této funkce.

★ Průtočný ideálně míchaný bioreaktor

Zkoumáme bilanci průtočného ideálně míchaného bioreaktoru s populací biomasy (bakterie Escherichia geneticky modifikované pro tvorbu speciálního farmakoproduktu) a predátora (hlenka Dictyostelium v jednobuněčné fázi vývoje).
Značení: S . . . substrát, X_B . . . bakterie, X_P . . . hlenka

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = \underbrace{D\left(S_0 - S\right)}_{\text{přítok - odtok}S} - \underbrace{\frac{1}{Y_{X_{B/S}}}\frac{\mu_1 S}{K_{S_1} + S}X_B}_{\text{spotřeba } S \text{ na růst } X_B}$$

$$\frac{\mathrm{d}X_B}{\mathrm{d}t} = \underbrace{\frac{\mu_1 S}{K_{S_1} + S}X_B}_{\text{růst}X_B} - \underbrace{\frac{1}{Y_{X_{P/S}}}\frac{\mu_2 X_B}{K_{S_2} + S}X_P}_{\text{spotřeba } X_B \text{ na růst } X_P} - \underbrace{DX_B}_{\text{odtok } X_B}$$

$$\frac{\mathrm{d}X_P}{\mathrm{d}t} = \underbrace{\frac{\mu_2 X_B}{K_{S_2} + S}X_P}_{\text{růst}X_P} - \underbrace{DX_P}_{\text{odtok } X_P}$$

Stacionární řešení lze získat analyticky, ale je to pracné. Místo toho lze použít větu o implicitních funkcích v $\mathbb{R}^3$ a najít stacionární řešení numericky.

Obecná věta o implicitních funkcích

Nechť $(x, y) = ((x_1, \dots, x_m), (y_1, \dots, y_n)) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, nechť

$F(x, y) = \underbrace{(F_1, \dots, F_n)}_{n \text{ rovnic}} \underbrace{(x, y)}_{m+n \text{ proměnných}}$, t.j. zobrazení $F : \mathbb{R}^{m+n} \longrightarrow \mathbb{R}^n$,

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} F_1(x_1, \dots, x_m,\ y_1, \dots, y_n) \\ F_2(x_1, \dots, x_m,\ y_1, \dots, y_n) \\ \vdots \\ F_n(x_1, \dots, x_m,\ y_1, \dots, y_n) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n .$$

$D_x F$ ... parciální diferenciál F reprezentovaný maticí $\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right)_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}}$ (Jacobiho matice $n \times m$)

Obdobně:

$D_y F$ ... parciální diferenciál F reprezentovaný maticí $\left(\frac{\partial F_i}{\partial y_j}\right)_{i,j=1,\dots,n}$ (Jacobiho matice $n \times n$)

$$D_xF = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial x_1}, \dfrac{\partial F_1}{\partial x_2}, \dots, \dfrac{\partial F_1}{\partial x_m} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial x_1}, \dfrac{\partial F_2}{\partial x_2}, \dots, \dfrac{\partial F_2}{\partial x_m} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial F_n}{\partial x_1}, \dfrac{\partial F_n}{\partial x_2}, \dots, \dfrac{\partial F_n}{\partial x_m} \end{pmatrix}, \quad D_yF = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial y_1}, \dfrac{\partial F_1}{\partial y_2}, \dots, \dfrac{\partial F_1}{\partial y_n} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial y_1}, \dfrac{\partial F_2}{\partial y_2}, \dots, \dfrac{\partial F_2}{\partial y_n} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial F_n}{\partial y_1}, \dfrac{\partial F_n}{\partial y_2}, \dots, \dfrac{\partial F_n}{\partial y_n} \end{pmatrix}.$$

Poznámka Označení, použitá ve znění věty:

$A \subset \mathbb{R}^{m+n}$ otevřená množina, $F : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $F \in \mathrm{C}^r(A)$,

$F = (F_1, \dots, F_n)$, $\quad (x, y) = (x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n)$,

$F_i(x, y) = F_i(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n)$, $i = 1, \dots, n$.

Obecná věta o implicitních funkcích

Necht $(x_0, y_0) = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0,\ y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0) \in A$ je takový bod, že

a) $F(x_0, y_0) = 0\,,$

b) $\det(D_y F)\,\big|_{(x_0,y_0)} \neq 0\ .$

Pak existuje okolí $\mathcal{B}$ bodu x_0 v $\mathbb{R}^m$ a jednoznačně určené zobrazení $g : \mathcal{B} \longrightarrow \mathbb{R}^n\,,\quad g = (g_1, \ldots, g_n)$ takové, že

1.

$$\begin{aligned} y_1^0 &= g_1(x_1^0, \ldots, x_m^0) \\ y_2^0 &= g_2(x_1^0, \ldots, x_m^0) \\ &\ \vdots \\ y_n^0 &= g_n(x_1^0, \ldots, x_m^0) \end{aligned}$$

2.

$$F(\underbrace{x, g(x)}_{(x_1, x_2, \ldots, x_m, g_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, g_n(x_1, \ldots, x_m))}) = 0 \quad \forall x \in \mathcal{B}$$

