



VYSOKÁ ŠKOLA
CHEMICKO-TECHNOLOGICKÁ
V PRAZE



VYSOKÁ ŠKOLA CHEMICKO-TECHNOLOGICKÁ V PRAZE

Fakulta chemicko-inženýrská

Ústav matematiky

ZIMNÍ SEMESTR 2016/2017

Sbírka příkladů k Matematice pro chemické inženýry

Autoři:

Ing. Jan HAIDL, Ph.D.

Ing. Martin ISOZ

Prof. RNDr. Drahoslava JANOVSÁ, CSc.

Prof. Ing. Igor SCHREIBER, CSc.

Mgr. Leszek Marcin SZALA, Ph.D.

21. března 2017

Projekt PIGA č. C_VSCHT_2016_012

Slovo úvodem

Milí studenti magisterského studia,

připravili jsme pro vás sbírku příkladů k předmětu "Matematika pro chemické inženýry". Sbíрка obsahuje řešené příklady k přednáškám, řešené příklady z chemicko-inženýrských aplikací a další příklady k procvičení, jejichž řešení jsou uvedena na konci sbírky. Sbíрка se skládá z jedenácti kapitol, které tématicky odpovídají jednotlivým přednáškám. Příklady jsme vybírali tak, aby vám, studentům, usnadnily pochopení probírané látky a umožnily vám úspěšné složení zkoušky. Kladli jsme důraz na motivaci zaváděných pojmů a na konkrétní aplikační příklady, zejména z chemického inženýrství a bioinženýrství.

Na adrese <http://old.vscht.cz/mat/Info.html> najdete také poznámky k přednáškám a vybrané algoritmy v jazycích MATLAB a MAPLE, které jsou procvičovány na seminářích. Na této adrese jsou také ukázkové zápočtové úlohy k předmětu Matematika pro chemické inženýry a vzorová zkoušková písemka.

Jsme přesvědčeni, že nabytých znalostí využijete i při práci na diplomové, případně na disertační práci.

Autoři

Obsah

1	Lineární algebra	4
1.1	Vlastní čísla a vlastní vektory matice	4
1.1.1	Řešené příklady	4
1.1.2	Příklady k procvičení	6
1.2	Singulární hodnoty a singulární rozklad	8
1.2.1	Řešené příklady	8
1.2.2	Příklady k procvičení	9
1.3	Chemické sítě	10
1.3.1	Řešené příklady	10
1.3.2	Příklady k procvičení	11
1.4	Praktický příklad – Gaussova eliminace	12
2	Lineární a nelineární regrese	14
2.1	Řešené příklady	14
2.2	Příklady k procvičení	17
3	Implicitně zadané funkce	19
3.1	Řešené příklady	19
3.1.1	Úlohy na implicitně zadané funkce	19
3.1.2	Aplikační příklady	21
3.2	Příklady k procvičení	22
4	Numerické řešení DR - počáteční úloha	24
4.1	Řešené příklady	24
4.1.1	Příklady na Cauchyovu úlohu	24
4.1.2	Aplikační příklady	26
4.2	Příklady k procvičení	27
5	Numerické řešení DR - okrajová úloha	28
5.1	Řešené příklady	28
5.1.1	Aplikační příklady	28
6	Newtonova metoda	32
6.1	Řešené příklady	32
6.1.1	Úlohy na Newtonovu metodu	32
6.1.2	Aplikační příklady	34
6.2	Příklady k procvičení	36
7	Fázové portréty soustav lineárních DR	37
7.1	Řešené příklady	37
7.1.1	Aplikační příklady	37
7.2	Příklady k procvičení	38

8 Fázové portréty soustav nelineárních DR	39
8.1 Řešené příklady	39
8.1.1 Úlohy na kreslení fázových portrétů nelineárních soustav	39
8.1.2 Aplikační příklady	42
8.2 Příklady k procvičení	44
9 Základy vektorové analýzy	45
9.1 Řešené příklady	45
9.1.1 Úlohy na vektorovou analýzu	45
9.1.2 Aplikační příklady	47
9.2 Příklady k procvičení	48
10 Plošný integrál	50
10.1 Řešené příklady	50
10.1.1 Úlohy na plochy a křivky	50
10.1.2 Úlohy na plošný integrál	51
10.1.3 Aplikační příklady	52
10.2 Příklady k procvičení	53
11 Fourierovy řady a PDR	54
11.1 Úlohy na Fourierovy řady	54
11.1.1 Řešené příklady	54
11.1.2 Příklady k procvičení	56
11.2 Úlohy na PDR a Fourierovu metodu	56
11.2.1 Řešené příklady	56
11.2.2 Příklady k procvičení	61
12 Výsledky cvičení	63

1. Lineární algebra

1.1 Vlastní čísla a vlastní vektory matice

1.1.1 Řešené příklady

- Vypočtete vlastní čísla a vlastní vektory matice $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Řešení: Charakteristický polynom matice A je

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & -1 \\ 1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 2,$$

t.j. charakteristická rovnice je $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$ a vlastní čísla jsou komplexně sdružená:

$$\lambda_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} = 1 \pm i \quad \text{a spektrum je tedy } \sigma(A) = \{1 + i, 1 - i\}.$$

Nyní vypočteme vlastní vektory: Pro $\lambda_1 = 1 + i$ dostáváme

$$(A - (1 + i)E)\vec{h}_1 = \vec{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{h}_1 = \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Obdobně pro $\lambda_2 = 1 - i$ je

$$(A - (1 - i)E)\vec{h}_2 = \vec{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{h}_2 = \begin{bmatrix} i \\ -1 \end{bmatrix}.$$

- Pomocí Geršgorinovy věty odhadněte polohu vlastních čísel matice

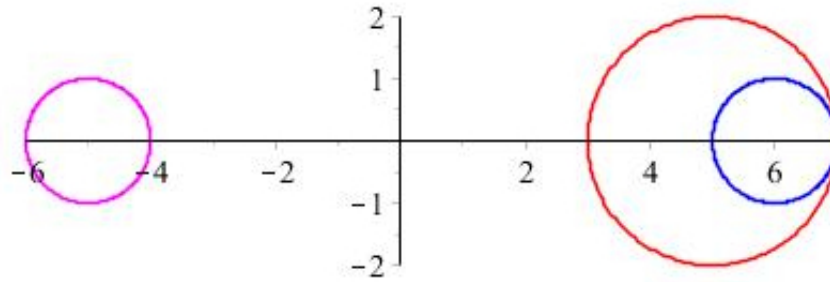
$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 1 \\ 1 & 0 & -5 \end{bmatrix}.$$

Řešení: Sestrojíme kroužky $K_j, j = 1, 2, 3$, se středem S_j a poloměrem r_j ,

$$K_j = \{\mu \in \mathbb{C}, |\mu - a_{jj}| \leq \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^3 |a_{jk}|\}, \quad S_j = a_{jj}, \quad r_j = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^3 |a_{jk}|.$$

tedy

$$\begin{aligned} K_1 &= \{\mu \in \mathbb{C}, |\mu - 5| \leq 2\}, & S_1 &= 5, & r_1 &= 2, \\ K_2 &= \{\mu \in \mathbb{C}, |\mu - 6| \leq 1\}, & S_2 &= 6, & r_2 &= 1, \\ K_3 &= \{\mu \in \mathbb{C}, |\mu + 5| \leq 1\}, & S_3 &= -5, & r_3 &= 1. \end{aligned}$$



Gershgorinovy kroužky sestrojené podle řádkových součtů

Protože $\sigma(A) = \sigma(A^T)$, pro matici A^T dávají sloupcové součty kroužky

$$\begin{aligned}\hat{K}_1 &= \{\mu \in \mathbb{C}, |\mu - 5| \leq 1\}, & \hat{S}_1 &= 5, \hat{r}_1 = 2, \\ \hat{K}_2 &= \{\mu \in \mathbb{C}, |\mu - 6| \leq 1\}, & \hat{S}_2 &= 6, \hat{r}_2 = 1, \\ \hat{K}_3 &= \{\mu \in \mathbb{C}, |\mu + 5| \leq 2\}, & \hat{S}_3 &= -5, \hat{r}_3 = 2.\end{aligned}$$

Vlastní čísla pak leží v průniku těchto dvou množin kroužků.

V našem příkladu jsou přesná vlastní čísla

$$5, \quad \frac{1}{2} - \frac{5}{2}\sqrt{5}, \quad \frac{1}{2} + \frac{5}{2}\sqrt{5}.$$

- Je možné diagonalizovat následující matici pomocí podobnostní transformace?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -4 \\ 8 & -11 & -8 \\ -8 & 8 & 5 \end{bmatrix}.$$

Řešení: Připomeňme, že matice $A^{n \times n}$ je diagonalizovatelná právě když má úplnou množinu vlastních vektorů. Tyto vlastní vektory tvoří sloupce matice P , pro kterou platí $P^{-1}AP = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, kde $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ jsou vlastní čísla A .

Nejprve tedy musíme zjistit, jestli má matice A tři lineárně nezávislé vlastní vektory. Charakteristická rovnice je

$$\lambda^3 + 5\lambda^2 + 3\lambda - 9 = (\lambda - 1)(\lambda + 3)^2 = 0.$$

$\lambda = 1$ je jednonásobné vlastní číslo (algebraická násobnost je 1), $\lambda = -3$ má algebraickou násobnost 2. Najdeme odpovídající nulové prostory.

$$A - 1 \cdot E = \begin{bmatrix} 0 & -4 & -4 \\ 8 & -12 & -8 \\ -8 & 8 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & -3 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{N}(A - E) = \{x \in \mathbb{R}^3, x = t(1, 2, -2)^T, t \in \mathbb{R}\},$$

a geometrická násobnost $\lambda = 1$ je také 1.

$$A + 3E = \begin{bmatrix} 4 & -4 & -4 \\ 8 & -8 & -8 \\ -8 & 8 & 8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

Položíme $z := t, y := s \Rightarrow x = s + t$. Dostaneme

$$\mathcal{N}(A + 3E) = \{x \in \mathbb{R}^3, x = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

Geometrická násobnost $\lambda = -3$ je 2 a je rovna algebraické násobnosti.

Získali jsme tři vlastní vektory. Ověřte, že jsou lineárně nezávislé. Pro transformační matici P máme (sloupce jsou vlastní vektory)

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Nyní vypočteme inverzní matici P^{-1}

$$(P|E) = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & -1 \end{array} \right] = (E|P^{-1}),$$

Nakonec vypočteme $P^{-1}AP$:

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix},$$

což je diagonální matice.

1.1.2 Příklady k procvičení

1. Vypočtete vlastní čísla a vlastní vektory následujících matic

$$A = \begin{bmatrix} -10 & -7 \\ 14 & 11 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 16 & 8 \\ 4 & 14 & 8 \\ -8 & -32 & -18 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 5 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 3 \\ -1 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Které z nich, pokud některé, mají deficit vlastních vektorů v tom smyslu, že neexistuje úplný systém vlastních vektorů.

2. Aniž budete počítat kořeny charakteristické rovnice matice A a příslušné vlastní vektory, rozhodněte, které z uvedených vektorů (a)–(d) jsou její vlastní vektory a kterým vlastním číslem odpovídají.

$$A = \begin{bmatrix} -9 & -6 & -2 & -4 \\ -8 & -6 & -3 & -1 \\ 20 & 15 & 8 & 5 \\ 32 & 21 & 7 & 12 \end{bmatrix},$$

$$(a) \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, (b) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, (c) \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, (d) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

3. Jaká vlastní čísla mají horní trojúhelníková a diagonální matice

$$T = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & \dots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & t_{nn} \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} ?$$

4. Je-li $T = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix}$, ukažte, že $\det(T - \lambda E) = \det(A - \lambda E) \det(C - \lambda E)$,
a tedy $\sigma(T) = \sigma(A) \cup \sigma(C)$ pro čtvercové matice A a C .

5. Vypočtete vlastní vektory matice $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, λ_i různá.

Dále určete nulový prostor matice $D - \lambda_i E$.

6. Vypočtete vlastní čísla a vlastní vektory matice

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -3 \\ 20 & 3 & 10 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix},$$

víte-li že jedno vlastní číslo je $\lambda_1 = 3$.

7. Vysvětlete, proč matice $A^{n \times n}$,

$$A = \begin{bmatrix} n & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & n & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & n & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & n \end{bmatrix}$$

nemá nulové vlastní číslo, a tedy je nesingulární.

8. Ověřte, že algebraická násobnost je rovna geometrické pro všechna vlastní čísla matice

$$A = \begin{bmatrix} -4 & -3 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 6 & 6 & 5 \end{bmatrix}.$$

Najděte nesingulární matici P takovou, že $P^{-1}AP$ je diagonální matice.

9. Nechť N je $n \times n$ dvoudiagonální matice

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & 0 \end{bmatrix}.$$

- (a) Ukažte, že λ je vlastní číslo matice $N + N^T$ právě když $i\lambda$ je vlastní číslo matice $N - N^T$.
 (b) Proč $N + N^T$ je nesingulární právě když n je sudé?
 (c) Vypočtete $\det(N - N^T)/\det(N + N^T)$ pro n sudé.
 Návod: Zkuste nejprve pro $n = 3$ a $n = 4$.

10. Najděte vlastní čísla a odpovídající vlastní vektory matice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Pro každé vlastní číslo určete jeho algebraickou a geometrickou násobnost. Najděte nesingulární matici P tak, aby $P^{-1}AP$ byla diagonálně matice.

11. Určete v $\mathbb{R}^4$ ortogonální doplněk k množině vektoru

$$U = \{(3, 2, -2, 2), (-1, 0, 1, -1), (1, 4, 1, -1)\}.$$

12. Nechť matice $A = \begin{bmatrix} 7 & 15 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$.

Najděte reálnou matici $\mathbf{B}$ tak, aby $\mathbf{B}^{-1}A\mathbf{B}$ byla diagonální. Ověřte.

13. Najděte matici X tak, aby byla splněna rovnice

$$AX + A^{-1} = \mathbf{B}, \quad \text{kde} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

14. Najděte matici X tak, aby byla splněna rovnice

$$AX + X = A^2 - E, \quad \text{kde} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Výsledky cvičení

1.2 Singulární hodnoty a singulární rozklad

1.2.1 Řešené příklady

- Vypočítejte singulární hodnoty matice $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ a matice $B = A^T$.

Řešení: Vypočteme matici $A^T A$, charakteristický polynom této matice, vlastní čísla λ_1, λ_2 této matice a singulární hodnoty σ_1, σ_2 matice A :

$$A^T A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \text{charakteristický polynom} \quad \lambda^2 - 6\lambda + 8 \Rightarrow \lambda_1 = 4, \lambda_2 = 2.$$

Singulární hodnoty matice A jsou odmocniny z vlastních čísel matice $A^T A$, tedy $\sigma_1 = 2, \sigma_2 = \sqrt{2}$.

Poznámka. Vypočteme ortonormální vlastní vektory v_1, v_2 matice $A^T A$ odpovídající příslušným vlastním číslům:

$$\lambda_1 = 4 \Rightarrow \begin{bmatrix} 3-4 & 1 \\ 1 & 3-4 \end{bmatrix} \sim [-1, 1] \Rightarrow h_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \|h_1\| = \sqrt{2},$$

$$\lambda_2 = 2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3-2 \end{bmatrix} \sim [1, 1] \Rightarrow h_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \|h_2\| = \sqrt{2}.$$

Tedy ortonormální vlastní vektory v_1, v_2 matice $A^T A$ jsou

$$v_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \quad \begin{array}{l} v_1^T v_2 = 0 \\ v_1^T v_1 = 1 \\ v_2^T v_2 = 1 \end{array}$$

Povšimněte si ještě, že

$$Av_1 = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \|Av_1\| = 2 = \sigma_1, \quad Av_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}, \quad \|Av_2\| = \sqrt{2} = \sigma_2,$$

a že

$$(Av_1)^T Av_2 = [\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix} = 0.$$

Nechť nyní $B = A^T$. Matice $B^T B$ je 3×3 a má tedy tři singulární hodnoty. Protože matice $A^T A$ a AA^T mají stejná nenulová vlastní čísla, má matice B singulární hodnoty $2, \sqrt{2}$ a 0 .

1.2.2 Příklady k procvičení

1. Vypočtěte vlastní čísla λ_1, λ_2 a odpovídající ortonormální vlastní vektory v_1, v_2 matice $A^T A$ a singulární hodnoty σ_1, σ_2 matice A a A^T ,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

2. Inženýr sleduje závislost indexu tření brzdného systému na počtu ujetých kilometrů. Předpokládá, že vztah je přibližně lineární. Naměřil následující data:

počet najetých kilometrů	2000	6000	20000	30000	40000
Index tření	20	18	10	6	2

Pomocí metody nejmenších čtverců najděte přímku, která nejlépe odpovídá naměřeným datům. Do obrázku zakreslete naměřená data i výslednou přímku.

3. Očekáváte závislost měřené veličiny, y , na parametru procesu, x , ve tvaru,

$$y = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2.$$

Pomocí tabulky měřených hodnot,

x	-2	-1	0	1	2
y	11	5	3	2	2

určete přibližné (ve smyslu nejmenších čtverců) hodnoty koeficientů $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$.

4. Vypočtěte nenulové singulární hodnoty matice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

5. Vypočítejte vlastní čísla λ_1, λ_2 a odpovídající ortonormální vlastní vektory v_1, v_2 matice $A^T A$ a singulární hodnoty σ_1, σ_2 matice A a A^T ,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

6. Dokažte, že je-li A nesingulární, jsou všechny její singulární hodnoty kladné.

7. Najděte singulární rozklad $A = USV^T$ matice $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$.

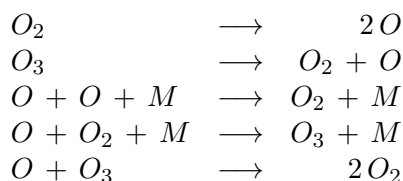
8. Najděte singulární rozklad $A = USV^T$ matice $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \sqrt{2} & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Výsledky cvičení

1.3 Chemické sítě

1.3.1 Řešené příklady

- Zjistěte hodnotu stoichiometrické matice a najděte lineárně nezávislé chemické reakce v systému

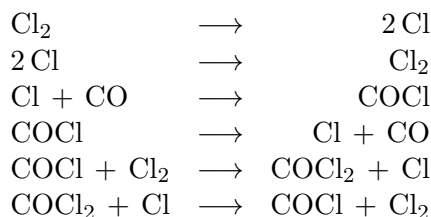


Řešení: Chemické složky v systému: O, O_2, O_3, M . Stechiometrická matice $\underline{\nu}$ je 4×5 (každé reakci odpovídá sloupec, každé chemické složce řádek):

$$\underline{\nu} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad h(\underline{\nu}) = 2.$$

V systému jsou dvě lineárně nezávislé chemické reakce.

- Zjistěte hodnotu stechiometrické matice, najděte lineárně nezávislé chemické reakce v systému a určete bázi,



Řešení: Stechiometrická matice – chemické sloučeniny: Cl, Cl₂, CO, COCl, COCl₂

$$\underline{\nu} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\nu}^T = \begin{bmatrix} \text{Cl} & \text{Cl}_2 & \text{CO} & \text{COCl} & \text{COCl}_2 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow h(\underline{\nu}^T) = h(\underline{\nu}) = 3$$

Lineárně nezávislé jsou například reakce 1, 3, 5 nebo 2, 4, 6.

Soustava má nekonečně mnoho řešení, volím dvě neznámé jako parametry: $x_4 = t, x_5 = s$.

Pak

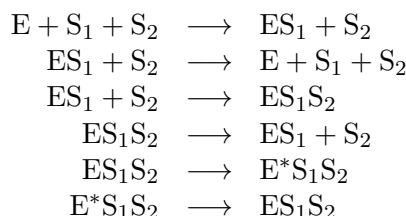
$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

Tedy báze prostoru všech řešení je $\{(-1, -2, 2, 1, 0)^T, (-1, -2, 1, 0, 1)^T\}$ a prostor všech řešení je podprostor $\mathbb{R}^5$,

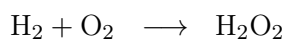
$$V_h = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^5 : \vec{x} = \alpha \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \}.$$

1.3.2 Příklady k procvičení

1. Zjistěte hodnotu stechiometrické matice, najděte lineárně nezávislé chemické reakce v systému a určete bázi,

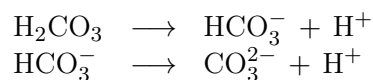


2. Souhrnná reakce tvorby peroxidu vodíku má tvar,



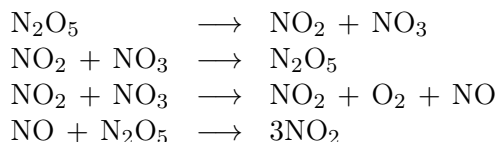
Najděte stechiometrickou matici, zjistěte její hodnotu, najděte lineárně nezávislá řešení (reakční cesty) a odpovídající síťové reakce systému.

3. Proces disociace kyseliny uhličitě lze zapsat pomocí rovnic,



Najděte stechiometrickou matici, zjistěte její hodnotu, najděte lineárně nezávislá řešení (reakční cesty) a odpovídající síťové reakce systému.

4. Oggův mechanismus pro rozklad dusíku oxidem,



Najděte stechiometrickou matici, zjistěte její hodnotu, najděte lineárně nezávislá řešení (reakční cesty) a odpovídající síťové reakce systému.

Výsledky cvičení

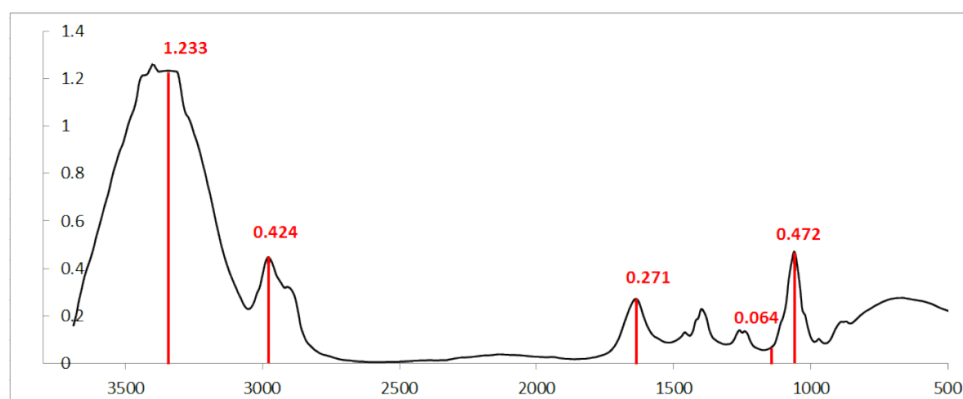
1.4 Praktický příklad – Gaussova eliminace

IČ spektrometrie je analytická metoda, která umožňuje kvalitativní i kvantitativní analýzu vzorku. Kvantitativní analýza je založena na Lambert-Beerově zákonu pro směsi

$$A_\sigma = \sum_{i=1}^n \varepsilon_{i,\lambda} c_i,$$

kde A představuje absorbanci směsi při zvoleném vlnočtu σ , ε_i absorpční molární koeficient složky při tomto vlnočtu a c_i koncentrace složky v mol/l. Absorpční molární koeficient je závislý jak na vlnočtu použitého záření tak na struktuře molekuly a úloha určení složení n -složkové směsi je formulována jako soustava n lineárních rovnic pro n různých (vhodně zvolených) vlnočtů.

Při analýze vzorku destilátu z pálenice bylo změřeno následující IČ spektrum s vyznačenými hodnotami absorbance v charakteristických vlnočtech.



Obrázek 1.1: Absorpční spektrum vzorku alkoholu

V Tab. 1.1 jsou uvedeny hodnoty absorpčních molárních koeficientů jednoduchých alkoholů a vody pro vybrané charakteristické vlnočty. Rozhodněte, zda vzorek splňuje zákonnou normu poměru koncentrace methanolu k ethanolu ve vzorku. Norma má hodnotu 12 g methanolu na 1 l ethanolu, což odpovídá maximálnímu poměru molárních koncentrací methanolu vůči ethanolu 0.02.

Tabulka 1.1: Absorpční molární koeficienty látek při vybraných vlnóčtech

vlnóčet/látka	1060	1150	1640	2990	3350
H ₂ O	$1.87 \cdot 10^{-3}$	$1.74 \cdot 10^{-3}$	$1.01 \cdot 10^{-2}$	$4.26 \cdot 10^{-3}$	$4.41 \cdot 10^{-2}$
MeOH	$4.55 \cdot 10^{-2}$	$6.31 \cdot 10^{-4}$	$4.43 \cdot 10^{-4}$	$2.55 \cdot 10^{-2}$	$1.80 \cdot 10^{-4}$
EtOH	$4.20 \cdot 10^{-2}$	$1.57 \cdot 10^{-3}$	$2.33 \cdot 10^{-4}$	$3.33 \cdot 10^{-2}$	$2.09 \cdot 10^{-5}$
PrOH	$8.93 \cdot 10^{-2}$	$2.14 \cdot 10^{-3}$	$2.88 \cdot 10^{-3}$	$3.99 \cdot 10^{-2}$	$1.00 \cdot 10^{-1}$
i-PrOH	$1.60 \cdot 10^{-2}$	$2.75 \cdot 10^{-2}$	$6.90 \cdot 10^{-4}$	$5.36 \cdot 10^{-2}$	$1.37 \cdot 10^{-3}$

Řešení: Lambertův-Beerův zákon představuje soustavu lineárních rovnic, kterou lze zapsat jako $\mathcal{E} \cdot \vec{c} = \vec{A}$, kde

$$\mathcal{E} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{1,\lambda_1} & \varepsilon_{2,\lambda_1} & \cdots & \varepsilon_{n,\lambda_1} \\ \varepsilon_{1,\lambda_2} & \varepsilon_{2,\lambda_2} & \cdots & \varepsilon_{n,\lambda_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{bmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \end{bmatrix} \quad \text{a} \quad \vec{A} = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \end{bmatrix}.$$

Tabulku 1.1 společně s hodnotami absorpance změřenými při zvolených vlnových délkách (odečteme z obrázku) zapíšeme jako rozšířenou matici soustavy

$$[\mathcal{E}|A] = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1.87 \cdot 10^{-3} & 4.55 \cdot 10^{-2} & 4.20 \cdot 10^{-2} & 8.93 \cdot 10^{-2} & 1.60 \cdot 10^{-2} & 0.472 \\ 1.74 \cdot 10^{-3} & 6.31 \cdot 10^{-4} & 1.57 \cdot 10^{-3} & 2.14 \cdot 10^{-3} & 2.75 \cdot 10^{-2} & 0.0641 \\ 1.01 \cdot 10^{-2} & 4.43 \cdot 10^{-4} & 2.33 \cdot 10^{-4} & 2.88 \cdot 10^{-3} & 6.90 \cdot 10^{-4} & 0.271 \\ 4.26 \cdot 10^{-3} & 2.55 \cdot 10^{-2} & 3.33 \cdot 10^{-2} & 3.99 \cdot 10^{-2} & 5.36 \cdot 10^{-2} & 0.424 \\ 4.41 \cdot 10^{-2} & 1.80 \cdot 10^{-4} & 2.09 \cdot 10^{-5} & 1.00 \cdot 10^{-1} & 1.37 \cdot 10^{-3} & 1.23 \end{array} \right]$$

a řešíme Gaussovou, případně Gauss-Jordanovou eliminací.

Inverzní matici $\mathcal{E}^{-1}$ získáme Gauss-Jordanovou eliminací matice $\mathcal{E}$ rozšířené jednotkovou maticí

$$[\mathcal{E}|E] = \left[\begin{array}{ccccc|ccccc} 1.87 \cdot 10^{-3} & 4.55 \cdot 10^{-2} & 4.20 \cdot 10^{-2} & 8.93 \cdot 10^{-2} & 1.60 \cdot 10^{-2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1.74 \cdot 10^{-3} & 6.31 \cdot 10^{-4} & 1.57 \cdot 10^{-3} & 2.14 \cdot 10^{-3} & 2.75 \cdot 10^{-2} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1.01 \cdot 10^{-2} & 4.43 \cdot 10^{-4} & 2.33 \cdot 10^{-4} & 2.88 \cdot 10^{-3} & 6.90 \cdot 10^{-4} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4.26 \cdot 10^{-3} & 2.55 \cdot 10^{-2} & 3.33 \cdot 10^{-2} & 3.99 \cdot 10^{-2} & 5.36 \cdot 10^{-2} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4.41 \cdot 10^{-2} & 1.80 \cdot 10^{-4} & 2.09 \cdot 10^{-5} & 1.00 \cdot 10^{-1} & 1.37 \cdot 10^{-3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Řešením soustavy je vektor

$$\vec{c} = [26.4, 0.822, 7.68, 0.676, 0.146]^T \text{ mol/l}$$

Poměr koncentrací methanolu k ethanolu je $0.822/7.68 = 0.107$. Obsah methanolu ve vzorku je tedy vyšší, než připouští norma.

Poznámka: Inverzní matice $\mathcal{E}^{-1}$ je

$$\mathcal{E}^{-1} = \begin{bmatrix} -2.38 & -6.16 & 107 & 2.53 & -1.86 \\ 79.3 & 164 & 158 & -109 & -35.4 \\ -64.6 & -198 & -73.4 & 121 & 15.6 \\ 0.891 & 1.86 & -47.7 & -0.885 & 10.9 \\ 1.95 & 44.2 & -2.53 & -4.52 & -0.809 \end{bmatrix}.$$

2. Lineární a nelineární regrese

2.1 Řešené příklady

- Inženýr sleduje závislost indexu tření brzdného systému na počtu ujetých kilometrů. Předpokládá, že vztah je přibližně lineární. Naměřil následující data:

počet najetých kilometrů	2000	6000	20000	30000	40000
Index tření	20	18	10	6	2

Pomocí metody nejmenších čtverců najděte přímku, která nejlépe odpovídá naměřeným datům. Do obrázku zakreslete naměřená data i výslednou přímku.

Řešení: x ... počet najetých kilometrů, y ... index tření.

i	1	2	3	4	5
x_i	$2 \cdot 10^3$	$6 \cdot 10^3$	$2 \cdot 10^4$	$3 \cdot 10^4$	$4 \cdot 10^4$
y_i	20	18	10	6	2

Předpokládáme lineární závislost $y = ax + b$ a hledáme a, b tak, aby součet čtverců $S(a, b)$ byl minimální,

$$S(a, b) = \sum_{i=1}^{i=5} (y_i - ax_i - b)^2.$$

Stacionární bod (a, b) musí splňovat

$$\begin{aligned} \frac{\partial S(a, b)}{\partial a} &= 2 \sum_{i=1}^{i=5} (y_i - ax_i - b) \cdot (-x_i) = 0 \\ \frac{\partial S(a, b)}{\partial b} &= -2 \sum_{i=1}^{i=5} (y_i - ax_i - b) = 0 \end{aligned}$$

Pro neznámé a, b dostáváme soustavu algebraických rovnic

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{i=5} x_i^2 & \sum_{i=1}^{i=5} x_i \\ \sum_{i=1}^{i=5} x_i & \sum_{i=1}^{i=5} 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{i=5} x_i y_i \\ \sum_{i=1}^{i=5} y_i \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 2940000000 & 98000 \\ 98000 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 608000 \\ 5 \end{bmatrix}$$

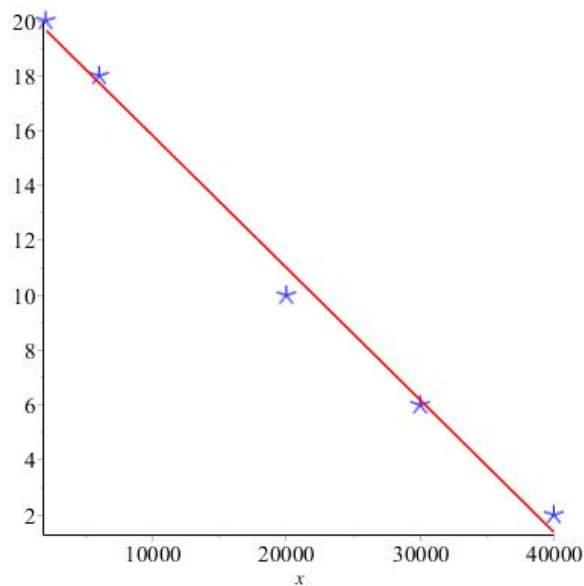
Dostaneme $a = -0.0004803767661$, $b = 20.61538462$, tedy hledaná lineární funkce je

$$y = -0.0004803767661x + 20.61538462.$$

Vypočteme ještě hodnoty $f(x) = y$ v bodech x_i :

$$f(2000) = 19.65463109, f(6000) = 17.73312402, f(20000) = 11.00784930,$$

$$f(30000) = 6.20408164, f(40000) = 1.40031398.$$



- Pro chemickou reakci " $A \rightarrow \text{produkty}$ " byly naměřeny následující údaje

$T(^{\circ}\text{C})$	702	754	789	837
$k(\text{s}^{-1})$	0.15	0.595	1.492	4.665

Předpokládejte, že platí Arrheniova rovnice

$$k = A \exp\left(\frac{-E_a}{RT}\right),$$

kde k je rychlostní konstanta, A je frekvenční faktor, E_a je aktivační energie, $R = 8.3144598 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$ je molární plynová konstanta, T je termodynamická teplota.

