

Úvod do funkcionální analýzy

Miroslava Dubcová

Ústav matematiky

Přednášky LS 2019-2020

- 1 Banachův a Hilbertův prostor
 - Normované lineární prostory.
 - Prostor se skalárním součinem.
 - Ortonormální soustavy a baze.
- 2 Lineární zobrazení, operátor a funkcionál.
 - Lineární zobrazení.
 - Norma lineárního zobrazení.
 - Příklady.
 - Frechet-Rieszova věta
- 3 Spektrální teorie.
 - Vlastní čísla a vlastní funkce lineárních operátorů.
 - Spektrum operátoru.
 - Příklady.
 - Spektrální teorie v Hilbertových prostorech
- 4 Něco z kvantové mechaniky.
 - Základní postuláty kvantové mechaniky.
 - Fyzikální veličiny v kvantové mechanice.
 - Schrödingerova rovnice.

- 1 Banachův a Hilbertův prostor
 - Normované lineární prostory.
 - Prostor se skalárním součinem.
 - Ortonormální soustavy a baze.
- 2 Lineární zobrazení, operátor a funkcionál.
 - Lineární zobrazení.
 - Norma lineárního zobrazení.
 - Příklady.
 - Frechet-Rieszova věta
- 3 Spektrální teorie.
 - Vlastní čísla a vlastní funkce lineárních operátorů.
 - Spektrum operátoru.
 - Příklady.
 - Spektrální teorie v Hilbertových prostorech
- 4 Něco z kvantové mechaniky.
 - Základní postuláty kvantové mechaniky.
 - Fyzikální veličiny v kvantové mechanice.
 - Schrödingerova rovnice.

- 1** Banachův a Hilbertův prostor
 - Normované lineární prostory.
 - Prostor se skalárním součinem.
 - Ortonormální soustavy a baze.
- 2** Lineární zobrazení, operátor a funkcionál.
 - Lineární zobrazení.
 - Norma lineárního zobrazení.
 - Příklady.
 - Frechet-Rieszova věta
- 3** Spektrální teorie.
 - Vlastní čísla a vlastní funkce lineárních operátorů.
 - Spektrum operátoru.
 - Příklady.
 - Spektrální teorie v Hilbertových prostorech
- 4** Něco z kvantové mechaniky.
 - Základní postuláty kvantové mechaniky.
 - Fyzikální veličiny v kvantové mechanice.
 - Schrödingerova rovnice.

Metrický prostor.

Definice

Metrickým prostorem rozumíme každou množinu X opatřenou metrikou $\rho : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$, splňující požadavky

1 $\rho(x, y) = \rho(y, x)$,

2 $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$,

3 $\rho(x, y) \geq 0$, přičemž $\rho(x, y) = 0$, právě když $x = y$,

pro každé $x, y, z \in X$.

Definice

Nechť X je metrický prostor a $\{x_n\}$ je posloupnost v X .

Posloupnost $\{x_n\}$ nazveme cauchyovskou, jestliže $\rho(x_n, x_m) \rightarrow 0$ pro $n, m \rightarrow \infty$ (tj. ke každému $\varepsilon > 0$ existuje n_0 tak, že pro každé $n \geq n_0, m \geq n_0$ je $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$).

Zřejmě každá posloupnost, která má limitu v X je cauchyovská.

Plyne to z vlastnosti metriky

$$\rho(x_n, x_m) \leq \rho(x_n, x) + \rho(x_m, x).$$

Normované lineární prostory.

Definice

Metrický prostor X je úplný právě tehdy, když každá cauchyovská posloupnost má limitu v X .

Příklady úplných metrických prostorů jsou např. prostory \mathbb{R}^n s euklidovskou metrikou.

Definice

Normovaným lineárním prostorem rozumíme každý vektorový prostor V nad tělesem \mathbf{F} vybavený normou $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$, splňující požadavek

- 1** $\|x\| \geq 0$, přičemž $\|x\| = 0$, právě když $x = o$
(o je nulový prvek prostoru V),
- 2** $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$,
- 3** $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$,

pro každé $x, y \in V$ a $\alpha \in \mathbf{F}$.

Je-li $\mathbf{F} = \mathbb{R}$ nazýváme prostor V reálným normovaným prostorem, v případě $\mathbf{F} = \mathbb{C}$ nazýváme prostor V komplexním nor. prost.

Příklad: Je-li X lineární normovaný prostor, potom

$$\rho(x, y) = \|x - y\|, \text{ pro } x, y \in X$$

je metrika.

Definice

*Každý normovaný lineární prostor, který je v příslušné metrice úplný nazýváme **Banachův prostor**.*

Věta

Nechť X je normovaný lineární prostor, potom norma $\|\cdot\| : x \mapsto \|x\|$ je na X stejnoměrně spojitá funkce.

Příklady prostorů a jejich norem:

- $l_n^p = \{x = (x_1, \dots, x_n); x_i \in \mathbb{R} \text{ (resp. } \mathbb{C})\}, \|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}},$
 $p \geq 1.$
- $l_n^\infty = \{x = (x_1, \dots, x_n); x_i \in \mathbb{R} \text{ (resp. } \mathbb{C})\}, \|x\|_\infty = \max_{i \in \mathbb{N}} \{|x_i|\},$
- $C([a, b]) =$
 $\{f, \text{ reálná (resp. komplexní) spojitá funkce na intervalu } [a, b]\},$
 $\|f\| = \max_{t \in [a, b]} |f(t)|,$
- $C([a, b]) =$
 $\{f, \text{ reálná (resp. komplexní) spojitá funkce na intervalu } [a, b]\},$
 $\|f\|_i = \int_a^b |f(t)| dx,$
- $c = \{\text{posloupnost } x = \{x_n\}; \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in \mathbb{R}\}, \|x\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|,$
- $c_0 = \{\text{posloupnost } x = \{x_n\}; \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0\}, \|x\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|,$

Příklady dalších prostorů a jejich norem:

Nechť $\mathcal{L}^p(X)$, $p \in [1, \infty)$ je množina všech μ -měřitelných funkcí na X , kde μ je (obvykle) Lebesgueova míra na $X \subset \mathbb{R}^n$, pro které $\int_X |f|^p d\mu < \infty$. Číslo

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

nazýváme L^p -normou. V příkladech, se kterými se setkáváme bude obvykle $X \subset \mathbb{R}$ interval (nebo $X \subset \mathbb{R}^2$ obdélník apod.) a f bude spojitá funkce na X , až na množinu míry 0. Lebesgueův integrál lze v těchto příkladech nahradit Riemannovým integrálem tak, jak je zavedeno ve skriptech MI a MII.

Nechť $\mathcal{L}^\infty(X)$ je množina všech μ -měřitelných funkcí na X , pro které existuje konstanta K tak, že $|f(x)| \leq K$ pro μ -skoro všechna $x \in X$. Nejmenší takové číslo K označme

$$K = \sup_X^* |f| = \|f\|_\infty$$

a nazýváme ho L^∞ -normou.

Příklady dalších prostorů a jejich norem:

Normy $\|\cdot\|_p$ a $\|\cdot\|_\infty$ mají všechny vlastnosti normy až na to, že nenulová funkce může mít normu 0. Pro $1 \leq p \leq \infty$ definujeme proto třídu funkcí

$$[f] = \{g \in \mathcal{L}^p(X), g = f\mu - \text{skoro všude na } X\}.$$

Nyní můžeme definovat prostor

$$L^p(X) = \{[f], f \in \mathcal{L}^p(X)\}$$

a operace

$$[f + g] = [f] + [g], \quad [\alpha f] = \alpha[f].$$

Prostor $L^p(X)$ s danými operacemi je lineární prostor s normou $\|[f]\|_p = \|f\|_p$.

Zvolíme-li $X = \{1, 2, 3, \dots\}$ dostaneme prostory l^p a l^∞ .

Více o μ -měřitelných funkcích viz [Lukeš-Teorie míry]

Příklady dalších prostorů a jejich norem:

1 $L^p(X) = \{[f], f \in \mathcal{L}^p(X)\}, \|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}},$

2 $L^\infty(X) = \{[f], f \in \mathcal{L}^\infty(X)\}, \|f\|_\infty = \sup_X^* |f|,$

3 $l^p = \{\text{posloupností } x = \{x_n\}, x_n \in \mathbb{R} \text{ (resp. } \mathbb{C})\};$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty\}, \|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

4 $l^\infty = \{\text{omezených posloupností } x = \{x_n\}, x_n \in \mathbb{R} \text{ (resp. } \mathbb{C})\}, \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|\}, \|x\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|,$

Definice

Řekneme, že normy $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$ na lineárním prostoru X jsou ekvivalentní, existují-li takové konstanty $\alpha, \beta > 0$, že

$$\alpha \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \beta \|x\|_1.$$

Normované lineární prostory.

Snadno se ukáže, že ekvivalentní normy dávají stejné topologie, tj. otevřené množiny jsou v příslušných metrikách stejné.

Platí dokonce věta:

Věta

Všechny normy na konečně rozměrném lineárním prostoru jsou navzájem ekvivalentní.

Důkaz: viz [Lukeš-Zápisky] 1.7 ■

Důsledek

Každý konečně rozměrný normovaný lineární prostor je Banachův. Každý konečně rozměrný podprostor normovaného lineárního prostoru je uzavřený.

- 1 Banachův a Hilbertův prostor**
 - Normované lineární prostory.
 - **Prostor se skalárním součinem.**
 - Ortonormální soustavy a baze.
- 2 Lineární zobrazení, operátor a funkcionál.**
 - Lineární zobrazení.
 - Norma lineárního zobrazení.
 - Příklady.
 - Frechet-Rieszova věta
- 3 Spektrální teorie.**
 - Vlastní čísla a vlastní funkce lineárních operátorů.
 - Spektrum operátoru.
 - Příklady.
 - Spektrální teorie v Hilbertových prostorech
- 4 Něco z kvantové mechaniky.**
 - Základní postuláty kvantové mechaniky.
 - Fyzikální veličiny v kvantové mechanice.
 - Schrödingerova rovnice.

Prostor se skalárním součinem.

Definice

Prostorem se skalárním součinem rozumíme každý lineární prostor H (nad \mathbb{R} resp. \mathbb{C}), v němž je pro každé dva body x, y definován skalární součin (x, y) jako prvek z \mathbb{R} resp. \mathbb{C} splňující požadavky:

- (a) $(x, x) \geq 0$ a $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = o$ (o je nulový prvek prostoru),
- (b) $(x, y) = \overline{(y, x)}$,
- (c) $(\alpha x, y) = \alpha(x, y)$, $(x, \alpha y) = \overline{\alpha}(x, y)$,
- (d) $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$.

Definujeme-li zobrazení $\|\cdot\| : x \mapsto \sqrt{(x, x)}$, má toto zobrazení vlastnosti normy. Obtížnější je pouze důkaz trojúhelníkové nerovnosti. Obvykle se dokazuje pomocí tzv. Schwartzovy nerovnosti.

Věta (Schwartzova nerovnost)

Nechť H je prostor se skalárním součinem, potom pro všechna $x, y \in H$ platí nerovnost

$$|(x, y)| \leq \|x\| \|y\|.$$

Hilbertův prostor

Hilbertův prostor je každý prostor se skalárním součinem, který je v zavedené normě $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ úplný.

Každý Banachův prostor nad \mathbb{R} (resp. \mathbb{C}) tvoří Hilbertův prostor, jestliže příslušná norma splňuje pro všechna x, y tzv. rovnoběžníkové pravidlo

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Položíme-li v reálném případě

$$(x, y) = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2),$$

resp. v komplexním případě

$$(x, y) = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2) + i\|x + iy\|^2 - i\|x - iy\|^2,$$

je norma již odvozena ze skalárního součinu (tj. $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$).

- 1 Banachův a Hilbertův prostor**
 - Normované lineární prostory.
 - Prostor se skalárním součinem.
 - Ortonormální soustavy a baze.
- 2 Lineární zobrazení, operátor a funkcionál.**
 - Lineární zobrazení.
 - Norma lineárního zobrazení.
 - Příklady.
 - Frechet-Rieszova věta
- 3 Spektrální teorie.**
 - Vlastní čísla a vlastní funkce lineárních operátorů.
 - Spektrum operátoru.
 - Příklady.
 - Spektrální teorie v Hilbertových prostorech
- 4 Něco z kvantové mechaniky.**
 - Základní postuláty kvantové mechaniky.
 - Fyzikální veličiny v kvantové mechanice.
 - Schrödingerova rovnice.

Ortogonální prvky a množiny

Dva prvky Hilbertova prostoru H nazýváme **ortogonální (kolmé)**, jestliže

$$\forall p, q \in H \text{ platí } (p, q) = 0.$$

Dvě podmnožiny $P, Q \subset H$ jsou ortogonální ($P \perp Q$), jestliže

$$\forall p \in P, q \in Q \text{ platí } (p, q) = 0.$$

Nechť $M \subset H$, M^\perp označuje ortogonální doplněk M , jestliže

$$M^\perp = \{x \in H; (x, m) = 0 \forall m \in M\}.$$

Věta

M^\perp je uzavřený podprostor H .

Existence nejbližšího prvku

Definice

Nechť S je neprázdná množina v metrickém prostoru X a $x_0 \in X$. Pak definujeme vzdálenost mezi S a x_0 rovností

$$\text{dist}(S, x_0) = \inf_{x \in S} \rho(x, x_0).$$

Věta

Nechť M je uzavřený podprostor Hilbertova prostoru H . Potom ke každému $x \in H$ existuje právě jedno $m_0 \in M$ tak, že $\|x - m_0\| = \text{dist}(x, M)$.

Geometrická interpretace této věty je:

Je-li M podprostorem Hilbertova prostoru H , $x \in H$ a $m_0 \in M$, potom

$$\|x - m_0\| = \text{dist}(x, M) \Leftrightarrow x - m_0 \perp M.$$

Projekce

Nechť M je uzavřený podprostor Hilbertova prostoru H . Pro každé $x \in H$ označme m takový prvek z M , pro který $\|x - m\| = \text{dist}(x, M)$.

Definice

Zobrazení $P : x \mapsto m$ ($m = Px$) nazýváme projekcí H na M .

Věta

Nechť $M \subset H$ je uzavřený podprostor. P je projekce H na M a $\mathcal{N}(P) = \{x \in H : Px = 0\}$. Potom

- P je lineární zobrazení,
- $P(Px) = Px$,
- $\forall x \in H : \|Px\| \leq \|x\|$,
- $P(H) = M$,
- $\mathcal{N}(P) = M^\perp$.

Algebraický součet

Definice

Řekneme, že vektorový prostor W je algebraickým součtem podprostorů A, B a zapisujeme $W = A \oplus B$, jestliže

$$A \cap B = \{0\} \text{ a } W = A + B,$$

přičemž $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$.

Každý prvek z W lze zapsat jednoznačně jako součet $a + b$, kde $a \in A$ a $b \in B$.

Je-li A libovolný podprostor vektorového prostoru W , existuje vždy podprostor A^d tak, že $W = A \oplus A^d$. A^d nazýváme algebraický doplněk A ve W .

Algebraický součet

Definice

Řekneme, že vektorový prostor W je algebraickým součtem podprostorů A, B a zapisujeme $W = A \oplus B$, jestliže

$$A \cap B = \{0\} \text{ a } W = A + B,$$

přičemž $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$.

Každý prvek $z \in W$ lze zapsat jednoznačně jako součet $a + b$, kde $a \in A$ a $b \in B$.

Je-li A libovolný podprostor vektorového prostoru W , existuje vždy podprostor A^d tak, že $W = A \oplus A^d$. A^d nazýváme algebraický doplněk A ve W .

Algebraický součet

Definice

Řekneme, že vektorový prostor W je algebraickým součtem podprostorů A, B a zapisujeme $W = A \oplus B$, jestliže

$$A \cap B = \{0\} \text{ a } W = A + B,$$

přičemž $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$.

Každý prvek z W lze zapsat jednoznačně jako součet $a + b$, kde $a \in A$ a $b \in B$.

Je-li A libovolný podprostor vektorového prostoru W , existuje vždy podprostor A^d tak, že $W = A \oplus A^d$. A^d nazýváme algebraický doplněk A ve W .

Ortonormální soustavy a báze

H je Hilbertův prostor a $S \subset H$. S nazýváme **ortonormální soustavou** jestliže platí $x, y \in S$, $(x, y) = 0$ pro $x \neq y$.
 $(x, x) = 1$

Každá konečná podmnožina ortonormální soustavy je lineárně nezávislá a tedy každá ortonormální soustava je lineárně nezávislá.

Ortonormální báze Hilbertova prostoru je každá maximální ortonormální soustava (tj. taková soustava, ke které již nelze přidat prvek tak, aby zůstala ortonormální).

Věta

V každém Hilbertově prostoru existuje ortonormální báze.

Ortonormální soustavy a báze

H je Hilbertův prostor a $S \subset H$. S nazýváme **ortonormální soustavou** jestliže platí $x, y \in S$, $(x, y) = 0$ pro $x \neq y$.
 $(x, x) = 1$

Každá konečná podmnožina ortonormální soustavy je lineárně nezávislá a tedy každá ortonormální soustava je lineárně nezávislá.

Ortonormální báze Hilbertova prostoru je každá maximální ortonormální soustava (tj. taková soustava, ke které již nelze přidat prvek tak, aby zůstala ortonormální).

Věta

V každém Hilbertově prostoru existuje ortonormální báze.

