Dodatek 1:
Lineární diferenciální rovnice 2. řádu s konstantními koeficienty a se speciální pravou stranou

Metoda odhadu (1)

Lineární diferenciální rovnice 2. řádu s konstantními koeficienty je rovnice tvaru

$$a_2\, y''(x) + a_1\, y'(x) + a_0\, y(x) = b(x),$$

kde $a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$ jsou konstanty.

Předpokládejme, že $b(x)$ je speciální pravá strana ve tvaru

$$b(x) = e^{\alpha x}(P(x) \sin(\beta x) + Q(x) \cos(\beta x)),$$

kde $P(x), Q(x)$ jsou polynomy v proměnné x, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ jsou konstanty.

Metoda odhadu (1)

Lineární diferenciální rovnice 2. řádu s konstantními koeficienty je rovnice tvaru

$$a_2\, y''(x) + a_1\, y'(x) + a_0\, y(x) = b(x),$$

kde $a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$ jsou konstanty.

Předpokládejme, že $b(x)$ je speciální pravá strana ve tvaru

$$b(x) = e^{\alpha x}(P(x) \sin(\beta x) + Q(x) \cos(\beta x)),$$

kde $P(x), Q(x)$ jsou polynomy v proměnné x, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ jsou konstanty.

Metoda odhadu (2)

- Obecné řešení přiřazené HLDR

$$a_2\, y''(x) + a_1\, y'(x) + a_0\, y(x) = 0$$

charakteristická rovnice: $a_2\,\lambda^2 + a_1\,\lambda + a_0 \;= 0$

- $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{R} \;\Rightarrow\; y_H(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x},$
  $x \in \mathbb{R},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}$
- $\lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R} \;\Rightarrow\; y_H(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2\, x\, e^{\lambda_1 x},$
  $x \in \mathbb{R},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}$
- $\lambda_{1,2} = a \pm i\, b \in \mathbb{C}$

  $\Rightarrow\; y_H(x) = C_1 e^{ax} \sin(bx) + C_2 e^{ax} \cos(bx),$
  $x \in \mathbb{R},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

Metoda odhadu (2)

- Obecné řešení přiřazené HLDR

$$a_2\, y''(x) + a_1\, y'(x) + a_0\, y(x) = 0$$

charakteristická rovnice: $a_2\, \lambda^2 + a_1\, \lambda + a_0 \;= 0$

- $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{R} \;\Rightarrow\; y_H(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x},$
  $x \in \mathbb{R},\; C_1, C_2 \in \mathbb{R}$
- $\lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R} \;\Rightarrow\; y_H(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2\, x\, e^{\lambda_1 x},$
  $x \in \mathbb{R},\; C_1, C_2 \in \mathbb{R}$
- $\lambda_{1,2} = a \pm i\, b \in \mathbb{C}$

  $\Rightarrow\; y_H(x) = C_1 e^{ax} \sin(bx) + C_2 e^{ax} \cos(bx),$
  $x \in \mathbb{R},\; C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

Metoda odhadu (2)

- Obecné řešení přiřazené HLDR

$$a_2\, y''(x) + a_1\, y'(x) + a_0\, y(x) = 0$$

charakteristická rovnice: $\quad a_2\,\lambda^2 + a_1\,\lambda + a_0 \ = 0$

- $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{R} \ \Rightarrow \ y_H(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x},$
  $x \in \mathbb{R},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}$
- $\lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R} \ \Rightarrow \ y_H(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2\, x\, e^{\lambda_1 x},$
  $x \in \mathbb{R},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}$
- $\lambda_{1,2} = a \pm i\, b \in \mathbb{C}$
  $\Rightarrow \ y_H(x) = C_1 e^{ax} \sin(bx) + C_2 e^{ax} \cos(bx),$
  $x \in \mathbb{R},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

Metoda odhadu (2)

- Obecné řešení přiřazené HLDR

$$a_2\, y''(x) + a_1\, y'(x) + a_0\, y(x) = 0$$

charakteristická rovnice: $a_2\, \lambda^2 + a_1\, \lambda + a_0 \;= 0$

- $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{R} \;\Rightarrow\; y_H(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x},$
$$x \in \mathbb{R},\; C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$
- $\lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R} \;\Rightarrow\; y_H(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2\, x\, e^{\lambda_1 x},$
$$x \in \mathbb{R},\; C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$
- $\lambda_{1,2} = a \pm i\, b \in \mathbb{C}$

  $\Rightarrow\; y_H(x) = C_1 e^{ax} \sin(bx) + C_2 e^{ax} \cos(bx),$
$$x \in \mathbb{R},\; C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

Metoda odhadu (3)

- Partikulární řešení NLDR

$$a_2\, y'' + a_1\, y' + a_0\, y = e^{\alpha\, x}(P(x)\, \sin(\beta\, x) + Q(x)\, \cos(\beta\, x))$$

hledáme ve tvaru

$$y_N(x) = x^k\, e^{\alpha\, x}(R(x)\, \sin(\beta\, x) + S(x)\, \cos(\beta\, x)), \quad \text{kde}$$

- $k \in \{0, 1, 2\}$
  - 0 $\alpha + i\beta$ není kořen charakteristické rovnice
  - 1 $\alpha + i\beta$ je jednonásobný kořen char. rovnice
  - 2 $\alpha + i\beta$ je dvojnásobný kořen char. rovnice
- $R(x), S(x)$ - polynomy stupně max{st. $P(x)$, st. $Q(x)$}

- Obecné řešení NLDR

$$y(x) = y_H(x) + y_N(x)$$

Metoda odhadu (3)

- Partikulární řešení NLDR

$$a_2\, y'' + a_1\, y' + a_0\, y = e^{\alpha\, x}(P(x)\, \sin(\beta\, x) + Q(x)\, \cos(\beta\, x))$$

hledáme ve tvaru

$$y_N(x) = x^k\, e^{\alpha\, x}(R(x)\, \sin(\beta\, x) + S(x)\, \cos(\beta\, x)), \quad \text{kde}$$

  - $k \in \{0, 1, 2\}$
    - 0 $\alpha + i\beta$ není kořen charakteristické rovnice
    - 1 $\alpha + i\beta$ je jednonásobný kořen char. rovnice
    - 2 $\alpha + i\beta$ je dvojnásobný kořen char. rovnice
  - $R(x), S(x)$ - polynomy stupně $\max\{\text{st. } P(x), \text{st. } Q(x)\}$

- Obecné řešení NLDR

$$y(x) = y_H(x) + y_N(x)$$