Pomocí linearizované regrese určete frekvenční faktor A a aktivační energii E_a .

Řešení: Teplotu ve $^{\circ}\text{C}$ převedeme na stupně Kelvina. V tabulce dat dostaneme

$T(^{\circ}\text{K})$	975.15	1027.15	1062.15	1110.15
$k(\text{s}^{-1})$	0.15	0.595	1.492	4.665

Arrheniovu rovnici musíme linearizovat:

$$\ln(k) = \ln(A) - \frac{E_a}{R} \cdot \frac{1}{T} \Rightarrow y = \ln(k) = a_0 + a_1 \cdot x, \quad x := \frac{1}{T}.$$

Minimalizujeme funkci $S(a_0, a_1) = \sum_{i=1}^4 (y_i - (a_0 + a_1)x_i)^2$. Normální rovnice:

$$X^T \cdot X \cdot a = X^T Y, \quad \text{kde } a = (a_0, a_1)^T,$$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{975.15} \\ 1 & \frac{1}{1027.15} \\ 1 & \frac{1}{1062.15} \\ 1 & \frac{1}{1110.15} \end{bmatrix}, \quad X^T X = \begin{bmatrix} 4 & 0.0038 \\ 0.0038 & 3.6973 \cdot 10^{-6} \end{bmatrix},$$

$$Y = \begin{bmatrix} \ln(0,15) \\ \ln(0,595) \\ \ln(1,492) \\ \ln(4,665) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1,8971 \\ -0,5192 \\ 0,4001 \\ 1,5401 \end{bmatrix}, \quad X^T Y = \begin{bmatrix} -0,4761 \\ -6,8695 \cdot 10^{-4} \end{bmatrix}.$$

Normální rovnice:

$$\begin{bmatrix} 4 & 0,0038 \\ 0,0038 & 3,6973 \cdot 10^{-6} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,4761 \\ -6,8695 \cdot 10^{-4} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$a_0 = 2,434494472, \quad a_1 = -2687,915234.$$

$$\ln A = a_0 \Rightarrow A = \exp(a_0) = 11,41004916 \text{ s}^{-1}, \quad E_a = -a_1 \cdot R = 22348,56316 \text{ K} \cdot \text{J} \cdot \text{mol}^{-1}.$$

- Fázová rovnováha kapalina-pára čistých látek za nízkých tlaků je dobře popsána Clausiovou-Clapeyronovou rovnicí

$$\frac{d \ln p}{dT} = \frac{\Delta H_{\text{výp}}}{RT^2}$$

Integrace této rovnice poskytuje předpis pro závislost tlaku nasycených par čistých látek na teplotě.

$$\ln p = -\frac{\Delta H_{\text{výp}}}{RT} + C$$

V tabulce jsou uvedeny experimentální hodnoty tlaku nasycených par dibutyletheru za různých teplot. Metodou lineární regrese stanovte výparné teplo dibutyletheru.

Tabulka 2.1: Tlak nasycených par dibutyletheru změřený při různých teplotách.

T (K)	419.17	415.42	411.66	407.92	404.12	400.37	396.34	392.32
p (Pa)	113580	102730	92720	83460	74820	67040	59850	53080

Řešení: Integrovaný tvar Clausiovy-Clapeyronovy rovnice lze zapsat ve formě

$$\ln p = C - \frac{\Delta H_{\text{výp}}}{R} \frac{1}{T},$$

což představuje rovnici přímky se směrnici $-\Delta H_{\text{výp}}/R$. Hodnotu výparné entalpie zjistíme proložení experimentálních hodnot $\ln p$ rovnicí přímky. Parametry rovnice přímky určíme řešením soustavy $(X^T X)\vec{a} = (X^T X)\vec{y}$, kde $X_{i,1} = 1$, $X_{i,2} = \frac{1}{T_i}$, $y_i = \ln p_i$, $i = 1, \dots$, počet naměřených hodnot.

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0,00239 \\ 1 & 0,00241 \\ 1 & 0,00243 \\ 1 & 0,00245 \\ 1 & 0,00247 \\ 1 & 0,00250 \\ 1 & 0,00252 \\ 1 & 0,00255 \end{bmatrix}, \quad \vec{y} = \begin{bmatrix} 11,640 \\ 11,540 \\ 11,437 \\ 11,332 \\ 11,223 \\ 11,113 \\ 11,000 \\ 10,880 \end{bmatrix} \quad X^T X = \begin{bmatrix} 8 & 0,01972 \\ 0,01972 & 4,863 \cdot 10^{-5} \end{bmatrix},$$

$$(X^T X)\vec{a} = (X^T X)\vec{y} \Rightarrow \vec{a} = (23,04, -4773,38)^T.$$

$$\Delta H_{\text{výp}} = -a_2 \cdot R = 4773,38 \cdot 8,314 \doteq 39686 \text{ J/mol}.$$

Střední výparná entalpie dibutyletheru v rozmezí teplot 393.32 – 419.17 K je 39686 J/mol.

- Integrální tvar Clausiovy-Clapeyronovy rovnice lze úspěšně použít pro odhad tlaku nasycených par čistých látek v okolí a jejich bodu varu. V širším rozmezí teplot poskytuje lepší výsledky empirický vztah známý jako Antoineova rovnice,

$$\ln p = A - \frac{B}{T + C}.$$

V tabulce 2.1 jsou uvedeny experimentální hodnoty tlaku nasycených par dibutyletheru za různých teplot. Metodou lineární regrese stanovte hodnoty parametrů Antoineovy rovnice.

Řešení: Nelineární Antoineovu rovnici lze převést na lineární tvar (linearizovat)

$$(T \ln p) = AT - C \ln p + (AC - B)$$

a hodnoty parametrů poté určit řešením normálních rovnic $(X^T X)\vec{a} = (X^T X)\vec{y}$, kde $X_{i,1} = 1$, $X_{i,2} = T_i$, $X_{i,3} = \ln p_i$ a $y_i = T_i \ln p_i$, $i = 1, \dots$, počet naměřených hodnot.

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 419.17 & 11.6403 \\ 1 & 415.42 & 11.5399 \\ 1 & 411.66 & 11.4373 \\ 1 & 407.92 & 11.3321 \\ 1 & 404.12 & 11.2228 \\ 1 & 400.37 & 11.1130 \\ 1 & 396.34 & 10.9996 \\ 1 & 392.32 & 10.8796 \end{bmatrix}, \quad \vec{y} = \begin{bmatrix} 4879.25 \\ 4793.89 \\ 4708.30 \\ 4622.60 \\ 4535.37 \\ 4449.33 \\ 4359.58 \\ 4268.27 \end{bmatrix}, \quad \vec{a} = \begin{bmatrix} AC - B \\ A \\ -C \end{bmatrix}$$

$$X^T X = \begin{bmatrix} 8 & 3247.32 & 90.16 \\ 3247.32 & 1318749.44 & 36616.57 \\ 90.16 & 36616.57 & 1016.7 \end{bmatrix}, \quad X^T \vec{a} = \begin{bmatrix} 36616.59 \\ 14877198.38 \\ 413086.61 \end{bmatrix}$$

$$(X^T X)\vec{a} = (X^T X) \Rightarrow \vec{a} = (-4684.95, 24.6107, -64.5780)^T.$$

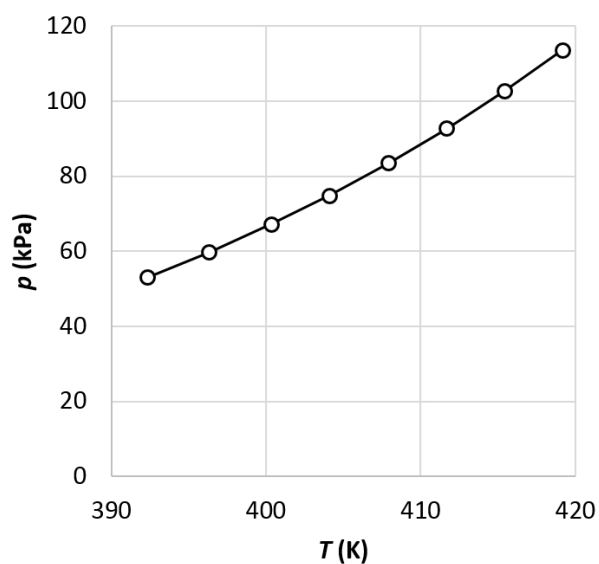
Z hodnot parametrů a_1, a_2, a_3 vypočteme konstanty Antoineovy rovnice: $A = 24.6107$, $B = 6274.26$, $C = 64.5780$.

2.2 Příklady k procvičení

- Předpis pro výpočet koeficientů přestupu hmoty je často uváděn v bezrozměrné formě jako závislost Sherwoodova kritéria (Sh) na dalších bezrozměrných proměnných. Jedna ze závislostí, která dobře popisuje experimentální data v širokém rozsahu hodnot Reynoldsova (Re) a Schmidtova (Sc) kritéria má jednoduchý mocninný tvar

$$Sh = A \cdot Re^B Sc^C$$

V tabulce jsou uvedeny experimentální hodnoty Sh pro různé hodnoty Re a Sc . Metodou



Obrázek 2.1: Proložení experimentálních dat Antoineovou rovnicí

nejmenších čtverců určete parametry A, B a C.

Re	Sc	Sh
1845	1.22	12.5
3407	1.22	21.8
4968	1.22	27.9
1591	2.75	16.4
1838	2.75	18.8
2081	2.75	20.9
3920	0.45	12.3
5136	0.45	15.7
6434	0.45	19.4

Výsledky cvičení

3. Implicitně zadané funkce

3.1 Řešené příklady

3.1.1 Úlohy na implicitně zadané funkce

- Ověřte, že v okolí bodu $A = (-1; 1; 0)$ je rovnicí

$$F(x, y, z) = xyz + \cos z - x^2 - 2xy - 2y = 0$$

implicitně definována funkce $z = f(x, y)$ a zjistěte, zda má funkce $f(x, y)$ v bodě $(-1; 1)$ extrém a jaký. Určete hodnotu $f(-1, 1)$.

Řešení: $F(x, y, z) = xyz + \cos z - x^2 - 2xy - 2y = 0$, $A = (-1, 1, 0)$

$F(-1, 1, 0) = 0$, $\frac{\partial F}{\partial z} = xy - \sin z$, $\frac{\partial F}{\partial z}(-1, 1, 0) = -1 \neq 0 \Rightarrow$ na okolí bodu A je rovnicí $F(x, y, z) = 0$ implicitně definovaná funkce $z = f(x, y)$, $f(-1, 1) = 0$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x + 2y - yz}{xy - \sin z}, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(-1, 1) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2x + 2 - xz}{xy - \sin z}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(-1, 1) = 0 \Rightarrow$$

bod $(-1, 1)$ je stacionárním bodem funkce $f(x, y)$.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{-2y \frac{\partial z}{\partial x} + \cos z \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + 2}{xy - \sin z}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1, 1) = -2,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{-2x \frac{\partial z}{\partial y} + \cos z \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}{xy - \sin z}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-1, 1) = 0,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{-z - y \frac{\partial z}{\partial y} - x \frac{\partial z}{\partial x} + \cos z \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial x} + 2}{xy - \sin z}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(-1, 1) = -2.$$

$$H(-1, 1) = \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -4 < 0 \Rightarrow f \text{ má v bodě } (-1; 1) \text{ sedlový bod.}$$

- Dokažte, že každá diferencovatelná funkce g (o rovnici $z = g(x, y)$) definovaná (na vhodné oblasti) implicitně rovnicí $x - z + \sin(y - z) = 0$ je řešením parciální diferenciální rovnice

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 1.$$

Řešení: $F(x, y, z) = x - z + \sin(y - z) = 0$ a necht' (x_0, y_0, z_0) je takový bod vhodné oblasti, že

$$\begin{aligned} F(x_0, y_0, z_0) &= 0 \\ \frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) &= -1 + \cos(y_0 - z_0)(-1) \neq 0. \end{aligned}$$

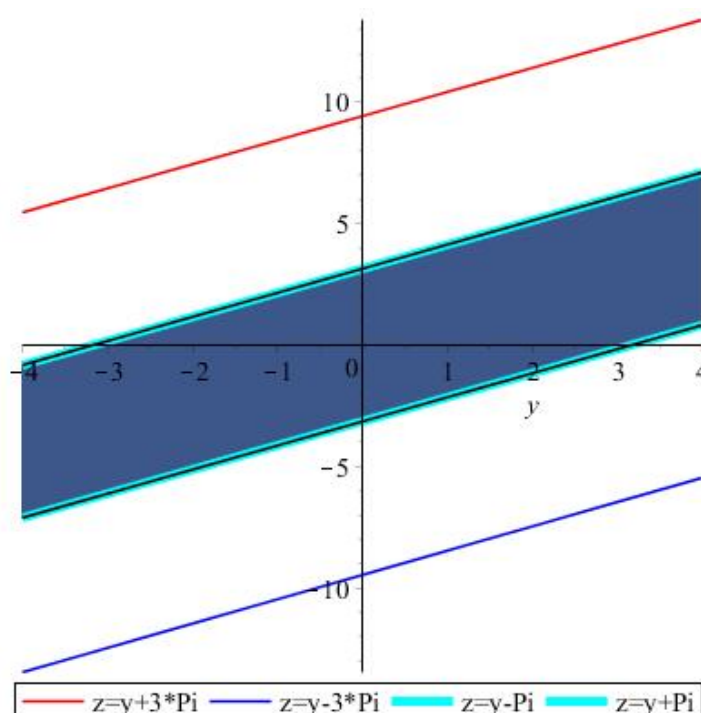
Podmínky není třeba ověřovat, víme podle zadání, že rovnice $F(x, y, z) = 0$ definuje implicitně funkci $z = g(x, y)$ na okolí bodu (x_0, y_0, z_0) . Vhodnou oblast určíme později. Vypočteme požadované parciální derivace tak, že budeme postupně derivovat $F(x, y, z) = 0$, kde $z = g(x, y)$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \Big| \quad 1 - \frac{\partial z}{\partial x} + \cos(y - z) \frac{\partial z}{\partial x} (-1) &= 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1 + \cos(y - z)} \\ \frac{\partial}{\partial y} \Big| \quad -\frac{\partial z}{\partial y} + \cos(y - z) \left(1 - \frac{\partial z}{\partial y}\right) &= 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\cos(y - z)}{1 + \cos(y - z)}. \\ \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{1}{1 + \cos(y - z)} + \frac{\cos(y - z)}{1 + \cos(y - z)} = 1 \end{aligned}$$

Vhodná oblast:

$$x \in \mathbb{R}, \quad 1 + \cos(y - z) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad y - z \neq (2k + 1)\pi.$$

V rovině $y - z$ je vhodný libovolný pás omezený dvěma sousedními lichými násobky čísla π , například $y - \pi \leq z \leq y + \pi$, zobrazené na obrázku 3.1.



Obrázek 3.1

3.1.2 Aplikační příklady

- Závislost času t potřebného k dosažení koncentrace c_B látky B ve vsádkovém reaktoru se řídí rovnicí

$$t = \frac{k_1}{k_2} \ln \frac{c_B^0}{c_B} + \frac{c_B^0 - c_B}{k_2},$$

kde k_1 a k_2 jsou konstanty. Zjistěte rychlost reakce $r_B = \frac{dc_B}{dt}$ látky B v čase $t = 3600$ s. Hodnoty konstant jsou $k_1 = 0.3175 \text{ mol dm}^{-3}$, $k_2 = 0.0002 \text{ mol dm}^{-3} \text{ s}^{-1}$, $c_B^0 = 1.0 \text{ mol dm}^{-3}$ a koncentrace c_B v čase $t = 3600$ s je 0.5 mol dm^{-3} .

Řešení: Rovnice, která implicitně definuje koncentraci c_B , je

$$F(t, c_B) = \frac{k_1}{k_2} \ln \frac{c_B^0}{c_B} + \frac{c_B^0 - c_B}{k_2} - t = 0.$$

Rovnici zderivujeme podle t :

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial c_B} \cdot \frac{dc_B}{dt} = 0.$$

Tedy

$$-1 + \left(\frac{k_1}{k_2} \cdot \frac{1}{c_B} + \frac{1}{k_2} \right) \frac{dc_B}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{dc_B}{dt} = \frac{k_2 c_B}{k_1 + c_B}.$$

Tedy rychlost reakce $r_B = \frac{dc_B}{dt}$ látky B v čase $t = 3600$ s je

$$\frac{dc_B}{dt} = \frac{0.0002 \cdot 0.5}{0.3175 + 0.5} \doteq 1.223 \cdot 10^{-4} \text{ mol} \cdot \text{dm}^{-3} \cdot \text{s}^{-1}.$$

- Librační centrum (Lagrangeův bod) je v nebeské mechanice takový bod v soustavě dvou těles m_1 a m_2 rotujících kolem společného těžiště, v němž se vyrovnávají gravitační a odstředivé síly soustavy tak, že malé těleso umístěné do tohoto bodu nemění vůči soustavě svou polohu. Polohu prvního Lagrangeova bodu, L_1 , je možné získat z rovnice

$$\frac{M_1}{(R-r)^2} = \frac{M_2}{r^2} + \frac{M_1}{R^2} - \frac{r(M_1 + M_2)}{R^3},$$

kde M_1 a M_2 jsou hmotnosti těles, R je vzdálenost těžišť těles a r je vzdálenost L_1 od těžiště menšího z těles.

Vzdálenost L_1 od těžiště Měsíce je 59274 km, hmotnost Země je $5.97 \cdot 10^{24}$ kg a Měsíce $7.35 \cdot 10^{22}$ kg. Vzdálenost mezi těžišti Země a Měsíce je 392600 km.

Pomocí diferenciálu implicitně zadané funkce $r = r(R)$ zjistěte, o kolik by se změnila poloha L_1 , vzdálil-li by se Měsíc od Země na 500000 km. V daném řádu pracujte se třemi platnými číslicemi.

Řešení:

1. Ověření platnosti věty o implicitní funkci:

Zavedeme funkci

$$F(r, R) = \frac{M_2}{r^2} + \frac{M_1}{R^2} - \frac{r(M_1 + M_2)}{R^3} - \frac{M_1}{(R-r)^2}$$

a dosazením získáme

$$F(r^* = 59274, R^* = 392600) \doteq 2.092 \cdot 10^{13} + 3.873 \cdot 10^{13} - 5.92 \cdot 10^{12} - 5.373 \cdot 10^{13} \doteq 3.5 \cdot 10^9,$$

což je v zadané přesnosti třech platných číslic rovno nule. Zadaná rovnice tedy splňuje první podmínku věty o implicitní funkci.

V dalším potřebujeme vyčíslit derivaci

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial r}(r^*, R^*) &= -\frac{2M_2}{r^3} - \frac{M_1 + M_2}{R^3} - \frac{2M_1}{(R-r)^3} \Big|_{r=r^*, R=R^*} \\ &\doteq -7.059 \cdot 10^8 - 9.987 \cdot 10^7 - 3.224 \cdot 10^8 \doteq -1.13 \cdot 10^9, \end{aligned}$$

což je v zadané přesnosti nenulové. Zadaná rovnice tedy splňuje i druhou podmínku věty o implicitní funkci a na okolí bodu $A = (r^*, R^*)$ implicitně definuje funkci $r = r(R)$.

2. Výpočet diferenciálu implicitně zadané funkce:

Nyní vyčíslíme derivaci

$$\frac{\partial F}{\partial R}(r^*, R^*) = -\frac{2M_1}{R^3} + \frac{3r(M_1 + M_2)}{R^4} + \frac{2M_1}{(R-r)^3} \Big|_{r=r^*, R=R^*} \doteq 1.703 \cdot 10^8$$

a dosadíme do vztahu pro odhad změny funkční hodnoty pomocí diferenciálu,

$$\Delta r \doteq \frac{dr}{dR}(r^*, R^*) \cdot \Delta R = -\frac{\frac{\partial F}{\partial R}}{\frac{\partial F}{\partial r}}(r^*, R^*) \cdot (R - R^*) = 16110 \text{ km}.$$

Vzdálenost L_1 od těžiště měsíce by tedy vzrostla přibližně o 16000 km.

3.2 Příklady k procvičení

1. Je dána rovnice

$$G(x, y) = x^2 - 3xy + y^3 - 7 = 0.$$

Ověřte, že $x^* = 4$, $y^* = 3$ řeší tuto rovnici. Odhadněte řešení, které odpovídá hodnotě $x_1 = 4.3$.

2. Je dána rovnice

$$G(x, y, z) = x^3 + 3y^2 + 4xz^2 - 3z^2y - 1 = 0.$$

Definuje tato funkce implicitně funkci $z = z(x, y)$

- na okolí bodu $A = (1; 1; z_0)$?
- na okolí bodu $B = (1; 0; z_0)$?
- na okolí bodu $C = (0.5; 0; z_0)$? Pokud ano, vypočtěte souřadnice z_x, z_y v tomto bodě. Dále, pokud x roste do 0.6 a y klesá do -0.2 , odhadněte odpovídající změnu z .

3. Ověřte, že funkce $z = g(x, y)$ je implicitně definovaná rovnicí $F(x, y, z) = 0$ na okolí bodu $A = (x_0; y_0; z_0)$. Vypočtěte

$$g_x(x_0, y_0), g_y(x_0, y_0), g_{xx}(x_0, y_0), g_{xy}(x_0, y_0), g_{yy}(x_0, y_0),$$

jestliže

- (a) $F(x, y, z) = x^2 - 2y^2 + z^2 - 4x + 2z - 1$, $A = (0; 1; 1)$,
 (b) $F(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - z - 1$, $A = (1; 0; 1)$,

- (c) $F(x, y, z) = \exp(x) - xyz + x^2 - 2$, $A = (1; 2; 0)$,
(d) $F(x, y, z) = x \cos y + y \cos z + z \cos x - 1$, $A = (0; 0; 1)$.
4. Necht' $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jsou spojité, diferencovatelné funkce takové, že $f(0) = 0$ a $f'(0) \neq 0$. Uvažujme rovnici $f(x) = t \cdot g(x)$ a necht' $t \in \mathbb{R}$.
- (a) Ukažte, že v dostatečně malém intervalu $|t| < \delta$ existuje jednoznačně určená spojitá funkce $x(t)$, která řeší rovnici a splňuje $x(0) = 0$.
(b) Napište Taylorův polynom prvního stupně pro funkci $x(t)$ v bodě $t = 0$.
5. Jedním z řešení soustavy

$$\begin{aligned}x^3 y - z &= 1 \\x + y^2 + z^3 &= 6\end{aligned}$$

je $(x; y; z) = (1; 2; 1)$. Odhadněte odpovídající x, y , je-li $z = 1.1$.

6. Necht' $X = (x; y; z)$, $U = (u; v)$. Zobrazení $F(X, U) : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^2$ je definováno předpisem

$$F(X, U) = \begin{bmatrix} 2x^2 + y^2 + z^2 + u^2 - v^2 \\ x^2 + z^2 + 2u - v \end{bmatrix}.$$

Necht' $X_0 = (1; -1; 1)$, $U_0 = (0; 2)$. Ověřte, že existuje okolí $\mathcal{B}$ bodu $X_0 = (1; -1; 1)$ a jednoznačně určené zobrazení $g : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}^2$ takové, že $F(X, g(X)) = 0 \forall X \in \mathcal{B}$. Vypočtěte derivaci $D(g(X))$ v bodě $X = (1; -1; 1)$.

Výsledky cvičení

4. Numerické řešení DR - počáteční úloha

4.1 Řešené příklady

4.1.1 Příklady na Cauchyovu úlohu

- Nalezněte obecné řešení soustavy rovnic

$$\begin{aligned}x' &= x + \operatorname{arctg} y, \\y' &= 1 + y^2 - \alpha\end{aligned}$$

pro $\alpha = 0$. Nalezněte partikulární řešení pro $x(0) = y(0) = 0$. Pro tuto počáteční podmínku proveďte jeden krok metody Runge-Kutta 4. řádu s krokem $h = 0.1$. Získané řešení označte $\tilde{u}$, přesné řešení v čase $t = 0,1$ označte u a vypočtěte chybu numerického řešení $e = \|u - \tilde{u}\|$.

Řešení: (*analytické*) Nejdříve je nutné určit stavový prostor dané soustavy. V našem případě není nijak omezen, takže hledáme zobrazení $\mathbf{x} = (x, y)^T : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$, kde $\Omega = \mathbb{R}^2$.

Pro $\alpha = 0$ dostaneme druhou rovnici ve tvaru $y' = 1 + y^2$. V této rovnici nevystupuje funkce x a můžeme jí řešit separací,

$$\begin{aligned}y' = \frac{dy}{dt} &= 1 + y^2 \\ \int \frac{dy}{1 + y^2} &= \int dt \\ \operatorname{arctg} y &= t + C_2 \\ y(t, C_2) &= \operatorname{tg}(t + C_2)\end{aligned}$$

Nyní můžeme dosadit funkci y do první rovnice, čímž obdržíme $x' = x + t + C_2$. Jedná se o nehomogenní lineární diferenciální rovnici prvního řádu s konstantními koeficienty. Řešení této rovnice nalezneme jako součet obecného řešení přidružené homogenní rovnice a partikulárního řešení nehomogenní rovnice,

$$x(t, C_1, C_2) = x_{OH}(t, C_1) + x_{PN}(t, C_2)$$

Vyřešme nejprve přidruženou homogenní diferenciální rovnici, $x' - x = 0$. Charakteristický polynom má tvar $\lambda - 1 = 0$ a jeho kořen je $\lambda = 1$. Obecné řešení dané homogenní diferenciální rovnice tedy je

$$x_{OH}(t, C_1) = C_1 e^t$$

Partikulární řešení nehomogenní rovnice nalezneme metodou variace konstanty. Neboli, x_{PN} budeme hledat ve tvaru,

$$x_{PN} = c' e^t + c e^t,$$

kde c je nyní funkce nezávisle proměnné t .

Dosazením z předchozího vztahu do rovnice $x' = x + t + C_2$ obdržíme po úpravě

$$c' = (t + C_2)e^{-t}.$$

A hledanou funkci c obdržíme integrací metodou per-partes, kde derivujeme $u = t + C_2$ a integrujeme $v' = e^{-t}$.

$$c(t) = -(t + C_2 + 1)e^{-t}$$

Hledané partikulární řešení nehomogenní rovnice tedy je $x_{PN}(t, C_2) = -t - C_2 - 1$. Hledané obecné řešení soustavy je

$$\begin{aligned} x(t, C_1, C_2) &= C_1 e^{-t} - t - 1 - C_2 \\ y(t, C_1, C_2) &= \operatorname{tg}(t + C_2) \end{aligned}, \quad C_1 \in \mathbb{R}, t + C_2 \in (-\pi/2, \pi/2).$$

Dosazením počáteční podmínky $x(0) = y(0) = 0$ do nalezeného obecného řešení soustavy obdržíme soustavu algebraických rovnic pro hledané hodnoty konstant C_1 a C_2 ,

$$\begin{aligned} 0 &= C_1 - 1 - C_2 \\ 0 &= \operatorname{tg}(C_2). \end{aligned}$$

Z druhé rovnice plyne, že $C_2 = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Vzhledem k definičnímu oboru y je potom $C_2 = 0$. Následně dosazením do první rovnice získáme $C_1 = 1 - C_2 = 1$. Partikulární řešení soustavy odpovídající počáteční podmínce $x(0) = y(0) = 0$ je,

$$\begin{aligned} x_P(t) &= e^{-t} - t - 1 \\ y_P(t) &= \operatorname{tg}(t) \end{aligned}, \quad t \in (-\pi/2, \pi/2).$$

Přesné řešení v čase $t = 0.1$ tedy je $u := [x_P(0.1), y_P(0.1)]^T \doteq [0.00517, 0.10033]^T$.

Řešení: (*numerické*) Označme si nyní vektorové pole na pravé straně zadané soustavy jako $\vec{F}(\mathbf{x})$. Soustavu následně můžeme přepsat jako $\mathbf{x}' = \vec{F}(\mathbf{x})$, kde $\mathbf{x} = (x, y)^T$. Dále si označme integrační krok metody jako $h := t_{i+1} - t_i$, $i = 1, 2, \dots$. Metoda Runge-Kutta 4. řádu je pro toto značení zadána předpisy,

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_1 &= h\vec{F}(\mathbf{x}_i) \\ \mathbf{k}_2 &= h\vec{F}(\mathbf{x}_i + \frac{1}{2}\mathbf{k}_1) \\ \mathbf{k}_3 &= h\vec{F}(\mathbf{x}_i + \frac{1}{2}\mathbf{k}_2) \\ \mathbf{k}_4 &= h\vec{F}(\mathbf{x}_i + \mathbf{k}_3) \\ \mathbf{x}_{i+1} &= \mathbf{x}_i + \frac{1}{6}(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_4) + \frac{1}{3}(\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) \end{aligned}$$

Povšimněte si, že v předchozích vztazích nevystupuje nezávisle proměnná (t), jelikož řešená soustava je autonomní ($\vec{F}$ nezávisí explicitně na t). Dále si povšimněte, že $\mathbf{k}_i$, $i = 1, 2, 3, 4$ jsou vektorové funkce.

Označme si nyní počáteční podmínku $\mathbf{x}_0 = (x(0), y(0))^T = (0, 0)^T$ a postupně dosazujme do výše uvedených vztahů pro $h = 0.1$. Výsledky jsou zapsány v níže uvedené tabulce.

Pozn: Metoda Runge-Kutta 4. řádu má přesnost $O(h^4)$ a pro krok $h = 0.1$ by tedy měla vracet přibližně 4 platná desetinná místa. Ve výsledkové tabulce jsou všechny hodnoty

i	$\mathbf{x}_i$	$\mathbf{k}_1$	$\mathbf{k}_2$	$\mathbf{k}_3$	$\mathbf{k}_4$
0	$\begin{bmatrix} 0.00000 \\ 0.00000 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.00000 \\ 0.10000 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.00500 \\ 0.10025 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.00526 \\ 0.10025 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.01052 \\ 0.10101 \end{bmatrix}$
1	$\begin{bmatrix} 0.00517 \\ 0.10033 \end{bmatrix}$				

zaokrouhleny na 5 desetinných míst. V průběhu výpočtu byla z důvodu omezení zaokrouhlovacích chyb použita přesnost vyšší.

Označme nyní $\tilde{\mathbf{u}} := \mathbf{x}_1 = [0.00517, 0.10033]^T$. Chybu numerického řešení vypočteme jako

$$e = \|\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}\| = \sqrt{(0.00517 - 0.00517)^2 + (0.10033 - 0.10033)^2} = 0$$

Pro sledovanou přesnost (5 desetinných míst) se tedy numerické a analytické řešení neliší. Výsledky se liší až na 8 desetinném místě pro případ funkce x a na 7 pro případ y .

