

Dodatek 1:
Lineární diferenciální rovnice 2. řádu
s konstantními koeficienty a se speciální
pravou stranou

Metoda odhadu (1)

Lineární diferenciální rovnice 2. řádu s konstantními koeficienty je rovnice tvaru

$$a_2 y''(x) + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = b(x),$$

kde $a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$ jsou konstanty.

Předpokládejme, že $b(x)$ je speciální pravá strana ve tvaru

$$b(x) = e^{\alpha x} (P(x) \sin(\beta x) + Q(x) \cos(\beta x)),$$

kde $P(x), Q(x)$ jsou polynomy v proměnné x , $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ jsou konstanty.

Metoda odhadu (2)

■ Obecné řešení přiřazené HLDR

$$a_2 y''(x) + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = 0$$

charakteristická rovnice: $a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0$

$$\blacksquare \lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow y_H(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x},$$

$x \in \mathbb{R}, C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

$$\blacksquare \lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow y_H(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 x e^{\lambda_1 x},$$

$x \in \mathbb{R}, C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

$$\blacksquare \lambda_{1,2} = a \pm ib \in \mathbb{C}$$

$$\Rightarrow y_H(x) = C_1 e^{ax} \sin(bx) + C_2 e^{ax} \cos(bx),$$

$x \in \mathbb{R}, C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

Metoda odhadu (3)

■ Partikulární řešení NLDR

$$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = e^{\alpha x} (P(x) \sin(\beta x) + Q(x) \cos(\beta x))$$

hledáme ve tvaru

$$y_N(x) = x^k e^{\alpha x} (R(x) \sin(\beta x) + S(x) \cos(\beta x)), \text{ kde}$$

■ $k \in \{0, 1, 2\}$

0 $\alpha + i\beta$ není kořen charakteristické rovnice

1 $\alpha + i\beta$ je jednonásobný kořen char. rovnice

2 $\alpha + i\beta$ je dvojnásobný kořen char. rovnice

■ $R(x), S(x)$ - polynomy stupně $\max\{\text{st. } P(x), \text{st. } Q(x)\}$

■ Obecné řešení NLDR

$$y(x) = y_H(x) + y_N(x)$$