Ortonormální soustavy a báze

H je Hilbertův prostor a $S \subset H$. S nazýváme **ortonormální soustavou** jestliže platí $x, y \in S$, $(x, y) = 0$ pro $x \neq y$.
 $(x, x) = 1$

Každá konečná podmnožina ortonormální soustavy je lineárně nezávislá a tedy každá ortonormální soustava je lineárně nezávislá.

Ortonormální báze Hilbertova prostoru je každá maximální ortonormální soustava (tj. taková soustava, ke které již nelze přidat prvek tak, aby zůstala ortonormální).

Věta

V každém Hilbertově prostoru existuje ortonormální báze.

Ortonormální soustavy a báze

Připomeňme pojem Hamelovy (algebraické) báze. Necht' X je lineární prostor. Množina $H \subset X$ se nazývá **Hamelova báze** prostoru X , jestliže každá konečná podmnožina prvků z H je lineárně nezávislá a každý prvek z X lze zapsat jako konečná lineární kombinace prvků z H .

Pro konečně dimenzionální prostory je ortonormální báze rovna Hamelově bázi.

Pro nekonečně dimenzionální prostor to neplatí.

Věta

Hilbertův prostor je separabilní, právě když v něm existuje spočetná ortonormální báze.

Ortonormální soustavy a báze

Připomeňme pojem Hamelovy (algebraické) báze. Necht' X je lineární prostor. Množina $H \subset X$ se nazývá **Hamelova báze** prostoru X , jestliže každá konečná podmnožina prvků z H je lineárně nezávislá a každý prvek z X lze zapsat jako konečná lineární kombinace prvků z H .

Pro konečně dimenzionální prostory je ortonormální báze rovna Hamelově bázi.

Pro nekonečně dimenzionální prostor to neplatí.

Věta

Hilbertův prostor je separabilní, právě když v něm existuje spočetná ortonormální báze.

Ortonormální soustavy a báze (2)

Věta (Besselova nerovnost)

Je-li $\{e_\alpha\}_{\alpha \in A}$ ortonormální soustava v Hilbertově prostoru H a $x \in H$, platí

$$\sum_{\alpha \in A} |(x, e_\alpha)|^2 \leq \|x\|^2.$$

Věta

Nechť X je úplný prostor se skalárním součinem, necht' $\{e_n\}$ je nekonečná spočetná ortogonální množina v X , pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} \zeta_n e_n$

konverguje, právě když $\sum_{n=1}^{\infty} |\zeta_n|^2 < \infty$ a pro součet řady

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \zeta_n e_n \text{ platí vztahy } \zeta_n = (x, e_n).$$

Příklady ortonormálních soustav a bází

a) System $\mathcal{E} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx; n \in \mathbb{N} \right\}$ je ortogonální soustavou Hilbertova prostoru $L^2([0, 2\pi])$. Z předchozí věty plyne věta z teorie Fourierových řad: Jsou-li $a_i, i = 0, 1, \dots$ a $b_i, i = 1, 2, \dots$ posloupnosti reálných čísel takových, že

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) < \infty,$$

pak existuje funkce f , $[f] \in L^2([0, 2\pi])$ jejíž Fourierovy koeficienty jsou

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx \, dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx \, dx.$$

Pro funkci f platí

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

Příklady ortonormálních soustav a bází

a) System $\mathcal{E} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx; n \in \mathbb{N} \right\}$ je ortogonální soustavou Hilbertova prostoru $L^2([0, 2\pi])$. Z předchozí věty plyne věta z teorie Fourierových řad: Jsou-li $a_i, i = 0, 1, \dots$ a $b_i, i = 1, 2, \dots$ posloupnosti reálných čísel takových, že

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) < \infty,$$

pak existuje funkce f , $[f] \in L^2([0, 2\pi])$ jejíž Fourierovy koeficienty jsou

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx \, dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx \, dx.$$

Pro funkci f platí

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

Příklady ortonormálních soustav a bází

b) Soustava funkcí $\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{inx}; n \in \mathbb{N}\}$ je ortonormální báze komplexního Hilbertova prostoru $L^2([0, 2\pi])$.

c) Necht' $e_n = (0, 0, \dots, 1, 0, \dots)$ jsou "jednotkové" vektory l^2 .
Potom $\{e_n; n \in \mathbb{N}\}$ je ortonormální báze l^2 .

Příklady ortonormálních soustav a bází

b) Soustava funkcí $\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{inx}; n \in \mathbb{N}\}$ je ortonormální báze komplexního Hilbertova prostoru $L^2([0, 2\pi])$.

c) Necht' $e_n = (0, 0, \dots, 1, 0, \dots)$ jsou "jednotkové" vektory l^2 . Potom $\{e_n; n \in \mathbb{N}\}$ je ortonormální báze l^2 .

- 1 Banachův a Hilbertův prostor
 - Normované lineární prostory.
 - Prostor se skalárním součinem.
 - Ortonormální soustavy a baze.
- 2 Lineární zobrazení, operátor a funkcionál.
 - Lineární zobrazení.
 - Norma lineárního zobrazení.
 - Příklady.
 - Frechet-Rieszova věta
- 3 Spektrální teorie.
 - Vlastní čísla a vlastní funkce lineárních operátorů.
 - Spektrum operátoru.
 - Příklady.
 - Spektrální teorie v Hilbertových prostorech
- 4 Něco z kvantové mechaniky.
 - Základní postuláty kvantové mechaniky.
 - Fyzikální veličiny v kvantové mechanice.
 - Schrödingerova rovnice.

- 1 Banachův a Hilbertův prostor
 - Normované lineární prostory.
 - Prostor se skalárním součinem.
 - Ortonormální soustavy a baze.
- 2 Lineární zobrazení, operátor a funkcionál.
 - Lineární zobrazení.
 - Norma lineárního zobrazení.
 - Příklady.
 - Frechet-Rieszova věta
- 3 Spektrální teorie.
 - Vlastní čísla a vlastní funkce lineárních operátorů.
 - Spektrum operátoru.
 - Příklady.
 - Spektrální teorie v Hilbertových prostorech
- 4 Něco z kvantové mechaniky.
 - Základní postuláty kvantové mechaniky.
 - Fyzikální veličiny v kvantové mechanice.
 - Schrödingerova rovnice.

Lineární zobrazení, operátor, funkcionál

Zopakujme si definici lineárního zobrazení. Předpokládejme, že M, N jsou normované lineární prostory s normami $\|\cdot\|_M, \|\cdot\|_N$.

Definice

Nechť $L : M \rightarrow N$ a

$$L(\alpha x + \beta y) = \alpha L(x) + \beta L(y),$$

pro všechna $x, y \in M, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (resp. \mathbb{C})

pak L nazýváme **lineární zobrazení**.

Jestliže $M = N$ mluvíme o **lineárním operátoru**, je-li

$N = \mathbb{R}$ (resp. \mathbb{C}) mluvíme o **lineárním funkcionálu** (lineární formě).

Definice

Říkáme, že lineární zobrazení $L : M \rightarrow N$ je **omezené** zobrazuje-li omezené množiny v M na omezené množiny v N .

Lineární zobrazení, operátor, funkcionál

Zopakujme si definici lineárního zobrazení. Předpokládejme, že M, N jsou normované lineární prostory s normami $\|\cdot\|_M, \|\cdot\|_N$.

Definice

Nechť $L : M \rightarrow N$ a

$$L(\alpha x + \beta y) = \alpha L(x) + \beta L(y),$$

pro všechna $x, y \in M, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (resp. \mathbb{C})

pak L nazýváme **lineární zobrazení**.

Jestliže $M = N$ mluvíme o **lineárním operátoru**, je-li

$N = \mathbb{R}$ (resp. \mathbb{C}) mluvíme o **lineárním funkcionálu** (lineární formě).

Definice

Říkáme, že lineární zobrazení $L : M \rightarrow N$ je **omezené** zobrazuje-li omezené množiny v M na omezené množiny v N .

Platí, že lineární zobrazení je omezené, jestliže je omezené na jednotkové kouli, tj,

$\exists K > 0$, takové, že $\|Lx\|_N \leq K$ pro $\forall x \in M$, $\|x\|_M \leq 1$.

Lineární zobrazení $L : M \rightarrow N$ je spojité v $a \in M$ jestliže platí
Pro všechna $O_\varepsilon(La)$ existuje $O_\delta(a)$ takové, že $L(O_\delta(a)) \subset O_\varepsilon(La)$,
tj.

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ takové, že pro $\forall x$; $\|x - a\|_M < \delta$ platí $\|Lx - La\|_N < \varepsilon$.

Platí užitečná věta

Věta

Nechť $L : M \rightarrow N$ je lineární zobrazení, následující výroky jsou ekvivalentní

- (i) *L je spojité*
- (ii) *L je spojité v o (o je nulový prvek)*
- (iii) *L je omezené*

Platí, že lineární zobrazení je omezené, jestliže je omezené na jednotkové kouli, tj,

$$\exists K > 0, \text{ takové, že } \|Lx\|_N \leq K \text{ pro } \forall x \in M, \|x\|_M \leq 1.$$

Lineární zobrazení $L : M \rightarrow N$ je spojité v $a \in M$ jestliže platí

Pro všechna $O_\varepsilon(La)$ existuje $O_\delta(a)$ takové, že $L(O_\delta(a)) \subset O_\varepsilon(La)$,
tj.

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ takové, že pro $\forall x; \|x - a\|_M < \delta$ platí $\|Lx - La\|_N < \varepsilon$.

Platí užitečná věta

Věta

Nechť $L : M \rightarrow N$ je lineární zobrazení, následující výroky jsou ekvivalentní

- (i) *L je spojité*
- (ii) *L je spojité v o (o je nulový prvek)*
- (iii) *L je omezené*

Platí, že lineární zobrazení je omezené, jestliže je omezené na jednotkové kouli, tj,

$$\exists K > 0, \text{ takové, že } \|Lx\|_N \leq K \text{ pro } \forall x \in M, \|x\|_M \leq 1.$$

Lineární zobrazení $L : M \rightarrow N$ je spojité v $a \in M$ jestliže platí

Pro všechna $O_\varepsilon(La)$ existuje $O_\delta(a)$ takové, že $L(O_\delta(a)) \subset O_\varepsilon(La)$, tj.

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ takové, že pro $\forall x; \|x - a\|_M < \delta$ platí $\|Lx - La\|_N < \varepsilon$.

Platí užitečná věta

Věta

Nechť $L : M \rightarrow N$ je lineární zobrazení, následující výroky jsou ekvivalentní

- (i) *L je spojité*
- (ii) *L je spojité v o (o je nulový prvek)*
- (iii) *L je omezené*

- 1 Banachův a Hilbertův prostor
 - Normované lineární prostory.
 - Prostor se skalárním součinem.
 - Ortonormální soustavy a baze.
- 2 Lineární zobrazení, operátor a funkcionál.
 - Lineární zobrazení.
 - **Norma lineárního zobrazení.**
 - Příklady.
 - Frechet-Rieszova věta
- 3 Spektrální teorie.
 - Vlastní čísla a vlastní funkce lineárních operátorů.
 - Spektrum operátoru.
 - Příklady.
 - Spektrální teorie v Hilbertových prostorech
- 4 Něco z kvantové mechaniky.
 - Základní postuláty kvantové mechaniky.
 - Fyzikální veličiny v kvantové mechanice.
 - Schrödingerova rovnice.

Norma lineárního zobrazení

Definice

Nechť $L: M \rightarrow N$ je omezený lineární zobrazení. Číslo

$$\|L\| = \sup_{\|x\|_M \leq 1} \|Lx\|_N,$$

nazýváme **normou lineárního zobrazení** L .

Symbolem $\mathcal{L}(M, N)$ označme prostor všech omezených (spojitých) lineárních zobrazení z M do N .

Jestliže $M = N$ je $\mathcal{L}(M)$ prostor všech omezených lineárních operátorů na M .

Jestliže $N = \mathbb{R}$ (resp. \mathbb{C}) je $\mathcal{L}(M, \mathbb{R}) = M^*$ prostor všech omezených lineárních funkcionalů (duál prostoru M).

Norma lineárního zobrazení

Definice

Nechť $L: M \rightarrow N$ je omezený lineární zobrazení. Číslo

$$\|L\| = \sup_{\|x\|_M \leq 1} \|Lx\|_N,$$

nazýváme **normou lineárního zobrazení** L .

Symbolem $\mathcal{L}(M, N)$ označme prostor všech omezených (spojitých) lineárních zobrazení z M do N .

Jestliže $M = N$ je $\mathcal{L}(M)$ prostor všech omezených lineárních operátorů na M .

Jestliže $N = \mathbb{R}$ (resp. \mathbb{C}) je $\mathcal{L}(M, \mathbb{R}) = M^*$ prostor všech omezených lineárních funkcionalů (duál prostoru M).

Věta

Nechť M, N jsou normované lineární prostory, potom $\mathcal{L}(M, N)$ s normou

$$\|L\| = \sup_{\|x\|_M \leq 1} \|Lx\|_N,$$

je také normovaný lineární prostor. Je-li N Banachův je i prostor $\mathcal{L}(M, N)$ Banachův, speciálně M^ je Banachův. Navíc pro $L \in \mathcal{L}(M, N)$ a $x \in M$ platí*

$$\|Lx\|_N \leq \|L\| \|x\|_M.$$

Věta

Nechť M, N jsou normované lineární prostory, potom $\mathcal{L}(M, N)$ s normou

$$\|L\| = \sup_{\|x\|_M \leq 1} \|Lx\|_N,$$

je také normovaný lineární prostor. Je-li N Banachův je i prostor $\mathcal{L}(M, N)$ Banachův, speciálně M^ je Banachův. Navíc pro $L \in \mathcal{L}(M, N)$ a $x \in M$ platí*

$$\|Lx\|_N \leq \|L\| \|x\|_M.$$

- 1 Banachův a Hilbertův prostor
 - Normované lineární prostory.
 - Prostor se skalárním součinem.
 - Ortonormální soustavy a baze.
- 2 Lineární zobrazení, operátor a funkcionál.
 - Lineární zobrazení.
 - Norma lineárního zobrazení.
 - Příklady.
 - Frechet-Rieszova věta
- 3 Spektrální teorie.
 - Vlastní čísla a vlastní funkce lineárních operátorů.
 - Spektrum operátoru.
 - Příklady.
 - Spektrální teorie v Hilbertových prostorech
- 4 Něco z kvantové mechaniky.
 - Základní postuláty kvantové mechaniky.
 - Fyzikální veličiny v kvantové mechanice.
 - Schrödingerova rovnice.

Příklady

Příklad: Necht' $T : C([-1, 1]) \rightarrow \mathbb{R}$ a pro $f \in C([-1, 1])$ je

$$\|f\| = \max_{t \in [-1, 1]} |f(t)|.$$

Funkcionál T je definován vztahem $Tf = 7f(-1) - 2f(0) + f(\frac{1}{2})$. Zjistěte, zda je funkcionál spojitý. V případě, že je spojitý, vypočtete normu funkcionálu T .

Příklad: Necht' $T : L^2([0, 1]) \rightarrow L^2([0, 1])$ a pro $f \in L^2([0, 1])$ je

$$\|f\| = \sqrt{\int_0^1 |f|^2 d\mu}.$$

Operátor T je definován vztahem $Tf(t) = t \int_0^1 f d\mu$. Zjistěte, zda je operátor spojitý. V případě, že je spojitý, vypočtete normu operátoru T .

Příklady

Příklad: Necht' $T : C([-1, 1]) \rightarrow \mathbb{R}$ a pro $f \in C([-1, 1])$ je

$$\|f\| = \max_{t \in [-1, 1]} |f(t)|.$$

Funkcionál T je definován vztahem $Tf = 7f(-1) - 2f(0) + f(\frac{1}{2})$. Zjistěte, zda je funkcionál spojitý. V případě, že je spojitý, vypočtete normu funkcionálu T .

Příklad: Necht' $T : L^2([0, 1]) \rightarrow L^2([0, 1])$ a pro $f \in L^2([0, 1])$ je

$$\|f\| = \sqrt{\int_0^1 |f|^2 d\mu}.$$

Operátor T je definován vztahem $Tf(t) = t \int_0^1 f d\mu$. Zjistěte, zda je operátor spojitý. V případě, že je spojitý, vypočtete normu operátoru T .

Obsah

- 1 Banachův a Hilbertův prostor
 - Normované lineární prostory.
 - Prostor se skalárním součinem.
 - Ortonormální soustavy a baze.
- 2 Lineární zobrazení, operátor a funkcionál.
 - Lineární zobrazení.
 - Norma lineárního zobrazení.
 - Příklady.
 - **Frechet-Rieszova věta**
- 3 Spektrální teorie.
 - Vlastní čísla a vlastní funkce lineárních operátorů.
 - Spektrum operátoru.
 - Příklady.
 - Spektrální teorie v Hilbertových prostorech
- 4 Něco z kvantové mechaniky.
 - Základní postuláty kvantové mechaniky.
 - Fyzikální veličiny v kvantové mechanice.
 - Schrödingerova rovnice.

Frechet-Rieszova věta

Věta

Nechť F je spojitý lineární funkcionál na Hilbertově prostoru H , potom

$$\exists! \alpha \in H \text{ takové, že } \forall x \in H; F(x) = (x, \alpha).$$

Navíc $\|F\| = \|\alpha\|$.