4.1.2 Aplikační příklady

- Vodný roztok amoniaku se vyrábí absorpcí prakticky čistého plynu do vody v souprouté absorpční koloně. Vývoj koncentrace amoniaku ve vodě podél kolony lze popsat rovnicí

$$\frac{dc_{NH3}}{dz} = \frac{A}{\dot{V}_L} (c_{NH3}^* - c_{NH3}).$$

Teplota vody na vstupu je 25 °C, rozpouštění plynu je však silně exotermní a absorbér je nutno intenzivně chladit. Díky ohřevu vody dochází ke změně rovnovážné koncentrace, pro kterou lze v rozmezí teplot 0 – 80 °C použít vztah

$$c_{NH3}^* = 54400e^{-0.0274t}.$$

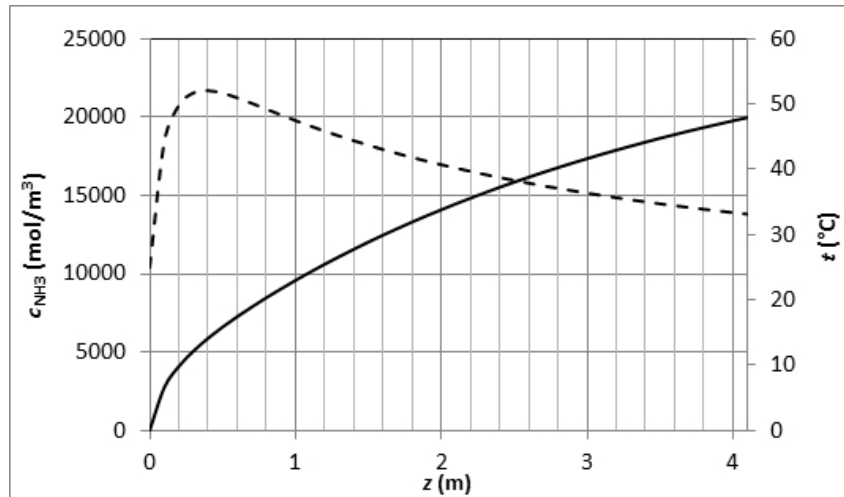
Pro popis vývoje teploty podél kolony lze z entalpické bilance odvodit

$$\frac{dt}{dz} = B \frac{dc_{NH3}}{dz} - \frac{C}{\dot{V}_L} (t - t_0).$$

Určete délku kolony, jejíž parametry jsou $A = 0,02 \text{ m}^2/\text{s}$; $B = 0,007 \text{ m}^3\text{K}/\text{mol}$; $C = 0,04 \text{ m}^2/\text{s}$, schopné produkovat $0,02 \text{ m}^3/\text{s}$ čpavkové vody o koncentraci $19000 \text{ mol}/\text{m}^3$.

Řešení Koncentrační a teplotní profil získáme integrací diferenciálních rovnic např. Eulerovou metodou:

$$f_{z+\Delta z} = f_z + \frac{df}{dz} \Delta z$$



Obrázek 4.1: Koncentrační a teplotní profily integrované Eulerovou metodou.

V tabulce jsou uvedeny hodnoty $c(z)$ a $t(z)$ napočítané Eulerovou metodou pro $\Delta z = 0.1$ m.

z (m)	c_{NH_3} (mol/m ³)	t (°C)	$c_{NH_3}^*$ (mol/m ³)	$\frac{dc_{NH_3}}{dz}$ (mol/m ⁴)	$\frac{dt}{dz}$ (°C/m)
0	0	25.0	27422.5	27422.5	192.0
0.1	2742.3	44.2	16206.3	13464.1	55.9
0.2	4088.7	49.8	13906.4	9817.8	19.2
0.3	5070.4	51.7	13195.2	8124.7	3.5
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
3.4	18402.1	35	20836.2	2434.1	-3.0
3.5	18645.5	34.7	21008.8	2363.3	-2.9
3.6	18881.8	34.4	21176.6	2294.8	-2.8
3.7	19111.3	34.2	21339.9	2228.6	-2.7
3.8	19334.2	33.9	21498.7	2164.5	-2.6

Pro výrobu roztoku amoniaku o koncentraci 19000 mol/m³ je potřeba kolona o délce přibližně 3.7 m.

4.2 Příklady k procvičení

1. Nalezněte obecné řešení soustavy obyčejných diferenciálních rovnic ve tvaru $x' = Ax$ pro

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Nápověda: Všechny kořeny charakteristické rovnice jsou celá čísla.

2. Cauchyovu úlohu $y' = e^x + y$ s počáteční podmínkou $y(0) = 1$ řešte na intervalu $\langle 0; 0.2 \rangle$ metodou Runge-Kutta 4. řádu. Krok volte $h = 0.1$. Získané řešení označte $\tilde{y}$. Vypočtěte přesné řešení dané lineární diferenciální rovnice prvního řádu a chybu numerického řešení $e = |y(0.2) - \tilde{y}(0.2)|$.

Výsledky cvičení

5. Numerické řešení DR - okrajová úloha

5.1 Řešené příklady

5.1.1 Aplikační příklady

- Určete teplotu vstupující vody do kolony z prvního příkladu v 4.1.2 na straně 26, při které dojde k požadované produkci čpavkové vody v koloně o maximální délce 2.5 m.

Řešení: Úloha je soustavou diferenciálních rovnic se zadanými okrajovými podmínkami, tzv. okrajová úloha. Úlohu lze formulovat jako nelineární funkci jedné proměnné - teploty vstupující vody, t_0

$$f(t_0) = c_{NH_3}^{2.5m}(t_0) - c_{NH_3,požadovana}^{2.5m}$$

Potřebnou teplotu budeme hledat např. Newtonovou metodou, koncentraci amoniaku ve vodě vytékající z kolony budeme řešit stejně, jako v předchozím příkladu Eulerovou metodou s krokem $\Delta z = 0.1$ m a počátečním odhadem teploty $t_0 = 25$ °C. Derivaci $\frac{df}{dt}(t)$ spočteme numericky

$$\frac{df}{dt}(t) = \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

s hodnotou $\Delta t = 0.1$ °C. Výsledky jednotlivých iterací Newtonovy metody jsou ukázány v tabulce.

i	t_0 (°C)	$c_{NH_3}^{2.5m}$ (mol/m ³)	$f(t_0)$ (mol/m ³)	$\frac{df}{dt}(t_0)$ (mol/m ³ /°C)
0	25	15848.1	-3151.9	-293
1	14.2	19234.7	234.7	-333
2	14.9	19002.1	2.1	-330
3	14.9	19002.1	2.1	

Pro dosažení požadované koncentrace amoniaku v koloně o délce 2.5 m je třeba použít vodu o teplotě přibližně 14.9 °C.

- Stefan-Maxwellovy rovnice difuze se používají pro řešení difuzních problémů v případech, kdy se procesu účastní více, než 2 složky, které se vzájemně významně ovlivňují a nelze tak použít jednodušší popis pomocí Fickova zákona. Pro ideální směs n plynů tvoří rovnice soustavu $n - 1$ lineárních diferenciálních rovnic

$$\frac{dy_i}{dz} = \sum_{j=1}^n \frac{N_j y_i - N_i y_j}{c \cdot D_{ij}} = f_i,$$

kde N_i značí intenzitu molárního toku složky i (mol/m²/s), c koncentraci plynu (mol/m³), D_{ij} jsou binární Stefan-Maxwellovy difuzní koeficienty (m²/s) a y_i molární zlomek složky.

V trubici naplněné vzduchem je equimolární směs metanolu a ethanolu při teplotě 70 °C. Hladina v trubici sahá 5 cm pod okraj trubice. Kolmo na trubici proudí čistý vzduch. Vypočítejte intenzitu toku methanolu a acetonu z trubice. Intenzita toku vzduchu je nulová, $N_3 = 0$, jako nástřel použijte $N_1 = N_2 = 0.02 \text{ mol/m}^2/\text{s}$. Pro zadané podmínky (teplota, tlak) použijte následující hodnoty:

$$t = 70 \text{ °C}, \quad c = 35.5 \text{ mol/m}^3, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} D_{12} & D_{13} \\ 0 & D_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0 & 2.1 \\ 0.0 & 1.6 \end{bmatrix} \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}.$$

Okrajová podmínka je zadána,

$$\begin{aligned} z = 0.00 : \quad y_1 &= 0.62, \quad y_2 = 0.37, \\ z = 0.05 : \quad y_1 &= 0.00, \quad y_2 = 0.00, \end{aligned}$$

$$y_3 = 1 - y_1 - y_2.$$

Řešení Řešený problém představuje soustavu dvou diferenciálních rovnic se zadanou počáteční i okrajovou podmínkou a neznámými dvěma parametry N_1 a N_2 . K integraci použijeme Runge-Kutteovu metodu 2. řádu (nejjednodušší metodu typu predictor-corrector), parametry N_1 a N_2 budeme hledat Newtonovou metodou tak, aby řešení soustavy pro zadané počáteční podmínky ($y_1(0) = 0.62, y_2(0) = 0.37$) splnilo zároveň podmínky okrajové ($y_1(0.05) = 0, y_2(0.05) = 0$).

Integrační metoda je zadána tabulkou:

$$\begin{array}{c|cc} 1 & 1 & \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array}$$

a tedy rozepsána do iteračních kroků:

$$\begin{aligned} k_{1,i}(z) &= \Delta z f_i(z, y_1(z), y_2(z)) & i &= 1, 2 \\ k_{2,i}(z) &= \Delta z f_i(z, y_1(z) + k_{1,1}(z), y_2(z) + k_{1,2}(z)) & i &= 1, 2 \\ y_i(z + \Delta z) &= y_i(z) + 1/2 k_{1,i}(z) + 1/2 k_{2,i}(z) & i &= 1, 2 \end{aligned}$$

V tabulce 5.1 jsou uvedeny výsledky jednotlivých kroků integrační metody pro $\Delta z = 0,005$ a nástřely hodnot $N_1 = N_2 = 0,02$. Krok $\Delta z = 0,005$ odpovídá rozdělení délky trubice na 10 dílů. Přesvědčme se nyní, zda je zvolené dělení dostatečně jemné. Integrační metodu používáme pro určení $y_1(0,05), y_2(0,05)$, zajímá nás tedy, jak se mění tyto hodnoty v závislosti na jemnosti sítě. Pro různé hodnoty kroku Δz získáme takovéto výsledky:

n	Δz	$y_1(0.05)$	$y_2(0.05)$
10	0.00500	29.236	-28.450
50	0.00100	35.184	-34.406
100	0.00050	35.467	-34.689
200	0.00025	35.542	-34.764

Vidíme, že od 100 integračních kroků výše se výsledky "příliš"neliší (relativní odchylka 0.2 %). Dále tedy budeme používat integrační krok $\Delta z = 0.0005$.

Integrace poskytuje pro zvolené hodnoty N_1, N_2 2 hodnoty $y_1(0,05), y_2(0,05)$. Představuje tak soustavu dvou (nelineárních) rovnic $f_1(N_1, N_2), f_2(N_1, N_2)$. Naším cílem je najít řešení

Tabulka 5.1: Integrace soustavy Stefan-Maxwellových rovnic difuze metodou Runge-Kutta 2. řádu pro $\Delta z = 0.005$ a $N_1 = N_2 = 0.02$.

z	$y_1(z)$	$y_2(z)$	$y_3(z)$	$k_{1,1}(z)$	$k_{1,2}(z)$	$k_{2,1}(z)$	$k_{2,2}(z)$
0.000	0.620	0.370	0.0100	6.91E-02	-7.22E-02	1.08E-01	-1.13E-01
0.005	0.709	0.278	0.0136	1.20E-01	-1.24E-01	1.88E-01	-1.93E-01
0.010	0.862	0.119	0.0184	2.07E-01	-2.13E-01	3.24E-01	-3.32E-01
0.015	1.128	-0.153	0.0251	3.57E-01	-3.65E-01	5.60E-01	-5.70E-01
0.020	1.587	-0.621	0.0340	6.17E-01	-6.28E-01	9.67E-01	-9.80E-01
0.025	2.379	-1.425	0.0462	1.07	-1.08	1.67	-1.69
0.030	3.745	-2.808	0.0628	1.84	-1.86	2.88	-2.90
0.035	6.102	-5.187	0.0853	3.17	-3.19	4.96	-4.99
0.040	10.164	-9.280	0.1159	5.46	-5.50	8.54	-8.59
0.045	17.168	-16.325	0.1574	9.41	-9.46	1.47E+01	-1.48E+01
0.050	29.236	-28.450	0.2138	1.62E+01	-1.63E+01	2.54E+01	-2.55E+01

Tabulka 5.2: Výsledky jednotlivých iterací Newtonovy metody při hledání odpovídajících molárních toků, N_1 , N_2 .

k	N_1	N_2	ΔN_1	ΔN_2	$y_1(0.05)$	$y_2(0.05)$	$ \vec{f} $
0	0.0200	0.0200	0.0751	-0.0176	35.4671	-34.6894	49.6
1	0.0951	0.0024	0.0016	-0.0110	-308953	308947	436921
2	0.0967	-0.0086	-0.0025	-0.0057	-111707	111705	157977
3	0.0942	-0.0144	-0.0108	0.0041	-41182	41182	58240
4	0.0835	-0.0103	-0.017	0.012	-15014	15014	212337
5	0.0665	0.0017	-0.0151	0.0115	-5053	5053	7146
6	0.0513	0.0132	-0.0093	0.0071	-1467	1467	2074
7	0.0421	0.0203	-0.0032	0.0024	-307	307	434
8	0.0389	0.0227	-0.0003	0.0003	-26.4	26.4	37.3
9	0.0386	0.0229	0.0000	0.0000	-0.258	0.258	0.365
10	0.0386	0.0229	0.0000	0.0000	-0.0001	0.0001	0.0001

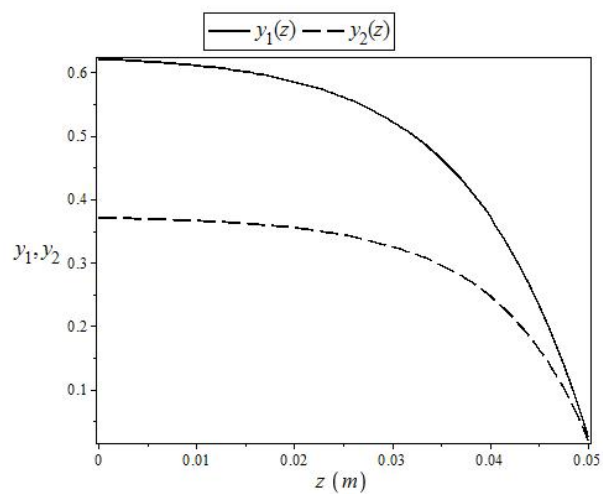
této soustavy, tedy $f_1(N_1, N_2) = 0$, $f_2(N_1, N_2) = 0$. Soustavu budeme řešit Newtonovou metodou pro více proměnných

$$- \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(N_{1,i}, N_{1,i})}{\partial N_1} & \frac{\partial f_1(N_{1,i}, N_{2,i})}{\partial N_2} \\ \frac{\partial f_2(N_{1,i}, N_{2,i})}{\partial N_1} & \frac{\partial f_2(N_{1,i}, N_{2,i})}{\partial N_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta N_{1,i} \\ \Delta N_{2,i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(N_{1,i}, N_{2,i}) \\ f_2(N_{1,i}, N_{2,i}) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} N_{1,i+1} \\ N_{2,i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{1,i} \\ N_{2,i} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta N_{1,i} \\ \Delta N_{2,i} \end{bmatrix}$$

Jako kritérium konvergence použijeme normu vektoru $\vec{f}$. Výsledky jednotlivých kroků Newtonovy metody jsou uvedeny v tabulce 5.2¹.

¹V tabulce 5.2 vidíme, že po první iteraci se výrazně zhoršily hodnoty f_1, f_2 . V takovém případě je obvyklé použít variantu Newtonovy metody s relaxačním parametrem α . $N_{i+1} = \vec{N}_i + \alpha \Delta \vec{N}$.



Obrázek 5.1: Profily molárních zlomků složek v trubici.

Intenzita toku složek je $N_1 = 0.0386 \text{ mol/m}^2/\text{s}$, $N_2 = 0.0229 \text{ mol/m}^2/\text{s}$. Profil molárních zlomků složek v trubici je ukázán na obr. 5.1.

6. Newtonova metoda

6.1 Řešené příklady

6.1.1 Úlohy na Newtonovu metodu

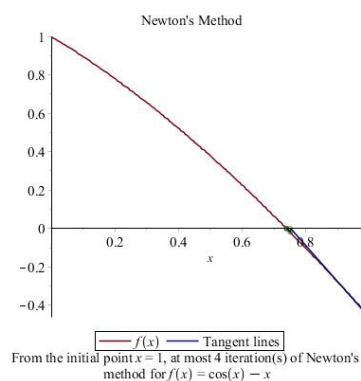
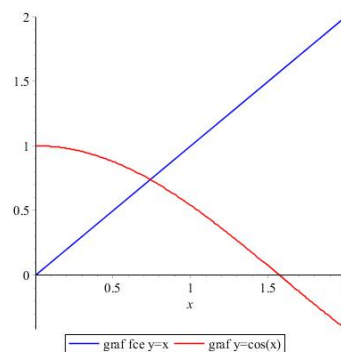
- Pomocí Newtonovy metody vypočtete přibližně řešení rovnice $\cos x = x$, které leží v intervalu $\langle 0, 2 \rangle$, tedy ověřte, že interval $\langle 0, 2 \rangle$ je separační, že lze aplikovat Newtonovu metodu. Zvolte x_0 a vypočtete aproximaci x_1 kořene.

Řešení: Pomocí vhodného obrázku zjistíme, kde přibližně leží kořen. Ověření separačního intervalu $\langle 0, 2 \rangle$ a toho, že lze použít Newtonovu metodu pro spojitou funkci $f(x) = \cos(x) - x$ na intervalu $\langle 0, 2 \rangle$:

1. $f(0) = 1 > 0, f(2) = \cos(2) - 2 < 0 \Rightarrow f(0) \cdot f(2) < 0.$
2. $f'(x) = -\sin(x) - 1 < 0 \forall x \in \langle 0, 2 \rangle$
3. $f''(x) = -\cos(x) = 0$ ve vnitřním bodě intervalu $\langle 0, 2 \rangle$, tedy podmínka nenulovosti druhé derivace na $\langle 0, 2 \rangle$ není splněna.

Zmenšíme separační interval – využijeme obrázku, zkusíme interval $\langle 0, 1 \rangle$:

1. $f(0) = 1 > 0, f(1) = \cos(1) - 1 \doteq -0.46 < 0 \Rightarrow f(0) \cdot f(1) < 0.$
2. $f'(x) = -\sin(x) - 1 < 0 \forall x \in \langle 0, 1 \rangle$
3. $f''(x) = -\cos(x) < 0 \forall x \in \langle 0, 1 \rangle,$
4. Zvolíme $x_0 = 1 : f''(1) \cdot f(1) > 0$



$$x_1 = 1 - \frac{\cos(1) - 1}{-\sin(1) - 1} \doteq 0.7503638679.$$

Posloupnost iterací je:

$$1; 0.7503638679; 0.7391128909; 0.7390851334; 0.7390851332,$$

$$|x_4 - x_3| = |0.7390851334 - 0.7390851332| = 2 \cdot 10^{-10}.$$

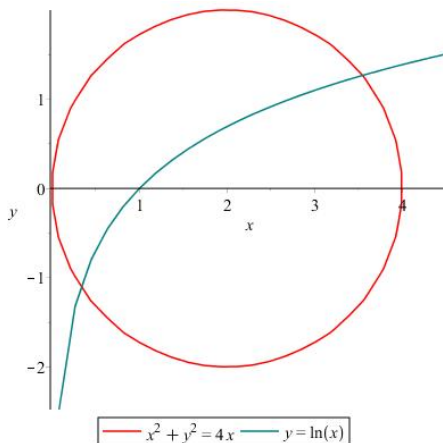
Tedy x_4 lze považovat za dostatečně přesnou aproximaci kořene.

- Pomocí vhodného obrázku zjistěte, kolik řešení má soustava rovnic

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &= 4x, \\ y &= \ln x.\end{aligned}$$

Vypočtěte dvě iterace Newtonovy metody pro to přibližné řešení, které má kladnou y -ovou souřadnici.

Řešení: Pomocí vhodného obrázku zjistíme, kde přibližně leží kořen.



$$F(x, y) = \begin{bmatrix} x^2 + y^2 - 4x \\ y - \ln x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Newtonova metoda:

$$\begin{aligned}DF(x_k)\Delta x_k &= -F(x_k) \\ x_{k+1} &= x_k + \Delta x_k\end{aligned}$$

$$DF(x) = \begin{bmatrix} 2x - 4 & 2y \\ -\frac{1}{x} & 1 \end{bmatrix}.$$

Zvolíme počáteční aproximaci například

$$x_0 = (e; 1).$$

1. iterace:

$$x_0 = [e, 1]^T, \quad DF(x_0) = \begin{bmatrix} 2e - 4 & 2 \\ -\frac{1}{e} & 1 \end{bmatrix}, \quad F(x_0) = \begin{bmatrix} e^2 - 4e + 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Gaussova eliminace:

$$\begin{aligned}[DF(x_0)|-F(x_0)] &= \left[\begin{array}{cc|c} 2e-4 & 2 & -e^2+4e-1 \\ -\frac{1}{e} & 1 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 2e-4 & 2 & -e^2+4e-1 \\ 0 & \frac{2(e^2-2e+1)}{e} & -\frac{e^2-4e+1}{e} \end{array} \right] \\ \Delta x_1 &= \begin{bmatrix} 1.143509387 \\ 0.4206735944 \end{bmatrix} \Rightarrow x_1 = \begin{bmatrix} 3.861791215 \\ 1.420673594 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

2. iterace:

$$DF(x_1) = \begin{bmatrix} 3.146373560 & 2.897624868 \\ -0.2798622243 & 1 \end{bmatrix}, \quad F(x_1) = \begin{bmatrix} 1.484579989 \\ 0.069542473 \end{bmatrix}$$

$$\text{Gaussova eliminace} \Rightarrow x_2 = \begin{bmatrix} 3.573186780 \\ 1.276397812 \end{bmatrix}.$$

Pro kontrolu zkusme vypočítat hodnoty funkce $F(x_2)$:

$$F_1(x_2) = 0.104108019, \quad F_2(x_2) = 0.002939959.$$

Kdybychom vypočítali ještě jednu iteraci, dostali bychom

$$x_3 = \begin{bmatrix} 3.548165337 \\ 1.266455296 \end{bmatrix} \quad \text{a} \quad F_1(x_3) = 0.000724928, \quad F_2(x_3) = 0.000024633.$$

- Vypočtěte první iteraci Newtonovy metody pro soustavu nelineárních rovnic

$$f_1(x) = 16x_1^4 + 16x_2^4 + x_3^4 - 16 = 0,$$

$$f_2(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 3 = 0,$$

$$f_3(x) = x_1^3 - x_2 = 0,$$

kde $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Počáteční aproximaci volte $x_0 = (1; 1; 1)$.

Řešení:

$$F(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ f_3(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16x_1^4 + 16x_2^4 + x_3^4 - 16, \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 3, \\ x_1^3 - x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad F(x_0) = \begin{bmatrix} 17 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$J(x) = \begin{bmatrix} 64x_1^3 & 64x_2^3 & 4x_3^3 \\ 2x_1 & 2x_2 & 2x_3 \\ 3x_1^2 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad J(x_0) = \begin{bmatrix} 64 & 64 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Newtonova metoda:

$$J(x_k)\Delta x_k = -F(x_k)$$

$$x_{k+1} = x_k + \Delta x_k$$

První iterace Newtonovy metody, Gaussova eliminace

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 64 & 64 & 4 & -17 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 64 & 64 & 4 & -17 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 60 & 17 \end{array} \right]$$

$$\Delta x_0 = \begin{bmatrix} -\frac{17}{60} \\ -\frac{240}{17} \\ -\frac{80}{17} \end{bmatrix} \Rightarrow x_1 = x_0 + \Delta x_0 \doteq \begin{bmatrix} 0.93 \\ 0.79 \\ 1.28 \end{bmatrix}.$$

6.1.2 Aplikační příklady

- Ze základního kurzu fyzikální chemie víme, že nad ideálním roztokem těkavých látek je v rovnovážném stavu směs par, jejichž složení je dáno tzv. Raoultovým zákonem

$$py_i = x_i p_i^s(T)$$

ve kterém x_i a y_i představují molární zlomek i -té složky v kapalně, resp. parní fázi, $p_i^s(T)$ tlak nasycených par čisté složky i při teplotě systému T a p tlak systému. Při varu kapalného roztoku je plynná fáze nad kapalinou tvořena pouze parami rozpouštědla a Raoultův zákon lze použít k určení teploty varu roztoku o známém složení. Pro ideální směs dvou kapalin o složení $x_1, x_2 = 1 - x_1$ lze úlohu určení teploty varu zapsat v podobě nelineární rovnice

$$f(T) = p - x_1 p_1^s(T) - (1 - x_1) p_2^s(T) = 0$$

S použitím této rovnice určete teplotu varu equimolární směsi¹ cyklohexanu(1) a n -heptanu(2) za normálního tlaku. Pro tlak nasycených par složek lze v literatuře nalézt často používaný vztah - Antoineovu rovnici:

$$p_i^s = 1000e^{A - \frac{B}{C+T}}$$

Hodnoty konstant jsou pro jednotlivé složky $A_1 = 13.7377, B_1 = 2766.63, C_1 = -50.5, A_2 = 13.8744, B_2 = 2895.51, C_2 = -53.97$. Tlak je uveden v Pa, teplota v K.

¹equimolární směs je dvojsložková směs s $x_1 = x_2 = 0.5$

Řešení K určení teploty varu roztoku použijeme Newtonovu metodu pro 1 proměnnou ve tvaru

$$T_{i+1} = T_i - \frac{f(T_i)}{f'(T_i)}.$$

Pro výpočet přiblížení T k teplotě varu T_v je třeba v každé iteraci vyčíslit hodnotu funkce

$$f(T_i) = p - 1000x_1e^{A_1 - \frac{B_1}{C_1 + T_i}} - 1000x_2e^{A_2 - \frac{B_2}{C_2 + T_i}}$$

a její derivace podle teploty, f' . Tu můžeme vyčíslit numericky z definice derivace funkce, nicméně v případě, kdy lze získat analytický předpis pro derivaci funkce, je vhodnější použít tento předpis. Se znalostmi ze základního kurzu matematiky odvodíme, že

$$f'(T_i) = -1000 \left[\frac{x_1 B_1}{(C_1 + T_i)^2} e^{A_1 - \frac{B_1}{C_1 + T_i}} + \frac{(1 - x_1) B_2}{(C_2 + T_i)^2} e^{A_2 - \frac{B_2}{C_2 + T_i}} \right]$$

Jako počáteční odhad teploty varu použijeme teplotu varu čistého cyklohexanu, tj. 353.92 K. V tabulce jsou uvedeny výsledky jednotlivých iterací Newtonovy metody.

i	T_i	$f(T_i)$	$f'(T_i)$
1	353.9200	16547.09	-2620.3
2	360.2350	-1316.17	-3044.4
3	359.8027	-6.59	-3014.0
4	359.8005	-0.000168	-3013.8
5	359.8005	$1.16 \cdot 10^{-10}$	-3013.8

Teplota varu equimolární směsi cyklohexanu a n -heptanu je 359.80 K, tj. 86.65 °C.

- Raoultův zákon (viz předchozí příklad) lze také použít k určení teploty kondenzace par o známém složení (tzv. rosného bodu směsi). Úloha hledání rosného bodu dvojsložkové směsi o složení y_1, y_2 je formulována jako soustava 2 rovnic pro 2 neznámé: teplotu rosného bodu, T_r a složení kapalně fáze x_1 .

$$f_1(x_1, T) = py_1 - x_1 p_1^s(T) = 0$$

$$f_2(x_1, T) = py_2 - (1 - x_1) p_2^s(T) = 0$$

Určete teplotu rosného bodu equimolární směsi par cyklohexanu(1) a n -heptanu(2) za atmosférického tlaku.

Řešení Pro vyřešení úlohy je třeba určit hodnotu teploty rosného bodu T a složení rovnovážné kapalně fáze x_1 . K hledání těchto hodnot, které by splnily podmínku $f_1 = f_2 = 0$ použijeme Newtonovu metodu ve tvaru

$$\begin{bmatrix} \frac{df_1}{dx_1}(x_{1,i}, T_i) & \frac{df_1}{dT}(x_{1,i}, T_i) \\ \frac{df_2}{dx_1}(x_{1,i}, T_i) & \frac{df_2}{dT}(x_{1,i}, T_i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_{1,i} \\ \Delta T_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f_1(x_{1,i}, T_i) \\ -f_2(x_{1,i}, T_i) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_{1,i+1} \\ T_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{1,i} \\ T_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta x_{1,i} \\ \Delta T_i \end{bmatrix}.$$

Derivace v matici na levé straně první rovnice, tzv. Jaccobiho matici, vyřešíme analyticky derivováním funkcí f_1 a f_2 :

$$\begin{aligned} \frac{df_1}{dx_1}(x_1, T) &= -1000e^{A_1 - \frac{B_1}{C_1 + T}} & \frac{df_1}{dT}(x_1, T) &= -1000 \frac{x_1 B_1}{(C_1 + T)^2} e^{A_1 - \frac{B_1}{C_1 + T}} \\ \frac{df_2}{dx_1}(x_1, T) &= 1000e^{A_2 - \frac{B_2}{C_2 + T}} & \frac{df_2}{dT}(x_1, T) &= -1000 \frac{(1 - x_1) B_2}{(C_2 + T)^2} e^{A_2 - \frac{B_2}{C_2 + T}} \end{aligned}$$

Jako první odhad řešení volíme např. $x_{1,0} = 0.5$, $T_0 = 353.92$ K. Výsledky jednotlivých iteračních kroků shrnuje následující tabulka. Jako kritérium konvergence metody je zvolena norma vektoru $\vec{f}$.

i	$\begin{bmatrix} x_{1,i} \\ T_i \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} f_1(x_{1,i}, T_i) \\ f_2(x_{1,i}, T_i) \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{df_1}{dx_1}(x_{1,i}, T_i) & \frac{df_1}{dT}(x_{1,i}, T_i) \\ \frac{df_2}{dx_1}(x_{1,i}, T_i) & \frac{df_2}{dT}(x_{1,i}, T_i) \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \Delta x_{1,i} \\ \Delta T_i \end{bmatrix}$	$\ \vec{f}\ $
0	$\begin{bmatrix} 0.5 \\ 353.92 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -61.53 \\ 16608.6 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -101448.1 & -1524.3 \\ 68107.8 & -1097.0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.118 \\ 7.817 \end{bmatrix}$	16609
1	$\begin{bmatrix} 0.382 \\ 361.737 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1944.0 \\ -3129.5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -127557.0 & -1391.43 \\ 87032.77 & -1644.36 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.023 \\ -0.695 \end{bmatrix}$	3684
2	$\begin{bmatrix} 0.405 \\ 361.042 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 49.94 \\ -51.38 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -125044.0 & -1452.0 \\ 85198.7 & -1557.3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4.8 \cdot 10^{-4} \\ 6.8 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix}$	71.7
3	$\begin{bmatrix} 0.405 \\ 361.035 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.01 \\ -0.01 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -125020.0 & -1453.5 \\ 85180.9 & -1555.8 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 9.6 \cdot 10^{-8} \\ -7.8 \cdot 10^{-7} \end{bmatrix}$	0.014

Rosný bod ekvimolární směsi cyklohexanu a n -heptanu je 361.04 K, tedy 87.89 °

6.2 Příklady k procvičení

- Vypočtěte první dvě iterace Newtonovy metody pro soustavu nelineárních rovnic

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 &= 3xy, \\ e^x &= 2y. \end{aligned}$$

Jako počáteční aproximaci volte $x_0 = (-1; 1)$.

- Vypočtěte první dvě iterace Newtonovy metody pro soustavu nelineárních rovnic

$$\begin{aligned} f_1(\mathbf{x}) &= x_1^3 + x_2 - 1 = 0, \\ f_2(\mathbf{x}) &= x_2^3 - x_1 + 1 = 0, \end{aligned}$$

Jako počáteční aproximaci volte $\mathbf{x}_0 = (0.5; 0.5)$.