Navíc $\quad g \in \mathrm{C}^r(\mathcal{B})\,, \quad D(g(x)) = -\left(D_y F(x, g(x))\right)^{-1} \left(D_x F(x, g(x))\right)\ .$

Poznámky

ad a) Rozepíšeme-li rovnost $F(x_0, y_0) = 0$ do složek, dostaneme n rovnic

$$\begin{aligned} F_1(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0,\ y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0) &= 0 \\ F_2(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0,\ y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0) &= 0 \\ &\vdots \\ F_n(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0,\ y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0) &= 0 \end{aligned}$$

ad b) Předpoklad b) říká, že parciální diferenciál F podle y v bodě (x_0, y_0) je regulární matice typu $n \times n$, neboli že hodnost $\mathrm{h}(D_y F\big|_{(x_0,y_0)}) = n$. Zkontrolujme si, že rozměry v maticová rovnici souhlasí:

$$\underset{n \times m}{D(g(x))} \;=\; -\underset{n \times n}{(D_y F(x, g(x)))^{-1}}\, \underset{n \times m}{(D_x F(x, g(x)))}\ .$$

Derivování složených funkcí

Poznámka Nechť $m = 1,\ n = 2$

$$F_i(x, y_1, y_2) = 0\,, \quad y_1 = g_1(x), \quad y_2 = g_2(x)\,, \quad i = 1, 2\,.$$

Derivujme rovnici podle x:

$$\begin{aligned} i = 1 \quad & \frac{\partial F_1}{\partial x}\,1 + \frac{\partial F_1}{\partial y_1}\,g_1'(x) + \frac{\partial F_1}{\partial y_2}\,g_2'(x) &= 0\,, \\ i = 2 \quad & \frac{\partial F_2}{\partial x}\,1 + \frac{\partial F_2}{\partial y_1}\,g_1'(x) + \frac{\partial F_2}{\partial y_2}\,g_2'(x) &= 0\,, \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_2} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial y_1} & \dfrac{\partial F_2}{\partial y_2} \end{pmatrix}}_{(D_y F)_{2\times 2}} \underbrace{\begin{pmatrix} g_1'(x) \\ g_2'(x) \end{pmatrix}}_{(D\dot{g})_{2\times 1}} = - \underbrace{\begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial x} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial x} \end{pmatrix}}_{(D_x F)_{2\times 1}}$$

$D_y F\,\big|_{(x_0, y_0)}$ je regulární $\Longrightarrow$ $\exists$ inverzní matice. Připomeňme, že $g : \mathcal{B} \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2\,,\ x_0 \in \mathcal{B}\,.$

Dostaneme

$$\begin{pmatrix} g_1'(x) \\ g_2'(x) \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} \end{pmatrix}$$

$$Dg(x) = -(D_y F(x, g(x)))^{-1}(D_x F(x, g(x)))$$

★**Příklad** Necht $F(x, y) = 0$, kde $F = (F_1, F_2)$, $F : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $F_1,\ F_2 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^4)$, $(x, y) = (x_1, x_2, y_1, y_2)$, t.j. $m = 2,\ n = 2$,

$$\begin{aligned} F_1(x, y) &= x_1^2 + 2x_2 + y_1^2 + 2y_2 - 8 = 0, \quad & F_1 : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^1, \\ F_2(x, y) &= x_1 - x_2^2 + y_1 - y_2^2 + 3 = 0 & F_2 : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^1 \end{aligned}$$

Necht $x_0 = (1, 1)$, $y_0 = (1, 2)$. Ověřte, že existuje okolí $\mathcal{B}$ bodu $(1, 1)$ a jednoznačně určené zobrazení $g : \mathcal{B} \to \mathbb{R}^2$ takové, že $F(x, g(x)) = 0\ \forall\ x \in \mathcal{B}$. Vypočtěte derivaci $D(g(x))$ v bodě $x = (1, 1)$.

★ Řešení příkladu na obecnou implicitní funkci

Ověření podmínek existence

a) $$\begin{aligned} F_1(1,1,1,2) &= 1+2+1+4-8=0 \\ F_2(1,1,1,2) &= 1-1+1-4+3=0 \end{aligned} \implies F(X_0, Y_0) = 0 \in \mathbb{R}^2$$

b)

$$D_y F = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y_1 & 2 \\ 1 & -2y_2 \end{pmatrix}, \quad (D_y F)\big|_{(1,1,1,2)} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\det(D_y F)\big|_{(1,1,1,2)} = -10 \neq 0 \implies D_y F\big|_{(x_0,y_0)} \text{ je regulární, hodnost je } 2\,.$$

a), b) $\implies$ $\exists$ okolí $\mathcal{B}$ bodu $(1,1)$ v $\mathbb{R}^2$ a jednoznačně určené zobrazení $g : \mathcal{B} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ takové, že

$$g = g(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} g_1(x_1, x_2) \\ g_2(x_1, x_2) \end{pmatrix}; \quad g(1,1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \longleftarrow y_1 \\ \longleftarrow y_2 \end{matrix}\,.$$

Tedy $g(x_0) = y_0$, $g \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$ a $F(x, g(x)) = 0 \;\forall\, x \in \mathcal{B}$.