Příklad: Nechť $F : L^2([0, \pi]) \rightarrow \mathbb{R}$ a pro $f \in L^2([0, \pi])$ je

$$\|f\| = \sqrt{\int_0^\pi |f|^2 d\mu}.$$

Funkcionál F je definován vztahem

$$Ff = \int_0^\pi f(x) \sin(x) dx.$$

Zjistěte, zda je funkcionál spojitý. V případě, že je spojitý, vypočtete normu funkcionálu F .

Frechet-Rieszova věta

Věta

Nechť F je spojitý lineární funkcionál na Hilbertově prostoru H , potom

$$\exists! \alpha \in H \text{ takové, že } \forall x \in H; F(x) = (x, \alpha).$$

Navíc $\|F\| = \|\alpha\|$.

Příklad: Nechť $F : L^2([0, \pi]) \rightarrow \mathbb{R}$ a pro $f \in L^2([0, \pi])$ je

$$\|f\| = \sqrt{\int_0^\pi |f|^2 d\mu}.$$

Funkcionál F je definován vztahem

$$Ff = \int_0^\pi f(x) \sin(x) dx.$$

Zjistěte, zda je funkcionál spojitý. V případě, že je spojitý, vypočtete normu funkcionálu F .

Příklad: Necht' $F : l^2 \rightarrow \mathbb{R}$ a pro $x \in l^2$ je

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2}.$$

Funkcionál F je definován vztahem

$$F_x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2)^{\frac{n}{2}}} x_n.$$

Zjistěte, zda je funkcionál spojitý. V případě, že je spojitý, vypočtete normu funkcionálu F .

Obsah

- 1 Banachův a Hilbertův prostor
 - Normované lineární prostory.
 - Prostor se skalárním součinem.
 - Ortonormální soustavy a baze.
- 2 Lineární zobrazení, operátor a funkcionál.
 - Lineární zobrazení.
 - Norma lineárního zobrazení.
 - Příklady.
 - Frechet-Rieszova věta
- 3 Spektrální teorie.
 - Vlastní čísla a vlastní funkce lineárních operátorů.
 - Spektrum operátoru.
 - Příklady.
 - Spektrální teorie v Hilbertových prostorech
- 4 Něco z kvantové mechaniky.
 - Základní postuláty kvantové mechaniky.
 - Fyzikální veličiny v kvantové mechanice.
 - Schrödingerova rovnice.

Obsah

- 1 Banachův a Hilbertův prostor
 - Normované lineární prostory.
 - Prostor se skalárním součinem.
 - Ortonormální soustavy a baze.
- 2 Lineární zobrazení, operátor a funkcionál.
 - Lineární zobrazení.
 - Norma lineárního zobrazení.
 - Příklady.
 - Frechet-Rieszova věta
- 3 Spektrální teorie.
 - Vlastní čísla a vlastní funkce lineárních operátorů.
 - Spektrum operátoru.
 - Příklady.
 - Spektrální teorie v Hilbertových prostorech
- 4 Něco z kvantové mechaniky.
 - Základní postuláty kvantové mechaniky.
 - Fyzikální veličiny v kvantové mechanice.
 - Schrödingerova rovnice.

Vlastní čísla a vlastní funkce lineárních operátorů

V této kapitole budeme uvažovat komplexní Banachův prostor X a Banachův prostor $\mathcal{L}(X)$.

Je-li T operátor na Banachově prostoru X , množinu

$$\mathcal{R}(T) = \{y = Tx; x \in X\}$$

nazýváme **obor hodnot** operátoru T .

$\mathcal{R}(T)$ je lineární podprostor prostoru X .

Je-li X konečně dimenzionální, potom je $\mathcal{R}(T)$ uzavřený.

Je-li X nekonečně dimenzionální, potom nemusí být $\mathcal{R}(T)$ uzavřený.

Věta

Nechť X je Banachův prostor a $T \in \mathcal{L}(X)$. Existuje-li $\beta > 0$ tak, že $\|Tx\| \geq \beta\|x\|$ pro všechna $x \in X$, potom $\mathcal{R}(T)$ je uzavřená množina.

Vlastní čísla a vlastní funkce lineárních operátorů

V této kapitole budeme uvažovat komplexní Banachův prostor X a Banachův prostor $\mathcal{L}(X)$.

Je-li T operátor na Banachově prostoru X , množinu

$$\mathcal{R}(T) = \{y = Tx; x \in X\}$$

nazýváme **obor hodnot** operátoru T .

$\mathcal{R}(T)$ je lineární podprostor prostoru X .

Je-li X konečně dimenzionální, potom je $\mathcal{R}(T)$ uzavřený.

Je-li X nekonečně dimenzionální, potom nemusí být $\mathcal{R}(T)$ uzavřený.

Věta

Nechť X je Banachův prostor a $T \in \mathcal{L}(X)$. Existuje-li $\beta > 0$ tak, že $\|Tx\| \geq \beta\|x\|$ pro všechna $x \in X$, potom $\mathcal{R}(T)$ je uzavřená množina.

Vlastní čísla a vlastní funkce lineárních operátorů

V této kapitole budeme uvažovat komplexní Banachův prostor X a Banachův prostor $\mathcal{L}(X)$.

Je-li T operátor na Banachově prostoru X , množinu

$$\mathcal{R}(T) = \{y = Tx; x \in X\}$$

nazýváme **obor hodnot** operátoru T .

$\mathcal{R}(T)$ je lineární podprostor prostoru X .

Je-li X konečně dimenzionální, potom je $\mathcal{R}(T)$ uzavřený.

Je-li X nekonečně dimenzionální, potom nemusí být $\mathcal{R}(T)$ uzavřený.

Věta

Nechť X je Banachův prostor a $T \in \mathcal{L}(X)$. Existuje-li $\beta > 0$ tak, že $\|Tx\| \geq \beta\|x\|$ pro všechna $x \in X$, potom $\mathcal{R}(T)$ je uzavřená množina.

Vlastní čísla a vlastní funkce lineárních operátorů

V této kapitole budeme uvažovat komplexní Banachův prostor X a Banachův prostor $\mathcal{L}(X)$.

Je-li T operátor na Banachově prostoru X , množinu

$$\mathcal{R}(T) = \{y = Tx; x \in X\}$$

nazýváme **obor hodnot** operátoru T .

$\mathcal{R}(T)$ je lineární podprostor prostoru X .

Je-li X konečně dimenzionální, potom je $\mathcal{R}(T)$ uzavřený.

Je-li X nekonečně dimenzionální, potom nemusí být $\mathcal{R}(T)$ uzavřený.

Věta

Nechť X je Banachův prostor a $T \in \mathcal{L}(X)$. Existuje-li $\beta > 0$ tak, že $\|Tx\| \geq \beta\|x\|$ pro všechna $x \in X$, potom $\mathcal{R}(T)$ je uzavřená množina.

Vlastní čísla a vlastní funkce lineárních operátorů

V této kapitole budeme uvažovat komplexní Banachův prostor X a Banachův prostor $\mathcal{L}(X)$.

Je-li T operátor na Banachově prostoru X , množinu

$$\mathcal{R}(T) = \{y = Tx; x \in X\}$$

nazýváme **obor hodnot** operátoru T .

$\mathcal{R}(T)$ je lineární podprostor prostoru X .

Je-li X konečně dimenzionální, potom je $\mathcal{R}(T)$ uzavřený.

Je-li X nekonečně dimenzionální, potom nemusí být $\mathcal{R}(T)$ uzavřený.

Věta

Nechť X je Banachův prostor a $T \in \mathcal{L}(X)$. Existuje-li $\beta > 0$ tak, že $\|Tx\| \geq \beta\|x\|$ pro všechna $x \in X$, potom $\mathcal{R}(T)$ je uzavřená množina.

Vlastní čísla a vlastní funkce lineárních operátorů

V této kapitole budeme uvažovat komplexní Banachův prostor X a Banachův prostor $\mathcal{L}(X)$.

Je-li T operátor na Banachově prostoru X , množinu

$$\mathcal{R}(T) = \{y = Tx; x \in X\}$$

nazýváme **obor hodnot** operátoru T .

$\mathcal{R}(T)$ je lineární podprostor prostoru X .

Je-li X konečně dimenzionální, potom je $\mathcal{R}(T)$ uzavřený.

Je-li X nekonečně dimenzionální, potom nemusí být $\mathcal{R}(T)$ uzavřený.

Věta

Nechť X je Banachův prostor a $T \in \mathcal{L}(X)$. Existuje-li $\beta > 0$ tak, že $\|Tx\| \geq \beta\|x\|$ pro všechna $x \in X$, potom $\mathcal{R}(T)$ je uzavřená množina.

Definice

Číslo $\lambda \in \mathbb{C}$ se nazývá **vlastní hodnota** operátoru $T \in \mathcal{L}(X)$ existuje-li $x \neq 0$, pro něž $Tx = \lambda x$.

Každé $x \neq 0$, které splňuje rovnici $Tx = \lambda x$ se nazývá **vlastní vektor (funkce)** příslušející vlastní hodnotě λ .

Množinu všech vlastních hodnot značíme $\sigma_p(T)$ a nazýváme **bodové spektrum** operátoru T .

Platí: λ je vlastní hodnota operátoru T , jestliže operátor $T - \lambda I$ není prostý, tj. inverzní operátor $(T - \lambda I)^{-1}$ neexistuje.

Věta

Následující výroky jsou ekvivalentní pro operátory na konečně dimenzionálním lineárním prostoru X

- (i) λ není vlastní hodnota operátoru T
- (ii) $\mathcal{R}(T - \lambda I) = X$, tj. operátor $T - \lambda I$ je na.

Věta říká, že rovnice $Tx - \lambda x = y$ má řešení právě tehdy, když homogenní rovnice $Tx - \lambda x = 0$ má pouze triviální řešení.

V prostorech nekonečné dimenze to neplatí, existují v nich operátory, které jsou prosté a nejsou na, nebo naopak.

Definice

Číslo $\lambda \in \mathbb{C}$ se nazývá **vlastní hodnota** operátoru $T \in \mathcal{L}(X)$ existuje-li $x \neq 0$, pro něž $Tx = \lambda x$.

Každé $x \neq 0$, které splňuje rovnici $Tx = \lambda x$ se nazývá **vlastní vektor (funkce)** příslušející vlastní hodnotě λ .

Množinu všech vlastních hodnot značíme $\sigma_p(T)$ a nazýváme **bodové spektrum** operátoru T .

Platí: λ je vlastní hodnota operátoru T , jestliže operátor $T - \lambda I$ není prostý, tj. inverzní operátor $(T - \lambda I)^{-1}$ neexistuje.

Věta

Následující výroky jsou ekvivalentní pro operátory na konečně dimenzionálním lineárním prostoru X

- (i) λ není vlastní hodnota operátoru T
- (ii) $\mathcal{R}(T - \lambda I) = X$, tj. operátor $T - \lambda I$ je na.

Věta říká, že rovnice $Tx - \lambda x = y$ má řešení právě tehdy, když homogenní rovnice $Tx - \lambda x = 0$ má pouze triviální řešení.

V prostorech nekonečné dimenze to neplatí, existují v nich operátory, které jsou prosté a nejsou na, nebo naopak.

Definice

Číslo $\lambda \in \mathbb{C}$ se nazývá **vlastní hodnota** operátoru $T \in \mathcal{L}(X)$ existuje-li $x \neq 0$, pro něž $Tx = \lambda x$.

Každé $x \neq 0$, které splňuje rovnici $Tx = \lambda x$ se nazývá **vlastní vektor (funkce)** příslušející vlastní hodnotě λ .

Množinu všech vlastních hodnot značíme $\sigma_p(T)$ a nazýváme **bodové spektrum** operátoru T .

Platí: λ je vlastní hodnota operátoru T , jestliže operátor $T - \lambda I$ není prostý, tj. inverzní operátor $(T - \lambda I)^{-1}$ neexistuje.

Věta

Následující výroky jsou ekvivalentní pro operátory na konečně dimenzionálním lineárním prostoru X

- (i) λ není vlastní hodnota operátoru T
- (ii) $\mathcal{R}(T - \lambda I) = X$, tj. operátor $T - \lambda I$ je na.

Věta říká, že rovnice $Tx - \lambda x = y$ má řešení právě tehdy, když homogenní rovnice $Tx - \lambda x = 0$ má pouze triviální řešení.

V prostorech nekonečné dimenze to neplatí, existují v nich operátory, které jsou prosté a nejsou na, nebo naopak.

Definice

Číslo $\lambda \in \mathbb{C}$ se nazývá **vlastní hodnota** operátoru $T \in \mathcal{L}(X)$ existuje-li $x \neq 0$, pro něž $Tx = \lambda x$.

Každé $x \neq 0$, které splňuje rovnici $Tx = \lambda x$ se nazývá **vlastní vektor (funkce)** příslušející vlastní hodnotě λ .

Množinu všech vlastních hodnot značíme $\sigma_p(T)$ a nazýváme **bodové spektrum** operátoru T .

Platí: λ je vlastní hodnota operátoru T , jestliže operátor $T - \lambda I$ není prostý, tj. inverzní operátor $(T - \lambda I)^{-1}$ neexistuje.

Věta

Následující výroky jsou ekvivalentní pro operátory na konečně dimenzionálním lineárním prostoru X

- (i) λ není vlastní hodnota operátoru T
- (ii) $\mathcal{R}(T - \lambda I) = X$, tj. operátor $T - \lambda I$ je na.

Věta říká, že rovnice $Tx - \lambda x = y$ má řešení právě tehdy, když homogenní rovnice $Tx - \lambda x = 0$ má pouze triviální řešení.

V prostorech nekonečné dimenze to neplatí, existují v nich operátory, které jsou prosté a nejsou na, nebo naopak.

Definice

Číslo $\lambda \in \mathbb{C}$ se nazývá **vlastní hodnota** operátoru $T \in \mathcal{L}(X)$ existuje-li $x \neq 0$, pro něž $Tx = \lambda x$.

Každé $x \neq 0$, které splňuje rovnici $Tx = \lambda x$ se nazývá **vlastní vektor (funkce)** příslušející vlastní hodnotě λ .

Množinu všech vlastních hodnot značíme $\sigma_p(T)$ a nazýváme **bodové spektrum** operátoru T .

Platí: λ je vlastní hodnota operátoru T , jestliže operátor $T - \lambda I$ není prostý, tj. inverzní operátor $(T - \lambda I)^{-1}$ neexistuje.

Věta

Následující výroky jsou ekvivalentní pro operátory na konečně dimenzionálním lineárním prostoru X

- (i) λ není vlastní hodnota operátoru T
- (ii) $\mathcal{R}(T - \lambda I) = X$, tj. operátor $T - \lambda I$ je na.

Věta říká, že rovnice $Tx - \lambda x = y$ má řešení právě tehdy, když homogenní rovnice $Tx - \lambda x = 0$ má pouze triviální řešení.

V prostorech nekonečné dimenze to neplatí, existují v nich operátory, které jsou prosté a nejsou na, nebo naopak.

Definice

Číslo $\lambda \in \mathbb{C}$ se nazývá **vlastní hodnota** operátoru $T \in \mathcal{L}(X)$ existuje-li $x \neq 0$, pro něž $Tx = \lambda x$.

Každé $x \neq 0$, které splňuje rovnici $Tx = \lambda x$ se nazývá **vlastní vektor (funkce)** příslušející vlastní hodnotě λ .

Množinu všech vlastních hodnot značíme $\sigma_p(T)$ a nazýváme **bodové spektrum** operátoru T .

Platí: λ je vlastní hodnota operátoru T , jestliže operátor $T - \lambda I$ není prostý, tj. inverzní operátor $(T - \lambda I)^{-1}$ neexistuje.

Věta

Následující výroky jsou ekvivalentní pro operátory na konečně dimenzionálním lineárním prostoru X

- (i) λ není vlastní hodnota operátoru T
- (ii) $\mathcal{R}(T - \lambda I) = X$, tj. operátor $T - \lambda I$ je na.

Věta říká, že rovnice $Tx - \lambda x = y$ má řešení právě tehdy, když homogenní rovnice $Tx - \lambda x = 0$ má pouze triviální řešení.

V prostorech nekonečné dimenze to neplatí, existují v nich operátory, které jsou prosté a nejsou na, nebo naopak.

Definice

Číslo $\lambda \in \mathbb{C}$ se nazývá **vlastní hodnota** operátoru $T \in \mathcal{L}(X)$ existuje-li $x \neq 0$, pro něž $Tx = \lambda x$.

Každé $x \neq 0$, které splňuje rovnici $Tx = \lambda x$ se nazývá **vlastní vektor (funkce)** příslušející vlastní hodnotě λ .

Množinu všech vlastních hodnot značíme $\sigma_p(T)$ a nazýváme **bodové spektrum** operátoru T .

Platí: λ je vlastní hodnota operátoru T , jestliže operátor $T - \lambda I$ není prostý, tj. inverzní operátor $(T - \lambda I)^{-1}$ neexistuje.

Věta

Následující výroky jsou ekvivalentní pro operátory na konečně dimenzionálním lineárním prostoru X

- (i) λ není vlastní hodnota operátoru T
- (ii) $\mathcal{R}(T - \lambda I) = X$, tj. operátor $T - \lambda I$ je na.

Věta říká, že rovnice $Tx - \lambda x = y$ má řešení právě tehdy, když homogenní rovnice $Tx - \lambda x = 0$ má pouze triviální řešení.

V prostorech nekonečné dimenze to neplatí, existují v nich operátory, které jsou prosté a nejsou na, nebo naopak.