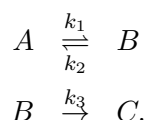
Výsledky cvičení

7. Fázové portréty soustav lineárních DR

7.1 Řešené příklady

7.1.1 Aplikační příklady

- Chemická reakce probíhá podle schématu



Vývoj koncentrací suroviny (A) a meziprojektu (B) v čase lze popsat soustavou LDR

$$\begin{aligned} \frac{dc_A}{d\tau} &= -k_1 c_A + k_2 c_B \\ \frac{dc_B}{d\tau} &= k_1 c_A - (k_2 + k_3) c_B \end{aligned}$$

Vyšetřete fázový portrét soustavy pro libovolné kladné, nenulové hodnoty rychlostních konstant k_1, k_2, k_3 .

Řešení: Matice soustavy má tvar

$$A = \begin{bmatrix} -k_1 & k_2 \\ k_1 & -(k_2 + k_3) \end{bmatrix}.$$

Fázový portrét soustavy je závislý na hodnotě determinantu matice A a stopy matice A .

$$\det A = -k_1(-k_2 - k_3) - k_2 k_1 = k_1 k_2 + k_1 k_3 - k_2 k_1 = k_1 k_3,$$

$$\operatorname{tr} A = k_1 - (k_2 + k_3)$$

Pro určení typu fázového portréту je třeba rozhodnout o hodnotách $\det A$ a $\operatorname{tr} A$.

Jelikož hodnoty rychlostních konstant reakcí k_1, k_2, k_3 jsou ze své podstaty kladná čísla, je i determinant matice A , $\det A > 0$.

Stejným způsobem zjistíme, že stopa matice, $\operatorname{tr} A$ je záporné reálné číslo.

Zbývá rozhodnout, zda je hodnota $\det A$ leží na diagramu $\operatorname{tr} A - \det A$ nad, pod, nebo na parabole dané rovnicí $\frac{\operatorname{tr} A^2}{4}$. Hledejme hodnoty rychlostních konstant takové, že $\det A = \frac{\operatorname{tr} A^2}{4}$.

$$\det A = \frac{\operatorname{tr} A^2}{4} \quad \Rightarrow \quad k_1 k_3 = \frac{(k_1 - k_2 - k_3)^2}{4}$$

$$4k_1 k_3 = k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + 2k_1 k_2 + 2k_1 k_3 + 2k_2 k_3$$

Tato rovnice má jediné řešení, $k_1 = k_2 = k_3 = 0$. Pro případ kladných rychlostních konstant platí, že $\det A < \frac{\operatorname{tr} A^2}{4}$. Fázovým portrétem soustavy je tedy stabilní uzel.

Poznámka. Zamysleme se nad polohou tohoto uzlu na diagramu $c_A - c_B$. První reakce je rovnovážná a po dostatečně dlouhé době bude koncentrace složky A rovnovážná ke koncentraci složky B. Jelikož je druhá reakce nevratná, bude probíhat do naprostého vyčerpání složky B a tedy stabilní uzel má souřadnice $c_A(\infty) = c_B(\infty) = 0$.

7.2 Příklady k procvičení

1. Pohybová rovnice tělesa na kmitající pružině je lineární diferenciální rovnicí 2. řádu

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - b\frac{dx}{dt},$$

kde k je tuhost pružiny a b koeficient tlumení pružiny. Rovnice lze rozepsat jako soustavu lineárních diferenciálních rovnic pro polohu a rychlost pohybu tělesa

$$\frac{dx}{dt} = v$$

$$\frac{dv}{dt} = -kx - bv.$$

Vyšetřete fázový portrét soustavy a najděte obecné řešení pro $x(t)$ a $v(t)$ pro pružinu s tuhostí $k = 1 \text{ s}^{-1}$ pokud:

- (a) kmitání není tlumené, tj. $b = 0$
- (b) kmitání je tlumené s koeficientem tlumení $b = 0.5$.

Výsledky cvičení

8. Fázové portréty soustav nelineárních DR

8.1 Řešené příklady

8.1.1 Úlohy na kreslení fázových portrétů nelineárních soustav

- Nakreslete fázový portrét soustavy

$$\begin{aligned}x' &= y^2 - x^2, \\y' &= x^2 - 1.\end{aligned}$$

Klasifikujte všechny rovnovážné stavy.

Řešení: Rovnovážné stavy:

$$y^2 - x^2 = (y - x)(y + x) = 0 \wedge x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1) = 0 \Rightarrow$$

System má čtyři rovnovážné stavy:

$$S_1 = (1; 1), S_2 = (-1; 1), S_3 = (-1; -1), S_4 = (1; -1).$$

Jacobiho matice $J(x, y) = \begin{bmatrix} -2x & 2y \\ 2x & 0 \end{bmatrix}$. Dosadíme rovnovážné stavy:

1.

$$S_1 = (1; 1), \quad J(S_1) = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix},$$

Charakteristická rovnice $\lambda^2 + 2\lambda - 4 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -1 \pm \sqrt{5}$ sedlo.

Vlastní vektory:

$$\vec{h}(\lambda_1) = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \end{bmatrix}, \quad \vec{h}(\lambda_2) = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \end{bmatrix}.$$

2.

$$S_2 = (-1; 1), \quad J(S_2) = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix},$$

Charakteristická rovnice $\lambda^2 - 2\lambda + 4 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{3}i$ nestabilní ohnisko.

3.

$$S_3 = (-1; -1), \quad J(S_3) = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix},$$

Charakteristická rovnice $\lambda^2 - 2\lambda - 4 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{5}$ sedlo.

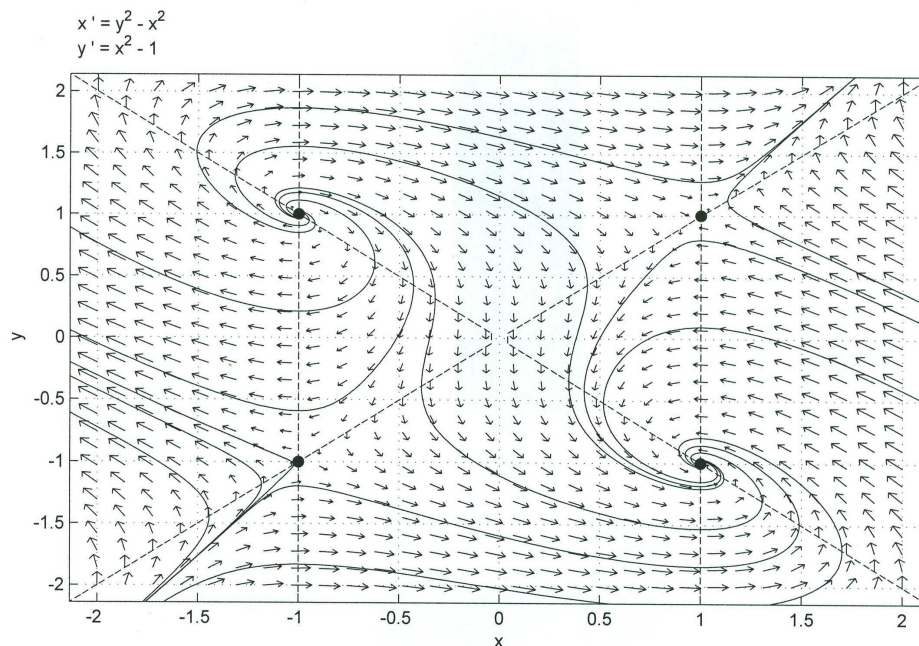
Vlastní vektory:

$$\vec{h}(\lambda_1) = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \end{bmatrix}, \quad \vec{h}(\lambda_2) = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \end{bmatrix}.$$

4.

$$S_4 = (1; -1), \quad J(S_4) = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix},$$

Charakteristická rovnice $\lambda^2 + 2\lambda + 4 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -1 \pm \sqrt{3}i$ stabilní ohnisko.



Obrázek 8.1: Výsledný fázový portrét z příkladu 1.

- Nakreslete fázový portrét soustavy

$$\begin{aligned} x' &= y^2 - x - 2, \\ y' &= x^2 - 3. \end{aligned}$$

Klasifikujte všechny rovnovážné stavy.

Řešení: Stacionární stavy: $x^2 - 3 = 0 \wedge y^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow$

$$\begin{aligned} S_1 &= (\sqrt{3}; \sqrt{\sqrt{3} + 2}), & S_2 &= (\sqrt{3}; -\sqrt{\sqrt{3} + 2}) \\ S_3 &= (-\sqrt{3}; -\sqrt{2 - \sqrt{3}}), & S_4 &= (-\sqrt{3}; \sqrt{2 - \sqrt{3}}). \end{aligned}$$

$$J(x, y) = \begin{bmatrix} -1 & 2y \\ 2x & 0 \end{bmatrix}.$$

1.

$$S_1 = \left(\sqrt{3}; \sqrt{\sqrt{3}+2} \right), \quad J(S_1) = \begin{bmatrix} -1 & 2\sqrt{\sqrt{3}+2} \\ 2\sqrt{3} & 0 \end{bmatrix}$$

Charakteristická rovnice: $\lambda^2 + \lambda - 4\sqrt{3(\sqrt{3}+2)} = 0 \Rightarrow$

$$\lambda_1 \doteq 3.1925, \vec{h}_1 \doteq \begin{bmatrix} -0.67769 \\ -0.73535 \end{bmatrix}, \quad \lambda_2 \doteq -4.1925, \vec{h}_2 \doteq \begin{bmatrix} -0.77089 \\ 0.63697 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{sedlo}.$$

2.

$$S_2 = \left(\sqrt{3}; -\sqrt{\sqrt{3}+2} \right), \quad J(S_2) = \begin{bmatrix} -1 & -2\sqrt{\sqrt{3}+2} \\ 2\sqrt{3} & 0 \end{bmatrix}$$

Charakteristická rovnice: $\lambda^2 + \lambda + 4\sqrt{3(\sqrt{3}+2)} = 0 \Rightarrow$

$$\lambda_1 \doteq -0.5 + 3.6241i, \quad \lambda_2 \doteq -0.5 - 3.6241i \Rightarrow \text{stabilní ohnisko}.$$

3.

$$S_3 = \left(-\sqrt{3}; -\sqrt{2-\sqrt{3}} \right), \quad J(S_3) = \begin{bmatrix} -1 & -2\sqrt{2-\sqrt{3}} \\ -2\sqrt{3} & 0 \end{bmatrix},$$

Charakteristická rovnice: $\lambda^2 + \lambda - 4\sqrt{3(2-\sqrt{3})} = 0 \Rightarrow$

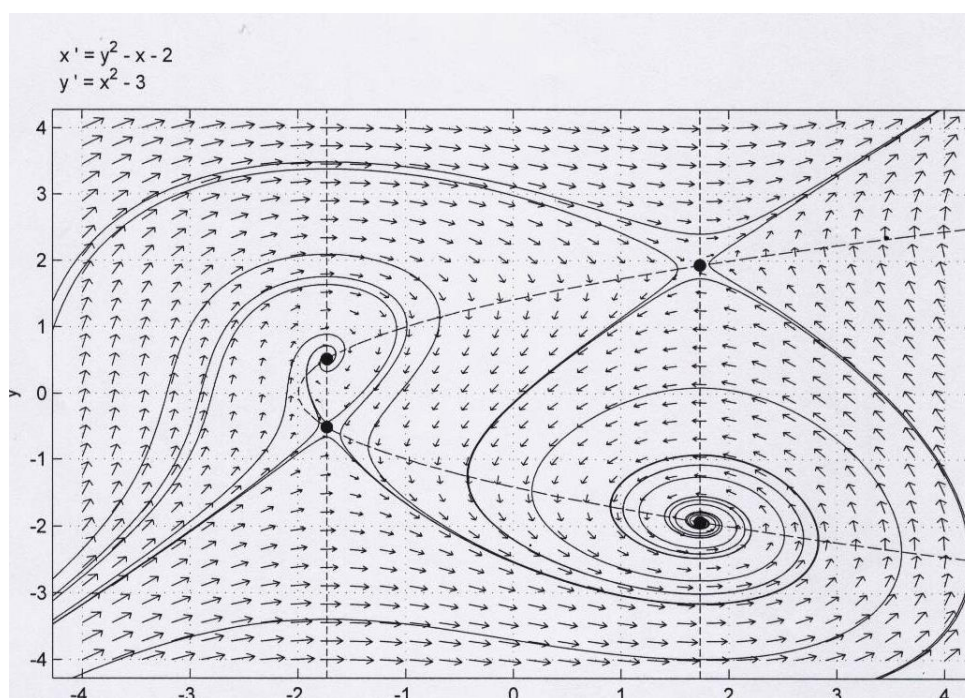
$$\lambda_1 \doteq 1.4586, \vec{h}_1 \doteq \begin{bmatrix} 0.38807 \\ -0.92163 \end{bmatrix}, \quad \lambda_2 \doteq -2.4586, \vec{h}_2 \doteq \begin{bmatrix} -0.57879 \\ -0.81548 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{sedlo}.$$

4.

$$S_4 = \left(-\sqrt{3}; \sqrt{2-\sqrt{3}} \right), \quad J(S_4) = \begin{bmatrix} -1 & 2\sqrt{2-\sqrt{3}} \\ -2\sqrt{3} & 0 \end{bmatrix},$$

Charakteristická rovnice: $\lambda^2 + \lambda + 4\sqrt{3(2-\sqrt{3})} = 0 \Rightarrow$

$$\lambda_1 \doteq -0.5 + 1.8266i, \quad \lambda_2 \doteq -0.5 - 1.8266i \Rightarrow \text{stabilní ohnisko}.$$



Obrázek 8.2: Výsledný fázový portrét z příkladu 2.

8.1.2 Aplikační příklady

- Jaderný reaktor v Černobylu byl typu LWGR (chlazený lehkou vodou, moderovaný grafitem). Jednou z charakteristik tohoto reaktoru je, že chladicí voda v něm působí jako pohlcovač neutronů a tím se podílí na regulaci výkonu reaktoru. Během havárie v Černobylu byl jako jedna z příčin identifikován nárůst tvorby páry (objemového zlomku páry) v aktivní zóně v důsledku snížení průtoku chladicí vody okruhem a následná odezva reaktoru ve formě nárůstu výkonu. Ve zjednodušené formě lze chování reaktoru regulovaného vodou popsat soustavou diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned}\frac{dP}{d\tau} &= (k_1 + \phi)P \\ \frac{d\phi}{d\tau} &= k_3P - k_4 \frac{\phi}{1-\phi},\end{aligned}$$

ve které P značí výkon reaktoru v MW, ϕ objemový zlomek páry v reaktoru, konstanty k_1 a k_2 regulační konstanty reaktoru a vody, a k_3 a k_4 se vztahují k rychlosti generování páry a průtoku chladicí vody reaktorem. Vyšetřete fázový diagram soustavy rovnic pro hodnoty konstant $k_1 = -0.05$; $k_2 = 0.25$; $k_3 = 1/5940$; $k_4 = 0.134$ a diskutujte chování reaktoru pro různé stavy $[P, \phi]$ v době poklesu průtoku vody.

Řešení: Pro vyšetření fázového portrétní soustavy

$$\begin{aligned}\frac{dP}{d\tau} &= f_1(P, \phi) = (k_1 + \phi k_2)P \\ \frac{d\phi}{d\tau} &= f_2(P, \phi) = k_3P - k_4 \frac{\phi}{1-\phi}\end{aligned}$$

je třeba nalézt vlastní čísla a vektory Jacobiho matice soustavy

$$J = \begin{bmatrix} \frac{df_1(P, \phi)}{dP} & \frac{df_1(P, \phi)}{d\phi} \\ \frac{df_2(P, \phi)}{dP} & \frac{df_2(P, \phi)}{d\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (k_1 + k_2\phi) & k_2P \\ k_3 & \frac{-k_4}{(1-\phi)^2} \end{bmatrix}$$

v okolí stacionárních stavů $f_1(P, \phi) = f_2(P, \phi) = 0$. Pro zadané hodnoty parametrů k_1, k_2, k_3, k_4 určíme polohu stacionárních stavů řešením soustavy nelineárních rovnic

$$\begin{aligned}0 &= (-0.05 + 0.25\phi)P \\ 0 &= \frac{P}{5940} - 0.134 \frac{\phi}{1-\phi}\end{aligned}$$

Soustavu řešíme např. Newtonovou metodou. Hodnoty P a ϕ nejsou neomezené, pro výkon reaktoru platí $P \geq 0$ a pro objemový zlomek páry v reaktoru $\phi \in (0; 1)$. Řešení soustavy hledáme v této podmnožině R^2 . Zjistíme, že soustava má 2 rovnovážné stavy $S_1 = (0; 0)$ a $S_2 = (200; 0.2)$. Nyní určíme vlastní čísla a vektory Jacobiho matice v jednotlivých stacionárních stavech. Pro výpočet vlastních čísel vyjdeme ze vztahu $\det|J - \lambda E| = 0$. Pro stacionární stav $S_1 = (0; 0)$ řešíme rovnici

$$\det|J - \lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & 50 \\ \frac{1}{5940} & -0.2104 - \lambda \end{vmatrix}$$

$$\det|J - \lambda E| = (-0.05 - \lambda)(-0.134 - \lambda) = \lambda^2 + 0.1847\lambda + 0.006734 = 0$$

Řešením kvadratické rovnice zjistíme, že Jacobiho matice má 2 záporná vlastní čísla $\lambda_1 =$

-0.05 , $\lambda_2 = -0.1347$. Fázovým portrétem soustavy, jejíž Jacobiho matice má různá záporná reálná vlastní čísla je stabilní uzel. V okolí stacionárního stavu S_1 je tedy fázovým portrétem soustavy stabilní uzel.

Pro stacionární stav $S_2 = (200; 0.2)$ řešíme rovnici

$$\det|J - \lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 \\ \frac{1}{5940} & -0.2104 - \lambda \end{vmatrix}$$

$$\det|J - \lambda E| = (-\lambda)(-0.2104 - \lambda) = \lambda^2 + 0.2104\lambda = 0$$

Jacobiho matice má 2 vlastní čísla $\lambda_1 = 0.0334$, $\lambda_2 = -0.2448$ s opačným znaménkem. Fázovým portrétem takové soustavy je sedlo. Vlastní vektory Jacobiho matice jsou separatrix sedla. Vlastní vektor příslušející vlastnímu číslu λ_1 získáme řešením soustavy

$$|J - \lambda_1 E| \vec{h}_1 = 0$$

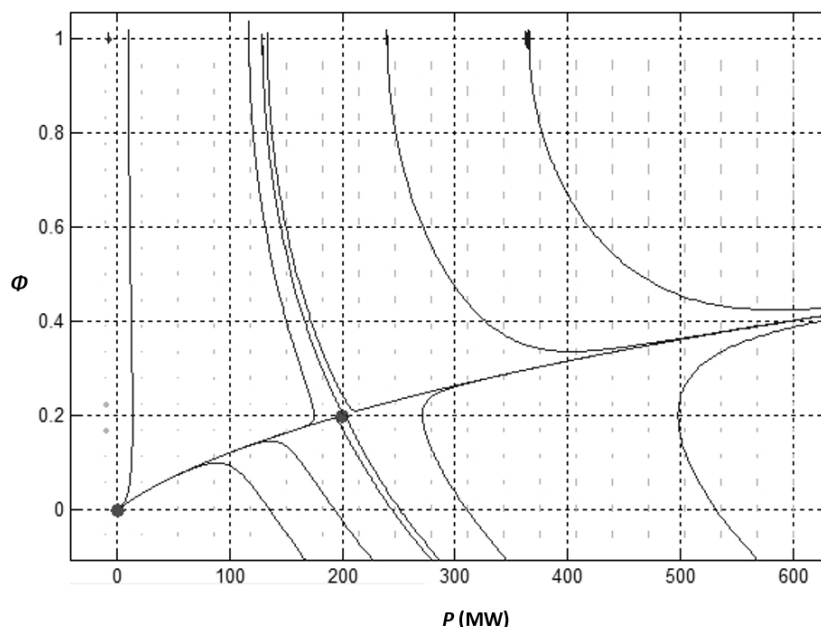
Determinant matice $|J - \lambda_1 E|$ je roven 0, matice je singulární. Řešení soustavy získáme zavedením parametru např. $h_{1,1} = t$ a řešením 2. rovnice soustavy

$$\frac{t}{5940} + (-0.2104 - 0.0334)h_{2,2} = 0$$

Řešením rovnice získáme $h_{1,2} = 0.0007t$, vlastní vektor Jacobiho matice je $\vec{h}_1 = [t, 0.0007t]^T$. Pro $t = 1$ tedy $\vec{h}_1 = [1, 0.0007]^T$.

Stejným postupem určíme vlastní vektor příslušející k vlastnímu číslu $\lambda_2 = -0.2448$: $\vec{h}_2 = [1, -0.0049]^T$.

V okolí stacionárního stavu S_2 je tedy fázovým portrétem soustavy sedlo se separatrix určenými vektory $\vec{h}_1$ a $\vec{h}_2$. Výsledný fázový portrét je vykreslen na obr. 8.3.



Obrázek 8.3: Fázový portrét soustavy

Stacionární stav S_1 je stabilním stavem; jeho poloha odpovídá samovolnému odstavení reaktoru. Stacionární stav S_2 je nestabilní; separatrix se směrovým vektorem $\vec{h}_2$ pomyslně dělí podmínky v reaktoru na ty, které povedou k samovolnému odstavení reaktoru (stav S_1) a ty, které povedou k nekontrolované štěpné reakci.

8.2 Příklady k procvičení

1. Nakreslete fázový portrét soustavy

$$\begin{aligned}x' &= 5 - x^2 + y^2, \\y' &= 4 - y^2\end{aligned}$$

a klasifikujte všechny rovnovážné stavy.

2. Nakreslete fázový portrét soustavy

$$\begin{aligned}x' &= -x^2 + y + 2, \\y' &= 3 - y^2\end{aligned}$$

a klasifikujte všechny rovnovážné stavy.

Výsledky cvičení

9. Základy vektorové analýzy

9.1 Řešené příklady

9.1.1 Úlohy na vektorovou analýzu

- Je dáno vektorové pole $\vec{F}(x, y, z) = (2xz, 2yz^2, x^2 + 2y^2z - 1)$. Vypočítejte $\text{rot}\vec{F}$. Je vektorové pole $\vec{F}$ potenciální? Pokud ano, najděte jeho potenciál $\varphi = \varphi(x, y, z)$.

Řešení:

$$\vec{F}(x, y, z) = (2xz, 2yz^2, x^2 + 2y^2z - 1). \quad D(\vec{F}) = \mathbb{R}^3,$$

$\mathbb{R}^3$ je jednoduše souvislá oblast.

$$\text{rot}\vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \left[\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, -\frac{\partial F_3}{\partial x} + \frac{\partial F_1}{\partial z}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right]$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial y} &= 0 & \frac{\partial F_1}{\partial z} &= 2x & \frac{\partial F_1}{\partial x} &= 2z \\ \frac{\partial F_2}{\partial y} &= 2z^2 & \frac{\partial F_2}{\partial z} &= 4yz & \frac{\partial F_2}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial F_3}{\partial y} &= 4yz & \frac{\partial F_3}{\partial z} &= 2y^2 & \frac{\partial F_3}{\partial x} &= 2x \end{aligned}$$

$$\text{rot}\vec{F} = [4yz - 4yz, -2x + 2x, 0] = [0, 0, 0].$$

Protože na jednoduše souvislé množině $\mathbb{R}^3$ platí

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial F_3}{\partial z} = \frac{\partial F_2}{\partial y} = 4yz,$$

je vektorové pole $\vec{F}$ potenciální na $\mathbb{R}^3$.

$$\varphi(x, y, z) = \int 2xz dx = zx^2 + \alpha(y, z),$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 2yz^2 \Rightarrow \alpha(y, z) = \int 2yz^2 dy = y^2 z^2 + \beta(z),$$

$$\varphi(x, y, z) = x^2 + y^2 z^2 + \beta(z)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = x^2 + 2y^2 z + \beta'(z) = x^2 + 2y^2 z - 1 \Rightarrow \beta'(z) = -1, \quad \beta(z) = -z + C.$$

Potenciál $\vec{F}$ na $\mathbb{R}^3$:

$$\varphi(x, y, z) = zx^2 + y^2 z^2 - z + C, \quad C \in \mathbb{R} \text{ je konstanta.}$$

- a) Určete a nakreslete definiční obor $\mathcal{D}$ skalárního pole $f(x, y) = 2x^2 \ln y^3$. Vypočtěte $\text{grad} f(x, y)$, $\Delta f(x, y)$ a vyčíslete $\text{grad} f(1, 1)$, $\Delta f(1, 1)$.
Je množina $\mathcal{D}$ jednoduše souvislá?
- b) Určete definiční obor $\mathcal{G}$ vektorového pole

$$\vec{v}(x, y, z) = (x + e^{2y}, 2 \ln(xz), \arctan(yz)) .$$

Vypočtěte $\text{div} \vec{v}$ a $\text{rot} \vec{v}$ a vyčíslete je v bodě $(1; 0; 1)$. Je vektorové pole $\vec{v}$ potenciální na $\mathcal{G}$?

Řešení: a) $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \in \mathbb{R}, y > 0\}$, $\mathcal{D}$ je jednoduše souvislá + obrázek.

$$\text{grad} f(x, y) = \left[4x \ln y^3, \frac{6x^2}{y} \right], \quad \text{grad} f(1, 1) = [0, 6] .$$

$$\Delta f(x, y) = 4 \ln y^3 - \frac{6x^2}{y^2}, \quad \Delta f(1, 1) = -6 .$$

b) $\mathcal{G} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, xz > 0, y \in \mathbb{R}\}$, $\mathcal{G}$ je jednoduše souvislá množina.

$$\text{div} \vec{v}(x, y, z) = \frac{1 + y^2 z^2 + y}{1 + y^2 z^2}, \quad \text{div} \vec{v}(1, 0, 1) = 1 .$$

$$\text{rot} \vec{v}(x, y, z) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x + e^{2y} & 2 \ln(xz) & \arctan(yz) \end{vmatrix} = \left[\frac{z}{1 + y^2 z^2} - \frac{2}{z}, 0, \frac{2}{x} - 2e^{2y} \right] .$$

$$\text{rot} \vec{v}(1, 0, 1) = [-1, 0, 0] .$$

Vektorové pole $\vec{v}$ není potenciální na $\mathcal{G}$, protože např.

$$\frac{\partial v_1}{\partial y} = 2 \exp(2y) \neq \frac{\partial v_2}{\partial x} = \frac{2}{x} .$$

- Vypočtěte gradient skalárního pole

$$f(\vec{r}) = \frac{\vec{b} \cdot (\vec{r} \times \vec{a})}{\|\vec{r}\|},$$

kde $\vec{r} = (x, y, z)$ a $\vec{a}, \vec{b}$ jsou konstantní nenulové vektory z $\mathbb{R}^3$.

Řešení: Zavedme značení $\vec{a} = [a_1, a_2, a_3]$ a $\vec{b} = [b_1, b_2, b_3]$ a vypočtěme nejdříve

$$\vec{r} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} a_3 y - a_2 z \\ a_1 z - a_3 x \\ a_2 x - a_1 y \end{bmatrix}^T$$

a následně

$$\vec{b} \cdot (\vec{r} \times \vec{a}) = b_1(a_3 y - a_2 z) + b_2(a_1 z - a_3 x) + b_3(a_2 x - a_1 y) .$$

Označme nyní $\vec{c} = [c_1, c_2, c_3] = [b_3 a_2 - b_2 a_3, b_1 a_3 - b_3 a_1, b_2 a_1 - b_1 a_2] \in \mathbb{R}^3$. S tímto značením můžeme přepsat skalární pole $f(\vec{r})$ jako

$$f(\vec{r}) = \frac{\vec{b} \cdot (\vec{r} \times \vec{a})}{\|\vec{r}\|} = \frac{\vec{c} \cdot \vec{r}}{\|\vec{r}\|}, \quad \vec{r} = [x, y, z], \vec{c} \in \mathbb{R}^3 .$$

Jelikož je $\vec{c}$ konstantní vektor, platí,

$$\nabla f(\vec{r}) = \nabla \left(\frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|} \right) \cdot \vec{c}.$$

Nyní si uvědomme, že $\vec{r}$ je vektorové pole a $\|\vec{r}\|$ je pole skalární a tedy

$$\nabla (\vec{r} \|\vec{r}\|^{-1}) = \|\vec{r}\|^{-1} \nabla \vec{r} + \nabla (\|\vec{r}\|^{-1}) \otimes \vec{r}.$$

Jednoduchým výpočtem se lze přesvědčit, že $\nabla \vec{r} = E$. Funkci $\|\vec{r}\|^{-1} = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ derivujeme jako složenou a získáme,

$$\nabla (\|\vec{r}\|^{-1}) = -\frac{[x, y, z]}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = -\frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|^3}.$$

Dosadíme-li do předposlední rovnosti, obdržíme,

$$\nabla (\vec{r} \|\vec{r}\|^{-1}) = \frac{E}{\|\vec{r}\|} - \frac{\vec{r} \otimes \vec{r}}{\|\vec{r}\|^3}.$$

Poznámka: Symbol $\otimes$ reprezentuje tenzorový součin, který lze v případě dvou řádkových vektorů $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$ zapsat jako $\vec{a} \otimes \vec{b} = \vec{a}^T \vec{b} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Rozepíšeme-li tedy člen $\vec{r} \otimes \vec{r}$, získáme,

$$\vec{r} \otimes \vec{r} = \begin{bmatrix} x^2 & xy & xz \\ yx & y^2 & yz \\ zx & zy & z^2 \end{bmatrix}.$$

Dosaďme nyní z výsledného vztahu pro $\nabla (\|\vec{r}\|^{-1})$ do rovnice pro $\nabla f(\vec{r})$. Po roznásobení závorky obdržíme,

$$\nabla f(\vec{r}) = \frac{\vec{c}}{\|\vec{r}\|} - \frac{1}{\|\vec{r}\|^3} (\vec{r} \otimes \vec{r}) \cdot \vec{c}$$

a po rozepsání v původních proměnných

$$\begin{aligned} \nabla f(\vec{r}) &= \frac{[b_3 a_2 - b_2 a_3, b_1 a_3 - b_3 a_1, b_2 a_1 - b_1 a_2]}{\|\vec{r}\|} - \dots \\ &\dots - \frac{1}{\|\vec{r}\|^3} \begin{bmatrix} (b_3 a_2 - b_2 a_3)x^2 + (b_1 a_3 - b_3 a_1)xy + (b_2 a_1 - b_1 a_2)xz \\ (b_3 a_2 - b_2 a_3)yx + (b_1 a_3 - b_3 a_1)y^2 + (b_2 a_1 - b_1 a_2)yz \\ (b_3 a_2 - b_2 a_3)zx + (b_1 a_3 - b_3 a_1)zy + (b_2 a_1 - b_1 a_2)z^2 \end{bmatrix}^T. \end{aligned}$$

9.1.2 Aplikační příklady

- Teplotní pole v okolí žhaveného drátu je v cylindrických souřadnicích zadáno funkcí $T(\rho, \theta, z) = \alpha \ln \rho$.

1. Z Fourierova zákona, $\vec{q} = -\kappa \nabla T$, vypočtete hustotu tepelného toku.
2. Ukažte, že „hustota vzniku tepla“ v ustáleném stavu, $p = \operatorname{div} \vec{q}$, je rovna nule pro $\rho > 0$.
3. Jaký je celkový tepelný přes hranici tělesa ohraničeného dvěma válcovými plochami zadanými rovnicemi $P_1 = (\rho_1, \theta, z)$, $P_2 = (\rho_2, \theta, z)$, kde $0 < \rho_1 < \rho_2$, $\theta \in \langle 0, 2\pi \rangle$, $z \in \langle z_1, z_2 \rangle$ a rovinami $z = z_1$ a $z = z_2$? Pozn: Hranice tělesa je orientována vnější jednotkovou normálou.

V cylindrických souřadnicích, (ρ, θ, z) , platí

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial \rho}, \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \theta}, \frac{\partial f}{\partial z} \right), \quad \nabla \cdot \vec{v} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial (\rho v_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z}.$$

Řešení: Zadané teplotní pole $T(\rho, \theta, z) = \alpha \ln \rho$ je definováno na oblasti $\Omega = (0, \infty) \times \langle -\pi, \pi \rangle \times \mathbb{R}$.