Příklad

Derivace:

$$Dg(x) = -\left(D_y F(x, g(x))\right)^{-1} \left(D_x F(x, g(x))\right), \quad D_x F = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

$$Dg(x) = -\begin{pmatrix} 2y_1 & 2 \\ 1 & -2y_2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2x_1 & 2 \\ 1 & -2x_2 \end{pmatrix}, \quad D_x F = \begin{pmatrix} 2x_1 & 2 \\ 1 & -2x_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2y_1 & 2 \\ 1 & -2y_2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{4y_1 y_2 + 2} \begin{pmatrix} 2y_2 & 2 \\ 1 & -2y_1 \end{pmatrix}$$

$$D(g(x)) = -\frac{1}{4g_1(x_1, x_2)g_2(x_1, x_2) + 2} \begin{pmatrix} 4x_1 g_2(x_1, x_2) + 2 & 4g_2(x_1, x_2) \\ 2x_1 - 2g_1(x_1, x_2) & 2 + 4x_2 g_1(x_1, x_2) \end{pmatrix}$$

$$Dg(x)|_{(1,1)} = -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

★ Příklad: Maximalizace zisku

Necht produkce dané firmy je dána rovnicí $y = 14x_1 + 11x_2 - x_1^2 - x_2^2$ a její zisk je dán rovnicí $\pi = py - w_1x_1 - w_2x_2$, kde p je daná cena produktu, w_1 mzda 1. pracovníka, w_2 mzda 2. pracovníka.
Cíl : Maximalizovat zisk tj. hledáme $x_1 = g_1(p, w_1, w_2)$ a $x_2 = g_2(p, w_1, w_2)$ – vstupy do výroby – tak, aby zisk π byl maximální.

Dosadíme produkci do funkce pro zisk

$$\pi(x_1, x_2) = 14px_1 + 11px_2 - px_1^2 - px_2^2 - w_1x_1 - w_2x_2$$

a hledáme extrém (maximum) této funkce:

$$\frac{\partial \pi}{\partial x_1} = 14p - 2px_1 - w_1 = 0 \quad \wedge \quad \frac{\partial \pi}{\partial x_2} = 11p - 2px_2 - w_2 = 0\,.$$

Z těchto rovnic dostaneme

$$x_1 = 7 - \frac{w_1}{2p}\,, \qquad x_2 = \frac{11}{2} - \frac{w_2}{2p}\,.$$

★

Počítejme nyní pomocí věty o implicitních funkcích. Položme

$\varphi_1(x_1, x_2, p, w_1, w_2) := 14p - 2px_1 - w_1$, $\varphi_2(x_1, x_2, p, w_1, w_2) := 11p - 2px_2 - w_2$.

Toto je soustava dvou implicitních rovnic ($n = 2, m = 3$):

$$\begin{aligned} \varphi_1(x_1, x_2, p, w_1, w_2) &= 14p - 2px_1 - w_1 \,, \\ \varphi_2(x_1, x_2, p, w_1, w_2) &= 11p - 2px_2 - w_2 \,. \end{aligned}$$

Jacobián soustavy:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2p & 0 \\ 0 & -2p \end{vmatrix} = 4p^2 > 0 \,.$$

$J \neq 0 \quad \Longrightarrow$ lze aplikovat větu o implicitních funkcích . Derivace:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial p} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial p} &= -\frac{\partial \varphi_1}{\partial p} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial p} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial p} &= -\frac{\partial \varphi_2}{\partial p} \end{aligned}$$

Maticově:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial p} \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial p} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial p} \\ \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial p} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial p} \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial p} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} -2p & 0 \\ 0 & -2p \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 14 - 2x_1 \\ 11 - 2x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{7 - x_1}{p} \\ \dfrac{11 - 2x_2}{2p} \end{pmatrix}.$$

Z podmínky na extrém platí:

$$14p - 2px_1 - w_1 = 0\,, \qquad 11p - 2px_2 - w_2 = 0 \quad \Longrightarrow$$

$$x_1 = 7 - \frac{w_1}{2p}\,, \quad x_2 = \frac{11p - w_2}{2p} = \frac{11}{2} - \frac{w_2}{2p}\,.$$

Literatura k dalšímu studiu

- Bubeník F.: Matematika 2, skriptum, Vydavatelství ČVUT, Praha 2006
- Budínský, B., Charvat, J. Matematika II. Praha SNTL, 1990.
- Dontchev, A. L., Rockafellar, R. T.: Implicit Functions and Solution Mappings: A View from Variational Analysis (Springer Monographs in Mathematics). Springer, 2010
- Fialka, M. Diferenciální počet funkcí více proměnných s aplikacemi. UTB FT ve Zlíně, 2004.
- Krantz, S.G., Parks, H. R.: The Implicit Function Theorem. History, Theory, and Applications. Modern Birkhäuser Classics. Springer New York, 2013.
- Škrášek, J., Tichý, Z.: Základy aplikované matematiky I,II. SNTL,Praha 1990.
- Turzík D. et all: Matematika II, VŠCHT Praha, 2002.