- 1 Banachův a Hilbertův prostor
 - Normované lineární prostory.
 - Prostor se skalárním součinem.
 - Ortonormální soustavy a baze.
- 2 Lineární zobrazení, operátor a funkcionál.
 - Lineární zobrazení.
 - Norma lineárního zobrazení.
 - Příklady.
 - Frechet-Rieszova věta
- 3 **Spektrální teorie.**
 - Vlastní čísla a vlastní funkce lineárních operátorů.
 - **Spektrum operátoru.**
 - Příklady.
 - Spektrální teorie v Hilbertových prostorech
- 4 Něco z kvantové mechaniky.
 - Základní postuláty kvantové mechaniky.
 - Fyzikální veličiny v kvantové mechanice.
 - Schrödingerova rovnice.

Spektrum operátoru

Definice

Říkáme, že komplexní číslo λ leží ve **spektru** operátoru T , značíme $\sigma(T)$, jestliže buď operátor $T - \lambda I$ není prostý, nebo $\mathcal{R}(T - \lambda I) \neq X$.

Platí $\sigma_p(T) \subset \sigma(T)$.

Definice

Operátor $T \in \mathcal{L}(X)$ je **invertibilní** právě tehdy, když existuje operátor $L \in \mathcal{L}(X)$ takový, že $LT = TL = I$, kde I je identický operátor na X (tj. $Tx = x$ pro všechna $x \in X$).

Věta

Operátor $T \in \mathcal{L}(X)$ je invertibilní právě tehdy, když je prostý a na.

Platí $\lambda \notin \sigma(T) \Leftrightarrow (T - \lambda I)$ je invertibilní.

Spektrum operátoru

Definice

Říkáme, že komplexní číslo λ leží ve **spektru** operátoru T , značíme $\sigma(T)$, jestliže buď operátor $T - \lambda I$ není prostý, nebo $\mathcal{R}(T - \lambda I) \neq X$.

Platí $\sigma_p(T) \subset \sigma(T)$.

Definice

Operátor $T \in \mathcal{L}(X)$ je **invertibilní** právě tehdy, když existuje operátor $L \in \mathcal{L}(X)$ takový, že $LT = TL = I$, kde I je identický operátor na X (tj. $Tx = x$ pro všechna $x \in X$).

Věta

Operátor $T \in \mathcal{L}(X)$ je invertibilní právě tehdy, když je prostý a na.

Platí $\lambda \notin \sigma(T) \Leftrightarrow (T - \lambda I)$ je invertibilní.

Spektrum operátoru

Definice

Říkáme, že komplexní číslo λ leží ve **spektru** operátoru T , značíme $\sigma(T)$, jestliže buď operátor $T - \lambda I$ není prostý, nebo $\mathcal{R}(T - \lambda I) \neq X$.

Platí $\sigma_p(T) \subset \sigma(T)$.

Definice

Operátor $T \in \mathcal{L}(X)$ je **invertibilní** právě tehdy, když existuje operátor $L \in \mathcal{L}(X)$ takový, že $LT = TL = I$, kde I je identický operátor na X (tj. $Tx = x$ pro všechna $x \in X$).

Věta

Operátor $T \in \mathcal{L}(X)$ je invertibilní právě tehdy, když je prostý a na.

Platí $\lambda \notin \sigma(T) \Leftrightarrow (T - \lambda I)$ je invertibilní.

Spektrum operátoru

Definice

Říkáme, že komplexní číslo λ leží ve **spektru** operátoru T , značíme $\sigma(T)$, jestliže buď operátor $T - \lambda I$ není prostý, nebo $\mathcal{R}(T - \lambda I) \neq X$.

Platí $\sigma_p(T) \subset \sigma(T)$.

Definice

Operátor $T \in \mathcal{L}(X)$ je **invertibilní** právě tehdy, když existuje operátor $L \in \mathcal{L}(X)$ takový, že $LT = TL = I$, kde I je identický operátor na X (tj. $Tx = x$ pro všechna $x \in X$).

Věta

Operátor $T \in \mathcal{L}(X)$ je invertibilní právě tehdy, když je prostý a na.

Platí $\lambda \notin \sigma(T) \Leftrightarrow (T - \lambda I)$ je invertibilní.

Spektrum operátoru

Definice

Říkáme, že komplexní číslo λ leží ve **spektru** operátoru T , značíme $\sigma(T)$, jestliže buď operátor $T - \lambda I$ není prostý, nebo $\mathcal{R}(T - \lambda I) \neq X$.

Platí $\sigma_p(T) \subset \sigma(T)$.

Definice

Operátor $T \in \mathcal{L}(X)$ je **invertibilní** právě tehdy, když existuje operátor $L \in \mathcal{L}(X)$ takový, že $LT = TL = I$, kde I je identický operátor na X (tj. $Tx = x$ pro všechna $x \in X$).

Věta

Operátor $T \in \mathcal{L}(X)$ je invertibilní právě tehdy, když je prostý a na.

Platí $\lambda \notin \sigma(T) \Leftrightarrow (T - \lambda I)$ je invertibilní.

Příklad: Operátor $T : l^2 \rightarrow l^2$ je definovaný vztahem

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots) = (x_1 + \frac{x_1}{2}, x_2 + \frac{x_1}{3}, x_3 + \frac{x_1}{4}, x_4 + \frac{x_1}{5}, \dots)$$

je invertibilní operátor, protože existuje operátor $L : l^2 \rightarrow l^2$ definovaný vztahem

$$L(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots) = (x_1 - \frac{x_1}{2}, x_2 - \frac{x_1}{4}, x_3 - \frac{x_1}{6}, x_4 - \frac{x_1}{8}, \dots)$$

pro který platí $LT = TL = I$. Dá se ukázat, že operátory T i L jsou spojité. Platí

$$\|T\| \leq \sqrt{1 + 2\frac{\pi}{\sqrt{6}} + \frac{\pi^2}{6}} \text{ a } \|L\| \leq \sqrt{1 + \frac{\pi}{\sqrt{6}} + \frac{\pi^2}{24}}$$

□

Věta

Nechť X je Banachův prostor a $T \in \mathcal{L}(X)$. Potom $\sigma(T)$ je uzavřená množina a

$$\sigma(T) \subset \{\lambda \in \mathbb{C}; |\lambda| \leq \|T\|\}.$$

- 1 Banachův a Hilbertův prostor
 - Normované lineární prostory.
 - Prostor se skalárním součinem.
 - Ortonormální soustavy a baze.
- 2 Lineární zobrazení, operátor a funkcionál.
 - Lineární zobrazení.
 - Norma lineárního zobrazení.
 - Příklady.
 - Frechet-Rieszova věta
- 3 **Spektrální teorie.**
 - Vlastní čísla a vlastní funkce lineárních operátorů.
 - Spektrum operátoru.
 - **Příklady.**
 - Spektrální teorie v Hilbertových prostorech
- 4 Něco z kvantové mechaniky.
 - Základní postuláty kvantové mechaniky.
 - Fyzikální veličiny v kvantové mechanice.
 - Schrödingerova rovnice.

Příklad: $X = l^2$ je Banachův (dokonce Hilbertův) prostor,

$$\|\{x_n\}\| = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2}.$$

Definujme operátor $R : l^2 \rightarrow l^2$

$$R(x_1, x_2, x_3, \dots) = (0, x_1, x_2, x_3, \dots).$$

Určete spektrum operátoru R .

Příklad: $X = L^2([0, 1])$ je Banachův (dokonce Hilbertův) prostor,

$$\|f\| = \sqrt{\int_0^1 |f|^2}.$$

Definujme operátor $L : L^2([0, 1]) \rightarrow L^2([0, 1])$

$$Lf(t) = tf(t).$$

Určete spektrum operátoru L .

- 1 Banachův a Hilbertův prostor
 - Normované lineární prostory.
 - Prostor se skalárním součinem.
 - Ortonormální soustavy a baze.
- 2 Lineární zobrazení, operátor a funkcionál.
 - Lineární zobrazení.
 - Norma lineárního zobrazení.
 - Příklady.
 - Frechet-Rieszova věta
- 3 **Spektrální teorie.**
 - Vlastní čísla a vlastní funkce lineárních operátorů.
 - Spektrum operátoru.
 - Příklady.
 - **Spektrální teorie v Hilbertových prostorech**
- 4 Něco z kvantové mechaniky.
 - Základní postuláty kvantové mechaniky.
 - Fyzikální veličiny v kvantové mechanice.
 - Schrödingerova rovnice.

Spektrální teorie v Hilbertových prostorech

Nechť $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$, H_1, H_2 jsou Hilbertovy prostory, potom existuje právě jedno zobrazení $T^* : H_2 \rightarrow H_1$ tak, že

$$(Tx, y) = (x, T^*y) \text{ pro } \forall x \in H_1, y \in H_2$$

přitom $T^* \in \mathcal{L}(H_2, H_1)$ a $\|T^*\| = \|T\|$.

Definice

Zobrazení T^* se nazývá *adjungované zobrazení k zobrazení T* .

Definice

Nechť H je Hilbertův prostor. Operátor $T \in \mathcal{L}(H)$ se nazývá **hermitovský (samoadjungovaný)** jestliže $T^* = T$. Pokud $TT^* = T^*T$ říkáme, že T je *normální*.

Platí, že vlastní hodnoty hermitovského operátoru jsou reálné. Pro každé $\lambda \in \sigma_p(T)$ a $x \neq 0$ vlastní vektor platí totiž

$$\begin{aligned} \lambda(x, x) &= (\lambda x, x) = (Tx, x) = (x, Tx) = \bar{\lambda}(x, x) \Rightarrow \lambda\|x\|^2 = \bar{\lambda}\|x\|^2 \Rightarrow \\ &\lambda = \bar{\lambda}. \end{aligned}$$

Spektrální teorie v Hilbertových prostorech

Nechť $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$, H_1, H_2 jsou Hilbertovy prostory, potom existuje právě jedno zobrazení $T^* : H_2 \rightarrow H_1$ tak, že

$$(Tx, y) = (x, T^*y) \text{ pro } \forall x \in H_1, y \in H_2$$

přitom $T^* \in \mathcal{L}(H_2, H_1)$ a $\|T^*\| = \|T\|$.

Definice

Zobrazení T^* se nazývá *adjungované zobrazení k zobrazení T* .

Definice

Nechť H je Hilbertův prostor. Operátor $T \in \mathcal{L}(H)$ se nazývá **hermitovský (samoadjungovaný)** jestliže $T^* = T$. Pokud $TT^* = T^*T$ říkáme, že T je *normální*.

Platí, že vlastní hodnoty hermitovského operátoru jsou reálné. Pro každé $\lambda \in \sigma_p(T)$ a $x \neq 0$ vlastní vektor platí totiž

$$\begin{aligned} \lambda(x, x) &= (\lambda x, x) = (Tx, x) = (x, Tx) = \bar{\lambda}(x, x) \Rightarrow \lambda\|x\|^2 = \bar{\lambda}\|x\|^2 \Rightarrow \\ &\lambda = \bar{\lambda}. \end{aligned}$$

Spektrální teorie v Hilbertových prostorech

Nechť $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$, H_1, H_2 jsou Hilbertovy prostory, potom existuje právě jedno zobrazení $T^* : H_2 \rightarrow H_1$ tak, že

$$(Tx, y) = (x, T^*y) \text{ pro } \forall x \in H_1, y \in H_2$$

přitom $T^* \in \mathcal{L}(H_2, H_1)$ a $\|T^*\| = \|T\|$.

Definice

Zobrazení T^* se nazývá *adjungované zobrazení k zobrazení T* .

Definice

Nechť H je Hilbertův prostor. Operátor $T \in \mathcal{L}(H)$ se nazývá **hermitovský (samoadjungovaný)** jestliže $T^* = T$. Pokud $TT^* = T^*T$ říkáme, že T je *normální*.

Platí, že vlastní hodnoty hermitovského operátoru jsou reálné. Pro každé $\lambda \in \sigma_p(T)$ a $x \neq 0$ vlastní vektor platí totiž

$$\begin{aligned} \lambda(x, x) &= (\lambda x, x) = (Tx, x) = (x, Tx) = \bar{\lambda}(x, x) \Rightarrow \lambda\|x\|^2 = \bar{\lambda}\|x\|^2 \Rightarrow \\ &\lambda = \bar{\lambda}. \end{aligned}$$

Spektrální teorie v Hilbertových prostorech

Nechť $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$, H_1, H_2 jsou Hilbertovy prostory, potom existuje právě jedno zobrazení $T^* : H_2 \rightarrow H_1$ tak, že

$$(Tx, y) = (x, T^*y) \text{ pro } \forall x \in H_1, y \in H_2$$

přitom $T^* \in \mathcal{L}(H_2, H_1)$ a $\|T^*\| = \|T\|$.

Definice

Zobrazení T^* se nazývá *adjungované zobrazení k zobrazení T* .

Definice

Nechť H je Hilbertův prostor. Operátor $T \in \mathcal{L}(H)$ se nazývá **hermitovský (samoadjungovaný)** jestliže $T^* = T$. Pokud $TT^* = T^*T$ říkáme, že T je *normální*.

Platí, že vlastní hodnoty hermitovského operátoru jsou reálné. Pro každé $\lambda \in \sigma_p(T)$ a $x \neq 0$ vlastní vektor platí totiž

$$\begin{aligned} \lambda(x, x) &= (\lambda x, x) = (Tx, x) = (x, Tx) = \bar{\lambda}(x, x) \Rightarrow \lambda\|x\|^2 = \bar{\lambda}\|x\|^2 \Rightarrow \\ &\lambda = \bar{\lambda}. \end{aligned}$$

Je-li T hermitovský platí, že vlastní vektory příslušející různým vlastním číslům jsou ortogonální.

Věta

Nechť H je Hilbertův prostor. Operátor $T \in \mathcal{L}(H)$ je hermitovský, potom

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \{(Tx, x)\}.$$

Věta

Nechť H je Hilbertův prostor. Operátor $T \in \mathcal{L}(H)$ je hermitovský, označme

$$m_T = \inf_{\|x\|=1} \{(Tx, x)\} \quad M_T = \sup_{\|x\|=1} \{(Tx, x)\},$$

potom

$$\sigma(T) \subset [m_T, M_T], \quad \text{přičemž } m_T, M_T \in \sigma(T).$$

Definice

*Reálné číslo $r(T) = \sup_{\lambda \in \sigma(T)} \{|\lambda|\}$ nazýváme **spaktrální poloměr**.*

Je-li T hermitovský platí, že vlastní vektory příslušející různým vlastním číslům jsou ortogonální.

Věta

Nechť H je Hilbertův prostor. Operátor $T \in \mathcal{L}(H)$ je hermitovský, potom

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \{(Tx, x)\}.$$

Věta

Nechť H je Hilbertův prostor. Operátor $T \in \mathcal{L}(H)$ je hermitovský, označme

$$m_T = \inf_{\|x\|=1} \{(Tx, x)\} \quad M_T = \sup_{\|x\|=1} \{(Tx, x)\},$$

potom

$$\sigma(T) \subset [m_T, M_T], \text{ přičemž } m_T, M_T \in \sigma(T).$$

Definice

Reálné číslo $r(T) = \sup_{\lambda \in \sigma(T)} \{|\lambda|\}$ nazýváme **spaktrální poloměr**.

Je-li T hermitovský platí, že vlastní vektory příslušející různým vlastním číslům jsou ortogonální.

Věta

Nechť H je Hilbertův prostor. Operátor $T \in \mathcal{L}(H)$ je hermitovský, potom

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \{(Tx, x)\}.$$

Věta

Nechť H je Hilbertův prostor. Operátor $T \in \mathcal{L}(H)$ je hermitovský, označme

$$m_T = \inf_{\|x\|=1} \{(Tx, x)\} \quad M_T = \sup_{\|x\|=1} \{(Tx, x)\},$$

potom

$$\sigma(T) \subset [m_T, M_T], \quad \text{příčemž } m_T, M_T \in \sigma(T).$$

Definice

Reálné číslo $r(T) = \sup_{\lambda \in \sigma(T)} \{|\lambda|\}$ nazýváme **spaktrální poloměr**.

Je-li T hermitovský platí, že vlastní vektory příslušející různým vlastním číslům jsou ortogonální.

Věta

Nechť H je Hilbertův prostor. Operátor $T \in \mathcal{L}(H)$ je hermitovský, potom

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \{(Tx, x)\}.$$

Věta

Nechť H je Hilbertův prostor. Operátor $T \in \mathcal{L}(H)$ je hermitovský, označme

$$m_T = \inf_{\|x\|=1} \{(Tx, x)\} \quad M_T = \sup_{\|x\|=1} \{(Tx, x)\},$$

potom

$$\sigma(T) \subset [m_T, M_T], \quad \text{příčemž } m_T, M_T \in \sigma(T).$$

Definice

Reálné číslo $r(T) = \sup_{\lambda \in \sigma(T)} \{|\lambda|\}$ nazýváme **spaktrální poloměr**.

Věta

Je-li $T \in \mathcal{L}(H)$ hermitovský je $r(T) = \|T\|$.

Příklad:

$H = \{f \in L^2([0,1]); f(0) = f(1) = 0 \text{ a } f \text{ má } \infty \text{ derivací na } [0,1]\}$.

Definujme operátor $D = \frac{d^2}{dt^2}$. Dokažte, že D je hermitovský operátor. Vlastní hodnoty operátoru D jsou $-n^2\pi^2$ a vlastní funkce $\sin(n\pi t)$, $n \in \mathbb{N}$. Poznamenejme, že tento operátor není spojitý, jinak by nutně bylo jeho spektrum omezené.