Nejprve ze zadaných vztahů pro cylindrické souřadnice vypočteme hustotu tepelného toku,

$$\vec{q} = \kappa \nabla T = \kappa \left(\frac{\partial T}{\partial \rho}, \frac{1}{\rho} \frac{\partial T}{\partial \theta}, \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \kappa \left(\frac{\alpha}{\rho}, 0, 0 \right), \quad \forall (\rho, \theta, z) \in \Omega.$$

Toto vektorové pole je zase definováno na oblasti Ω .

Nyní vypočteme hustotu vzniku tepla, $p = \nabla \cdot \vec{q}$,

$$p = \frac{1}{\rho} \frac{\partial (\rho q_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial q_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial q_z}{\partial z} = \frac{\kappa \alpha}{\rho} \frac{\partial (\rho/\rho)}{\partial \rho} + 0 + 0 = 0, \quad \forall (\rho, \theta, z) \in \Omega.$$

K výpočtu tepelného toku přes hranici tělesa můžeme s výhodou využít Gauss-Ostrogradského větu. Těleso tvoří omezenou oblast s Lipschitzovskou hranicí $\Omega_{\text{tel}} \subset \Omega$ a $\vec{q} \in C^\infty(\Omega_{\text{tel}}) \subset H^1(\Omega_{\text{tel}})$. Můžeme tedy označit celkový tepelný tok přes hranici studovaného tělesa Q a zapsat

$$Q = \iint_{\partial \Omega_{\text{tel}}} \vec{q} \cdot \vec{n} \, dS = \iiint_{\Omega_{\text{tel}}} p \, dV = \iiint_{\Omega_{\text{tel}}} 0 \, dV = 0.$$

Ve vztahu výše značíme $\partial \Omega_{\text{tel}}$ hranici tělesa Ω_{tel} a $\vec{n}$ vnější jednotkovou normálu k $\partial \Omega_{\text{tel}}$.

9.2 Příklady k procvičení

1. Aplikujte operátor divergence na vektorové pole

$$\vec{u}(\vec{r}) = \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|} = \frac{(x, y, z)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} =: \vec{r}_0$$

Pozn: $\vec{r}_0$ reprezentuje jednotkový vektor ve směru polohového vektoru.

2. Aplikujte Laplaceův operátor na skalární pole

$$f(\vec{r}) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} =: \|\vec{r}\|$$

3. Ukažte, že vektorové pole $\vec{F}$ je potenciální právě tehdy, když $\text{rot} \vec{F} = 0$.
4. Vypočtěte gradient skalárního pole

$$u(\vec{r}) = A \cos(\vec{\kappa} \cdot \vec{r} + \delta),$$

kde $\vec{r} = (x, y, z)$, $\vec{\kappa}$ je konstantní nenulový vektor z $\mathbb{R}^3$ a A a δ jsou nenulové konstanty.

5. Vypočtěte divergenci vektorového pole $\vec{u}(\vec{r})$ zadaného předpisem

$$(i) \quad \vec{u}(\vec{r}) = \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|^n} \quad (ii) \quad \vec{u}(\vec{r}) = \frac{\vec{a} \times \vec{r}}{\|\vec{r}\|^3}.$$

Uvažujte, že $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ je konstantní vektor.

6. Aplikujte operátor rotace na vektorové pole $\vec{u}(\vec{r})$ zadané předpisem

$$(i) \quad \vec{u}(\vec{r}) = \frac{\vec{v}}{\|\vec{r}\|} \quad (ii) \quad \vec{u}(\vec{r}) = \vec{a} \times \vec{r}.$$

Uvažujte, že $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ je konstantní vektor.

7.

Věta. Pro libovolné skalární pole f a vektorové pole $\vec{u}$ platí:

$$(a) \nabla \cdot \nabla f = \Delta f$$

$$(b) \nabla \operatorname{div} \vec{u} = \operatorname{rot} \nabla \times \vec{u} + \Delta \vec{u}$$

$$(c) \Delta \nabla f = \nabla \Delta f$$

$$(d) \Delta \operatorname{rot} \vec{u} = \nabla \times \Delta \vec{u}$$

$$(e) \operatorname{rot} \operatorname{grad} f = \vec{0}$$

$$(f) \nabla \cdot \nabla \times \vec{u} = 0$$

Dokažte jednotlivá tvrzení výše uvedené věty.

Výsledky cvičení

10. Plošný integrál

10.1 Řešené příklady

10.1.1 Úlohy na plochy a křivky

- Vypočítejme, popř. interpretujme integrál

$$\iint_T (9a - 3x - 3y) dx dy, \quad a > 0,$$

T je trojúhelník s vrcholy $A = [0, 0]$, $B = [0, 2a]$, $C = [a, a]$. Načrtněte T .

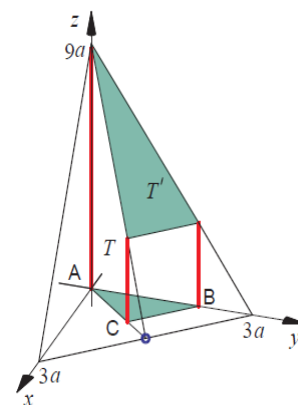
Řešení:

Integrační obor T je pro pevné meze pro x

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq x \leq a, x \leq y \leq 2a - x\}.$$

Podle Fubiniovy věty je

$$\begin{aligned} \iint_T f(x, y) dx dy &= 3 \int_0^a \int_x^{2a-x} (3a - x - y) dx dy = \\ &= 3 \int_0^a \left(\int_x^{2a-x} (3a - x - y) dy \right) dx = \\ &= 3 \int_0^a \left[3ay - xy - \frac{y^2}{2} \right]_x^{2a-x} dx = \\ &= 3 \int_0^a (2x^2 - 6ax + 4a^2) dx = 3 \left[\frac{2}{3}x^3 - 6a\frac{x^2}{2} + 4a^2x \right]_0^a \\ &= 5a^3. \end{aligned}$$



Protože funkce $f(x, y) = 9a - 3x - 3y$ je spojitá, kladná na T , vyjadřuje výsledek objem V tělesa T na obrázku. Jde o těleso, jehož průmět do roviny $z = 0$ je trojúhelník ABC , shora je těleso ohraničené grafem funkce $f(x, y)$.

Poznamenejme, že pro pevné meze y je integrační obor $\tilde{T}$

$$\tilde{T} = T_1 \cup T_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq y \leq a, 0 \leq x \leq y\} \cup \{a \leq y \leq 2a, 0 \leq x \leq 2a - y\}.$$

Jako cvičení můžete výpočtem ověřit, že výsledek je stejný.

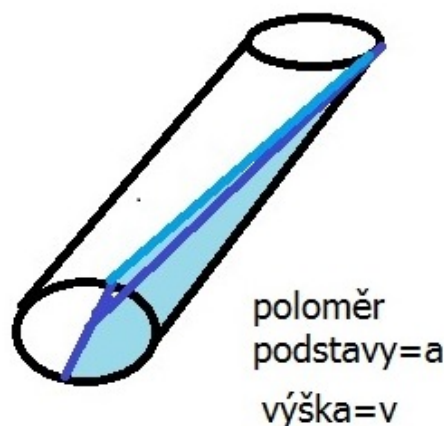
- Určete Jacobián zobrazení

$$x = \arctan \frac{u}{v}, \quad y = \frac{u^2 + v^2}{2}.$$

Řešení:

$$\det(J(u, v)) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{v}{v^2 + u^2} & \frac{-u}{v^2 + u^2} \\ u & v \end{vmatrix} = 1.$$

- Odvodíme, kolik ještě zbylo tekutiny ve sklenici tvaru válce o poloměru a a výšce v poté, co po vylití zůstala nakloněná tak, že v ní hladina prochází středem dna a dotýká se horního okraje stěny.



Řešení: Těleso T po vylití je množina

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, -a \leq x \leq a, 0 \leq y \leq \sqrt{a^2 - x^2}, 0 \leq z \leq \frac{v}{a}y\},$$

$$\begin{aligned} V(T) &= \int_T dx dy dz = 2 \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} \int_0^{\frac{v}{a}y} dz dy dx = \\ &= \frac{2v}{a} \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} y dy dx = \frac{v}{a} \int_0^a (a^2 - x^2) dx = \frac{2}{3} a^2 v. \end{aligned}$$

10.1.2 Úlohy na plošný integrál

- Vypočítejte plošný integrál

$$\iint_S \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} dS,$$

kde plocha S je zadána parametrizací $\Phi : D \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$\Phi(u, v) = \left(\frac{u}{v}, \frac{v}{u}, uv \right), \quad D = \langle 1, 2 \rangle \times \langle 1, 2 \rangle.$$

Řešení Tečné vektory:

$$\vec{e}_1 = (x_u, y_u, z_u) = \left(\frac{1}{v}, -\frac{v}{u^2}, v \right), \quad \vec{e}_2 = (x_v, y_v, z_v) = \left(-\frac{u}{v^2}, \frac{1}{u}, u \right).$$

Normálový vektor k ploše:

$$\vec{n} = \vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{1}{v} & -\frac{v}{u^2} & v \\ -\frac{u}{v^2} & \frac{1}{u} & u \end{vmatrix} = \left(-\frac{2v}{u}, -\frac{2u}{v}, 0 \right).$$

$$\begin{aligned}
|\vec{n}| &= \sqrt{\left(-\frac{2v}{u}\right)^2 + \left(-\frac{2u}{v}\right)^2} = 2 \cdot \sqrt{\frac{u^4 + v^4}{u^2 v^2}}, \quad dS = |\vec{n}| du dv. \\
\iint_S \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} dS &= \iint_{\langle 1,2 \rangle \times \langle 1,2 \rangle} \frac{uv}{\sqrt{\left(\frac{u}{v}\right)^2 + \left(\frac{v}{u}\right)^2}} \cdot 2 \cdot \sqrt{\frac{u^4 + v^4}{u^2 v^2}} du dv = \\
&= 2 \iint_{\langle 1,2 \rangle \times \langle 1,2 \rangle} \frac{uv}{\sqrt{\frac{u^4 + v^4}{u^2 v^2}}} \cdot \sqrt{\frac{u^4 + v^4}{u^2 v^2}} du dv = 2 \int_1^2 u du \cdot \int_1^2 v dv = \frac{9}{2}.
\end{aligned}$$

- Vypočtěte plošný integrál

$$\iint_S 2 dS,$$

kde plocha S je zadána parametrizací $\Phi : D \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$\Phi(u, v) = (u \cos(v), u \sin(v), u^2), \quad D = \langle 0, 3 \rangle \times \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle.$$

Řešení: Tečné vektory:

$$\vec{e}_1 = (x_u, y_u, z_u) = (\cos v, \sin v, 2u), \quad \vec{e}_2 = (x_v, y_v, z_v) = (-u \sin v, u \cos v, 0).$$

Normálový vektor k ploše:

$$\vec{n} = \vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos v & \sin v & 2u \\ -u \sin v & u \cos v & 0 \end{vmatrix} = (-2u^2 \cos v, -2u^2 \sin v, u).$$

$$|\vec{n}| = \sqrt{(-2u^2 \cos v)^2 + (-2u^2 \sin v)^2 + u^2} = u \sqrt{4u^2 + 1}, \quad dS = |\vec{n}| du dv.$$

$$\iint_{\langle 0,3 \rangle \times \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle} 2 dS = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dv \int_0^3 2u \sqrt{4u^2 + 1} du = \frac{\pi}{2} \cdot \int_0^3 2u \sqrt{4u^2 + 1} du =$$

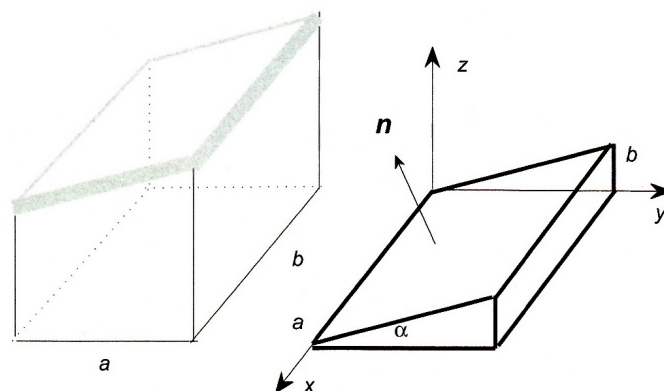
$$\left| \begin{array}{lcl} 4u^2 + 1 & = & w \\ 8u du & = & dw \\ u = 0 & \Rightarrow & w = 1 \\ u = 3 & \Rightarrow & w = 37 \end{array} \right| = \frac{\pi}{12} (37\sqrt{37} - 1).$$

10.1.3 Aplikační příklady

- Střecha budovy je pokryta sněhem (viz. obr) o plošné hustotě

$$\gamma = \frac{\gamma_0}{1 + c(y + z)}, \quad \gamma, c \text{ jsou konstanty.}$$

Vypočtěte celkovou hmotnost sněhové zátěže.



Obrázek 10.1: Střecha pokrytá sněhem – geometrie problému.

Řešení: Při výpočtu nehraje roli výška budovy, ale její půdorys a úhel sklonu střechy α , který je také dán. Rovnice střešní roviny je $z = ky$, $k = \tan \alpha$, takže pro normálový vektor platí

$$\mathbf{n} = (0, -k, 1), \quad n = \|\mathbf{n}\| = \sqrt{k^2 + 1}.$$

Hledanou hmotnost sněhu vyjádříme plošným integrálem skalárního pole:

$$m = \int_S \gamma(x, y, z) dS = \int_S \frac{\gamma_0}{1 + c(y + z)} dS = \gamma_0 \iint_D \frac{1}{c(k + 1)y} \sqrt{k^2 + 1} dx dy.$$

Integrační oblast $D = \langle 0, a \rangle \langle 0, b \rangle$. Dostaneme

$$m = \gamma_0 \sqrt{k^2 + 1} \int_0^a \int_0^b \frac{1}{c(k + 1)y} dx dy = a \gamma_0 \sqrt{k^2 + 1} \int_0^b \frac{1}{c(k + 1)y} dy$$

Substitucí vypočteme integrál a dostaneme výslednou hmotnost střešní zátěže:

$$m = \frac{a \gamma_0 \sqrt{k^2 + 1}}{c(k + 1)} \ln(1 + bc(k + 1)).$$

10.2 Příklady k procvičení

1. Množina M je ohraničena parabolou $y = 1 - ax^2$, $a > 0$, a osou x . Najděte parametr b tak, aby parabola $y = bx^2$ rozdělila M na dvě části stejného obsahu.
2. Určete Jacobián zobrazení, při němž v termodynamice místo daných souřadnic p (tlak), V (objem), používaných v $p - V$ diagramech, zavedete nové souřadnice x, y rovnicemi $x = pV, y = pV^\gamma$, kde konstanta $\gamma > 1$.
3. Odvoďte vzorec pro objem polokoule zadané parametrizací

$$\Omega : \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \cos \phi \sin \theta \\ r \sin \phi \sin \theta \\ r \cos \theta \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} r > 0 \\ \phi \in \langle 0, 2\pi \rangle \\ \theta \in \langle 0, \pi/2 \rangle \end{array}$$

Výsledky cvičení

11. Fourierovy řady a PDR

11.1 Úlohy na Fourierovy řady

11.1.1 Řešené příklady

- Rozviňte funkci $f(x) = x$, $x \in \langle 0, \pi \rangle$, $f(\pi) = 0$, v sinovou řadu.

Řešení: Funkci $f(x) = x$ rozvineme v sinovou Fourierovu řadu na $\langle -\pi, \pi \rangle$.

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx) &= \begin{cases} f(x) \\ \frac{1}{2}(f^+ + f^-) = 0 \Leftrightarrow f(\pi) = 0 \end{cases} \\ b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) dx, \\ b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin(nx) dx = \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{n} [-x \cos(nx)]_0^{\pi} + \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \cos(nx) dx \right) = \\ &= \frac{2}{\pi} \left(-\frac{(-1)^n \cdot \pi}{n} + \frac{1}{n^2} [\sin(nx)]_0^{\pi} \right) = -\frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{n} (-1)^n + \frac{2}{\pi} \cdot \underbrace{\frac{1}{n^2} [\sin(nx)]_0^{\pi}}_{=0} \Rightarrow \\ &\Rightarrow b_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}. \\ f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx). \end{aligned}$$

- Rozviňte funkci $f(x) = x^2$, $x \in \langle -\pi, \pi \rangle$ ve Fourierovu řadu.

Řešení: Funkce $f(x)$ je sudá na $\langle -\pi, \pi \rangle$, tedy platí $b_k = 0$ pro $k = 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned}a_0 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{3} \pi^2, \\ a_k &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(kx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos(kx) dx. \end{aligned}$$

Dvojitá aplikace metody per-partes dává

$$\int_0^{\pi} x^2 \cos(kx) dx = \underbrace{\frac{1}{k} [x^2 \sin(kx)]_0^{\pi}}_{=0} - \frac{2}{k} \int_0^{\pi} x \sin(kx) dx =$$

$$= -\frac{2}{k} \left(-\frac{1}{k} [x \cos(kx)]_0^\pi + \frac{1}{k} \int_0^\pi \cos(kx) dx \right) = \frac{2}{k^2} \pi \cos(k\pi) - \frac{2}{k^2} \cdot \frac{1}{k} \underbrace{\sin(k\pi)}_{=0}.$$

Protože $\cos k\pi = (-1)^k$, dostáváme $a_k = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{2}{k^2} \pi (-1)^k = \frac{4}{k^2} (-1)^k$.

Fourierova řada má tvar

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \left(-\cos x + \frac{\cos(2x)}{4} - \frac{\cos(3x)}{9} + \dots \right) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \cos(kx).$$

- Funkci $f(x) = \pi^2 - x^2$ rozviňte ve Fourierovu řadu na intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$.
Najděte součty řad

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$

Řešení: Funkce $f(x) = \pi^2 - x^2$ je sudá $\Rightarrow$ koeficienty $b_n = 0$.

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (\pi^2 - x^2) dx = \frac{2}{\pi} \left[\pi^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_0^\pi = \frac{4}{3} \pi^2,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (\pi^2 - x^2) \cos(nx) dx,$$

Vypočtěme jednotlivé integrály:

$$\int_0^\pi \cos(nx) dx = \left[\frac{1}{n} \sin(nx) \right]_0^\pi = 0,$$

$$\int x^2 \cos(nx) dx = \left| \begin{array}{ll} u = x^2 & v' = \cos(nx) \\ u' = 2x & v = \frac{1}{n} \sin(nx) \end{array} \right| = x^2 \frac{\sin(nx)}{n} - \frac{2}{n} \int x \sin(nx) dx,$$

$$\int x \sin(nx) dx = \left| \begin{array}{ll} u = x & v' = \sin(nx) \\ u' = 1 & v = -\frac{1}{n} \cos(nx) \end{array} \right| = -\frac{x}{n} \cos(nx) + \frac{1}{n} \int \cos(nx) dx =$$

$$-x \cdot \frac{\cos(nx)}{n} + \frac{1}{n^2} \sin(nx).$$

$$\int x^2 \cos(nx) dx = x^2 \frac{\sin(nx)}{n} + \frac{2x}{n^2} \cos(nx) - \frac{2}{n^3} \sin(nx).$$

Protože $\sin(n\pi) = 0$ a $\cos(n\pi) = (-1)^n$, dostáváme

$$a_n = -\frac{2}{\pi} \left[x^2 \frac{\sin(nx)}{n} + \frac{2x}{n^2} \cos(nx) - \frac{2}{n^3} \sin(nx) \right]_0^\pi = -\frac{2}{\pi} \left(\frac{2}{n^2} \pi (-1)^n \right) = \frac{4}{n^2} (-1)^{n+1}.$$

Funkce je spojitá, a tedy na $\langle -\pi, \pi \rangle$ je

$$\pi^2 - x^2 = \frac{2}{3} \pi^2 + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \cos(nx).$$

$$x = 0 \Rightarrow 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \pi^2 - 0 - \frac{2}{3} \pi^2 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

$$x = \pi \Rightarrow 0 = \frac{2}{3} \pi^2 - 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

11.1.2 Příklady k procvičení

1. Rozviňte funkci $f(x) = x, x \in \langle 0, \pi \rangle$ v kosinovou řadu. Konverguje vzniklá kosinová řada, ϕ_f , k f na $\langle 0, \pi \rangle$ stejnoměrně? Můžeme mluvit o konvergenci na celém $\mathbb{R}$? Odpovědi zdůvodněte.

2. Rozviňte funkci

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t \in \langle -1, 0 \rangle \\ t, & t \in \langle 0, 1 \rangle \end{cases}$$

ve Fourierovu řadu. Určete hodnotu tohoto rozvoje v bodě $t = -7$.

3. Rozviňte funkci

$$f(x) = |x|, \quad x \in \langle -\pi, \pi \rangle$$

ve Fourierovu řadu. Určete pomocí této hodnoty součet číselné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}.$$

4. Pro následující funkci najděte její Fourierovu řadu, sinovou Fourierovu řadu a kosinovou Fourierovu řadu.

$$f(t) = t - \pi, \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle.$$

5. Najděte Fourierovu řadu pro funkci:

$$f(t) = t^2, \quad t \in \langle -1, 1 \rangle.$$

Pomocí této hodnoty určete součet číselných řad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \quad \text{a} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}.$$

6. Rozviňte funkci $f(x) = \operatorname{sgn} x, x \in \langle -\pi, \pi \rangle$ ve Fourierovu řadu.

Najděte součet řady

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}.$$

Výsledky cvičení

11.2 Úlohy na PDR a Fourierovu metodu

11.2.1 Řešené příklady

- Rozhodněte o typu rovnice

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} + cu = 0$$

Rovnici převedte na kanonický tvar.

Řešení

Určíme znaménko diskriminantu

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2\frac{dy}{dx} + 1 = 0.$$

Pro diskriminant platí $\Delta = 0$. Rovnice je parabolická. Dále vidíme, že výše nalezená charakteristická rovnice má dvojnásobný kořen $\frac{dy}{dx} = -1$. Odtud $y(x) = -x + C$, $C \in \mathbb{R}$. Zvolíme $\xi = C$, tzn. $\xi = x + y$. Za η zvolíme libovolnou funkci proměnných x, y , která je lineárně nezávislá na ξ , například $\eta = x$. Počítáme parciální derivace

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} = 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}.\end{aligned}$$

Po dosazení do výchozí rovnice dostáváme kanonický tvar

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + (a+b)\frac{\partial u}{\partial \xi} + a\frac{\partial u}{\partial \eta} + cu = 0.$$

- Rozhodněte o typu rovnice

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Rovnici převed'te na kanonický tvar a napište její řešení.

Řešení

Určíme znaménko diskriminantu

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2\frac{dy}{dx} + 1 = 0.$$

Pro diskriminant platí $\Delta = 0$. Rovnice je parabolická. Dále vidíme, že výše nalezená charakteristická rovnice má dvojnásobný kořen $\frac{dy}{dx} = 1$. Odtud $y(x) = x + C$, $C \in \mathbb{R}$. Zvolíme $\xi = C$, tzn. $\xi = -x + y$. Za η zvolíme libovolnou funkci proměnných x, y , která je nezávislá na ξ , například $\eta = x$. Počítáme parciální derivace

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= -\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}.\end{aligned}$$

Po dosazení do výchozí rovnice dostáváme kanonický tvar

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0.$$

Použijeme tento kanonický tvar uvažované rovnice, kde $\xi = -x + y$, $\eta = x$. Integrujeme obě strany podle η a dostáváme

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}(\xi, \eta) = f(\xi)$$

pro nějakou funkci f . Ještě jednou integrujeme obě strany podle η a dostáváme

$$u(\xi, \eta) = f(\xi)\eta + g(\xi).$$

Dosadíme $\xi = -x + y$, $\eta = x$ a dostaneme řešení

$$U(x, y) = f(y - x)x + g(y - x).$$

- Rozhodněte o typu rovnice

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 3\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Rovnici převedte na kanonický tvar a napište její řešení.

Řešení

Určíme znaménko diskriminantu

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 3\frac{dy}{dx} + 2 = 0.$$

Pro diskriminant platí $\Delta > 0$. Rovnice je hyperbolická. Dále vidíme, že výše nalezená charakteristická rovnice má dva kořeny: $\frac{dy}{dx} = 1$, $\frac{dy}{dx} = 2$. Odtud dostáváme $y(x) = x + C_1$ a $y(x) = 2x + C_2$. Použitím $\xi = C_1$, $\eta = C_2$ dostáváme $\xi = -x + y$, $\eta = -2x + y$. Počítáme parciální derivace

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{\partial u}{\partial \xi} - 2\frac{\partial u}{\partial \eta} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 4\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + 4\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= -\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 3\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}.\end{aligned}$$

Po dosazení do výchozí rovnice dostáváme kanonický tvar

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0.$$

Použijeme tento kanonický tvar uvažované rovnice, kde $\xi = -x + y$, $\eta = -2x + y$. Integrujeme obě strany a dostáváme

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}(\xi, \eta) = F(\xi)$$

pro nějakou funkci F . Integrováním obou stran poslední rovnice podle ξ dostáváme

$$u(\xi, \eta) = f(\xi) + g(\eta)$$

pro nějaké funkce f, g , přičemž f musí být diferencovatelná. Použitím $\xi = -x + y$, $\eta = -2x + y$ dostáváme řešení

$$U(x, y) = f(y - x)x + g(y - 2x).$$

- Pro předem zvolené $v \in \mathbb{R}$, $l > 0$ napište řešení rovnice

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 \leq x \leq l, t \geq 0,$$

(vlnová rovnice) s okrajovou podmínkou

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad t \geq 0$$

a počátečními podmínkami

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= f(x), \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) &= 0 \end{aligned}$$

pro $x \in [0, l]$.

Řešení

Na začátku hledáme funkci $\hat{u}$ v součinném tvaru $\hat{u}(x, t) = X(x)T(t)$, $x \in (0, l)$, $t \in (0, \infty)$, která je řešením rovnice, vyhovuje okrajové podmínce, přičemž zatím se nezabýváme počáteční podmínkou. Dvakrát derivujeme $\hat{u}$ podle x , dosadíme do rovnice a za předpokladu $X(x) \neq 0$ a $T(t) \neq 0$, dělíme obě strany výrazem $X(x)T(t)$. Dostáváme rovnici, která platí, pokud její obě strany jsou konstantní a rovnají se nějakému $\beta \in \mathbb{R}$:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{v^2} \frac{T''(t)}{T(t)} = \beta.$$

Z první rovnice dostáváme

$$X''(x) - \beta X(x) = 0.$$

Pro $\beta > 0$ řešením je

$$X(x) = a_1 e^{\sqrt{\beta}x} + a_2 e^{-\sqrt{\beta}x}, \quad x \in (0, l).$$

Z okrajové podmínky plyne $a_2 = -a_1$ a

$$a_1 (e^{\sqrt{\beta}l} - e^{-\sqrt{\beta}l}) = 0.$$

Exponenciální funkce je kladná a prostá, proto výraz v závorce je nenulový. Z toho plyne $a_1 = 0$, a dále $a_2 = 0$. To znamená, že pro $\beta > 0$ jediné řešení $\hat{u}$ v hledaném tvaru, které splňuje okrajovou podmínku je konstantní funkce rovna nule.

Pro $\beta = 0$ řešením je

$$X(x) = a_1 + a_2 x, \quad x \in (0, l).$$

Z okrajové podmínky $\hat{u}(0, t) = 0$ plyne $a_1 = 0$, a z podmínky $\hat{u}(l, t) = 0$ plyne $a_1 + a_2 l = 0$. Dohromady $a_1 = a_2 = 0$. To znamená, že pro $\beta = 0$ jediné řešení $\hat{u}$ v hledaném tvaru, které splňuje okrajovou podmínku, je konstantní funkce rovná nule. Necht' $\beta < 0$. Řešením je

$$X(x) = a_1 \cos(\sqrt{|\beta|x}) + a_2 \sin(\sqrt{|\beta|x}), \quad x \in [0, l].$$

Z okrajové podmínky $\hat{u}(0, t) = 0$ plyne $a_1 = 0$, odtud

$$X(x) = a_2 \sin(\sqrt{|\beta|x}), \quad x \in (0, l).$$

Obě okrajové podmínky platí a zároveň může být $a_2 \neq 0$ pouze, když $\sqrt{|\beta|}l = n\pi$, to znamená $\beta = -n^2\pi^2/l^2$ s libovolným $n = 1, 2, \dots$. V tom případě nenulové řešení $\hat{u}$ uvažované rovnice ve tvaru $\hat{u}(x, t) = X(x)T(t)$, které splňuje okrajové podmínky, existuje právě tehdy, když $\beta = -n^2\pi^2/l^2$ s libovolným $n = 1, 2, \dots$.

Funkce T bude definována tak, aby platila druhá počáteční podmínka. Z druhé rovnosti v

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{v^2} \frac{T''(t)}{T(t)} = \beta$$

s $\beta = -n^2\pi^2/l^2$ plyne

$$T(t) = b_1 \cos \frac{n\pi vt}{l} + b_2 \sin \frac{n\pi vt}{l}, \quad t \in (0, \infty).$$

Derivujeme a dostáváme

$$T'(t) = \frac{n\pi v}{l} \left(-b_1 \sin \frac{n\pi vt}{l} + b_2 \cos \frac{n\pi vt}{l} \right).$$

Z druhé počáteční podmínky

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(x, 0) = X(x)T'(0) = \left(\sin \frac{n\pi x}{l} \right) \cdot \frac{n\pi v}{l} \cdot b_2 = 0$$

pro libovolné $x \in [0, l]$, odkud dostáváme $b_2 = 0$.

Z předchozí konstrukce plyne, že funkce u_n ve tvaru $u_n(x, t) = X(x)T(t)$, která splňuje obě okrajové podmínky a druhou počáteční podmínku je definována vzorcem

$$u_n(x, t) = c_n \cos \frac{n\pi vt}{l} \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad (x, t) \in [0, l] \times [0, \infty).$$

Pořád musíme zajistit platnost první počáteční podmínky. Každá funkce u_n je řešením uvažované rovnice a splňuje okrajové podmínky a druhou počáteční podmínku. Uvažujeme řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t)$$

pro výše definované u_n . Vypočítáme konkrétní konstanty c_n , pro které první počáteční podmínka platí. Z první počáteční podmínky $u(x, 0) = f(x)$ plyne

$$\sum_{m=1}^{\infty} c_m \sin \frac{m\pi x}{l} = f(x).$$

Vynásobíme obě strany rovnosti výrazem $\sin \frac{n\pi x}{l}$ s libovolným $n = 1, 2, \dots$, zintegrujeme v mezích od 0 do l i využijeme známého faktu

$$\int_0^l \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{m\pi x}{l} dx = \begin{cases} \frac{l}{2}, & n = m, \\ 0, & n \neq m. \end{cases}$$

Obdržíme rovnost

$$c_n \cdot \frac{l}{2} = \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx.$$

Plyne odtud, že v definici funkcí u_n máme přijmout c_n rovné

$$c_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx,$$

a následně definovat u wzorcem

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t).$$

Zbývá dokázat stejnoměrnou konvergenci této řády, ale nebudeme se tím zabývat.

11.2.2 Příklady k procvičení

1. Rozhodněte o typu rovnice

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} + cu = 0$$

2. Rovnici

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} + cu = 0$$

převed'te na kanonický tvar.

3. Rozhodněte o typu rovnice

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

4. Rovnici

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

převed'te na kanonický tvar.

5. Napište řešení rovnice

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

kde $0 < x < a$, $0 < y < b$ (vlnová rovnice), s okrajovou podmínkou

$$u(x, 0, t) = u(x, b, t) = 0$$

$$u(0, y, t) = u(a, y, t) = 0$$

a počátečními podmínkami

$$u(x, y, 0) = f(x, y)$$

$$u_t(x, y, 0) = g(x, y).$$

6. Pro předem zvolené $v \in \mathbb{R}$, $l > 0$ hledáme řešení rovnice

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 \leq x \leq l, t \geq 0,$$

(vedení tepla) s okrajovou podmínkou

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad t \geq 0$$

a počáteční podmínkou

$$u(x, 0) = f(x)$$

pro $x \in [0, l]$.