Věta

Je-li $T \in \mathcal{L}(H)$ hermitovský je $r(T) = \|T\|$.

Příklad:

$H = \{f \in L^2([0,1]); f(0) = f(1) = 0 \text{ a } f \text{ má } \infty \text{ derivací na } [0,1]\}$.

Definujme operátor $D = \frac{d^2}{dt^2}$. Dokažte, že D je hermitovský operátor. Vlastní hodnoty operátoru D jsou $-n^2\pi^2$ a vlastní funkce $\sin(n\pi t)$, $n \in \mathbb{N}$. Poznamenejme, že tento operátor není spojitý, jinak by nutně bylo jeho spektrum omezené.

- 1 Banachův a Hilbertův prostor
 - Normované lineární prostory.
 - Prostor se skalárním součinem.
 - Ortonormální soustavy a baze.
- 2 Lineární zobrazení, operátor a funkcionál.
 - Lineární zobrazení.
 - Norma lineárního zobrazení.
 - Příklady.
 - Frechet-Rieszova věta
- 3 Spektrální teorie.
 - Vlastní čísla a vlastní funkce lineárních operátorů.
 - Spektrum operátoru.
 - Příklady.
 - Spektrální teorie v Hilbertových prostorech
- 4 Něco z kvantové mechaniky.
 - Základní postuláty kvantové mechaniky.
 - Fyzikální veličiny v kvantové mechanice.
 - Schrödingerova rovnice.

- 1 Banachův a Hilbertův prostor
 - Normované lineární prostory.
 - Prostor se skalárním součinem.
 - Ortonormální soustavy a baze.
- 2 Lineární zobrazení, operátor a funkcionál.
 - Lineární zobrazení.
 - Norma lineárního zobrazení.
 - Příklady.
 - Frechet-Rieszova věta
- 3 Spektrální teorie.
 - Vlastní čísla a vlastní funkce lineárních operátorů.
 - Spektrum operátoru.
 - Příklady.
 - Spektrální teorie v Hilbertových prostorech
- 4 Něco z kvantové mechaniky.
 - Základní postuláty kvantové mechaniky.
 - Fyzikální veličiny v kvantové mechanice.
 - Schrödingerova rovnice.

Popis stavu částice

Stav částice v časovém okamžiku t je v kvantové mechanice úplně popsán komplexní funkcí $\psi(\mathbf{r}, t)$, kde $\mathbf{r} = (x, y, z) \in M \subset \mathbb{R}^3$. ψ musí být spojitá a musí mít spojitě parciální derivace podle všech proměnných x, y, z, t . Tato funkce se nazývá **vlnová funkce**.

Vlnová funkce ψ sice slouží k úplnému popisu stavu částice, její hodnoty však nemají konkrétní význam. Interpretace vlnové funkce byla odvozena z experimentálních pozorování a má statistický význam.

Z vlnové funkce odvozená veličina

$$\rho(\mathbf{r}, t) = |\psi(\mathbf{r}, t)|^2$$

znamená **hustotu pravděpodobnosti polohy částice**.

Dílí pravděpodobnost, že se částice nachází (byla by měřením zjištěna) v malém okolí bodu \mathbf{r} o objemu dV označme dP . Platí

$$dP = \rho(\mathbf{r}, t)dV = |\psi(\mathbf{r}, t)|^2 dV$$

Popis stavu částice

Stav částice v časovém okamžiku t je v kvantové mechanice úplně popsán komplexní funkcí $\psi(\mathbf{r}, t)$, kde $\mathbf{r} = (x, y, z) \in M \subset \mathbb{R}^3$. ψ musí být spojitá a musí mít spojitě parciální derivace podle všech proměnných x, y, z, t . Tato funkce se nazývá **vlnová funkce**.

Vlnová funkce ψ sice slouží k úplnému popisu stavu částice, její hodnoty však nemají konkrétní význam. Interpretace vlnové funkce byla odvozena z experimentálních pozorování a má statistický význam.

Z vlnové funkce odvozená veličina

$$\rho(\mathbf{r}, t) = |\psi(\mathbf{r}, t)|^2$$

znamená **hustotu pravděpodobnosti polohy částice**.

Dílní pravděpodobnost, že se částice nachází (byla by měřením zjištěna) v malém okolí bodu \mathbf{r} o objemu dV označme dP . Platí

$$dP = \rho(\mathbf{r}, t)dV = |\psi(\mathbf{r}, t)|^2 dV$$

Popis stavu částice

Stav částice v časovém okamžiku t je v kvantové mechanice úplně popsán komplexní funkcí $\psi(\mathbf{r}, t)$, kde $\mathbf{r} = (x, y, z) \in M \subset \mathbb{R}^3$. ψ musí být spojitá a musí mít spojitě parciální derivace podle všech proměnných x, y, z, t . Tato funkce se nazývá **vlnová funkce**.

Vlnová funkce ψ sice slouží k úplnému popisu stavu částice, její hodnoty však nemají konkrétní význam. Interpretace vlnové funkce byla odvozena z experimentálních pozorování a má statistický význam.

Z vlnové funkce odvozená veličina

$$\rho(\mathbf{r}, t) = |\psi(\mathbf{r}, t)|^2$$

znamená **hustotu pravděpodobnosti polohy částice**.

Dílní pravděpodobnost, že se částice nachází (byla by měřením zjištěna) v malém okolí bodu \mathbf{r} o objemu dV označme dP . Platí

$$dP = \rho(\mathbf{r}, t)dV = |\psi(\mathbf{r}, t)|^2 dV$$

Popis stavu částice

Stav částice v časovém okamžiku t je v kvantové mechanice úplně popsán komplexní funkcí $\psi(\mathbf{r}, t)$, kde $\mathbf{r} = (x, y, z) \in M \subset \mathbb{R}^3$. ψ musí být spojitá a musí mít spojitě parciální derivace podle všech proměnných x, y, z, t . Tato funkce se nazývá **vlnová funkce**.

Vlnová funkce ψ sice slouží k úplnému popisu stavu částice, její hodnoty však nemají konkrétní význam. Interpretace vlnové funkce byla odvozena z experimentálních pozorování a má statistický význam.

Z vlnové funkce odvozená veličina

$$\rho(\mathbf{r}, t) = |\psi(\mathbf{r}, t)|^2$$

znamená **hustotu pravděpodobnosti polohy částice**.

Dílí pravděpodobnost, že se částice nachází (byla by měřením zjištěna) v malém okolí bodu \mathbf{r} o objemu dV označme dP . Platí

$$dP = \rho(\mathbf{r}, t)dV = |\psi(\mathbf{r}, t)|^2 dV$$

Popis stavu částice - (2)

Nechť $\Omega \subset M$. Pravděpodobnost, že částice se nachází uvnitř objemu Ω vypočteme

$$\int_{\Omega} |\psi(\mathbf{r}, t)|^2 dV.$$

Je přirozené předpokládat, že

$$\int_M |\psi(\mathbf{r}, t)|^2 dV = 1,$$

tj. $\|\psi\| = 1$.

Z normovací podmínky lze odvodit fyzikální rozměr vlnové funkce - $m^{-3/2}$ (v případě jednorozměrného pohybu $m^{-1/2}$, v případě dvojrozměrného pohybu m^{-1}).

Popis stavu částice - (2)

Nechť $\Omega \subset M$. Pravděpodobnost, že částice se nachází uvnitř objemu Ω vypočteme

$$\int_{\Omega} |\psi(\mathbf{r}, t)|^2 dV.$$

Je přirozené předpokládat, že

$$\int_M |\psi(\mathbf{r}, t)|^2 dV = 1,$$

tj. $\|\psi\| = 1$.

Z normovací podmínky lze odvodit fyzikální rozměr vlnové funkce - $m^{-3/2}$ (v případě jednorozměrného pohybu $m^{-1/2}$, v případě dvojrozměrného pohybu m^{-1}).

Popis stavu částice - (2)

Nechť $\Omega \subset M$. Pravděpodobnost, že částice se nachází uvnitř objemu Ω vypočteme

$$\int_{\Omega} |\psi(\mathbf{r}, t)|^2 dV.$$

Je přirozené předpokládat, že

$$\int_M |\psi(\mathbf{r}, t)|^2 dV = 1,$$

tj. $\|\psi\| = 1$.

Z normovací podmínky lze odvodit fyzikální rozměr vlnové funkce - $m^{-3/2}$ (v případě jednorozměrného pohybu $m^{-1/2}$, v případě dvojrozměrného pohybu m^{-1}).

Princip superpozice stavů

Jestliže se kvantový systém může nacházet ve stavu popsaném vlnovou funkcí ψ_1 a jestliže se může nacházet i ve stavu popsaném vlnovou funkcí ψ_2 , potom se kvantový systém může nacházet i ve stavu ψ , pro který platí

$$\psi = c_1\psi_1 + c_2\psi_2,$$

kde c_1, c_2 jsou libovolné komplexní konstanty.

Množinu všech možných vlnových funkcí ψ popisující všechny stavy pevně zvoleného kvantového objektu spolu s nulovou funkcí nazýváme **stavovým prostorem** a značíme \mathcal{V} .

\mathcal{V} je lineární podprostor $L^2(M)$. Zavedeme v něm skalární součin

$$(\psi_1, \psi_2) = \int_M \psi_1(\mathbf{r}, t) \overline{\psi_2(\mathbf{r}, t)} dV$$

a normu

$$\|\psi\| = \sqrt{(\psi, \psi)} = \sqrt{\int_M |\psi(\mathbf{r}, t)|^2 dV}$$

Princip superpozice stavů

Jestliže se kvantový systém může nacházet ve stavu popsaném vlnovou funkcí ψ_1 a jestliže se může nacházet i ve stavu popsaném vlnovou funkcí ψ_2 , potom se kvantový systém může nacházet i ve stavu ψ , pro který platí

$$\psi = c_1\psi_1 + c_2\psi_2,$$

kde c_1, c_2 jsou libovolné komplexní konstanty.

Množinu všech možných vlnových funkcí ψ popisující všechny stavy pevně zvoleného kvantového objektu spolu s nulovou funkcí nazýváme **stavovým prostorem** a značíme \mathcal{V} .

\mathcal{V} je lineární podprostor $L^2(M)$. Zavedeme v něm skalární součin

$$(\psi_1, \psi_2) = \int_M \psi_1(\mathbf{r}, t) \overline{\psi_2(\mathbf{r}, t)} dV$$

a normu

$$\|\psi\| = \sqrt{(\psi, \psi)} = \sqrt{\int_M |\psi(\mathbf{r}, t)|^2 dV}$$

Princip superpozice stavů

Jestliže se kvantový systém může nacházet ve stavu popsaném vlnovou funkcí ψ_1 a jestliže se může nacházet i ve stavu popsaném vlnovou funkcí ψ_2 , potom se kvantový systém může nacházet i ve stavu ψ , pro který platí

$$\psi = c_1\psi_1 + c_2\psi_2,$$

kde c_1, c_2 jsou libovolné komplexní konstanty.

Množinu všech možných vlnových funkcí ψ popisující všechny stavy pevně zvoleného kvantového objektu spolu s nulovou funkcí nazýváme **stavovým prostorem** a značíme \mathcal{V} .

\mathcal{V} je lineární podprostor $L^2(M)$. Zavedeme v něm skalární součin

$$(\psi_1, \psi_2) = \int_M \psi_1(\mathbf{r}, t) \overline{\psi_2(\mathbf{r}, t)} dV$$

a normu

$$\|\psi\| = \sqrt{(\psi, \psi)} = \sqrt{\int_M |\psi(\mathbf{r}, t)|^2 dV}$$

Princip superpozice stavů - (2)

Jaký význam mají konstanty c_1, c_2 ve vztahu

$$\psi = c_1\psi_1 + c_2\psi_2?$$

Předpokládejme, že ψ_1, ψ_2 jsou normované a ortogonální. Potom

$$1 = (\psi, \psi) = (c_1\psi_1 + c_2\psi_2, c_1\psi_1 + c_2\psi_2) = |c_1|^2 + |c_2|^2.$$

To lze interpretovat tak, že systém v kvantovém stavu ψ se s pravděpodobností $|c_1|^2$ nachází ve stavu ψ_1 s pravděpodobností $|c_2|^2$ se nachází ve stavu ψ_2 .

Například, jestliže vlnová funkce ψ_1 popisuje stav částice, který je charakterizován tím, že při měření veličiny F se získá její přesná hodnota F_1 a že ve stavu ψ_2 má veličina F přesnou hodnotu F_2 , potom uvedeme-li částici do stavu $\psi = c_1\psi_1 + c_2\psi_2$ dostaneme při opakovaném měření pouze hodnoty F_1 a F_2 a to s pravděpodobnostmi $|c_1|^2$ a $|c_2|^2$.

Princip superpozice stavů - (2)

Jaký význam mají konstanty c_1, c_2 ve vztahu

$$\psi = c_1\psi_1 + c_2\psi_2?$$

Předpokládejme, že ψ_1, ψ_2 jsou normované a ortogonální. Potom

$$1 = (\psi, \psi) = (c_1\psi_1 + c_2\psi_2, c_1\psi_1 + c_2\psi_2) = |c_1|^2 + |c_2|^2.$$

To lze interpretovat tak, že systém v kvantovém stavu ψ se s pravděpodobností $|c_1|^2$ nachází ve stavu ψ_1 s pravděpodobností $|c_2|^2$ se nachází ve stavu ψ_2 .

Například, jestliže vlnová funkce ψ_1 popisuje stav částice, který je charakterizován tím, že při měření veličiny F se získá její přesná hodnota F_1 a že ve stavu ψ_2 má veličina F přesnou hodnotu F_2 , potom uvedeme-li částici do stavu $\psi = c_1\psi_1 + c_2\psi_2$ dostaneme při opakovaném měření pouze hodnoty F_1 a F_2 a to s pravděpodobností $|c_1|^2$ a $|c_2|^2$.

- 1 Banachův a Hilbertův prostor
 - Normované lineární prostory.
 - Prostor se skalárním součinem.
 - Ortonormální soustavy a baze.
- 2 Lineární zobrazení, operátor a funkcionál.
 - Lineární zobrazení.
 - Norma lineárního zobrazení.
 - Příklady.
 - Frechet-Rieszova věta
- 3 Spektrální teorie.
 - Vlastní čísla a vlastní funkce lineárních operátorů.
 - Spektrum operátoru.
 - Příklady.
 - Spektrální teorie v Hilbertových prostorech
- 4 Něco z kvantové mechaniky.
 - Základní postuláty kvantové mechaniky.
 - Fyzikální veličiny v kvantové mechanice.
 - Schrödingerova rovnice.

Operátory fyzikálních veličin

Při budování teoretického aparátu kvantové mechaniky se ukázalo, že fyzikální veličiny v něm hrají roli operátorů definovaných na stavovém prostoru \mathcal{V} .

Je-li operátor \hat{F} hermitovský, jsou jeho vlastní čísla reálná a vlnové vlastní funkce příslušející různým vlastním vektorům jsou ortogonální.

Jestliže k jednomu vlastnímu číslu existuje více lineárně nezávislých vlastních funkcí (vlastní číslo je degenerované), potom množina všech vlastních funkcí příslušejících danému vlastnímu číslu tvoří lineární prostor \mathcal{V}_λ ($\mathcal{V}_\lambda \subset \mathcal{V}$), jehož dimenze je $d_\lambda > 1$. Zkonstruujeme ortonormální bázi (Gramm-Schmidtova ortonormalizace).

Operátory fyzikálních veličin

Při budování teoretického aparátu kvantové mechaniky se ukázalo, že fyzikální veličiny v něm hrají roli operátorů definovaných na stavovém prostoru \mathcal{V} .

Je-li operátor \hat{F} hermitovský, jsou jeho vlastní čísla reálná a vlnové vlastní funkce příslušející různým vlastním vektorům jsou ortogonální.

Jestliže k jednomu vlastnímu číslu existuje více lineárně nezávislých vlastních funkcí (vlastní číslo je degenerované), potom množina všech vlastních funkcí příslušejících danému vlastnímu číslu tvoří lineární prostor \mathcal{V}_λ ($\mathcal{V}_\lambda \subset \mathcal{V}$), jehož dimenze je $d_\lambda > 1$. Zkonstruujeme ortonormální bázi (Gramm-Schmidtova ortonormalizace).