Výsledky cvičení

12. Výsledky cvičení

1 Lineární algebra

1.1 Vlastní čísla a vlastní vektory matice

1. A: $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = -3$, vlastní vektory $\vec{h}_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$, $\vec{h}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$
matice má úplný systém vlastních vektorů. Algebraická násobnost každého vlastního čísla je rovna geometrické násobnosti a rovná se 1. Jordanův kanonický tvar je

$$J = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

- B: $\lambda_{1,2} = -2$, dva vlastní vektory: $\vec{h}_1 = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\vec{h}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\lambda_3 = 2$, vlastní vektor $\vec{h}_3 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$. Algebraická násobnost = geometrické násobnosti. Matice má úplný systém vlastních vektorů. Jordanův kanonický tvar má tři klece 1×1 ,

$$J = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

- C: $\lambda = 3$ je trojnásobné (algebraická násobnost=3) vlastní číslo, odpovídá mu jeden vlastní vektor $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$, matice má deficit vlastních vektorů, protože geometrická násobnost $\lambda = 3$ je 1. Jordanův kanonický tvar má jednu klec o rozměru 3×3 ,

$$J = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

- D: $\lambda = 3$ je trojnásobné (algebraická násobnost=3) vlastní číslo, odpovídají mu dva vlastní vektory $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$ a $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$, matice má deficit vlastních vektorů, protože geometrická násobnost $\lambda = 3$ je 2. Jordanův kanonický tvar má dvě klece - jednu 2×2 , druhou 1×1 ,

$$J = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

- E: $\lambda = 3$ má algebraická násobnost i geometrickou násobnost 3, odpovídající vlastní vektory jsou $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$, $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$ a $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$. Jordanův kanonický je

$$J = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

2.

$$A \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \Rightarrow$$

(a) je vlastní vektor odpovídající vlastnímu číslu $\lambda = 1$.

$$A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ -5 \\ 12 \\ 25 \end{bmatrix}, \Rightarrow$$

(b) není vlastní vektor matice A .

$$A \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix}, \Rightarrow$$

vektor (c) je vlastní vektor odpovídající vlastnímu číslu $\lambda = 3$.

$$A \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -9 \\ 0 \end{bmatrix}, \Rightarrow$$

vektor (d) je vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu $\lambda = 3$.

3. Vlastní čísla HT-matice jsou diagonální prvky t_{ii} , vlastní čísla diagonální matice jsou diagonální prvky λ_i .

4. Pro matici $T_{2 \times 2}$ tvrzení platí: $\det \begin{bmatrix} a - \lambda & b \\ 0 & c - \lambda \end{bmatrix} = (a - \lambda)(c - \lambda)$, a tedy $\sigma(T) = \sigma(A) \cup \sigma(C)$. Nechť nyní tvrzení platí pro matici $\hat{T}_{n \times n}$. Indukcí ukažte, že platí i pro $T_{(n+1) \times (n+1)}$.

5. Ukážeme nejprve pro $n = 2$.

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}.$$

λ_1 a λ_2 jsou vlastní čísla matice D . Pro vlastní vektor odpovídající λ_1 platí rovnice

$$(D - \lambda_1 E) \vec{h} = 0, \quad \vec{h} = [h_1, h_2]^T \text{ je odpovídající vlastní vektor,}$$

$$D - \lambda_1 E = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 - \lambda_1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \lambda_2 - \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

kde jsme přehodili sloupce, abychom získali HT-tvar. Tedy nulový prostor matice D je

$$\mathcal{N}(D - \lambda_1 E) = \{x \in \mathbb{R}^2, x = (t, 0)^T, t \in \mathbb{R}\}.$$

Vlastní vektor odpovídající λ_1 je např. vektor $[1, 0]^T$.

Obdobně ukažte, že vlastní vektor odpovídající λ_2 je např. vektor $(0, 1)^T$ a

$$\mathcal{N}(D - \lambda_2 E) = \{x \in \mathbb{R}^2, x = (0, t)^T, t \in \mathbb{R}\}.$$

Obecně pro $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ a vlastní číslo λ_i je nulový prostor

$$\mathcal{N}(D - \lambda_i E) = \{x \in \mathbb{R}^n, x = [0, 0, \dots, t, 0, \dots, 0]^T, \text{ kde } x_i = t \in \mathbb{R}\}.$$

Vlastní vektor odpovídající vlastnímu číslu λ_i je např. vektor

$$\vec{h} = [0, 0, \dots, 1, 0, \dots, 0]^T, \text{ kde } h_i = 1.$$

6. Charakteristická rovnice je

$$\det(A - \lambda E) = 0 \Rightarrow \lambda^3 - 4\lambda^2 - 3\lambda + 18 = (\lambda - 3)^2(\lambda + 2) = 0.$$

Tedy matice A má dvojnásobné vlastní číslo $\lambda_{1,2} = 3$ a jednonásobné vlastní číslo $\lambda_3 = -2$. Vypočtěme příslušné nulové prostory.

$$A + 2E = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 20 & 5 & 10 \\ 2 & -2 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix},$$

Zpětný chod dává

$$z := t \in \mathbb{R}, y = 2t, x = -t \Rightarrow \mathcal{N}(A + 2E) = \{x \in \mathbb{R}^3, x = t[-1, 2, 1]^T, t \in \mathbb{R}\}.$$

Tedy algebraická i geometrická násobnost vlastního čísla $\lambda_3 = -2$ je 1.

Pro vlastní číslo $\lambda_1 = 3$ je

$$A - 3E = \begin{bmatrix} -6 & 1 & -3 \\ 20 & 0 & 10 \\ 2 & -4 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -6 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{N}(A - 3E) = \{x \in \mathbb{R}^3, x = t[-1, 0, 2]^T, t \in \mathbb{R}\}.$$

Algebraická násobnost $\lambda = 3$ je 2, geometrická jen 1, matice má deficit vlastních vektorů. Abychom získali bázi prostoru $\mathbb{R}^3$, musíme naše dva vlastní vektory doplnit zobecněným vlastním vektorem.

7. Aplikace na Geršgorinovu větu. Všechny kroužky mají střed $(n; 0)$ a poloměr $n - 1$. V jejich sjednocení tedy nemůže ležet 0.
8. Matice A má charakteristický polynom $\lambda^3 - 3\lambda - 2$ a vlastní čísla $\lambda_1 = 2$ algebraickou násobností 1 a vlastní číslo $\lambda_2 = -1$ s algebraickou násobností 2. Vypočtěme nyní geometrickou násobnost, tedy dimenzi příslušných nulových prostorů.

$$A - 2E = \begin{bmatrix} -6 & -3 & -3 \\ 0 & -3 & 0 \\ 6 & 6 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{N}(A - 2E) = \{x \in \mathbb{R}^3, x = t \cdot [-1, 0, 2]^T, t \in \mathbb{R}\}, \dim(\mathcal{N}(A - 2E)) = 1,$$

tedy geometrická násobnost vlastního čísla $\lambda_1 = 2$ je 1, a tedy rovná se algebraické násobnosti.

$$A + E = \begin{bmatrix} -3 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & 6 & 6 \end{bmatrix} \sim [1, 1, 1],$$

$$\mathcal{N}(A + E) = \{x \in \mathbb{R}^3, x = s \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, s, t \in \mathbb{R}\}.$$

Dimenze $\mathcal{N}(A + E) = 2$, je rovna geometrické násobnosti vlastního čísla $\lambda_2 = -1$ a jeho algebraické násobnosti.

Nesingulární matici podobnostní transformace P sestavíme z vlastních vektorů.

Pro $\lambda_1 = 2$ je vlastní vektor $v_1 = [-1, 0, 2]^T$, vlastní vektory odpovídající $\lambda_2 = -1$ jsou vektory $v_2 = [-1, 1, 0]^T, v_3 = [-1, 0, 1]^T$. Dostáváme

$$P = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Pak

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -4 & -3 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 6 & 6 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

9. Pro $n = 3$ je

$$N + N^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad N - N^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\det(N + N^T - \lambda E) = \lambda(\lambda^2 - 2), \quad \det(N - N^T - \lambda E) = -\lambda(\lambda^2 + 2).$$

Vlastní čísla matice $N + N^T$ jsou $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \sqrt{2}$ a $\lambda_3 = -\sqrt{2}$, vlastní

čísla matice $N - N^T$ jsou $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = i\sqrt{2}$ a $\lambda_3 = -i\sqrt{2} \Rightarrow$ (a).

(b) Zde $n = 3$ je liché, jedno vlastní číslo je 0 a matice je tedy singulární.

(c) $\det(N + N^T) = 0$.

Pro $n = 4$ je

$$N + N^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad N - N^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\det(N + N^T - \lambda E) = \lambda^4 - 3\lambda^2 + 1, \quad \det(N - N^T - \lambda E) = \lambda^4 + 3\lambda^2 + 1.$$

Pro $N + N^T$ dostaneme čtyři nenulová vlastní čísla $\lambda = \pm \sqrt{\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}}$, pro $N - N^T$ dostaneme

také čtyři nenulová vlastní čísla $\lambda = \pm \sqrt{\frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}}$, výraz v čitateli zlomku je záporný, vlastní čísla jsou imaginární. Matice je regulární. Podíl determinantů je roven 1.

10. Charakteristická rovnice:

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & -1 & 1 \\ -1 & 1 - \lambda & -1 \\ 1 & -1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(-\lambda + 3) = 0.$$

Vlastní čísla jsou:

$\lambda_{1,2} = 0$ - algebraická násobnost 2, $\lambda_3 = 3$ - algebraická násobnost 1.

Geometrická násobnost = dimenze nulového prostoru příslušného vlastního čísla.

$$\lambda = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \sim [1, -1, 1] \Rightarrow$$

Nulový prostor

$$\mathcal{N}(A - 0 \cdot E) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3, \vec{x} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

Dimenze nulového prostoru odpovídajícího vlastnímu číslu $\lambda = 0$ je dvě $\Rightarrow$ geometrická násobnost vlastního čísla $\lambda = 0$ je 2.

$$\lambda = 3 \Rightarrow \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

Nulový prostor

$$\mathcal{N}(A - 3 \cdot E) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3, \vec{x} = \gamma \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \gamma \in \mathbb{R}\}.$$

Dimenze nulového prostoru odpovídajícího vlastnímu číslu $\lambda = 3$ je jedna $\Rightarrow$ geometrická násobnost vlastního čísla $\lambda = 3$ je 1.

Nesingulární matice P je

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

11. Hledaný ortogonální doplněk je řešením homogenní soustavy rovnic reprezentované maticí

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$x = \alpha \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Ortogonální doplněk $U^\perp$ je množina všech takových vektorů z $\mathbb{R}^4$, pro které je $u^T \cdot v = 0 \forall u \in U, v \in U^\perp$. Zde je tedy $U^\perp$ dvoudimenzionální podprostor $\mathbb{R}^4$ generovaný vektory $\{[2, -1, 2, 0], [-2, 1, 0, 2]\}$. Platí

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2\alpha - 2\beta \\ -\alpha + \beta \\ 2\alpha \\ 2\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

12.

$$\lambda_1 = 1, \vec{h}_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \lambda_2 = 2, \vec{h}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$B = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -2 & -5 \end{bmatrix},$$

$$B^{-1}AB = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -2 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 & 15 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

13. $AX + A^{-1} = B$

$$(A|E) = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{array} \right] = (E|A^{-1}).$$

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}B.$$

$$A \cdot X = B - A^{-1} = \frac{1}{2}B,$$

$$X = \frac{1}{2}A^{-1}B = \frac{1}{4}B^2 = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

14.

$$AX + X = A^2 - E \Rightarrow (A + E)X = A^2 - E,$$

$$(A + E) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \det(A + E) = 1 \Rightarrow \exists (A + E)^{-1},$$

$$X = (A + E)^{-1}(A^2 - E), \quad \text{kde} \quad (A + E)^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix},$$

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

1.2 Singulární hodnoty a singulární rozklad

1.

$$A^T A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}, \quad \lambda_1 = 10, \quad \lambda_2 = 0, \quad v_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \sigma_1 = \sqrt{10}, \quad \sigma_2 = 0.$$

2. Označme nejprve počet ujetých kilometrů jako x a měřený index tření jako y . Inženýr předpokládá závislost indexu tření na počtu ujetých kilometrů ve tvaru

$$y = a_0 + a_1 x.$$

Příklad budeme řešit pomocí normálních rovnic (ve smyslu nejmenších čtverců),

$$X^T X \vec{a} = X^T \vec{y}, \quad \text{kde} \quad \vec{a} = (a_1, a_0)^T,$$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 2000 \\ 1 & 6000 \\ 1 & 20000 \\ 1 & 30000 \\ 1 & 40000 \end{bmatrix}, \quad X^T X = \begin{bmatrix} 5 & 98000 \\ 98000 & 294 \cdot 10^7 \end{bmatrix},$$

$$\vec{y} = \begin{bmatrix} 20 \\ 18 \\ 10 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad X^T \vec{y} = \begin{bmatrix} 56 \\ 608000 \end{bmatrix}.$$

Normální rovnice:

$$\begin{bmatrix} 5 & 98000 \\ 98000 & 294 \cdot 10^7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 56 \\ 608000 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$a_0 = 20.61538462, \quad a_1 = -0.0004803767661.$$

Hledaná lineární funkce tedy je

$$y = 20.61538462 - 0.0004803767661x.$$

3. Příklad budeme řešit pomocí normálních rovnic (ve smyslu nejmenších čtverců),

$$X^T X \vec{a} = X^T \vec{y}, \quad \text{kde} \quad \vec{a} = [a_2, a_1, a_0]^T,$$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad X^T X = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 0 \\ 10 & 0 & 34 \end{bmatrix},$$

$$\vec{y} = \begin{bmatrix} 11 \\ 5 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad X^T \vec{y} = \begin{bmatrix} 23 \\ -21 \\ 59 \end{bmatrix}.$$

Normální rovnice:

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 0 \\ 10 & 0 & 34 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23 \\ -21 \\ 59 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$a_0 = 0.929, \quad a_1 = -2.1, \quad a_2 = 2.74.$$

Hledaná kvadratická funkce tedy je

$$y = 0.929 - 2.1x + 2.74x^2.$$

4. Matice A má hodnotu 2, tedy má dvě nenulové singulární hodnoty.

$$AA^T = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Charakteristický polynom

$$\lambda(\lambda^2 - 6\lambda + 6) \Rightarrow \lambda_1 = 3 + \sqrt{3}, \quad \lambda_2 = 3 - \sqrt{3}, \quad \lambda_3 = 0.$$

Nenulové singulární hodnoty jsou

$$\sigma_1 = \sqrt{3 + \sqrt{3}}, \quad \sigma_2 = \sqrt{3 - \sqrt{3}}.$$

5.

$$A^T A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}, \lambda_1 = 10, \lambda_2 = 0, v_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}, \sigma_1 = \sqrt{10}, \sigma_2 = 0.$$

6. $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je nesingulární, tedy její hodnota je n a $\det(A) \neq 0 \Rightarrow$ všechna vlastní čísla jsou nenulová a singulární hodnoty jsou kladné.

7.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}, \quad AA^T = \begin{bmatrix} 17 & 8 \\ 8 & 17 \end{bmatrix},$$

charakteristický polynom je

$$\det(AA^T - \lambda E) = \lambda^2 - 34\lambda + 225 = (\lambda - 25)(\lambda - 9),$$

tedy nenulové singulární hodnoty matice A jsou $\sigma_1 = \sqrt{25} = 5$, $\sigma_2 = \sqrt{9} = 3$. Nyní vypočteme vlastní vektory (sloupce V) matice $A^T A$, která má vlastní čísla 25, 9, a 0. Matice $A^T A$ je symetrická, tedy vlastní vektory budou ortogonální.

Pro $\lambda = 25$ je

$$A^T A - 25E = \begin{bmatrix} -12 & 12 & 2 \\ 12 & -12 & -2 \\ 2 & -2 & -17 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -6 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Odpovídající jednotkový vlastní vektor – první sloupec V je $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right]^T$.

Pro $\lambda = 9$ je

$$A^T A - 9E = \begin{bmatrix} 4 & 12 & 2 \\ 12 & 4 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Odpovídající jednotkový vlastní vektor – druhý sloupec V je $\left[\frac{1}{\sqrt{18}}, -\frac{1}{\sqrt{18}}, \frac{4}{\sqrt{18}} \right]^T$.

Pro $\lambda = 0$ je

$$A^T A - 0E = \begin{bmatrix} 13 & 12 & 2 \\ 12 & 13 & -2 \\ 2 & -2 & 8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Odpovídající jednotkový vlastní vektor – třetí sloupec V je $\left[-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right]^T$.

Ověřte si, že vektory (sloupce V) jsou ortonormální.

Pro i -tý sloupec matice U platí

$$u_i = \frac{1}{\sigma_i} A v_i.$$

Tedy

$$i = 1 \quad u_1 = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix},$$

$$i = 2 \quad u_2 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{18}} \\ -\frac{1}{\sqrt{18}} \\ \frac{4}{\sqrt{18}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

Dostáváme singulární rozklad

$$A = USV^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{18}} & -\frac{1}{\sqrt{18}} & \frac{4}{\sqrt{18}} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

8.

$$AA^T = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix},$$

charakteristický polynom je $-\lambda(\lambda - 8)(\lambda - 2)$, vlastní čísla matice AA^T jsou $\lambda_1 = 8$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 0$ a singulární hodnoty matice A jsou $\sigma_1 = 2\sqrt{2}$, $\sigma_2 = \sqrt{2}$, $\sigma_3 = 0$.

Nyní vypočteme ortonormální množinu vlastních vektorů matice

$$A^T A = \begin{bmatrix} 2 & 2\sqrt{2} & 0 \\ 2\sqrt{2} & 6 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Tyto vlastní vektory tvoří sloupce matice V , sloupce matice U získáme pomocí vztahu $u_i = \frac{1}{\sigma_i} A v_i$.

1.3 Chemické sítě

1. Stechiometrická matice – chemické sloučeniny: E, S₁, S₂, ES₁, ES₁S₂, E*S₁S₂. Ze zapsaného reakčního schématu lze vidět, že 1. a 2., 3. a 4. a 5. a 6. reakce jsou rovnovážné. Při určení hodnoty stochiometrické matice je tedy možné uvažovat vždy jednu z každé dvojice. Výslednou stochiometrickou matici tedy zapíšeme ve tvaru

$$\underline{\nu} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow h(\underline{\nu}) = 3.$$

Lineárně nezávislé jsou například reakce 1, 3, 5 nebo 2, 4, 6 (nebo libovolná kombinace, kde je vždy zastoupena právě jedna reakce z každé dvojice).

Soustava má nekonečně mnoho řešení. Rozšíříme-li výslednou matici z předchozího postupu o původní reaktanty, získáme

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Volíme tři neznámé jako parametry: $x_2 = r$, $x_4 = s$, $x_6 = t$. Pak $A\vec{x} = 0$ platí pro

$$\vec{x} = r \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad r, s, t \in \mathbb{R}.$$

Tedy báze prostoru všech řešení je $\{(1, 1, 0, 0, 0)^T, (0, 0, 1, 1, 0)^T, (0, 0, 0, 0, 1)^T\}$ a prostor všech řešení je podprostor $\mathbb{R}^5$,

$$V_h = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^5 : \vec{x} = r \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad r, s, t \in \mathbb{R}\}.$$

2. Chemické složky: $\text{H}_2, \text{O}_2, \text{H}_2\text{O}_2$. Připomeňme, že každé reakci odpovídá sloupec, každé chemické složce řádek. Zde tedy 1 sloupec, 3 složky:

$$\underline{\nu} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad h(\underline{\nu}) = 1.$$

Soustava má nekonečně mnoho řešení, volím dvě neznámé jako parametry: $x_2 = t, x_3 = s$. Pak $x_1 = -t + s$. Tedy

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

3. Chemické složky: $\text{H}_2\text{CO}_3, \text{HCO}_3^-, \text{H}^+, \text{CO}_3^{2-}$.

$$\underline{\nu} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \underline{\nu}^T = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad h(\underline{\nu}) = h(\underline{\nu}^T) = 2.$$

Soustava má nekonečně mnoho řešení, volím dvě neznámé jako parametry: $x_3 = t, x_4 = s$. Pak $x_2 = t + s, x_1 = 2t + s$. Tedy

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

4. Oggův mechanismus pro rozklad dusíku oxidem
chemické sloučeniny: $\text{N}_2\text{O}_5, \text{NO}_2, \text{NO}_3, \text{O}_2, \text{NO}$

$$\underline{\nu} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{N}_2\text{O}_5 \\ \text{NO}_2 \\ \text{NO}_3 \\ \text{O}_2 \\ \text{NO} \end{matrix}$$

$$\underline{\nu}^T = \begin{bmatrix} \text{N}_2\text{O}_5 & \text{NO}_2 & \text{NO}_3 & \text{O}_2 & \text{NO} \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad h(\underline{\nu}) = h(\underline{\nu}^T) = 3.$$

Soustava má nekonečně mnoho řešení, volím dvě neznámé jako parametry: $x_5 = t$, $x_4 = s$. Pak $x_3 = t + s$, $x_2 = -\frac{1}{2}s$, $x_1 = t + \frac{1}{2}s$. Tedy

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}s \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

2 Lineární a nelineární regrese

1. Mocninnou funkci lze logaritmováním převést na lineární:

$$\ln Sh = \ln A + B \ln Re + C \ln Sc$$

a určit hodnoty parametrů A , B , a C podle vztahu $\vec{p} = (X^T X)^{-1} X \cdot \vec{y}$, kde $X_{i,1} = 1$, $X_{i,2} = \ln Re_i$, $X_{i,3} = \ln Sc_i$, $y_i = \ln Sh_i$. Výsledný vektor $\vec{p}$ je vektorem hledaných parametrů ve tvaru $\begin{bmatrix} \ln A & B & C \end{bmatrix}$.

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 7.520 & 0.198 \\ 1 & 8.133 & 0.198 \\ 1 & 8.511 & 0.198 \\ 1 & 7.372 & 1.010 \\ 1 & 7.516 & 1.010 \\ 1 & 7.641 & 1.010 \\ 1 & 8.274 & -0.806 \\ 1 & 8.544 & -0.806 \\ 1 & 8.769 & -0.806 \end{bmatrix} \quad \vec{y} = \begin{bmatrix} 2.529 \\ 3.083 \\ 3.328 \\ 2.799 \\ 2.936 \\ 3.041 \\ 2.509 \\ 2.756 \\ 2.965 \end{bmatrix}$$

$$X^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 7.520 & 8.134 & 8.511 & 7.372 & 7.516 & 7.641 & 8.274 & 8.544 & 8.769 \\ 0.198 & 0.198 & 0.198 & 1.010 & 1.010 & 1.010 & -0.807 & -0.807 & -0.807 \end{bmatrix}$$

$$X^T X = \begin{bmatrix} 9.000 & 72.280 & 1.206 \\ 72.280 & 582.709 & 6.916 \\ 1.206 & 6.916 & 5.127 \end{bmatrix}, \quad (X^T X)^{-1} = \begin{bmatrix} 97.376 & -11.999 & -6.720 \\ -11.999 & 1.480 & 0.826 \\ -6.720 & 0.826 & 0.662 \end{bmatrix}$$

$$(X^T X)^{-1} X = \begin{bmatrix} 5.813 & -1.542 & -6.078 & 2.132 & 0.404 & -1.096 & 3.513 & 0.273 & -2.427 \\ -0.706 & 0.201 & 0.761 & -0.254 & -0.041 & 0.144 & -0.419 & -0.020 & 0.313 \\ -0.377 & 0.129 & 0.441 & 0.038 & 0.157 & 0.260 & -0.419 & -0.196 & -0.010 \end{bmatrix}$$

$$\vec{p} = (X^T X)^{-1} X \vec{y} = \begin{bmatrix} -4.083 \\ 0.794 \\ 0.648 \end{bmatrix}.$$

Po dopočtení získáme, $A = e^{-4.083} = 0.017$, $B = 0.794$, $C = 0.648$. Experimentální data byla zkorelována rovnicí $Sh = 0.017 Re^{0.794} Sc^{0.648}$.

3 Implicitně zadané funkce

1.

$$G(4, 3) = 16 - 36 + 27 - 7 = 0.$$

$$\frac{\partial G}{\partial y}(x, y) = -3x + 3y^2, \quad \frac{\partial G}{\partial y}(4, 3) = -12 + 27 = 15 \neq 0.$$

Podle věty o implicitních funkcích definuje rovnice $G(x, y) = 0$ na okolí bodu $(4; 3)$ implicitně funkci jedné proměnné $y = f(x)$. Vypočteme $y'(4)$:

$$y'(x^*) = -\frac{\frac{\partial G}{\partial x}(x^*, y^*)}{\frac{\partial G}{\partial y}(x^*, y^*)} = -\frac{\frac{\partial G}{\partial x}(4, 3)}{\frac{\partial G}{\partial y}(4, 3)} = \frac{1}{15}.$$

Potom, protože $\Delta f \doteq df$ (diference $\doteq$ diferenciálu), je

$$f(x) - f(x^*) \doteq f'(x^*)(x - x^*) \text{ pro } x \in O_\delta x^*,$$

tedy

$$y_1 = y(x_1) \doteq y(x^*) + y'(x^*)(x_1 - x^*) = 3 + \frac{1}{15}0.3 = 3.02.$$

Na kalkulačce je $G(4.3, 3.02) = 0.075608 \neq 0$, ale bod $(4.3; 3.02)$ neleží na nulové vrstevnici funkce $G(x, y)$, získali jsme tedy jen aproximaci $y(4.3) \doteq 3.02$.

2. Vypočteme si parciální derivaci G_z :

$$G_z(x, y, z) = 8xz - 6yz.$$

(a) V bodě $A = (1; 1; z_0)$ je

$$G(1, 1, z_0) = 1 + 3 + 4z_0^2 - 3z_0^2 - 1 = 0 \Rightarrow 3 + z_0^2 = 0,$$

takové z_0 neexistuje, nelze definovat funkci $z = z(x, y)$.

(b) V bodě $B = (1; 0; z_0)$ je

$$G(1, 0, z_0) = 1 + 0 + 4z_0^2 - 0 - 1 = 0 \Rightarrow z_0 = 0.$$

Pak $G_z(1, 0, 0) = 0$, není tedy splněna podmínka nenulovosti $G_z(1, 0, 0)$ a tedy rovnice $G(x, y, z) = 0$ nedefinuje na okolí bodu $(1, 0, 0)$ implicitně funkci $z = z(x, y)$.

(c) V bodě $C = (0.5; 0; z_0)$ je

$$G(C) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 + 2z_0^2 - 1 = 0 \Rightarrow z_0^2 = \frac{7}{16} \Rightarrow z_1 = \frac{\sqrt{7}}{4}, z_2 = -\frac{\sqrt{7}}{4}.$$

Zkontrolujeme, zda G_z je nenulová v těchto bodech:

$$G_z\left(\frac{1}{2}; 0; \frac{\sqrt{7}}{4}\right) = \sqrt{7} \neq 0, \quad G_z\left(\frac{1}{2}; 0; -\frac{\sqrt{7}}{4}\right) = -\sqrt{7} \neq 0 \Rightarrow$$

rovnice $G(x, y, z) = 0$ definuje na okolí bodu $\left(\frac{1}{2}; 0; \frac{\sqrt{7}}{4}\right)$ a bodu $\left(\frac{1}{2}; 0; -\frac{\sqrt{7}}{4}\right)$ implicitně funkci $z = z(x, y)$.

Nyní vypočteme derivace z_x a z_y :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial G}{\partial x}}{\frac{\partial G}{\partial z}} = -\frac{3x^2 + 4z^2}{8xz - 6yz}.$$

Tedy

$$\frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{1}{2}; 0; \frac{\sqrt{7}}{4}\right) = -\frac{5}{2\sqrt{7}}, \quad \frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{1}{2}; 0; -\frac{\sqrt{7}}{4}\right) = \frac{5}{2\sqrt{7}}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial G}{\partial y}}{\frac{\partial G}{\partial z}} = -\frac{6y - 3z^2}{8xz - 6yz},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} \left(\frac{1}{2}; 0; \frac{\sqrt{7}}{4} \right) = \frac{3\sqrt{7}}{16}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} \left(\frac{1}{2}; 0; -\frac{\sqrt{7}}{4} \right) = -\frac{3\sqrt{7}}{16}.$$

Pomocí totálního diferenciálu odhadneme změnu z :

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y, \text{ kde } \Delta x = 0,6 - 0,5 = \frac{1}{10}, \Delta y = -0,2 - 0 = -\frac{1}{5}.$$

Pro odpovídající změnu Δz dostáváme

$$\text{pro } z_1 = \frac{\sqrt{7}}{4} : \Delta z = -\frac{41}{80\sqrt{7}},$$

$$\text{pro } z_2 = -\frac{\sqrt{7}}{4} : \Delta z = \frac{41}{80\sqrt{7}}.$$

$$3. \quad (\text{a}) \quad F(x, y, z) = x^2 - 2y^2 + z^2 - 4x + 2z - 1, \quad A = (0; 1; 1),$$

$$F(0, 1, 1) = -2 + 1 + 2 - 1 = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 2z + 2, \quad \frac{\partial F}{\partial z}(0, 1, 1) = 4 \neq 0 \Rightarrow$$

na okolí bodu A je implicitně definovaná funkce $z = g(x, y)$, $g(0, 1) = 1$.

Vypočteme příslušné parciální derivace tak, že budeme derivovat rovnici $F(x, y, z) = 0$ postupně podle jednotlivých proměnných:

podle x , $z = z(x, y)$

$$2x + 2z \frac{\partial z}{\partial x} - 4 + 2 \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2-x}{z+1}, \quad \frac{\partial z}{\partial x}(0, 1) = 1,$$

podle y , $z = z(x, y)$

$$-4y + 2z \frac{\partial z}{\partial y} + 2 \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{z+1}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}(0, 1) = 1,$$

2x podle x , $z = z(x, y)$

$$2 + 2 \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + 2z \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0 \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{-1 - \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2}{z+1}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(0, 1) = -1,$$

2x podle x, y , kde $z = z(x, y)$

$$2 \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) \cdot \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) + 2z \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0 \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial y}}{z+1}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(0, 1) = -\frac{1}{2},$$

2x podle y , $z = z(x, y)$

$$-4 + 2 \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 + 2z \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2 - \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2}{z+1}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(0, 1) = \frac{1}{2}.$$

$$(\text{b}) \quad F(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - z - 1, \quad A = (1; 0; 1),$$

$$F(1, 0, 1) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 3z^2 - 1, \quad \frac{\partial F}{\partial z}(1, 0, 1) = 2 \neq 0 \Rightarrow$$

na okolí bodu A je implicitně definovaná funkce $z = g(x, y)$, $g(1, 0) = 1$.

Vypočteme příslušné parciální derivace tak, že budeme derivovat rovnici $F(x, y, z) = 0$

postupně podle jednotlivých proměnných:
podle x , kde $z = z(x, y)$

$$3x^2 + 3z^2 \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{3x^2}{3z^2 - 1}, \quad \frac{\partial z}{\partial x}(1, 0) = -\frac{3}{2},$$

podle y , $z = z(x, y)$

$$3y^2 + 3z^2 \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{3y^2}{3z^2 - 1}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}(1, 0) = 0,$$

2x podle x , $z = z(x, y)$

$$6x + 6z \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + 3z^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0 \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{-6x - 6z \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2}{3z^2 - 1}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(1, 0) = \frac{15}{4},$$

2x podle x, y , kde $z = z(x, y)$

$$6z \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) \cdot \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) + 3z^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0 \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{6z \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial y}}{3z^2 - 1}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(1, 0) = 0,$$

2x podle y , $z = z(x, y)$

$$6y + 6z \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 + 3z^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{6y + 6z \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2}{3z^2 - 1}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(1, 0) = 0.$$

(c)

$$F(x, y, z) = \exp(x) - xyz + x^2 - 2, \quad A = (1; 2; 0) \Rightarrow F(1, 2, 0) = e - 0 + 1 - 2 = e - 1 \neq 0.$$

Bod A nesplňuje podmínku $F(1, 2, 0) = 0$, neleží na nulové vrstevnici funkce F , rovnice $F(x, y, z) = 0$ nemůže na okolí bodu A implicitně definovat funkci $z = g(x, y)$.

$$(d) \quad F(x, y, z) = x \cos y + y \cos z + z \cos x - 1, \quad A = (0; 0; 1),$$

$$F(0, 0, 1) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = -y \sin z + \cos x, \quad \frac{\partial F}{\partial z}(0, 0, 1) = 1 \neq 0 \Rightarrow$$

na okolí bodu A je rovnicí $F(x, y, z) = 0$ implicitně definovaná funkce $z = g(x, y)$, $g(0, 0) = 1$.