Postuláty o operátorech fyzikálních veličin

- 1 Každé fyzikální veličině F je v kvantové mechanice přiřazen lineární a hermitovský operátor \hat{F} .
- 2 Základním fyzikálním veličinám mechaniky - souřadnicím částice x, y, z a složkám hybnosti částice p_x, p_y, p_z - jsou přiřazeny operátory $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}, \hat{p}_x, \hat{p}_y, \hat{p}_z$ podle schématu

$$x \rightarrow \hat{x} = x\hat{1}, \quad y \rightarrow \hat{y} = y\hat{1}, \quad z \rightarrow \hat{z} = z\hat{1}$$

$$p_x \rightarrow \hat{p}_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}, \quad p_y \rightarrow \hat{p}_y = -i\hbar \frac{\partial}{\partial y}, \quad p_z \rightarrow \hat{p}_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial z}$$

nebo-li zapsáno vektorově

$$\mathbf{r} \rightarrow \hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}\hat{1}, \quad \mathbf{p} \rightarrow \hat{\mathbf{p}} = -i\hbar \nabla$$

Postuláty o operátorech fyzikálních veličin

- 1 Každé fyzikální veličině F je v kvantové mechanice přiřazen lineární a hermitovský operátor \hat{F} .
- 2 Základním fyzikálním veličinám mechaniky - souřadnicím částice x, y, z a složkám hybnosti částice p_x, p_y, p_z - jsou přiřazeny operátory $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}, \hat{p}_x, \hat{p}_y, \hat{p}_z$ podle schématu

$$x \rightarrow \hat{x} = x\hat{1}, \quad y \rightarrow \hat{y} = y\hat{1}, \quad z \rightarrow \hat{z} = z\hat{1}$$

$$p_x \rightarrow \hat{p}_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}, \quad p_y \rightarrow \hat{p}_y = -i\hbar \frac{\partial}{\partial y}, \quad p_z \rightarrow \hat{p}_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial z}$$

nebo-li zapsáno vektorově

$$\mathbf{r} \rightarrow \hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}\hat{1}, \quad \mathbf{p} \rightarrow \hat{\mathbf{p}} = -i\hbar\nabla$$

Postuláty o operátorech fyzikálních veličin - (2)

- 3 Je-li fyzikální veličina F vyjádřena pomocí základních mechanických veličin vztahem $F = F(\mathbf{r}, \mathbf{p})$, je jí přiřazen operátor podle schématu

$$F \rightarrow \hat{F} = F(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{p}}).$$

- 4 Množina vlastních čísel operátorů \hat{F} koresponduje s množinou možných hodnot veličiny F naměřených v jednotlivých aktech experimentu.
- 5 Skalární součin $(\psi, \hat{F}\psi)$ koresponduje za předpokladu, že ψ je normovaná vlnová funkce, se střední hodnotou $\langle F \rangle_\psi$ veličiny F ve stavu ψ vyhodnocenou z dostatečného počtu jednotlivých aktů experimentu.

Postuláty o operátorech fyzikálních veličin - (2)

- 3 Je-li fyzikální veličina F vyjádřena pomocí základních mechanických veličin vztahem $F = F(\mathbf{r}, \mathbf{p})$, je jí přiřazen operátor podle schématu

$$F \rightarrow \hat{F} = F(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{p}}).$$

- 4 Množina vlastních čísel operátorů \hat{F} koresponduje s množinou možných hodnot veličiny F naměřených v jednotlivých aktech experimentu.
- 5 Skalární součin $(\psi, \hat{F}\psi)$ koresponduje za předpokladu, že ψ je normovaná vlnová funkce, se střední hodnotou $\langle F \rangle_\psi$ veličiny F ve stavu ψ vyhodnocenou z dostatečného počtu jednotlivých aktů experimentu.

Postuláty o operátorech fyzikálních veličin - (2)

- 3 Je-li fyzikální veličina F vyjádřena pomocí základních mechanických veličin vztahem $F = F(\mathbf{r}, \mathbf{p})$, je jí přiřazen operátor podle schématu

$$F \rightarrow \hat{F} = F(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{p}}).$$

- 4 Množina vlastních čísel operátorů \hat{F} koresponduje s množinou možných hodnot veličiny F naměřených v jednotlivých aktech experimentu.
- 5 Skalární součin $(\psi, \hat{F}\psi)$ koresponduje za předpokladu, že ψ je normovaná vlnová funkce, se střední hodnotou $\langle F \rangle_\psi$ veličiny F ve stavu ψ vyhodnocenou z dostatečného počtu jednotlivých aktů experimentu.

Postuláty plynoucí z matematiky

- 6 Množina všech vlastních funkcí ψ_n operátoru \hat{F} tvoří ve stavovém prostoru \mathcal{V} úplnou bázi. To znamená, že každou funkci $\psi \in \mathcal{V}$ lze jednoznačně vyjádřit jako lineární kombinaci

$$\psi = \sum_n c_n \psi_n.$$

- 7 Každá vlastní funkce ψ_n operátoru \hat{F} fyzikální veličiny F popisuje specifický stav částice, v němž má veličina F tzv. ostrou hodnotu shodnou s hodnotou vlastního čísla λ_n , to znamená, že při opakovaném měření F v tomtéž stavu ψ_n se vždy naměří $F = \lambda_n$.

Postuláty plynoucí z matematiky

- 6 Množina všech vlastních funkcí ψ_n operátoru \hat{F} tvoří ve stavovém prostoru \mathcal{V} úplnou bázi. To znamená, že každou funkci $\psi \in \mathcal{V}$ lze jednoznačně vyjádřit jako lineární kombinaci

$$\psi = \sum_n c_n \psi_n.$$

- 7 Každá vlastní funkce ψ_n operátoru \hat{F} fyzikální veličiny F popisuje specifický stav částice, v němž má veličina F tzv. ostrou hodnotu shodnou s hodnotou vlastního čísla λ_n , to znamená, že při opakovaném měření F v tomtéž stavu ψ_n se vždy naměří $F = \lambda_n$.

Poznámky k postulátům

Je-li třeba přiřadit operátor součinu dvou veličin A a B , jejichž operátory \hat{A} a \hat{B} nejsou komutativní, postupujeme podle pravidla

$$F = AB \rightarrow \hat{F} = \frac{1}{2}(\hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}).$$

Bod č. 4 je spojovacím můstkem mezi teorií a experimentem tím, že dává do souvislosti teoreticky vypočtená vlastní čísla operátoru \hat{F} s číselnými hodnotami veličiny F naměřenými v experimentu. Nikdy nelze naměřit v jednom aktu experimentu pro veličinu F číselnou hodnotu, která by nebyla shodná s některým vlastním číslem.

Bod č. 5 představuje další spojovací můstek mezi teorií a experimentem.

$$\langle F \rangle_{\psi} = \frac{(\psi, \hat{F}\psi)}{(\psi, \psi)},$$

levá strana vzorce odpovídá střední hodnotě veličiny F získané v dostatečně početné řadě měření a pravá strana se vypočte z teorie. Vzorec lze využít k ověření 7. tvrzení a k výpočtu střední kvadratické odchylky.

Poznámky k postulátům

Je-li třeba přiřadit operátor součinu dvou veličin A a B , jejichž operátory \hat{A} a \hat{B} nejsou komutativní, postupujeme podle pravidla

$$F = AB \rightarrow \hat{F} = \frac{1}{2}(\hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}).$$

Bod č. 4 je spojovacím můstkem mezi teorií a experimentem tím, že dává do souvislosti teoreticky vypočtená vlastní čísla operátoru \hat{F} s číselnými hodnotami veličiny F naměřenými v experimentu. Nikdy nelze naměřit v jednom aktu experimentu pro veličinu F číselnou hodnotu, která by nebyla shodná s některým vlastním číslem.

Bod č. 5 představuje další spojovací můstek mezi teorií a experimentem.

$$\langle F \rangle_{\psi} = \frac{(\psi, \hat{F}\psi)}{(\psi, \psi)},$$

levá strana vzorce odpovídá střední hodnotě veličiny F získané v dostatečně početné řadě měření a pravá strana se vypočte z teorie. Vzorec lze využít k ověření 7. tvrzení a k výpočtu střední kvadratické odchylky.

Poznámky k postulátům

Je-li třeba přiřadit operátor součinu dvou veličin A a B , jejichž operátory \hat{A} a \hat{B} nejsou komutativní, postupujeme podle pravidla

$$F = AB \rightarrow \hat{F} = \frac{1}{2}(\hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}).$$

Bod č. 4 je spojovacím můstkem mezi teorií a experimentem tím, že dává do souvislosti teoreticky vypočtená vlastní čísla operátoru \hat{F} s číselnými hodnotami veličiny F naměřenými v experimentu. Nikdy nelze naměřit v jednom aktu experimentu pro veličinu F číselnou hodnotu, která by nebyla shodná s některým vlastním číslem.

Bod č. 5 představuje další spojovací můstek mezi teorií a experimentem.

$$\langle F \rangle_{\psi} = \frac{(\psi, \hat{F}\psi)}{(\psi, \psi)},$$

levá strana vzorce odpovídá střední hodnotě veličiny F získané v dostatečně početné řadě měření a pravá strana se vypočte z teorie. Vzorec lze využít k ověření 7. tvrzení a k výpočtu střední kvadratické odchylky.

Poznámky k postulátům - 2

Z 6. bodu plyne důsledek: vyjádříme li vlnovou funkci ψ studovaného stavu v podobě $\psi = \sum_n c_n \psi_n$, budeme si jisti, že při měření veličiny F pro ni neměříme pouze hodnoty λ_n , a to každou s četností $|c_n|^2$.

Několik konkrétních příkladů operátorů.

Operátor kinetické energie

Pro kinetickou energii T částice platí v klasické mechanice

$$T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} = \frac{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}{2m}.$$

Podle 2. a 3. postulátu o operátorech dostaneme operátor

$$\hat{T} = \frac{\hat{p}_1^2 + \hat{p}_2^2 + \hat{p}_3^2}{2m} = \frac{-\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta$$

Operátor potenciální energie

Pohybuje-li se částice v konzervativním poli popsaném potenciální energií $V(\mathbf{r})$ dostaneme operátor

$$\hat{V} = V(\mathbf{r})\hat{1}.$$

Několik konkrétních příkladů operátorů.

Operátor kinetické energie

Pro kinetickou energii T částice platí v klasické mechanice

$$T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} = \frac{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}{2m}.$$

Podle 2. a 3. postulátu o operátorech dostaneme operátor

$$\hat{T} = \frac{\hat{p}_1^2 + \hat{p}_2^2 + \hat{p}_3^2}{2m} = \frac{-\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta$$

Operátor potenciální energie

Pohybuje-li se částice v konzervativním poli popsaném potenciální energií $V(\mathbf{r})$ dostaneme operátor

$$\hat{V} = V(\mathbf{r})\hat{1}.$$

Hamiltonův operátor - Hamiltonián.

Hamiltonův operátor

Pro operátor H celkové energie částice v konzervativním poli dostaneme

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\mathbf{r})\hat{1}.$$

Hamiltonián pro elektricky nabitou částici s nábojem Q a hmotností m podrobenou vlivu elektrického pole popsaného vektorovým potenciálem \mathbf{A} a skalárním potenciálem φ a současně konzervativního pole s potenciální energií V má tvar

$$\hat{H} = \frac{(\hat{\mathbf{p}} - Q\mathbf{A}\hat{1})^2}{2m} + Q\varphi\hat{1} + V\hat{1}.$$

Vypnutí elektromagnetického pole $\mathbf{A} = 0$, $\varphi = 0$.

Hamiltonův operátor - Hamiltonián.

Hamiltonův operátor

Pro operátor H celkové energie částice v konzervativním poli dostaneme

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\mathbf{r})\hat{1}.$$

Hamiltonián pro elektricky nabitou částici s nábojem Q a hmotností m podrobenou vlivu elektrického pole popsaného vektorovým potenciálem \mathbf{A} a skalárním potenciálem φ a současně konzervativního pole s potenciální energií V má tvar

$$\hat{H} = \frac{(\hat{\mathbf{p}} - Q\mathbf{A}\hat{1})^2}{2m} + Q\varphi\hat{1} + V\hat{1}.$$

Vypnutí elektromagnetického pole $\mathbf{A} = 0$, $\varphi = 0$.

Momentu hybnosti.

Operátor momentu hybnosti

Momentu hybnosti $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ přiřadíme operátor

$$\hat{\mathbf{L}} = \hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{p}},$$

$$\hat{L}_1 = i\hbar \left(x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_3} \right)$$

$$\hat{L}_2 = i\hbar \left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_3} - x_3 \frac{\partial}{\partial x_1} \right)$$

$$\hat{L}_3 = i\hbar \left(x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} \right)$$

Momentu hybnosti.

Operátor momentu hybnosti

Momentu hybnosti $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ přiřadíme operátor

$$\hat{\mathbf{L}} = \hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{p}},$$

$$\hat{L}_1 = i\hbar \left(x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_3} \right)$$

$$\hat{L}_2 = i\hbar \left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_3} - x_3 \frac{\partial}{\partial x_1} \right)$$

$$\hat{L}_3 = i\hbar \left(x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} \right)$$

Komutační relace.

Uvažujme operátory \hat{O}_1 a \hat{O}_2 . Potom symbol

$$[\hat{O}_1, \hat{O}_2] \equiv \hat{O}_1 \hat{O}_2 - \hat{O}_2 \hat{O}_1$$

nazýváme **komutátor** operátorů \hat{O}_1 a \hat{O}_2 .

Jestliže operátory \hat{O}_1 a \hat{O}_2 spolu komutují, potom komutátor se rovná $\hat{0}$.

Pro operátory definované 2. postulátem platí

$$[\hat{x}_i, \hat{x}_j] = \hat{0}, \quad [\hat{p}_i, \hat{p}_j] = \hat{0},$$

$$[\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i \hbar \delta_{ij} \hat{1}$$

Komutační relace.

Uvažujme operátory \hat{O}_1 a \hat{O}_2 . Potom symbol

$$[\hat{O}_1, \hat{O}_2] \equiv \hat{O}_1 \hat{O}_2 - \hat{O}_2 \hat{O}_1$$

nazýváme **komutátor** operátorů \hat{O}_1 a \hat{O}_2 .

Jestliže operátory \hat{O}_1 a \hat{O}_2 spolu komutují, potom komutátor se rovná $\hat{0}$.

Pro operátory definované 2. postulátem platí

$$[\hat{x}_i, \hat{x}_j] = \hat{0}, \quad [\hat{p}_i, \hat{p}_j] = \hat{0},$$

$$[\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i \hbar \delta_{ij} \hat{1}$$

Komutační relace.

Uvažujme operátory \hat{O}_1 a \hat{O}_2 . Potom symbol

$$[\hat{O}_1, \hat{O}_2] \equiv \hat{O}_1 \hat{O}_2 - \hat{O}_2 \hat{O}_1$$

nazýváme **komutátor** operátorů \hat{O}_1 a \hat{O}_2 .

Jestliže operátory \hat{O}_1 a \hat{O}_2 spolu komutují, potom komutátor se rovná $\hat{0}$.

Pro operátory definované 2. postulátem platí

$$[\hat{x}_i, \hat{x}_j] = \hat{0}, \quad [\hat{p}_i, \hat{p}_j] = \hat{0},$$

$$[\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i \hbar \delta_{ij} \hat{1}$$

Pravidla pro komutátor.

Pro komutátor platí následující pravidla

- 1 $[\hat{A}, \hat{B}] = -[\hat{B}, \hat{A}],$
- 2 $[\hat{A}, \hat{B} + \hat{C}] = [\hat{A}, \hat{B}] + [\hat{A}, \hat{C}],$
- 3 $[\hat{A}, \hat{B}\hat{C}] = \hat{B}[\hat{A}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{B}]\hat{C}.$

Použijeme pravidla pro operátor k -té souřadnice a operátor kinetické energie

$$[\hat{x}_k, \hat{T}] = \frac{1}{2m} \sum_{j=1}^3 [\hat{x}_k, \hat{p}_j^2] = \frac{1}{2m} \left(\sum_{j=1}^3 \hat{p}_j [\hat{x}_k, \hat{p}_j] + \sum_{j=1}^3 [\hat{x}_k, \hat{p}_j] \hat{p}_j \right) = \frac{i\hbar}{m} \hat{p}_k.$$

Komutační relace zapsaná vektorově

$$[\hat{\mathbf{r}}, \hat{T}] = \frac{i\hbar}{m} \hat{\mathbf{p}}.$$

Pro komutátor operátoru hybnosti a operátoru potenciální energie dostaneme

$$[\hat{\mathbf{p}}, \hat{V}] = i\hbar \text{grad} V \hat{\mathbf{1}}.$$

Pravidla pro komutátor.

Pro komutátor platí následující pravidla

- 1 $[\hat{A}, \hat{B}] = -[\hat{B}, \hat{A}],$
- 2 $[\hat{A}, \hat{B} + \hat{C}] = [\hat{A}, \hat{B}] + [\hat{A}, \hat{C}],$
- 3 $[\hat{A}, \hat{B}\hat{C}] = \hat{B}[\hat{A}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{B}]\hat{C}.$

Použijeme pravidla pro operátor k -té souřadnice a operátor kinetické energie

$$[\hat{x}_k, \hat{T}] = \frac{1}{2m} \sum_{j=1}^3 [\hat{x}_k, \hat{p}_j^2] = \frac{1}{2m} \left(\sum_{j=1}^3 \hat{p}_j [\hat{x}_k, \hat{p}_j] + \sum_{j=1}^3 [\hat{x}_k, \hat{p}_j] \hat{p}_j \right) = \frac{i\hbar}{m} \hat{p}_k.$$

Komutační relace zapsaná vektorově

$$[\hat{\mathbf{r}}, \hat{T}] = \frac{i\hbar}{m} \hat{\mathbf{p}}.$$

Pro komutátor operátoru hybnosti a operátoru potenciální energie dostaneme

$$[\hat{\mathbf{p}}, \hat{V}] = i\hbar \text{grad} V \hat{\mathbf{1}}.$$

Pravidla pro komutátor.