Vypočteme příslušné parciální derivace tak, že budeme derivovat rovnici $F(x, y, z) = 0$ postupně podle jednotlivých proměnných:

podle x , kde $z = z(x, y)$

$$\cos y + y(-\sin z) \frac{\partial z}{\partial x} + \cos x \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\cos y}{y \sin z - \cos x}, \quad \frac{\partial z}{\partial x}(0, 0) = -1,$$

podle y , $z = z(x, y)$

$$-x \sin y + \cos z - y \sin z \frac{\partial z}{\partial y} + \cos x \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x \sin y - \cos z}{-y \sin z + \cos x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}(0, 0) = -1,$$

2x podle x , $z = z(x, y)$

$$-y \cos z \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 - y \sin z \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \sin x \frac{\partial z}{\partial x} + \cos x \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{y \cos z \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \sin x \frac{\partial z}{\partial x}}{-y \sin z + \cos x}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(0,0) = 0,$$

2x podle x, y , kde $z = z(x, y)$

$$-\sin y - \sin z \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) - y \cos z \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) \cdot \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) - y \sin z \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \cos x \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\sin y + \sin z \frac{\partial z}{\partial x} + y \cos z \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial y}}{-y \sin z + \cos x}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(0,0) = -\sin 1,$$

2x podle $y, z = z(x, y)$

$$-x \cos y - \sin z \frac{\partial z}{\partial y} - \sin z \frac{\partial z}{\partial y} - y \cos z \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 - y \sin z \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \cos x \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{x \cos y + 2 \sin z \frac{\partial z}{\partial y} + y \cos z \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}{-y \sin z + \cos x}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(0,0) = -2 \sin 1.$$

4. (a) Definujme funkci $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ předpisem $F(x, t) = f(x) - t \cdot g(x)$. Pak funkce F je spojitá, $F(0, 0) = 0$ a

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, t) = f'(x) - t \cdot g'(x) \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x}(0, 0) = f'(0) \neq 0.$$

Podle Věty o implicitních funkcích existuje $\delta > 0$ tak, že pro $|t| < \delta$ definuje rovnice $F(x, t) = 0$ implicitně spojitou funkci $x = x(t)$, přičemž $x(0) = 0$.

- (b) Derivujeme obě strany rovnice $f(x(t)) = t \cdot g(x(t))$ podle t . Pro $|t| < \delta$ je

$$x'(t) = \frac{g(t)}{f'(t)}, \quad x(0) = 0 \Rightarrow T_1(t) = x(0) + x'(0)(t - 0) = \frac{g(0)}{f'(0)} \cdot t.$$

5. Položme $F_1(x, y, z) = x^3 y - z - 1 = 0$, $F_2(x, y, z) = x + y^2 + z^3 - 6 = 0$. Vypočteme Jacobián v bodě $(1; 2; 1)$:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x^2 y & x^3 & -1 \\ 1 & 2y & 3z^2 \end{bmatrix}, \quad J([1, 2, 1]) = \begin{bmatrix} 6 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

Determinant

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{vmatrix} \Big|_{[1, 2]} = \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 23 \neq 0.$$

Podle věty o implicitních funkcích existují funkce $x(z)$, $y(z)$ tak, že $F_1(x(z), y(z), z) = 0$, $F_2(x(z), y(z), z) = 0$. Vypočteme jejich derivace: $x'(1), y'(1)$ (derivujeme podle z):

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x'(1) \\ y'(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial F_1}{\partial z} \\ -\frac{\partial F_2}{\partial z} \end{bmatrix}.$$

Derivace vyčíslíme a dostaneme soustavu

$$\begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x'(1) \\ y'(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} \Rightarrow x'(1) = \frac{7}{23}, \quad y'(1) = -\frac{19}{23}.$$

Nyní aproximujeme $x(1, 1)$ a $y(1, 1)$ například Taylorovým polynomem 1. stupně:

$$\begin{aligned} x(1, 1) &\doteq x(1) + x'(1) \cdot 0.1 = 1 + \frac{7}{23} \cdot 0.1 = 1.03 \\ y(1, 1) &\doteq y(1) + y'(1) \cdot 0.1 = 2 - \frac{19}{23} \cdot 0.1 = 1.91 \end{aligned}$$

Dostáváme odhad $x = 1.03; y = 1.91; z = 1.1$.

6.

$$\begin{aligned} F_1(x, y, z, u, v) &= 2x^2 + y^2 + z^2 + u^2 - v^2 \\ F_2(x, y, z, u, v) &= x^2 + z^2 + 2u - v, \end{aligned}$$

$X_0 = (1; -1; 1)$, $U_0 = (0; 2)$. Ověření podmínek existence:

a) $F_1(1, -1, 1, 0, 2) = 2 + 1 + 1 - 4 = 0$, $F_2(1, -1, 1, 0, 2) = 1 + 1 - 2 = 0$, Tedy $F(X_0, U_0) = 0 \in \mathbb{R}^2$

b)

$$D_U F = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial v} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial F_2}{\partial v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2u & -2v \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad D_U F|_{(1, -1, 1, 0, 2)} = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\det(D_U F)|_{(1, -1, 1, 0, 2)} = 8 \neq 0 \implies D_U F|_{(X_0, U_0)} \text{ je regulární, hodnost je } 2.$$

Pak z a), b) plyne, že existuje okolí $\mathcal{B}$ bodu $(1, -1, 1)$ v $\mathbb{R}^3$ a jednoznačně určené zobrazení $g: \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}^2$ takové, že

$$g = g(x, y, z) = \begin{bmatrix} g_1(x, y, z) \\ g_2(x, y, z) \end{bmatrix}, \quad g(1, -1, 1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \longleftarrow u \\ \longleftarrow v \end{matrix}.$$

Tedy $g(X_0) = U_0$, $g \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ a $F(X, g(X)) = 0 \forall X \in \mathcal{B}$.

Derivace:

$$Dg(X) = -(D_U F(X, g(X)))^{-1} \cdot (D_X F(X, g(X))), \quad D_X F = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \end{bmatrix}$$

$$D_X F = \begin{bmatrix} 4x & 2z & 2z \\ 2x & 0 & 2z \end{bmatrix} \Big|_{(1, -1, 1, 0, 2)} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad [D_U F]^{-1} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Dg(X)|_{(1, -1, 1)} = -\frac{1}{8} \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} = -\frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -4 & 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

4 Numerické řešení DR - počáteční úloha

1. Charakteristická rovnice má pro zadanou soustavu tvar

$$\lambda^3 + 3\lambda^2 - 4 = 0.$$

Jednoduchým testem zjistíme, že $\lambda_1 = 1$ je kořenem této charakteristické rovnice. Následně použijeme například metodou neurčitých koeficientů,

$$\lambda^3 + 3\lambda^2 - 4 = (\lambda - 1)(a\lambda^2 + b\lambda + c) = (\lambda - 1)(1\lambda^2 + 4\lambda + 4)$$

a nalezneme i zbylá vlastní čísla matice A , $\lambda_2 = \lambda_3 = -2$.

Matice soustavy má tedy jedno reálné vlastní číslo $\lambda_1 = 1$ s algebraickou násobností 1 a jedno reálné vlastní číslo $\lambda_{2,3} = -2$ s algebraickou násobností 2.

K nalezení obecného řešení soustavy $x' = Ax$ potřebujeme znát vlastní vektory matice A . Pro vlastní číslo $\lambda_1 = 1$ získáme,

$$(A - \lambda_1 E)\vec{h}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -3 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{1,1} \\ h_{1,2} \\ h_{1,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

a po vyřešení soustavy například Gaussovou eliminací získáme vlastní vektor $\vec{h}_1(s) = (-s, s, 0)^T$, $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Pro nalezení obecného řešení ale potřebujeme pouze jeden vlastní vektor a tedy budeme volit $s = 1$ a získáme $\vec{h}_1 = (-1, 1, 0)^T$.

Pro případ vlastního čísla $\lambda_{2,3}$ získáme,

$$(A - \lambda_{2,3}E)\vec{h}_2 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{2,1} \\ h_{2,2} \\ h_{2,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Všimněme si, že matice $(A - \lambda_{2,3}E)$ má hodnotu $\det(A - \lambda_{2,3}E) = 2$ a tedy dimenze jádra zobrazení definovaného touto maticí $\mathcal{N}(A - \lambda_{2,3}E) = 1$. Vlastní číslo $\lambda_{2,3}$ má tedy geometrickou násobnost 2.

Při hledání vlastního vektoru $\vec{h}_2$ tedy volíme jeden parametr. Příklad vlastního vektoru pro volbu $h_{2,2} = s = 1$ je $\vec{h}_2 = (0, 1, 0)^T$.

Jelikož $\mathcal{N}(A - \lambda_{2,3}E) = 1$, musíme hledat zobecněný vlastní vektor matice A . Ten nalezneme vyřešením soustavy,

$$(A - \lambda_{2,3}E)\vec{h}_2 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{1,1} \\ k_{1,2} \\ k_{1,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \vec{h}_2.$$

Vyřešením soustavy a volbou $k_{1,2} = s = 1$ získáme zobecněný vlastní vektor ve tvaru $\vec{k}_1 = (-1/3, 1, 1)^T$.

Řešení zadané soustavy hledáme ve tvaru

$$x(t, C_1, C_2, C_3) = C_1 e^{\lambda_1 t} \vec{h}_1 + C_2 e^{\lambda_{2,3} t} \vec{h}_2 + C_3 e^{\lambda_{2,3} t} (\vec{h}_2 t + \vec{k}_1)$$

a po dosazení získáme

$$x(t, C_1, C_2, C_3) = C_1 e^t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + C_2 e^{-2t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + C_3 e^{-2t} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} -1/3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right).$$

2. Neprve nalezneme numerické řešení pomocí zadané metody a následně rovnici vyřešíme analyticky a porovnáme získané výsledky.

Numerická část: Označme si pravou stranu rovnice $y' = e^x + y$ jako $f(x, y)$. Zadanou rovnici poté můžeme přepsat do tvaru $y' = f(x, y)$. Dále si označme integrační krok $h := x_{i+1} - x_i$, $i = 1, 2, \dots$. Metoda Runge-Kutta 4. řádu je pro toto značení zadána předpisy,

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(x_i, y_i) \\ k_2 &= hf(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1) \\ k_3 &= hf(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_2) \\ k_4 &= hf(x_i + h, y_i + k_3) \\ y_{i+1} &= y_i + \frac{1}{6}(k_1 + k_4) + \frac{1}{3}(k_2 + k_3) \end{aligned}$$

Označme si nyní počáteční podmínku $y_0 = y(0) = 1$ a postupně dosazujeme do výše uvedených vztahů pro $h = 0.1$. Výsledky jsou zapsány v níže uvedené tabulce.

Pozn: Metoda Runge-Kutta 4. řádu má přesnost $O(h^4)$ a pro krok $h = 0.1$ by tedy měla vracet přibližně 4 platná desetinná místa. Ve výsledkové tabulce jsou všechny hodnoty zaokrouhleny na 5 desetinných míst. V průběhu výpočtu byla z důvodu omezení zaokrouhlovacích chyb použita přesnost vyšší.

Hledaná hodnota je $\tilde{y}(0.2) = 1.46568$.

i	x_i	y_i	k_1	k_2	k_3	k_4
0	0.00000	1.00000	0.20000	0.21513	0.21588	0.23210
1	0.10000	1.21569	0.23209	0.24936	0.25022	0.26873
2	0.20000	1.46568				

Analytická část: Řešená rovnice je nehomogenní lineární diferenciální rovnicí prvního řádu s konstantními koeficienty a speciální pravou stranou. Při řešení nejprve nalezneme obecné řešení přidružené homogenní diferenciální rovnice, $y_{OH}(x, C)$ a následně metodou odhadu nalezneme partikulární řešení rovnice nehomogenní, $y_{PN}(x)$. Obecné řešení zadané rovnice získáme jako,

$$y(x, C) = y_{OH}(x, C) + y_{PN}(x).$$

Přidružená homogenní rovnice má tvar $y' - y = 0$, její charakteristický polynom je $\lambda - 1 = 0$ a kořen charakteristického polynomu $\lambda_1 = 1$. Řešením přidružené homogenní rovnice je tedy funkce

$$y_{OH}(x, C) = Ce^x.$$

Pravá strana rovnice $f(x, y) = e^{ax}$, kde $a = 1$. Zároveň je $a = \lambda_1$ a tedy partikulární řešení zadané rovnice hledáme ve tvaru

$$y_{PN} = xe^{\lambda_1 x} P_m(x), \quad \lambda_1 = 1 \quad \text{dále pak} \quad m = 0 \implies P_m(x) = A, \quad A \in \mathbb{R}.$$

Dosazením y_{PN} do řešené rovnice získáme

$$Ae^x + Axe^x - Axe^x = e^x \implies A = 1.$$

Obecné řešení nehomogenní rovnice tedy je

$$y(x, C) = y_{OH}(x, C) + y_{PN}(x) = Ce^x + xe^x \quad C, x \in \mathbb{R}.$$

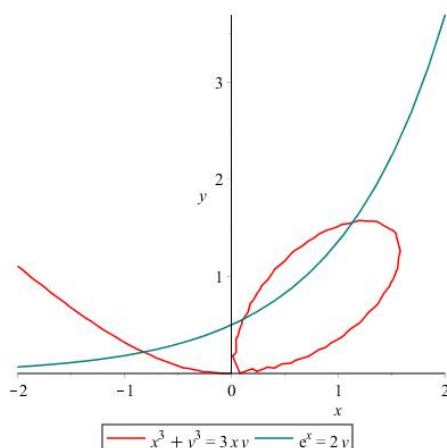
Partikulární řešení vyhovující počáteční podmínce $y(0) = 1$ získáme dosazením,

$$y(0, C) = C = 1 \implies y_P(x) = e^x(1 + x).$$

a hledaná hodnota $y(0.2) \doteq 1.46568$. Hodnota chyby tedy je $e = |y(0.2) - \tilde{y}(0.2)| = |1.46568 - 1.46568| = 0$. Ve sledované přesnosti pěti desetinných míst se tedy nalezené numerické řešení od přesného neliší. Odlišnost je $e = 5.52 \cdot 10^{-7}$.

6 Newtonova metoda

1. Pomocí vhodného obrázku zjistíme, kde přibližně leží kořen.



$$F(x, y) = \begin{bmatrix} x^3 + y^3 - 3xy \\ \exp(x) - 2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Newtonova metoda:

$$\begin{aligned} DF(x_k) \Delta x_k &= -F(x_k) \\ x_{k+1} &= x_k + \Delta x_k \end{aligned}$$

$$DF(x) = \begin{bmatrix} 3x^2 - 3y & 3y^2 - 3x \\ \exp(x) & -2 \end{bmatrix}.$$

Zadaná počáteční aproximace: $x_0 = (-1; 0)$.

1. iterace:

$$DF(x_0) = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ \exp(-1) & -2 \end{bmatrix}, \quad F(x_0) = \begin{bmatrix} -1 \\ \exp(-1) \end{bmatrix}$$

$$\Delta x_1 = [0.1261834619; 0.2071498713] \Rightarrow x_1 = \begin{bmatrix} -0.8738165381 \\ 0.2071498713 \end{bmatrix}.$$

2. iterace:

$$DF(x_1) = \begin{bmatrix} 2.290666027 & -0.6214496139 \\ 0.4173556520 & -2 \end{bmatrix}, \quad F(x_1) = \begin{bmatrix} -0.1152853131 \\ 0.0030559094 \end{bmatrix}$$

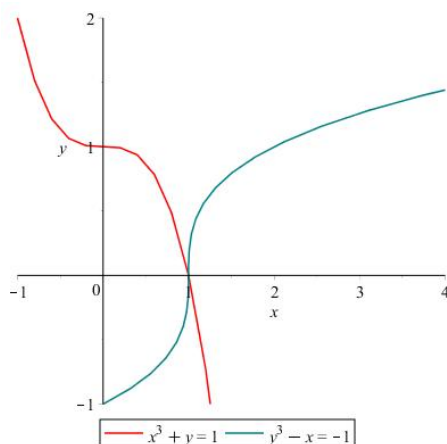
Gaussova eliminace:

$$\Delta x_2 = \begin{bmatrix} 0.0537879498769325 \\ 0.0127523071419892 \end{bmatrix} \Rightarrow x_2 = \begin{bmatrix} -0.8200285882 \\ 0.2199021784 \end{bmatrix}.$$

Pro kontrolu zkusme vypočítat hodnoty funkce $F(x_2)$:

$$F_1(x_2) = 0.00018635115, \quad F_2(x_2) = 0.0006147067.$$

2. Pomocí vhodného obrázku zjistíme, kde přibližně leží kořen.



$$F(x, y) = \begin{bmatrix} x^3 + y - 1 \\ y^3 - x + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Newtonova metoda:

$$DF(x_k) \Delta x_k = -F(x_k)$$

$$x_{k+1} = x_k + \Delta x_k$$

$$DF(x) = \begin{bmatrix} 3x^2 & 1 \\ -1 & 3y^2 \end{bmatrix}.$$

Zadaná počáteční aproximace:

$$x_0 = (0, 5; 0, 5).$$

1. iterace:

$$DF(x_0) = \begin{bmatrix} 0.75 & 1 \\ -1 & 0.75 \end{bmatrix}, \quad F(x_0) = \begin{bmatrix} -0.375 \\ 0.625 \end{bmatrix}$$

$$\Delta x_1 = \begin{bmatrix} 0.58 \\ -0.06 \end{bmatrix} \Rightarrow x_1 = \begin{bmatrix} 1.08 \\ 0.44 \end{bmatrix}.$$

2. iterace:

$$DF(x_1) = \begin{bmatrix} 3.49920 & 1 \\ -1 & 0.58080 \end{bmatrix}, \quad F(x_1) = \begin{bmatrix} 0.6997120000 \\ 0.005184000 \end{bmatrix}$$

Gaussova eliminace:

$$\Delta x_2 = \begin{bmatrix} -0.132310144468718 \\ -0.236732342528101 \end{bmatrix} \Rightarrow x_2 = \begin{bmatrix} 0.9476898555 \\ 0.2032676575 \end{bmatrix}.$$

Pro kontrolu zkusme vypočítat hodnoty funkce $F(x_2)$:

$$F_1(x_2) = 0.0544031387, \quad F_2(x_2) = 0.0607087045.$$

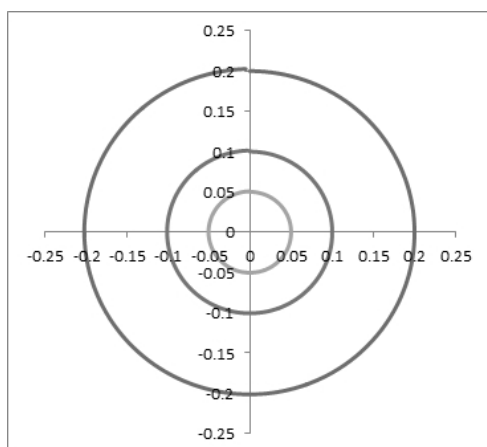
7 Fázové portréty soustav lineárních DR

1. Soustava je lineární s maticí, determinantem a stopou matice soustavy:

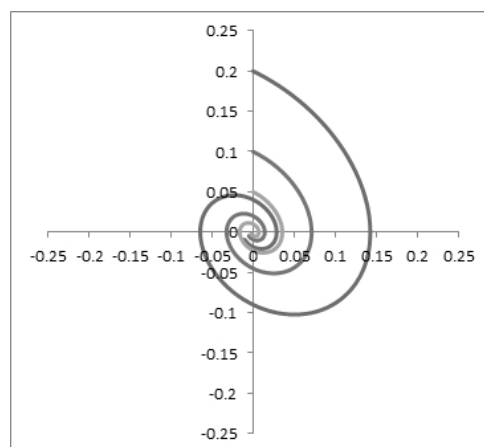
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k & -b \end{bmatrix} \quad \text{tr}A = -b \quad \det A = k$$

Fázový portrét vyšetříme na základě hodnot stopy a determinantu matice A :

- (a) $\text{tr}A = 0$, $\det A = 1$. Fázovým portrétem pro netlumené kmitání je centr.
 (b) $\text{tr}A = -0.5$, $\det A = 1$, $\det A > \frac{\text{tr}A^2}{4}$. Fázovým portrétem pro tlumené kmitání je stabilní ohnisko.



(a)



(b)

Obecné řešení určíme pomocí vlastních čísel a vlastních vektorů matice A . Vlastní čísla určíme řešením charakteristického polynomu matice $(A - E\lambda)$:

$$\det(A - E\lambda) = -\lambda(-b - \lambda) + k = \lambda^2 + b\lambda + k$$

Vlastní čísla jsou $\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4k}}{2}$. Jim příslušné vlastní vektory určíme řešením soustavy $(A - E\lambda_i)\vec{h}_i = \vec{0}$.

(a) $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$, $\vec{h}_1 = \begin{bmatrix} i \\ -1 \end{bmatrix}$, $\vec{h}_2 = \begin{bmatrix} -i \\ -1 \end{bmatrix}$.

$$\begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dv}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i \\ -1 \end{bmatrix} e^{it} + \begin{bmatrix} -i \\ -1 \end{bmatrix} e^{-it} = \begin{bmatrix} 2 \cos t \\ -2 \sin t \end{bmatrix}.$$

(b) $\lambda_1 = -0.25 + 0.97i$, $\lambda_2 = -0.25 - 0.97i$, $\vec{h}_1 = \begin{bmatrix} -0.25 - 0.97i \\ 1 \end{bmatrix}$, $\vec{h}_2 = \begin{bmatrix} -0.25 + 0.97i \\ 1 \end{bmatrix}$.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dv}{dt} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -0.25 - 0.97i \\ 1 \end{bmatrix} e^{-0.25t + 0.97it} + \begin{bmatrix} -0.25 + 0.97i \\ 1 \end{bmatrix} e^{-0.25t - 0.97it} = \\ &= \begin{bmatrix} 2e^{-0.25t} \cos 0.97t \\ 2e^{-0.25t} (-0.25 \cos 0.97t - 0.97 \sin 0.97t) \end{bmatrix}^1. \end{aligned}$$

¹Pro výpočet jsme použili Eulerův vztah, $e^{a+bi} = e^a(\cos bt + i \sin bt)$, rovnosti $\sin(-t) = -\sin(t)$, $\cos(t) = \cos(-t)$ a rozklad dvojčlenu na součin $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$.

Poznámka: Snadno se přesvědčíme, že $v(t) = x'(t)$.

Fázovým portrétem netlumeného kmitání je centr, tlumeného kmitání je stabilní ohnisko.

Řešením soustavy pro netlumené kmitání jsou funkce $x(t) = C \cos t$, $v(t) = -C \sin t$.

Řešením soustavy pro tlumené kmitání jsou funkce

$$x(t) = Ce^{-0.25t} \cos 0.97t, \quad v(t) = -Ce^{-0.25t} (-0.25 \cos 0.97t - 0.97 \sin 0.97t).$$

8 Fázové portréty soustav nelineárních DR

1. Rovnovážné stavy:

$$5 - x^2 + y^2 = 0 \wedge 4 - y^2 = 0.$$

4 rovnovážné stavy: $S_1 = (3; 2)$, $S_2 = (3; -2)$, $S_3 = (-3; 2)$, $S_4 = (-3; -2)$,

$$J(x, y) = \begin{bmatrix} -2x & 2y \\ 0 & -2y \end{bmatrix}$$

$$J(S_1) = \begin{bmatrix} -6 & 4 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = -6, \vec{h}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\lambda_2 = -4, \vec{h}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow S_1 \text{ je stabilní uzel}$$

$$J(S_2) = \begin{bmatrix} -6 & -4 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = -6, \vec{h}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\lambda_2 = 4, \vec{h}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix} \Rightarrow S_2 \text{ je sedlo}$$

$$J(S_3) = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = 6, \vec{h}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\lambda_2 = -4, \vec{h}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix} \Rightarrow S_3 \text{ je sedlo}$$

$$J(S_4) = \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = 6, \vec{h}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\lambda_2 = 4, \vec{h}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow S_4 \text{ je nestabilní uzel}$$

2. Rovnovážné stavy:

$$-x^2 + y + 2 = 0 \wedge 3 - y^2 = 0.$$

4 rovnovážné stavy:

$$S_1 = \left(\sqrt{\sqrt{3} + 2}; \sqrt{3} \right), \quad S_2 = \left(-\sqrt{\sqrt{3} + 2}; \sqrt{3} \right),$$

$$S_3 = \left(\sqrt{-\sqrt{3} + 2}; -\sqrt{3} \right), \quad S_4 = \left(-\sqrt{-\sqrt{3} + 2}; -\sqrt{3} \right),$$

$$J(x, y) = \begin{bmatrix} -2x & 1 \\ 0 & -2y \end{bmatrix}$$

$$J(S_1) = \begin{bmatrix} -2\sqrt{\sqrt{3} + 2} & 1 \\ 0 & -2\sqrt{3} \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = -2\sqrt{\sqrt{3} + 2}, \quad \vec{h}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\lambda_2 = -2\sqrt{3}, \quad \vec{h}_2 \doteq \begin{bmatrix} 1 \\ 1,2316 \end{bmatrix} \Rightarrow S_1 \text{ je stabilní uzel.}$$

$$J(S_2) = \begin{bmatrix} 2\sqrt{\sqrt{3}+2} & 1 \\ 0 & -2\sqrt{3} \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = 2\sqrt{\sqrt{3}+2}, \quad \vec{h}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\lambda_2 = -2\sqrt{3}, \quad \vec{h}_2 \doteq \begin{bmatrix} 1 \\ -7,3278 \end{bmatrix} \Rightarrow S_2 \text{ je sedlo.}$$

$$J(S_3) = \begin{bmatrix} -2\sqrt{-\sqrt{3}+2} & 1 \\ 0 & 2\sqrt{3} \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = -2\sqrt{-\sqrt{3}+2}, \quad \vec{h}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\lambda_2 = 2\sqrt{3}, \quad \vec{h}_2 \doteq \begin{bmatrix} 1 \\ 3,8637 \end{bmatrix} \Rightarrow S_3 \text{ je sedlo.}$$

$$J(S_4) = \begin{bmatrix} 2\sqrt{-\sqrt{3}+2} & 1 \\ 0 & 2\sqrt{3} \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = 2\sqrt{-\sqrt{3}+2}, \quad \vec{h}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\lambda_2 = 2\sqrt{3}, \quad \vec{h}_2 \doteq \begin{bmatrix} 1 \\ 2,4288 \end{bmatrix} \Rightarrow S_2 \text{ je nestabilní uzel.}$$

9 Základy vektorové analýzy

1.

$$\vec{u}(\vec{r}) = \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|} = \frac{(x, y, z)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = (f_1, f_2, f_3), \quad (x, y, z) \neq (0, 0, 0).$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) = \frac{y^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}},$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) = \frac{x^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}},$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) = \frac{x^2 + y^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}},$$

$$\nabla \cdot \vec{u} = \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \cdot (2x^2 + 2y^2 + 2z^2) = \frac{2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} = \frac{2}{\|\vec{r}\|}.$$

2.

$$f(\vec{r}) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} =: \|\vec{r}\|, \quad \Delta f = \nabla \cdot \nabla f.$$

Pro $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ je

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \Rightarrow \nabla f = \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|}.$$

Vypočteme ještě potřebné druhé derivace:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{y^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{x^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{x^2 + y^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}},$$

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{2}{\|\vec{r}\|}.$$

3. Označme $\vec{F}(x, y, z) = (f_1(x, y, z), f_2(x, y, z), f_3(x, y, z))$. Necht $\vec{F}$ je spojitě diferencovatelné na jednoduše souvislé oblasti $G \subset \mathbb{R}^3$. Pak $\vec{F}$ je potenciální na $G \iff$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial x} \wedge \frac{\partial f_1}{\partial z} = \frac{\partial f_3}{\partial x} \wedge \frac{\partial f_2}{\partial z} = \frac{\partial f_3}{\partial y} \quad \forall (x, y, z) \in G \iff$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial x} = 0 \wedge \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x} = 0 \wedge \frac{\partial f_2}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial y} = 0 \quad \forall (x, y, z) \in G.$$

$$\text{rot} \vec{F}(x, y, z) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}, \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) = (0, 0, 0).$$

4.

$$u(\vec{r}) = u(x, y, z) = A \cos((\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3)(x, y, z) + \delta).$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -A\kappa_1 \sin(\kappa_1 x + \kappa_2 y + \kappa_3 z + \delta),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -A\kappa_2 \sin(\kappa_1 x + \kappa_2 y + \kappa_3 z + \delta),$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -A\kappa_3 \sin(\kappa_1 x + \kappa_2 y + \kappa_3 z + \delta).$$

$$\nabla \cdot u(\vec{r}) = -A(\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3) \sin(\vec{\kappa} \cdot \vec{r} + \delta).$$

5. i)

$$\vec{u}(\vec{r}) = \frac{\vec{r}}{||\vec{r}||^n} = \left(\frac{x}{||\vec{r}||^n}, \frac{y}{||\vec{r}||^n}, \frac{z}{||\vec{r}||^n} \right) = (f_1, f_2, f_3).$$

Připomeňme, že v jednom z předchozích příkladů už jsme spočítali, že

$$\frac{\partial ||\vec{r}||}{\partial x} = \frac{x}{||\vec{r}||}, \quad \frac{\partial ||\vec{r}||}{\partial y} = \frac{y}{||\vec{r}||}, \quad \frac{\partial ||\vec{r}||}{\partial z} = \frac{z}{||\vec{r}||}.$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{||\vec{r}||^n - xn||\vec{r}||^{n-1} \frac{\partial ||\vec{r}||}{\partial x}}{||\vec{r}||^{2n}} = \frac{||\vec{r}||^{n-2} (||\vec{r}||^2 - nx^2)}{||\vec{r}||^{2n}} = \frac{||\vec{r}||^2 - nx^2}{||\vec{r}||^{n+2}},$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial y} = \frac{||\vec{r}||^n - yn||\vec{r}||^{n-1} \frac{\partial ||\vec{r}||}{\partial y}}{||\vec{r}||^{2n}} = \frac{||\vec{r}||^{n-2} (||\vec{r}||^2 - ny^2)}{||\vec{r}||^{2n}} = \frac{||\vec{r}||^2 - ny^2}{||\vec{r}||^{n+2}},$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial z} = \frac{||\vec{r}||^n - zn||\vec{r}||^{n-1} \frac{\partial ||\vec{r}||}{\partial z}}{||\vec{r}||^{2n}} = \frac{||\vec{r}||^{n-2} (||\vec{r}||^2 - nz^2)}{||\vec{r}||^{2n}} = \frac{||\vec{r}||^2 - nz^2}{||\vec{r}||^{n+2}}.$$

$$\nabla \cdot \vec{u}(\vec{r}) = \frac{3||\vec{r}||^2 - n(x^2 + y^2 + z^2)}{||\vec{r}||^{n+2}} = \frac{3 - n}{||\vec{r}||^n}.$$

(ii)

$$\vec{a} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ x & y & z \end{vmatrix} = (a_2 z - a_3 y, a_3 x - a_1 z, a_1 y - a_2 x)$$

$$\vec{u}(\vec{r}) = \frac{\vec{a} \times \vec{r}}{||\vec{r}||^3} = \left(\frac{a_2 z - a_3 y}{||\vec{r}||^3}, \frac{a_3 x - a_1 z}{||\vec{r}||^3}, \frac{a_1 y - a_2 x}{||\vec{r}||^3} \right) = (f_1, f_2, f_3)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_1}{\partial x} &= (a_1 z - a_3 y) \frac{\partial}{\partial x} \|\vec{r}\|^{-3} = -\frac{3x(a_2 z - a_3 y)}{\|\vec{r}\|^5} \\
\frac{\partial f_2}{\partial y} &= (a_3 x - a_1 z) \frac{\partial}{\partial y} \|\vec{r}\|^{-3} = -\frac{3y(a_3 x - a_1 z)}{\|\vec{r}\|^5} \\
\frac{\partial f_3}{\partial z} &= (a_1 y - a_2 x) \frac{\partial}{\partial z} \|\vec{r}\|^{-3} = -\frac{3z(a_1 y - a_2 x)}{\|\vec{r}\|^5} \\
\nabla \cdot \vec{u}(\vec{r}) &= -\frac{3}{\|\vec{r}\|^5} (a_2 x z - a_3 x y + a_3 x y - a_1 y z + a_1 y z - a_2 x z) = 0.
\end{aligned}$$

6. (i)

$$\vec{u}(\vec{r}) = \frac{\vec{v}}{\|\vec{r}\|} = \left(\frac{v_1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{v_2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{v_3}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) = (f_1, f_2, f_3),$$

$f_i = f_i(x, y, z) = f_i(\|\vec{r}\|), \quad i = 1, 2, 3.$

$$\text{rot}(\vec{u}(\vec{r})) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}, -\frac{\partial f_3}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial z}, \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right).$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_1}{\partial y} &= -\frac{v_1 y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, & \frac{\partial f_1}{\partial z} &= -\frac{v_1 z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \\
\frac{\partial f_2}{\partial x} &= -\frac{v_2 x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, & \frac{\partial f_2}{\partial z} &= -\frac{v_2 z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \\
\frac{\partial f_3}{\partial x} &= -\frac{v_3 x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, & \frac{\partial f_3}{\partial y} &= -\frac{v_3 y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \\
\text{rot}(\vec{u}(\vec{r})) &= \frac{1}{\|\vec{r}\|^3} (v_2 z - v_3 y, -v_1 z + v_3 x, v_1 y - v_2 x) = \frac{\vec{v} \times \vec{r}}{\|\vec{r}\|^3}.
\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}
\vec{a} \times \vec{r} &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ x & y & z \end{vmatrix} = (a_2 z - a_3 y, -a_1 z + a_3 x, a_1 y - a_2 x) = (v_1, v_2, v_3). \\
\text{rot}(\vec{u}(\vec{r})) &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z}, -\frac{\partial v_3}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial z}, \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) = 2\vec{a}.
\end{aligned}$$

7. skalární pole f , vektorové pole $\vec{u}$

Poznámka: Laplaceův operátor aplikovaný na vektorové pole působí na jednotlivé složky tohoto vektorového pole a generuje tak vektorové pole: $\Delta \vec{u} = (\Delta u_1, \Delta u_2, \Delta u_3)$

$$(a) \quad \nabla \cdot \nabla f = \nabla \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \Delta f.$$

$$(b) \quad \nabla \text{div} \vec{u} = \text{rot} \nabla \times \vec{u} + \Delta \vec{u}$$

$$L: \quad \nabla \text{div} \vec{u} = \nabla \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial z} \right) = \nabla g = \left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial z} \right).$$

kde

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial g}{\partial x} &= \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x \partial z} \\
 \frac{\partial g}{\partial y} &= \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial y \partial z} \\
 \frac{\partial g}{\partial z} &= \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial z^2}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{P : } \operatorname{rot} \nabla \times \vec{u} + \Delta \vec{u} &= \operatorname{rot} \begin{pmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{pmatrix} + (\Delta u_1, \Delta u_2, \Delta u_3) = \\
 \operatorname{rot} \begin{pmatrix} \underbrace{\frac{\partial u_3}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial z}}_{v_1}, & \underbrace{-\frac{\partial u_3}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial z}}_{v_2}, & \underbrace{\frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y}}_{v_3} \end{pmatrix} &+ (\Delta u_1, \Delta u_2, \Delta u_3) = \\
 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} &+ (\Delta u_1, \Delta u_2, \Delta u_3) = \\
 = \left(\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z}, -\frac{\partial v_3}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial z}, \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) &+ (\Delta u_1, \Delta u_2, \Delta u_3) = \\
 = \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2}, -\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2}, \right. \\
 \left. -\frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 u_3}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial y \partial z} \right) &+ (\Delta u_1, \Delta u_2, \Delta u_3).
 \end{aligned}$$

První složka:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} &= \\
 = \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x \partial z}, &
 \end{aligned}$$

Druhá složka:

$$\begin{aligned}
 -\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2} &= \\
 = \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial y \partial z}, &
 \end{aligned}$$

Třetí složka:

$$\begin{aligned}
 -\frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 u_3}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial z^2} &= \\
 = \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial z^2}. &
 \end{aligned}$$

Závěr: $\mathbf{L} = \mathbf{P}$.

(c) $\Delta \nabla f = \nabla \Delta f$

L:

$$\Delta \nabla f = \Delta \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) = \left(\Delta \frac{\partial f}{\partial x}, \Delta \frac{\partial f}{\partial y}, \Delta \frac{\partial f}{\partial z} \right) =$$

$$= \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial z^2}, \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial z^2}, \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial z} + \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial z} + \frac{\partial^3 f}{\partial z^3} \right)$$

P:

$$\nabla \Delta f = \nabla \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \right) =$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \right), \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \right), \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \right) \right) =$$

$$= \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial z^2}, \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial z^2}, \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial z} + \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial z} + \frac{\partial^3 f}{\partial z^3} \right)$$

Závěr: L = P.

(d) Stejně, jako v předchozích příkladech, požadovanou rovnost získáte rozepsáním levé a pravé strany rovnosti a po úpravě porovnáním odpovídajících složek výsledných vektorů.

(e)

$$\text{rot grad } f = \text{rot} \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}, -\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right) = (0, 0, 0) = \vec{0}.$$

(f)

$$\nabla \cdot \nabla \times \vec{u} = \nabla \cdot \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \nabla \cdot \left(\frac{\partial u_3}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial z}, -\frac{\partial u_3}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial z}, \frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_3}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial u_3}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) = 0$$

10 Plošný integrál

1. Najdeme průsečíky obou parabol.

$$1 - ax^2 = bx^2 \Rightarrow |x| = \frac{1}{\sqrt{a+b}}.$$

Pro plochy musí platit: $P_1 = P_2 + P_3$. Vypočteme jednotlivé plochy:

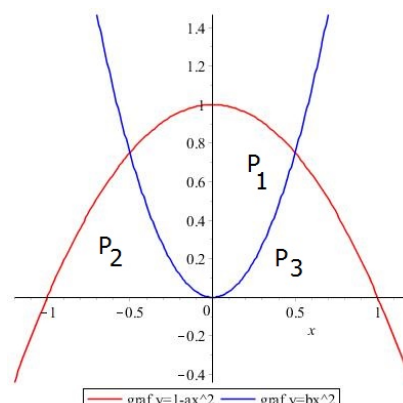
$$P_1 = \int_{-\frac{1}{\sqrt{a+b}}}^{\frac{1}{\sqrt{a+b}}} (1 - (a+b)x^2) dx = \frac{4}{3\sqrt{a+b}},$$

Obě funkce jsou sudé, mají graf souměrný podle osy y , tedy $P_2 = P_3$

$$\begin{aligned} P_3 &= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{a+b}}} bx^2 dx + \int_{\frac{1}{\sqrt{a+b}}}^{\frac{1}{\sqrt{a}}} (1 - ax^2) dx = \\ &= \frac{2}{3} \frac{\sqrt{a+b} - \sqrt{a}}{\sqrt{a}\sqrt{a+b}} \Rightarrow P_2 + P_3 = \frac{4}{3} \frac{\sqrt{a+b} - \sqrt{a}}{\sqrt{a}\sqrt{a+b}}. \end{aligned}$$

Parametr b určíme z rovnice $P_1 = P_2 + P_3$:

$$\frac{4}{3\sqrt{a+b}} = \frac{4}{3} \frac{\sqrt{a+b} - \sqrt{a}}{\sqrt{a}\sqrt{a+b}} \Rightarrow b = 3a.$$



2. $x = pV$, $y = pV^\gamma$

$$\det(J(x, y)) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial p} & \frac{\partial x}{\partial V} \\ \frac{\partial y}{\partial p} & \frac{\partial y}{\partial V} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} V & p \\ V^\gamma & p\gamma V^{\gamma-1} \end{vmatrix} = pV^\gamma(\gamma - 1).$$

3. Objem tělesa lze napsat jako objemový integrál $\iiint_V dV$, kde dV představuje diferenciál objemu tělesa. Úlohu lze řešit
- (i) Přímou integrací diferenciálu objemu dV
 - (ii) Převedením pomocí Gauss-Ostrogradského věty na plošný integrál

Ad (i) - přímá integrace Vztah pro diferenciál objemu koule lze odvodit více způsoby. My však využijeme toho, že již známe vztah pro diferenciál plochy $dS = ||\vec{n}|| d\phi d\theta$. Pro diferenciál objemu platí $dV = dS dr = ||\vec{n}|| d\phi d\theta dr$.

Normálu povrchu koule $\vec{n}$ určíme jako vektorový součin tečných vektorů e_1 a e_2 :

$$\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial \phi} \\ \frac{\partial z}{\partial \phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r \sin \phi \sin \theta \\ r \cos \phi \sin \theta \\ 0 \end{bmatrix} \quad \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \cos \phi \cos \theta \\ r \sin \phi \cos \theta \\ -r \sin \theta \end{bmatrix}$$

$$\vec{n} = \vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} r^2 \cos \phi \sin^2 \theta \\ r^2 \sin \phi \sin^2 \theta \\ r^2 \sin \theta \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$||\vec{n}|| = \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2} = \sqrt{r^4 \sin^2 \theta} = r^2 \sin \theta$$

$$dV = r^2 \sin \theta d\phi d\theta dr$$

$$V = \int_0^R \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} r^2 \sin \theta d\phi d\theta dr = \frac{2}{3} \pi R^3$$

Ad(ii) - převedení na plošný integrál Trojný integrál $\iiint_V dV$ lze pomocí Gaussovy věty převést na plošný integrál vektorového pole s jednotkovou divergencí:

$$\iiint_V dV = \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} \quad \nabla \cdot \vec{F} = 1$$

Takovým vektorovým polem je např. pole $\vec{F} = (x, 0, 0)^T$. Polokoule je ohraničena dvěma plochami - podstavou S_1 a vrchlíkem S_2 . Tok pole $\vec{F}$ přes hranice polokoule určíme jako součet toku přes jednotlivé plochy:

$$V = \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_1} \vec{F} \cdot d\vec{S}_1 + \iint_{S_2} \vec{F} \cdot d\vec{S}_2$$

Zvolené vektorové pole $\vec{F}$ je rovnoběžné s podstavou polokoule, první integrál na pravé straně je tedy roven 0.

$$V = \iint_{S_2} \vec{F} \cdot d\vec{S}_2 = \iint_{S_2} \vec{F} \cdot \vec{n}_2 dS_2$$

Normálu vrchlíku jsme určili při řešení první části

$$V = \iint_{S_2} \vec{F} \cdot \vec{n}_2 dS_2 = \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} r^3 \cos^2 \phi \sin^3 \theta d\phi d\theta = \frac{2}{3} \pi r^3$$

Poznámka. Při integraci jsme použili vztahy

$$\cos^2 \phi = \frac{1}{2} (1 + \cos 2\phi) \quad a \quad \sin^3 \theta = \frac{1}{4} (3 \sin \theta - \sin 3\theta) .$$

11 Fourierovy řady a PDR

11.1 Úlohy na Fourierovy řady

1.

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t \in (-1, 0) \\ t, & t \in (0, 1) \end{cases}, \quad f(t+2) = f(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Periodické rozšíření má skok v bodech $t = 2k + 1$, $k \in \mathbb{Z}$. V ostatních bodech $t \in \mathbb{R}$ je rozšíření funkce f spojitě.

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\pi t) + b_n \sin(n\pi t)), \quad \text{kde}$$

$$a_0 = \frac{1}{2} \int_0^1 t dt = \frac{1}{4}$$

$$a_n = \int_0^1 t \cos(n\pi t) dt = \frac{1}{n^2 \pi^2} (\cos(n\pi) - 1) = \frac{1}{n^2 \pi^2} (-1 + (-1)^n), \quad n = 1, 2, \dots$$

$$b_n = \int_0^1 t \sin(n\pi t) dt = -\frac{1}{n\pi} \cos(n\pi) = \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$f(-7) = f(1) = \frac{1}{2} [f_+(1) + f_-(1)] = \frac{1}{2}.$$

2. $f(x) = |x| \Rightarrow f$ je sudá $\Rightarrow b_n = 0$.

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \pi,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos(nx) dx = \left| \begin{array}{l} u = x \quad v' = \cos(nx) \\ u' = 1 \quad v = \frac{1}{n} \sin(nx) \end{array} \right| = \underbrace{\frac{2}{\pi} \left[\frac{x}{n} \sin(nx) \right]_0^{\pi}}_{=0} - \frac{2}{n\pi} \int_0^{\pi} \sin(nx) dx =$$

$$= \frac{2}{n^2\pi} [\cos(nx)]_0^{\pi} = \frac{2}{n^2\pi} [\cos(n\pi) - \cos(0)] = \frac{2}{n^2\pi} [(-1)^n - 1] \Rightarrow$$

$$a_n = \begin{cases} -\frac{4}{n^2\pi} & n \text{ liché} \\ 0 & n \text{ sudé.} \end{cases}$$

Tedy

$$|x| \sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}.$$

Dosadíme-li do řady hodnotu $x = 0$, dostaneme rovnost

$$\frac{\pi}{2} = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

3. $f(t) = t - \pi, \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle$.

a) Hledejme nejprve Fourierovu řadu. Když danou funkci rozšíříme periodicky, bude její perioda 2π . Pak

$$a_0 = \frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} (t - \pi) dt = \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{2} (t - \pi)^2 \right]_0^{2\pi} = 0,$$

$$a_k = \frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} (t - \pi) \cos(kt) dt = \frac{1}{\pi} \left(\left[(t - \pi) \frac{1}{k} \sin(kt) \right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \frac{1}{k} \sin(kt) dt \right) =$$

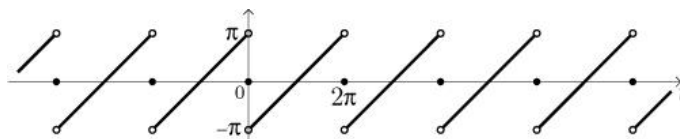
$$= \frac{1}{k\pi} [\pi \sin(2k\pi) + \pi \sin(0)] + \frac{1}{k\pi} \left[\frac{1}{k} \cos(kt) \right]_0^{2\pi} = 0,$$

$$b_k = \frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} (t - \pi) \sin(kt) dt = \frac{1}{\pi} \left(\left[(t - \pi) \frac{-1}{k} \cos(kt) \right]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \frac{1}{k} \cos(kt) dt \right) =$$

$$= -\frac{1}{k\pi} [\pi \cos(2k\pi) + \pi \cos(0)] + \frac{1}{k\pi} \left[\frac{1}{k} \sin(kt) \right]_0^{2\pi} = -\frac{2}{k}.$$

Dostaneme tedy

$$f(t) \sim -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k} \sin(kt).$$



b) Sinová Fourierova řada:

Vzhledem k tomu, že v získané Fourierově řadě vystupují pouze siny, tak už to je sinová řada. Ale zkusme, jak by se sinová řada počítala. Uvažujeme rozšíření dané funkce f na interval $\langle -2\pi, 0 \rangle$ tak, aby byla výsledná funkce lichá. Původní funkce měla délku definičního oboru $L = 2\pi$, proto tato nová funkce utvoří periodické rozšíření s $T = 4\pi$ a s poloviční frekvencí $\omega = 1/2$. Pro sinovou řadu jsou koeficienty a_0 a a_k automaticky nulové, stačí spočítat b_k .

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} (t - \pi) \sin\left(\frac{1}{2}kt\right) dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\left[(t - \pi) \frac{-2}{k} \cos\left(\frac{1}{2}kt\right) \right]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \frac{2}{k} \cos\left(\frac{1}{2}kt\right) dt \right) = \\ &= -\frac{2}{k\pi} [\pi \cos(k\pi) + \pi \cos(0)] + \frac{2}{k\pi} \left[\frac{2}{k} \sin\left(\frac{1}{2}kt\right) \right]_0^{2\pi} = -\frac{2}{k} [1 + (-1)^k]. \end{aligned}$$

Dostaneme tedy

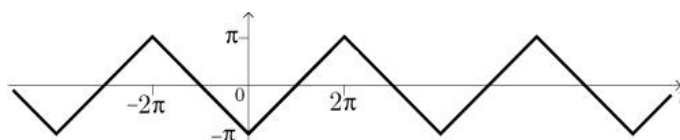
$$f(t) \sim -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k} [1 + (-1)^k] \sin\left(\frac{1}{2}kt\right).$$

Výraz $[1 + (-1)^k]$ je roven 0 pro lichá k , takže se liché násobky z řady vytráčí. Pro sudá k bude tento výraz roven 2. Mužeme tedy přepsat tuto řadu jen na sudé násobky tak, že k nahradíme $2k$. Pak

$$f(t) \sim -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k} \sin(kt).$$

Dostali jsme stejnou řadu jako v a).

c) Kosinová Fourierova řada:



Kosinovou Fourierovu řadu dostaneme rozšířením dané funkce f na $\langle -2\pi, 0 \rangle$ tak, aby byla výsledná funkce sudá. Původní funkce měla délku definičního oboru $L = 2\pi$, proto tato nová funkce utvoří periodické rozšíření s $T = 4\pi$ a s poloviční frekvencí $\omega = 1/2$. Pro sudou funkci jsou $b_k = 0$, musíme spočítat a_0 a a_k .

$$a_0 = \frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} (t - \pi) dt = 0,$$

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} (t - \pi) \cos\left(\frac{1}{2}kt\right) dt = \frac{1}{\pi} \left(\left[(t - \pi) \frac{2}{k} \sin\left(\frac{1}{2}kt\right) \right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \frac{2}{k} \sin\left(\frac{1}{2}kt\right) dt \right) = \\ &= 0 + \frac{2}{k\pi} \left[\frac{2}{k} \cos\left(\frac{1}{2}kt\right) \right]_0^{2\pi} = \frac{4}{k^2\pi} [(-1)^k - 1]. \end{aligned}$$

Dostaneme

$$f(t) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^2\pi} [(-1)^k - 1] \cos\left(\frac{1}{2}kt\right).$$

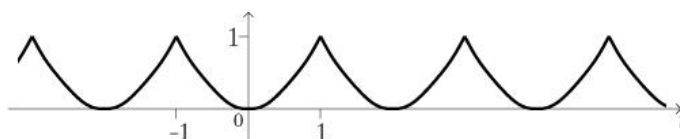
Zde

$$\left[(-1)^k - 1\right] = \begin{cases} 0 & k \text{ sudé} \\ -2 & k \text{ liché} \end{cases}$$

Můžeme tedy řadu přepsat jen pro liché násobky tak, že nahradíme k výrazem $2k+1$. Abychom dostali všechna kladná lichá čísla (včetně 1), musíme začít sčítat od 0. Tedy

$$f(t) \sim - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{8}{\pi(2k+1)^2} \cos\left(\frac{2k+1}{2}t\right).$$

4. $f(t) = t^2$, $t \in \langle -1, 1 \rangle$ – tato funkce je sudá. Když ji rozšíříme periodicky, bude její perioda $T = 2$, odpovídající frekvence je tedy $\omega = \pi$.



Protože f je sudá, je $b_k = 0 \ \forall k$.

$$a_0 = \frac{2}{2} \int_{-1}^1 t^2 dt = \left[\frac{1}{3} t^3 \right]_{-1}^1 = \frac{2}{3},$$

$$a_k = \frac{2}{2} \int_{-1}^1 t^2 \cos(k\pi t) dt.$$

Dvojitá aplikace metody per-partes dává

$$\begin{aligned} a_k &= \int_{-1}^1 t^2 \cos(k\pi t) dt = \frac{1}{k\pi} [t^2 \sin(k\pi t)]_{-1}^1 - \frac{2}{k\pi} \int_{-1}^1 t \sin(k\pi t) dt = \\ &= -\frac{2}{k\pi} \left(\left[-\frac{1}{k\pi} t \cos(k\pi t) \right]_{-1}^1 + \frac{1}{k\pi} \int_{-1}^1 \cos(k\pi t) dt \right) = \\ &= \frac{2}{k^2\pi^2} [\cos(k\pi) + \cos(-k\pi)] + \frac{2}{k^2\pi^2} \left[\frac{1}{k\pi} \sin(k\pi t) \right]_{-1}^1 = \frac{4(-1)^k}{k^2\pi^2}. \end{aligned}$$

Dostaneme tedy

$$f(t) \sim \frac{1}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{4}{k^2\pi^2} \cos(k\pi t).$$

Pro $t = 1$ je

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{4}{k^2\pi^2} \cos(k\pi), \\ \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{4}{k^2\pi^2} (-1)^k &= \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}. \end{aligned}$$

Pro $t = 0$ je

$$0 = \frac{1}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{4}{k^2\pi^2} \cdot 1 \Rightarrow -\frac{1}{3} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{4}{k^2\pi^2} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} = -\frac{\pi^2}{12}.$$

5.

$$f(x) = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}, \quad f \text{ je lichá funkce} \Rightarrow a_k = 0 \quad \forall k = 0, 1, 2, \dots$$

Funkce f má skok v bodě $x = 0$, v ostatních bodech je spojitá.

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)), \quad \text{kde}$$

$$a_n = 0 \quad \forall n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(nx) dx = \frac{2}{\pi n} (1 - (-1)^n) = \begin{cases} 0 & n \text{ sudé} \\ \frac{4}{\pi n} & n \text{ liché.} \end{cases}$$

$$f(x) \sim \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} [1 - (-1)^n] \sin(nx).$$

Pro n sudé je výraz v závorce roven nule. Vynecháme tedy sudé členy a sečteme jen liché, ale pak musíme n nahradit $2k+1$, $k = 0, 1, \dots$. Tedy

$$f(x) \sim \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{(2k+1)\pi} \sin((2k+1)x) = \frac{8}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \sin((2k+1)x).$$

Pro $x = \frac{\pi}{2}$ dostaneme

$$1 = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{8}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \sin\left((2k+1)\frac{\pi}{2}\right) = \frac{8}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} (-1)^k.$$

Tedy

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi^2}{8}.$$

11.2 Úlohy na PDR a Fourierovu metodu

1. Určíme znaménko diskriminantu

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2\frac{dy}{dx} + 1 = 0.$$

Pro diskriminant platí $\Delta = 0$. Rovnice je parabolická.

2. Charakteristická rovnice má dvojnásobný kořen $\frac{dy}{dx} = -1$. Odtud $y(x) = -x + C$, $C \in \mathbb{R}$. Zvolíme $\xi = C$, tzn. $\xi = x + y$. Za η zvolíme libovolnou funkci proměnných x, y , která je lineárně nezávislá na ξ , například $\eta = x$. Počítáme parciální derivace

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} = 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}. \end{aligned}$$

Po dosazení do výchozí rovnice dostáváme kanonický tvar

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + (a+b) \frac{\partial u}{\partial \xi} + a \frac{\partial u}{\partial \eta} + cu = 0.$$

3. Určíme znaménko diskriminantu

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2\frac{dy}{dx} + 1 = 0.$$

Pro diskriminant platí $\Delta = 0$. Rovnice je parabolická.

4. Charakteristická rovnice má dvojnásobný kořen $\frac{dy}{dx} = 1$. Odtud $y(x) = x + C$, $C \in \mathbb{R}$. Zvolíme $\xi = C$, tzn. $\xi = -x + y$. Za η zvolíme libovolnou funkci proměnných x, y , která je nezávislá na ξ , například $\eta = x$. Počítáme parciální derivace

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= -\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}.\end{aligned}$$

Po dosazení do výchozí rovnice dostáváme kanonický tvar

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0. \quad (12.1)$$

5. Na začátku hledáme funkci $\hat{u}$ v součinném tvaru

$$u(x, y, t) = X(x)Y(y)T(t).$$

Po zderivování, dosazení do rovnice a elementárních úpravách dostáváme

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} = \frac{1}{v^2} \frac{T''(t)}{T(t)},$$

přičemž musí existovat konstanty p, q, β takové, aby $p + q = \beta$ a

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = p, \quad \frac{Y''(y)}{Y(y)} = q, \quad \frac{1}{v^2} \frac{T''(t)}{T(t)} = \beta.$$

Analogickým způsobem, jak v jednodimenzionálním případě vlnové rovnice a s ohledem na okrajové podmínky, dostáváme nenulové řešení první z dvou rovnic výše pouze pro záporné hodnoty p a q , které musí být ve tvaru $p = -\frac{n^2\pi^2}{a^2}$ pro $n = 1, 2, \dots$ i $q = -\frac{m^2\pi^2}{b^2} < 0$ pro $m = 1, 2, \dots$. Potom $X(x) = c_1 \sin \frac{n\pi x}{a}$, $Y(y) = c_2 \sin \frac{m\pi y}{b}$. Následně $\beta = -\frac{n^2\pi^2}{a^2} - \frac{m^2\pi^2}{b^2}$, kde $n, m = 1, 2, \dots$. Pro zjednodušení zápisu budeme používat

$$p_{nm} = \sqrt{\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}} \pi.$$

Potom $T(t) = c_3 \cos p_{nm}vt + c_4 \sin p_{nm}vt$. Analogickým způsobem, jak v případě jednodimenzionální vlnové rovnice, dostáváme řešení ve tvaru sumy

$$\sum_{n,m} (a_{nm} \cos p_{nm}vt + b_{nm} \sin p_{nm}vt) \left(\sin \frac{n\pi x}{a} \right) \sin \frac{m\pi y}{b}.$$

Koeficienty a_{nm} a b_{nm} hledáme pomocí počátečních podmínek. Použitím $t = 0$ v rovnici výše a použitím počáteční podmínky dostáváme

$$f(x, y) = \sum_{n,m=1}^{\infty} a_{nm} \left(\sin \frac{n\pi x}{a} \right) \sin \frac{m\pi y}{b}.$$

Tuto rovnost násobíme na obou stranách součinem funkcí $\sin \frac{n'\pi x}{a}$ i $\sin \frac{m'\pi y}{b}$ a pro obě strany obdržené rovnice počítáme dvojný integrál přes obdelník $[0, a] \times [0, b]$. Analogicky, jak v případě jednodimenzionálním, dostáváme a_{nm} rovné

$$\frac{4}{ab} \iint_{[0,a] \times [0,b]} f(x, y) \left(\sin \frac{n\pi x}{a} \right) \left(\sin \frac{m\pi y}{b} \right) dx dy.$$

Počítáme partiální derivace funkce u podle proměnné t , dosadíme $t = 0$ a použijeme počáteční podmínku. Dostáváme

$$g(x, y) = \sum_{n,m=1}^{\infty} b_{nm} p_{nm} v \left(\sin \frac{n\pi x}{a} \right) \sin \frac{m\pi y}{b}.$$

Ově strany vynásobíme součinem funkcí $\sin \frac{n'\pi x}{a}$ a $\sin \frac{m'\pi y}{b}$, pro obě strany obdržené rovnice počítáme dvojný integrál přes obdelník $[0, a] \times [0, b]$. Po zintegrování a elementárních úpravách dostáváme b_{nm} rovne

$$\frac{4}{ab p_{nm} v} \iint_{[0,a] \times [0,b]} g(x, y) \left(\sin \frac{n\pi x}{a} \right) \left(\sin \frac{m\pi y}{b} \right) dx dy.$$

Nakonec se musí dokázat stejnoměrná konvergence příslušné řady.

6. Na začátku hledáme funkci $\hat{u}$ v součinném tvaru $\hat{u}(x, t) = X(x)T(t)$, $x \in (0, l)$, $t \in (0, \infty)$, která je řešením rovnice, vyhovuje okrajové podmínce, přičemž se momentálně nezabýváme počáteční podmínkou. Dvakrát derivujeme $\hat{u}$, dosazujeme do rovnice a za předpokladu $X(x) \neq 0$ a $T(t) \neq 0$ dělíme obě strany součinem $X(x)T(t)$. Dostáváme rovnici, která platí, pokud obě strany jsou konstantní a rovné nějakému $\beta \in \mathbb{R}$:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{\alpha^2} \frac{T'(t)}{T(t)} = \beta.$$

Z první rovnice dostáváme

$$X''(x) - \frac{\beta}{\alpha^2} X(x) = 0.$$

Pro $\beta > 0$ řešením je

$$X(x) = a_1 e^{\frac{\sqrt{\beta}}{\alpha} x} + a_2 e^{-\frac{\sqrt{\beta}}{\alpha} x}, \quad x \in (0, l).$$

Z okrajových podmínek plyne $a_2 = -a_1$ a

$$a_1 \left(e^{\frac{\sqrt{\beta}}{\alpha} l} - e^{-\frac{\sqrt{\beta}}{\alpha} l} \right) = 0.$$

Exponenciální funkce je kladná a prostá, proto výraz v závorce je nenulový, proto $a_1 = 0$, a dále $a_2 = 0$. Z toho plyne, že jediné řešení v hledaném tvaru je konstantní funkce rovná nule.

Pro $\beta = 0$ řešením je

$$X(x) = a_1 + a_2x, \quad x \in (0, l).$$

Z okrajové podmínky $\hat{u}(0, t) = 0$ plyne $a_1 = 0$, a z podmínky $\hat{u}(\pi, t) = 0$ plyne $a_1 + a_2l = 0$. Dohromady $a_1 = a_2 = 0$. To znamená, že pro $\beta = 0$ jediné řešení $\hat{u}$ v hledaném tvaru splňující okrajové podmínky je konstantní funkce rovná nule.

Nechť $\beta < 0$. Řešením je

$$X(x) = a_1 \cos\left(\frac{\sqrt{|\beta|}}{\alpha}x\right) + a_2 \sin\left(\frac{\sqrt{|\beta|}}{\alpha}x\right), \quad x \in (0, l).$$

Z okrajové podmínky $\hat{u}(0, t) = 0$ plyne $a_1 = 0$, odkud

$$X(x) = a_2 \sin\left(\frac{\sqrt{|\beta|}}{\alpha}x\right), \quad x \in (0, l).$$

Obě okrajové podmínky platí a zároveň může být $a_2 \neq 0$ pokud $\sqrt{|\beta|}l/\alpha = n\pi$, což znamená $\beta = -\alpha^2 n^2 \pi^2 / l^2$ pro libovolné $n = 1, 2, \dots$. Z toho plyne, že nenulové řešení $\hat{u}$ uvažované rovnice ve tvaru $\hat{u}(x, t) = X(x)T(t)$, které splňuje okrajové podmínky, existuje právě tehdy, když $\beta = -\alpha^2 n^2 \pi^2 / l^2$ pro libovolné $n = 1, 2, \dots$

Funkce T bude definována tak, aby platila druhá počáteční podmínka. Z druhé rovnice v

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{\alpha^2} \frac{T'(t)}{T(t)} = \beta.$$

s $\beta = -\alpha^2 n^2 \pi^2 / l^2$ plyne

$$T(t) = be^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2 t}{l^2}}, \quad t \in (0, \infty),$$

Řešením je libovolná funkce ve tvaru

$$u_n(x, t) = c_n \sin \frac{n\pi x}{l} e^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2 t}{l^2}}, \quad (x, t) \in (0, l) \times (0, \infty)$$

kde $n = 1, 2, \dots$. Definujeme

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t).$$

Dosadíme $t = 0$ dostáváme z počáteční podmínky rovnici

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{n\pi x}{l} = f(x).$$

Hledáme konkrétní konstanty c_n , pro které počáteční podmínka platí. Násobíme obě strany rovnice výrazem $\sin \frac{k\pi x}{l}$ s libovolným $k = 1, 2, \dots$, integrujeme v mezích od 0 do l a využijeme známého faktu

$$\int_0^l \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{k\pi x}{l} dx = \begin{cases} \frac{l}{2}, & n = k, \\ 0, & n \neq k. \end{cases}$$

Obdržíme rovnici

$$c_k \cdot \frac{l}{2} = \int_0^l f(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx.$$

Odtud plyne, že v definici funkce u_n musíme zvolit c_n rovné

$$c_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx,$$

a následně definovat u vzorcem

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t).$$

Zbývá dokázat stejnoměrnou konvergenci této řady, což nebudeme dělat.