Pro komutátor platí následující pravidla

- 1 $[\hat{A}, \hat{B}] = -[\hat{B}, \hat{A}],$
- 2 $[\hat{A}, \hat{B} + \hat{C}] = [\hat{A}, \hat{B}] + [\hat{A}, \hat{C}],$
- 3 $[\hat{A}, \hat{B}\hat{C}] = \hat{B}[\hat{A}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{B}]\hat{C}.$

Použijeme pravidla pro operátor k -té souřadnice a operátor kinetické energie

$$[\hat{x}_k, \hat{T}] = \frac{1}{2m} \sum_{j=1}^3 [\hat{x}_k, \hat{p}_j^2] = \frac{1}{2m} \left(\sum_{j=1}^3 \hat{p}_j [\hat{x}_k, \hat{p}_j] + \sum_{j=1}^3 [\hat{x}_k, \hat{p}_j] \hat{p}_j \right) = \frac{i\hbar}{m} \hat{p}_k.$$

Komutační relace zapsaná vektorově

$$[\hat{\mathbf{r}}, \hat{T}] = \frac{i\hbar}{m} \hat{\mathbf{p}}.$$

Pro komutátor operátoru hybnosti a operátoru potenciální energie dostaneme

$$[\hat{\mathbf{p}}, \hat{V}] = i\hbar \text{grad} V \hat{\mathbf{1}}.$$

Pravidla pro komutátor - 2.

Určete komutátory

$$[\hat{\rho}, \hat{V}], \quad [\hat{L}_1, \hat{L}_2], \quad [\hat{L}_2, \hat{L}_3], \quad [\hat{L}_3, \hat{L}_1].$$

Platí tvrzení:

Jestliže operátory \hat{F} a \hat{G} mají systém stejných vlastních vektorů, potom $[\hat{F}, \hat{G}] = \hat{0}$.

Jsou-li všechna vlastní čísla operátoru \hat{F} negenerovaná platí veta i naopak:

Jestliže $[\hat{F}, \hat{G}] = \hat{0}$, potom systém vlastních vektorů operátoru \hat{F} je i systém vlastních vektorů operátoru \hat{G} .

Má-li operátor \hat{F} generovaná vlastní čísla a $[\hat{F}, \hat{G}] = \hat{0}$, potom lze vybrat takový systém vlastních vektorů operátoru \hat{F} , že je také systémem vlastních vektorů operátoru \hat{G} .

Pravidla pro komutátor - 2.

Určete komutátory

$$[\hat{\rho}, \hat{V}], \quad [\hat{L}_1, \hat{L}_2], \quad [\hat{L}_2, \hat{L}_3], \quad [\hat{L}_3, \hat{L}_1].$$

Platí tvrzení:

Jestliže operátory \hat{F} a \hat{G} mají systém stejných vlastních vektorů, potom $[\hat{F}, \hat{G}] = \hat{0}$.

Jsou-li všechna vlastní čísla operátoru \hat{F} negenerovaná platí veta i naopak:

Jestliže $[\hat{F}, \hat{G}] = \hat{0}$, potom systém vlastních vektorů operátoru \hat{F} je i systém vlastních vektorů operátoru \hat{G} .

Má-li operátor \hat{F} generovaná vlastní čísla a $[\hat{F}, \hat{G}] = \hat{0}$, potom lze vybrat takový systém vlastních vektorů operátoru \hat{F} , že je také systémem vlastních vektorů operátoru \hat{G} .

Pravidla pro komutátor - 2.

Určete komutátory

$$[\hat{\rho}, \hat{V}], \quad [\hat{L}_1, \hat{L}_2], \quad [\hat{L}_2, \hat{L}_3], \quad [\hat{L}_3, \hat{L}_1].$$

Platí tvrzení:

Jestliže operátory \hat{F} a \hat{G} mají systém stejných vlastních vektorů, potom $[\hat{F}, \hat{G}] = \hat{0}$.

Jsou-li všechna vlastní čísla operátoru \hat{F} negenerovaná platí veta i naopak:

Jestliže $[\hat{F}, \hat{G}] = \hat{0}$, potom systém vlastních vektorů operátoru \hat{F} je i systém vlastních vektorů operátoru \hat{G} .

Má-li operátor \hat{F} generovaná vlastní čísla a $[\hat{F}, \hat{G}] = \hat{0}$, potom lze vybrat takový systém vlastních vektorů operátoru \hat{F} , že je také systémem vlastních vektorů operátoru \hat{G} .

Pravidla pro komutátor - 2.

Určete komutátory

$$[\hat{\rho}, \hat{V}], \quad [\hat{L}_1, \hat{L}_2], \quad [\hat{L}_2, \hat{L}_3], \quad [\hat{L}_3, \hat{L}_1].$$

Platí tvrzení:

Jestliže operátory \hat{F} a \hat{G} mají systém stejných vlastních vektorů, potom $[\hat{F}, \hat{G}] = \hat{0}$.

Jsou-li všechna vlastní čísla operátoru \hat{F} negenerovaná platí veta i naopak:

Jestliže $[\hat{F}, \hat{G}] = \hat{0}$, potom systém vlastních vektorů operátoru \hat{F} je i systém vlastních vektorů operátoru \hat{G} .

Má-li operátor \hat{F} generovaná vlastní čísla a $[\hat{F}, \hat{G}] = \hat{0}$, potom lze vybrat takový systém vlastních vektorů operátoru \hat{F} , že je také systémem vlastních vektorů operátoru \hat{G} .

Relace neurčitosti.

Budeme věnovat pozornost otázce současné měřitelnosti dvou (případně i více) fyzikálních veličin. Mají-li dva operátory \hat{F} a \hat{G} společné vlastní funkce, potom existují stavy v kterých můžeme u obou veličin F a G naměřit současně ostré hodnoty. V opačném případě nejsou veličiny F a G současně měřitelné, t.j. jestliže $[\hat{F}, \hat{G}] \neq \hat{0}$ potom veličiny F a G nejsou současně měřitelné.

Zkoumejme problém současné měřitelnosti dvou fyzikálních veličin A a B , pro jejichž operátory \hat{A} a \hat{B} platí komutační relace

$$[\hat{A}, \hat{B}] = i\hat{K}.$$

Pro odchylky hodnot veličin od jejich středních hodnot zavedeme operátory těchto odchylek

$$\widehat{\Delta A} = \hat{A} - \langle A \rangle \hat{1}, \quad \widehat{\Delta B} = \hat{B} - \langle B \rangle \hat{1}.$$

Relace neurčitosti.

Budeme věnovat pozornost otázce současné měřitelnosti dvou (případně i více) fyzikálních veličin. Mají-li dva operátory \hat{F} a \hat{G} společné vlastní funkce, potom existují stavy v kterých můžeme u obou veličin F a G naměřit současně ostré hodnoty. V opačném případě nejsou veličiny F a G současně měřitelné, t.j. jestliže $[\hat{F}, \hat{G}] \neq \hat{0}$ potom veličiny F a G nejsou současně měřitelné.

Zkoumejme problém současné měřitelnosti dvou fyzikálních veličin A a B , pro jejíž operátory \hat{A} a \hat{B} platí komutační relace

$$[\hat{A}, \hat{B}] = i\hat{K}.$$

Pro odchylky hodnot veličin od jejich středních hodnot zavedeme operátory těchto odchylek

$$\widehat{\Delta A} = \hat{A} - \langle A \rangle \hat{1}, \quad \widehat{\Delta B} = \hat{B} - \langle B \rangle \hat{1}.$$

Relace neurčitosti.

Budeme věnovat pozornost otázce současné měřitelnosti dvou (případně i více) fyzikálních veličin. Mají-li dva operátory \hat{F} a \hat{G} společné vlastní funkce, potom existují stavy v kterých můžeme u obou veličin F a G naměřit současně ostré hodnoty. V opačném případě nejsou veličiny F a G současně měřitelné, t.j. jestliže $[\hat{F}, \hat{G}] \neq \hat{0}$ potom veličiny F a G nejsou současně měřitelné.

Zkoumejme problém současné měřitelnosti dvou fyzikálních veličin A a B , pro jejichž operátory \hat{A} a \hat{B} platí komutační relace

$$[\hat{A}, \hat{B}] = i\hat{K}.$$

Pro odchylky hodnot veličin od jejich středních hodnot zavedeme operátory těchto odchylek

$$\widehat{\Delta A} = \hat{A} - \langle A \rangle \hat{1}, \quad \widehat{\Delta B} = \hat{B} - \langle B \rangle \hat{1}.$$

Relace neurčitosti - 2.

Pro operátory $\widehat{\Delta A}$ a $\widehat{\Delta B}$ platí komutační relace

$$[\widehat{\Delta A}, \widehat{\Delta B}] = i\hat{K}.$$

Za měřítko velikosti chyby při měření veličin A a B zvolíme jejich střední odchylky definované pomocí $\widehat{\Delta A}$ a $\widehat{\Delta B}$ takto

$$\begin{aligned}\delta A &= | \langle (\widehat{\Delta A}) \rangle^{1/2} | = | \langle \psi, (\widehat{\Delta A})^2 \psi \rangle^{1/2} |, \\ \delta B &= | \langle (\widehat{\Delta B}) \rangle^{1/2} | = | \langle \psi, (\widehat{\Delta B})^2 \psi \rangle^{1/2} |,\end{aligned}$$

Veličinám δA a δB se v kvantové mechanice obvykle říká **neurčitosti fyzikálních veličin A a B** .

Zvolme nezápornou veličinu

$$I(\xi) = \langle (\xi \widehat{\Delta A} - i \widehat{\Delta B}) \psi, (\xi \widehat{\Delta A} - i \widehat{\Delta B}) \psi \rangle \geq 0.$$

Relace neurčitosti - 2.

Pro operátory $\widehat{\Delta A}$ a $\widehat{\Delta B}$ platí komutační relace

$$[\widehat{\Delta A}, \widehat{\Delta B}] = i\hat{K}.$$

Za měřítko velikosti chyby při měření veličin A a B zvolíme jejich střední odchylky definované pomocí $\widehat{\Delta A}$ a $\widehat{\Delta B}$ takto

$$\begin{aligned}\delta A &= |\langle (\widehat{\Delta A}) \rangle^{1/2}| = |(\psi, (\widehat{\Delta A})^2 \psi)^{1/2}|, \\ \delta B &= |\langle (\widehat{\Delta B}) \rangle^{1/2}| = |(\psi, (\widehat{\Delta B})^2 \psi)^{1/2}|,\end{aligned}$$

Veličinám δA a δB se v kvantové mechanice obvykle říká **neurčitosti fyzikálních veličin A a B** .

Zvolme nezápornou veličinu

$$I(\xi) = ((\xi \widehat{\Delta A} - i \widehat{\Delta B})\psi, (\xi \widehat{\Delta A} - i \widehat{\Delta B})\psi) \geq 0.$$

Relace neurčitosti - 2.

Pro operátory $\widehat{\Delta A}$ a $\widehat{\Delta B}$ platí komutační relace

$$[\widehat{\Delta A}, \widehat{\Delta B}] = i\hat{K}.$$

Za měřítko velikosti chyby při měření veličin A a B zvolíme jejich střední odchylky definované pomocí $\widehat{\Delta A}$ a $\widehat{\Delta B}$ takto

$$\begin{aligned}\delta A &= |\langle (\widehat{\Delta A}) \rangle|^{1/2} = |(\psi, (\widehat{\Delta A})^2 \psi)|^{1/2}, \\ \delta B &= |\langle (\widehat{\Delta B}) \rangle|^{1/2} = |(\psi, (\widehat{\Delta B})^2 \psi)|^{1/2},\end{aligned}$$

Veličinám δA a δB se v kvantové mechanice obvykle říká **neurčitosti fyzikálních veličin A a B** .

Zvolme nezápornou veličinu

$$I(\xi) = ((\xi \widehat{\Delta A} - i \widehat{\Delta B})\psi, (\xi \widehat{\Delta A} - i \widehat{\Delta B})\psi) \geq 0.$$

Relace neurčitosti - 2.

Pro operátory $\widehat{\Delta A}$ a $\widehat{\Delta B}$ platí komutační relace

$$[\widehat{\Delta A}, \widehat{\Delta B}] = i\hat{K}.$$

Za měřítko velikosti chyby při měření veličin A a B zvolíme jejich střední odchylky definované pomocí $\widehat{\Delta A}$ a $\widehat{\Delta B}$ takto

$$\begin{aligned}\delta A &= |\langle (\widehat{\Delta A}) \rangle|^{1/2} = |(\psi, (\widehat{\Delta A})^2 \psi)|^{1/2}, \\ \delta B &= |\langle (\widehat{\Delta B}) \rangle|^{1/2} = |(\psi, (\widehat{\Delta B})^2 \psi)|^{1/2},\end{aligned}$$

Veličinám δA a δB se v kvantové mechanice obvykle říká **neurčitosti fyzikálních veličin** A a B .

Zvolme nezápornou veličinu

$$I(\xi) = ((\xi \widehat{\Delta A} - i \widehat{\Delta B})\psi, (\xi \widehat{\Delta A} - i \widehat{\Delta B})\psi) \geq 0.$$

Relace neurčitosti - 3.

Funkce $I(\xi)$ je kvadratickou funkcí proměnné ξ

$$I(\xi) = \xi^2(\delta A)^2 + \xi\langle K \rangle + (\delta B)^2 \geq 0.$$

Pro diskriminant tedy musí platit

$$(\langle K \rangle)^2 - 4(\delta A)^2(\delta B)^2 \leq 0,$$

po malé úpravě dostaneme tzv. **relaci neurčitosti**

$$\delta A \delta B \geq \frac{1}{2} |\langle K \rangle|.$$

Je-li střední hodnota komutátoru \hat{K} nenulová, nemůže nikdy nastat případ $\delta A = \delta B = 0$ a obě veličiny nelze současně určit.

V případě nulového komutátoru \hat{K} mohou pro neurčitosti δA a δB nastat obecně všechny případy a tedy i případ $\delta A = \delta B = 0$. Proto mluvíme o principiální současné měřitelnosti.

Relace neurčitosti - 3.

Funkce $I(\xi)$ je kvadratickou funkcí proměnné ξ

$$I(\xi) = \xi^2(\delta A)^2 + \xi\langle K \rangle + (\delta B)^2 \geq 0.$$

Pro diskriminant tedy musí platit

$$(\langle K \rangle)^2 - 4(\delta A)^2(\delta B)^2 \leq 0,$$

po malé úpravě dostaneme tzv. **relaci neurčitosti**

$$\delta A \delta B \geq \frac{1}{2} |\langle K \rangle|.$$

Je-li střední hodnota komutátoru \hat{K} nenulová, nemůže nikdy nastat případ $\delta A = \delta B = 0$ a obě veličiny nelze současně určit.

V případě nulového komutátoru \hat{K} mohou pro neurčitosti δA a δB nastat obecně všechny případy a tedy i případ $\delta A = \delta B = 0$. Proto mluvíme o principiální současné měřitelnosti.

Relace neurčitosti - 4.

Připomeneme-li si komutační relaci

$$[\hat{x}_k, \hat{p}_k] = i\hbar \hat{1}$$

dostaneme závažnou relaci neurčitosti

$$\delta x_k \delta p_k \geq \frac{\hbar}{2},$$

které se říká **Heisenbergova relace neurčitosti**. Tato relace nás nutí vzdát se pojmu trajektorie částice.

Operátory kinetické energie \hat{T} a potenciální energie \hat{V} spolu nekomutují. Navíc nekomutují ani s hamiltoniánem, který je jejich součtem. Znamená to, že ve stavech s ostrou hodnotou energie E mají její složky T a V neostré hodnoty.

Relace neurčitosti - 4.

Připomeneme-li si komutační relaci

$$[\hat{x}_k, \hat{p}_k] = i\hbar \hat{1}$$

dostaneme závažnou relaci neurčitosti

$$\delta x_k \delta p_k \geq \frac{\hbar}{2},$$

které se říká **Heisenbergova relace neurčitosti**. Tato relace nás nutí vzdát se pojmu trajektorie částice.

Operátory kinetické energie \hat{T} a potenciální energie \hat{V} spolu nekomutují. Navíc nekomutují ani s hamiltoniánem, který je jejich součtem. Znamená to, že ve stavech s ostrou hodnotou energie E mají její složky T a V neostré hodnoty.

- 1 Banachův a Hilbertův prostor
 - Normované lineární prostory.
 - Prostor se skalárním součinem.
 - Ortonormální soustavy a baze.
- 2 Lineární zobrazení, operátor a funkcionál.
 - Lineární zobrazení.
 - Norma lineárního zobrazení.
 - Příklady.
 - Frechet-Rieszova věta
- 3 Spektrální teorie.
 - Vlastní čísla a vlastní funkce lineárních operátorů.
 - Spektrum operátoru.
 - Příklady.
 - Spektrální teorie v Hilbertových prostorech
- 4 Něco z kvantové mechaniky.
 - Základní postuláty kvantové mechaniky.
 - Fyzikální veličiny v kvantové mechanice.
 - Schrödingerova rovnice.

Nestacionární Schrödingerova rovnice.

K dokončení popisu základního formálního schématu kvantové mechaniky ještě zbývá uvést, jak se v konkrétních případech určí možné kvantové stavy částice nebo souboru částic.

V roce 1926 našel Schrödinger diferenciální rovnici, která umožňuje určit vlastnosti kvantového objektu.

Jestliže kvantovému systému přísluší Hamiltonián \hat{H} má tato rovnice tvar

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H} \psi \quad (1)$$

a nazývá se **Schrödingerova rovnice**.

Její základním účelem je nalézt vlnovou funkci $\psi(\mathbf{x}, t)$ daného systému.

Nestacionární Schrödingerova rovnice.

K dokončení popisu základního formálního schématu kvantové mechaniky ještě zbývá uvést, jak se v konkrétních případech určí možné kvantové stavy částice nebo souboru částic.

V roce 1926 našel Schrödinger diferenciální rovnici, která umožňuje určit vlastnosti kvantového objektu.

Jestliže kvantovému systému přísluší Hamiltonián \hat{H} má tato rovnice tvar

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H} \psi \quad (1)$$

a nazývá se **Schrödingerova rovnice**.

Její základním účelem je nalézt vlnovou funkci $\psi(\mathbf{x}, t)$ daného systému.

Nestacionární Schrödingerova rovnice.

K dokončení popisu základního formálního schématu kvantové mechaniky ještě zbývá uvést, jak se v konkrétních případech určí možné kvantové stavy částice nebo souboru částic.

V roce 1926 našel Schrödinger diferenciální rovnici, která umožňuje určit vlastnosti kvantového objektu.

Jestliže kvantovému systému přísluší Hamiltonián \hat{H} má tato rovnice tvar

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H} \psi \quad (1)$$

a nazývá se **Schrödingerova rovnice**.

Její základním účelem je nalézt vlnovou funkci $\psi(\mathbf{x}, t)$ daného systému.

Nestacionární Schrödingerova rovnice.

K dokončení popisu základního formálního schématu kvantové mechaniky ještě zbývá uvést, jak se v konkrétních případech určí možné kvantové stavy částice nebo souboru částic.

V roce 1926 našel Schrödinger diferenciální rovnici, která umožňuje určit vlastnosti kvantového objektu.

Jestliže kvantovému systému přísluší Hamiltonián \hat{H} má tato rovnice tvar

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H} \psi \quad (1)$$

a nazývá se **Schrödingerova rovnice**.

Její základním účelem je nalézt vlnovou funkci $\psi(\mathbf{x}, t)$ daného systému.

Stacionární Schrödingerova rovnice.

Je-li studovaný kvantový systém dostatečně izolován od svého okolí, je splněn předpoklad, že jeho Hamiltonián \hat{H} nezávisí na čase, nebo-li, že $\frac{\partial \hat{H}}{\partial t} = 0$

Předpoklad umožňuje uvažovat vlnovou funkci ve tvaru

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \varphi(\mathbf{r}) T(t).$$

Dosaďme takto separovanou vlnovou funkci do nestacionární Schrödingerovy rovnice

$$i\hbar\varphi(\mathbf{r})\frac{dT(t)}{dt} = T(t)\hat{H}\varphi,$$

a vydělme obě strany rovnice $\varphi(\mathbf{r}) T(t)$, dostaneme

$$i\hbar\frac{1}{T(t)}\frac{dT(t)}{dt} = \frac{\hat{H}\varphi(\mathbf{r})}{\varphi(\mathbf{r})}.$$

Levá strana rovnice závisí pouze na t a pravá strana pouze na \mathbf{r} . Obě strany se tedy musí rovnat konstantě, označme ji E .

Stacionární Schrödingerova rovnice.

Je-li studovaný kvantový systém dostatečně izolován od svého okolí, je splněn předpoklad, že jeho Hamiltonián \hat{H} nezávisí na čase, nebo-li, že $\frac{\partial \hat{H}}{\partial t} = 0$

Předpoklad umožňuje uvažovat vlnovou funkci ve tvaru

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \varphi(\mathbf{r}) T(t).$$

Dosaďme takto separovanou vlnovou funkci do nestacionární Schrödingerovy rovnice

$$i\hbar\varphi(\mathbf{r})\frac{dT(t)}{dt} = T(t)\hat{H}\varphi,$$

a vydělme obě strany rovnice $\varphi(\mathbf{r}) T(t)$, dostaneme

$$i\hbar\frac{1}{T(t)}\frac{dT(t)}{dt} = \frac{\hat{H}\varphi(\mathbf{r})}{\varphi(\mathbf{r})}.$$

Levá strana rovnice závisí pouze na t a pravá strana pouze na \mathbf{r} . Obě strany se tedy musí rovnat konstantě, označme ji E .

Stacionární Schrödingerova rovnice.

Je-li studovaný kvantový systém dostatečně izolován od svého okolí, je splněn předpoklad, že jeho Hamiltonián \hat{H} nezávisí na čase, nebo-li, že $\frac{\partial \hat{H}}{\partial t} = 0$

Předpoklad umožňuje uvažovat vlnovou funkci ve tvaru

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \varphi(\mathbf{r}) T(t).$$

Dosaďme takto separovanou vlnovou funkci do nestacionární Schrödingerovy rovnice

$$i\hbar\varphi(\mathbf{r})\frac{dT(t)}{dt} = T(t)\hat{H}\varphi,$$

a vydělme obě strany rovnice $\varphi(\mathbf{r}) T(t)$, dostaneme

$$i\hbar\frac{1}{T(t)}\frac{dT(t)}{dt} = \frac{\hat{H}\varphi(\mathbf{r})}{\varphi(\mathbf{r})}.$$

Levá strana rovnice závisí pouze na t a pravá strana pouze na \mathbf{r} .
Obě strany se tedy musí rovnat konstantě, označme ji E .

Stacionární Schrödingerova rovnice.

Je-li studovaný kvantový systém dostatečně izolován od svého okolí, je splněn předpoklad, že jeho Hamiltonián \hat{H} nezávisí na čase, nebo-li, že $\frac{\partial \hat{H}}{\partial t} = 0$

Předpoklad umožňuje uvažovat vlnovou funkci ve tvaru

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \varphi(\mathbf{r}) T(t).$$

Dosaďme takto separovanou vlnovou funkci do nestacionární Schrödingerovy rovnice

$$i\hbar\varphi(\mathbf{r})\frac{dT(t)}{dt} = T(t)\hat{H}\varphi,$$

a vydělme obě strany rovnice $\varphi(\mathbf{r}) T(t)$, dostaneme

$$i\hbar\frac{1}{T(t)}\frac{dT(t)}{dt} = \frac{\hat{H}\varphi(\mathbf{r})}{\varphi(\mathbf{r})}.$$

Levá strana rovnice závisí pouze na t a pravá strana pouze na \mathbf{r} . Obě strany se tedy musí rovnat konstantě, označme ji E .

Stacionární Schrödingerova rovnice - 2.

Dostaneme dvě diferenciální rovnice

$$i\hbar \frac{dT(t)}{dt} = E T(t) \quad (2)$$

$$\hat{H}\varphi(\mathbf{r}) = E\varphi(\mathbf{r}). \quad (3)$$

První má řešení

$$T(t) = e^{-i\frac{E}{\hbar}t}.$$

V druhé rovnici vystupuje Hamiltonián a je různá pro různé Hamiltoniány. Nazývá se **stacionární Schrödingerova rovnice**.

Rovnice je zároveň rovnicí pro výpočet vlastních funkcí φ_n a vlastních čísel E_n operátoru \hat{H} , t.j.

$$\hat{H}\varphi_n(\mathbf{r}) = E_n\varphi_n(\mathbf{r}).$$

Vlastní čísla E_n lze interpretovat jako jediné možné hodnoty energie E systému, které lze získat experimentálním měřením.

Stacionární Schrödingerova rovnice - 2.

Dostaneme dvě diferenciální rovnice

$$i\hbar \frac{dT(t)}{dt} = E T(t) \quad (2)$$

$$\hat{H}\varphi(\mathbf{r}) = E\varphi(\mathbf{r}). \quad (3)$$

První má řešení

$$T(t) = e^{-i\frac{E}{\hbar}t}.$$

V druhé rovnici vystupuje Hamiltonián a je různá pro různé Hamiltoniány. Nazývá se **stacionární Schrödingerova rovnice**.

Rovnice je zároveň rovnicí pro výpočet vlastních funkcí φ_n a vlastních čísel E_n operátoru \hat{H} , t.j.

$$\hat{H}\varphi_n(\mathbf{r}) = E_n\varphi_n(\mathbf{r}).$$

Vlastní čísla E_n lze interpretovat jako jediné možné hodnoty energie E systému, které lze získat experimentálním měřením.

Stacionární Schrödingerova rovnice - 2.

Dostaneme dvě diferenciální rovnice

$$i\hbar \frac{dT(t)}{dt} = E T(t) \quad (2)$$

$$\hat{H}\varphi(\mathbf{r}) = E\varphi(\mathbf{r}). \quad (3)$$

První má řešení

$$T(t) = e^{-i\frac{E}{\hbar}t}.$$

V druhé rovnici vystupuje Hamiltonián a je různá pro různé Hamiltoniány. Nazývá se **stacionární Schrödingerova rovnice**.

Rovnice je zároveň rovnicí pro výpočet vlastních funkcí φ_n a vlastních čísel E_n operátoru \hat{H} , t.j.

$$\hat{H}\varphi_n(\mathbf{r}) = E_n\varphi_n(\mathbf{r}).$$

Vlastní čísla E_n lze interpretovat jako jediné možné hodnoty energie E systému, které lze získat experimentálním měřením.

Stacionární Schrödingerova rovnice - 2.

Dostaneme dvě diferenciální rovnice

$$i\hbar \frac{dT(t)}{dt} = E T(t) \quad (2)$$

$$\hat{H}\varphi(\mathbf{r}) = E\varphi(\mathbf{r}). \quad (3)$$

První má řešení

$$T(t) = e^{-i\frac{E}{\hbar}t}.$$

V druhé rovnici vystupuje Hamiltonián a je různá pro různé Hamiltoniány. Nazývá se **stacionární Schrödingerova rovnice**.

Rovnice je zároveň rovnicí pro výpočet vlastních funkcí φ_n a vlastních čísel E_n operátoru \hat{H} , t.j.

$$\hat{H}\varphi_n(\mathbf{r}) = E_n\varphi_n(\mathbf{r}).$$

Vlastní čísla E_n lze interpretovat jako jediné možné hodnoty energie E systému, které lze získat experimentálním měřením.

Stacionární Schrödingerova rovnice - 3.

Energie E_n se nazývají **hladinami energie** systému. Vlnové funkce φ_n jsou vlnovými funkcemi specifických stavů systému, v nichž má jeho energie ostrou hodnotu číselně shodnou s hodnotou příslušného vlastního čísla E_n .

Celkovou vlnovou funkcí $\psi(\mathbf{r}, t)$ řešící rovnici (1) je

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \varphi_n(\mathbf{r})e^{-i\frac{E_n}{\hbar}t}. \quad (4)$$

Stavy kvantového systému popsané vlnovou funkcí (4) se nazývají **stacionární stavy**. Za stacionární stav považujeme stav

- jehož vlnová funkce je řešením stacionární Schrödingerovy rovnice
- v němž má systém ostrou hodnotu energie
- jehož vlnová funkce je závislá na čase pouze prostřednictvím multiplikativního faktoru $e^{-i\frac{E_n}{\hbar}t}$.

Stacionární Schrödingerova rovnice - 3.

Energie E_n se nazývají **hladinami energie** systému. Vlnové funkce φ_n jsou vlnovými funkcemi specifických stavů systému, v nichž má jeho energie ostrou hodnotu číselně shodnou s hodnotou příslušného vlastního čísla E_n .

Celkovou vlnovou funkcí $\psi(\mathbf{r}, t)$ řešící rovnici (1) je

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \varphi_n(\mathbf{r})e^{-i\frac{E_n}{\hbar}t}. \quad (4)$$

Stavy kvantového systému popsané vlnovou funkcí (4) se nazývají **stacionární stavy**. Za stacionární stav považujeme stav

- jehož vlnová funkce je řešením stacionární Schrödingerovy rovnice
- v němž má systém ostrou hodnotu energie
- jehož vlnová funkce je závislá na čase pouze prostřednictvím multiplikativního faktoru $e^{-i\frac{E_n}{\hbar}t}$.

Stacionární Schrödingerova rovnice - 3.

Energie E_n se nazývají **hladinami energie** systému. Vlnové funkce φ_n jsou vlnovými funkcemi specifických stavů systému, v nichž má jeho energie ostrou hodnotu číselně shodnou s hodnotou příslušného vlastního čísla E_n .

Celkovou vlnovou funkcí $\psi(\mathbf{r}, t)$ řešící rovnici (1) je

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \varphi_n(\mathbf{r})e^{-i\frac{E_n}{\hbar}t}. \quad (4)$$

Stavy kvantového systému popsané vlnovou funkcí (4) se nazývají **stacionární stavy**. Za stacionární stav považujeme stav

- jehož vlnová funkce je řešením stacionární Schrödingerovy rovnice
- v němž má systém ostrou hodnotu energie
- jehož vlnová funkce je závislá na čase pouze prostřednictvím multiplikativního faktoru $e^{-i\frac{E_n}{\hbar}t}$.

Stacionární Schrödingerova rovnice - 3.

Energie E_n se nazývají **hladinami energie** systému. Vlnové funkce φ_n jsou vlnovými funkcemi specifických stavů systému, v nichž má jeho energie ostrou hodnotu číselně shodnou s hodnotou příslušného vlastního čísla E_n .

Celkovou vlnovou funkcí $\psi(\mathbf{r}, t)$ řešící rovnici (1) je

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \varphi_n(\mathbf{r})e^{-i\frac{E_n}{\hbar}t}. \quad (4)$$

Stavy kvantového systému popsané vlnovou funkcí (4) se nazývají **stacionární stavy**. Za stacionární stav považujeme stav

- jehož vlnová funkce je řešením stacionární Schrödingerovy rovnice
- v němž má systém ostrou hodnotu energie
- jehož vlnová funkce je závislá na čase pouze prostřednictvím multiplikativního faktoru $e^{-i\frac{E_n}{\hbar}t}$.

Nestacionární Schrödingerova rovnice

Vraťme se k nestacionární Schrödingerově rovnici (1). Všechna její řešení mají tvar (princip superpozice)

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \sum_n c_n \varphi_n(\mathbf{r}) e^{-i \frac{E_n}{\hbar} t}.$$

Stavy, popsané touto vlnovou funkcí se nazývají **nestacionární stavy**.

Má-li studovaný systém časově závislý hamiltonián $\hat{H}(t)$, platí pouze nestacionární Schrödingerova rovnice a všechny stavy systému jsou nestacionárními.

Schrödingerova rovnice - volná částice

Pro jednoduchost budeme nejdříve diskutovat volnou částici v jedné dimenzi. Odpovídající Schrödingerova rovnice s potenciálem $V = 0$ má tvar

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}.$$

Stacionární Schrödingerova rovnice

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2} \right) \varphi(x) = 0.$$

Označme

$$\frac{2mE}{\hbar^2} = k^2,$$

Řešení stacionární Schrödingerovy rovnice je

$$\varphi(x) = e^{\pm ikx}.$$

Schrödingerova rovnice - volná částice- 2

Zavedme impuls částice $p = \hbar k$, potom časově závislá vlnová funkce je

$$\psi(x, t) = e^{i\frac{1}{\hbar}(Et - kpx)},$$

kde impuls p může nabývat kladných i záporných hodnot.

Celková energie částice je rovna její kinetické energii

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{p^2}{2m}.$$

Vlnová funkce je vlastní funkcí hamiltoniánu

$$\hat{H}\psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \psi(x) = \frac{p^2}{2m} \psi(x)$$

s vlastní hodnotou $\frac{p^2}{2m}$ a operátoru impulsu

$$\hat{p}\psi = -i\hbar \frac{d}{dx} \psi = p\psi$$

s vlastní hodnotou p . Oba operátory spolu komutují, mají tedy stejné vlastní funkce.

Schrödingerova rovnice - volná částice- 2

Zavedme impuls částice $p = \hbar k$, potom časově závislá vlnová funkce je

$$\psi(x, t) = e^{\frac{i}{\hbar}(Et - kpx)},$$

kde impuls p může nabývat kladných i záporných hodnot.

Celková energie částice je rovna její kinetické energii

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{p^2}{2m}.$$

Vlnová funkce je vlastní funkcí hamiltoniánu

$$\hat{H}\psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \psi(x) = \frac{p^2}{2m} \psi(x)$$

s vlastní hodnotou $\frac{p^2}{2m}$ a operátoru impulsu

$$\hat{p}\psi = -i\hbar \frac{d}{dx} \psi = p\psi$$

s vlastní hodnotou p . Oba operátory spolu komutují, mají tedy stejné vlastní funkce.

Obsah

- 1 Banachův a Hilbertův prostor
 - Normované lineární prostory.
 - Prostor se skalárním součinem.
 - Ortonormální soustavy a baze.
- 2 Lineární zobrazení, operátor a funkcionál.
 - Lineární zobrazení.
 - Norma lineárního zobrazení.
 - Příklady.
 - Frechet-Rieszova věta
- 3 Spektrální teorie.
 - Vlastní čísla a vlastní funkce lineárních operátorů.
 - Spektrum operátoru.
 - Příklady.
 - Spektrální teorie v Hilbertových prostorech
- 4 Něco z kvantové mechaniky.
 - Základní postuláty kvantové mechaniky.
 - Fyzikální veličiny v kvantové mechanice.
 - Schrödingerova rovnice.



Lukeš J.: *Zápisky z funkcionální analýzy*, Univerzita Karlova v Praze
- Nakladatelství Karolínium, 2002.



Lukeš J.: *Teorie míry a integrálu 1.*, Univerzita Karlova v Praze, 1980
<http://matematika.cuni.cz/dl/lukes/tmi1.pdf>



Taylor A. E.: *Úvod do funkcionální analýzy*, Academia Praha, 1973.



O. Bílek, V. Kapsa: *Kvantová mechanika pro učitele*, MFF UK Praha