Dodatek 2: Funkce dvou proměnných

Funkce dvou proměnných

Definice: Reálnou funkcí dvou reálných proměnných, definovanou na množině $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}^2$, rozumíme předpis f, který každé uspořádané dvojici reálných čísel $(x, y) \in M$ přiřazuje jedno reálné číslo $z \in \mathbb{R}$.

Zapisujeme ve tvaru:

$$z = f(x, y) \quad \text{nebo} \quad f : M \to \mathbb{R}$$

Množinu M nazýváme definičním oborem funkce f a píšeme $M = D(f)$.

Graf funkce dvou proměnných

Definice: Nechť $f : D(f) \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je funkce dvou proměnných zadaná předpisem $z = f(x, y)$. Potom grafem funkce f rozumíme množinu

$$\text{graf } f = \{(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in D(f)\}$$

Definice: Nechť $\mathcal{K}$ je křivka, která vznikne jako řez (průnik) grafu funkce $z = f(x, y)$ rovinou $z = z_0$. Kolmý průmět této křivky do roviny x, y nazýváme z_0 - vrstevnicí grafu funkce f.

$$z_0 \text{ - vrstevnice } = \{(x, y) \in D(f) \mid f(x, y) = z_0\}$$

Graf funkce dvou proměnných

Definice: Nechť $f : D(f) \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je funkce dvou proměnných zadaná předpisem $z = f(x, y)$. Potom grafem funkce f rozumíme množinu

$$\text{graf } f = \{(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in D(f)\}$$

Definice: Nechť $\mathcal{K}$ je křivka, která vznikne jako řez (průnik) grafu funkce $z = f(x, y)$ rovinou $z = z_0$. Kolmý průmět této křivky do roviny x, y nazýváme z_0 - vrstevnicí grafu funkce f.

$$z_0 \text{ - vrstevnice } = \{(x, y) \in D(f) \mid f(x, y) = z_0\}$$

Operace s funkcemi dvou proměnných

- stejné jako pro funkce jedné proměnné

- součtem funkcí $f(x, y)$ a $g(x, y)$ je funkce $h = f + g$ určena předpisem
$$h(x, y) = f(x, y) + g(x, y)$$
s definičním oborem
$$D(h) = D(f) \cap D(g)$$
-

$\vdots$

-
- složením funkce $f(x, y)$ s funkcí $g(z)$ se rozumí funkce $h = g \circ f$ určena předpisem
$$h(x, y) = g(f(x, y))$$
s definičním oborem
$$D(h) = \{(x, y) \in D(f) \mid f(x, y) \in D(g)\}$$

Operace s funkcemi dvou proměnných

- stejné jako pro funkce jedné proměnné

- součtem funkcí $f(x,y)$ a $g(x,y)$ je funkce $h = f + g$ určena předpisem

$$h(x,y) = f(x,y) + g(x,y)$$

  s definičním oborem

$$D(h) = D(f) \cap D(g)$$

-

  $\vdots$

-
- složením funkce $f(x,y)$ s funkcí $g(z)$ se rozumí funkce $h = g \circ f$ určena předpisem

$$h(x,y) = g(f(x,y))$$

  s definičním oborem

$$D(h) = \{(x,y) \in D(f) \mid f(x,y) \in D(g)\}$$

Operace s funkcemi dvou proměnných

- stejné jako pro funkce jedné proměnné

- součtem funkcí $f(x, y)$ a $g(x, y)$ je funkce $h = f + g$ určena předpisem

$$h(x, y) = f(x, y) + g(x, y)$$

  s definičním oborem

$$D(h) = D(f) \cap D(g)$$

-

$\vdots$

-
- složením funkce $f(x, y)$ s funkcí $g(z)$ se rozumí funkce $h = g \circ f$ určena předpisem

$$h(x, y) = g(f(x, y))$$

  s definičním oborem

$$D(h) = \{(x, y) \in D(f) \mid f(x, y) \in D(g)\}$$

Operace s funkcemi dvou proměnných

- stejné jako pro funkce jedné proměnné

- součtem funkcí $f(x, y)$ a $g(x, y)$ je funkce $h = f + g$ určena předpisem
$$h(x, y) = f(x, y) + g(x, y)$$
s definičním oborem
$$D(h) = D(f) \cap D(g)$$
-

  $\vdots$
-
- složením funkce $f(x, y)$ s funkcí $g(z)$ se rozumí funkce $h = g \circ f$ určena předpisem
$$h(x, y) = g(f(x, y))$$
s definičním oborem
$$D(h) = \{(x, y) \in D(f) \mid f(x, y) \in D(g)\}$$

Spojitost (1)

Definice: ϵ-ovým okolím bodu $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ se rozumí množina

$$O_\epsilon(x_0, y_0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \rho((x, y), (x_0, y_0)) < \epsilon\},$$

kde

$$\rho((x, y), (x_0, y_0)) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

je vzdálenost bodů (x, y) a (x_0, y_0).

Definice: Nechť funkce $f(x, y)$ je definovaná v jistém okolí bodu $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Funkce f je spojitá v bodě (x_0, y_0) jestliže

$$\forall\, \epsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \forall\, (x, y) \in O_\delta(x_0, y_0): \quad |f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \epsilon.$$

Spojitost (1)

Definice: ϵ-ovým okolím bodu $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ se rozumí množina

$$O_\epsilon(x_0, y_0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \rho((x, y), (x_0, y_0)) < \epsilon\},$$

kde

$$\rho((x, y), (x_0, y_0)) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

je vzdálenost bodů (x, y) a (x_0, y_0).

Definice: Nechť funkce $f(x, y)$ je definovaná v jistém okolí bodu $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Funkce f je spojitá v bodě (x_0, y_0) jestliže

$$\forall\, \epsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \forall\, (x, y) \in O_\delta(x_0, y_0) : \quad |f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \epsilon.$$

Spojitost (2)

Věta: Nechť funkce jedné proměnné $f(x)$ je spojitá na intervalu (a, b) a nechť funkce jedné proměnné $g(y)$ je spojitá na intervalu (c, d). Potom funkce dvou proměnných

$$h_1(x, y) = f(x) + g(y) \quad \text{a} \quad h_2(x, y) = f(x)\, g(y)$$

jsou spojité na obdélníku $(a, b) \times (c, d)$ a funkce

$$h_3(x, y) = \frac{f(x)}{g(y)}$$

je spojitá na obdélníku $(a, b) \times (c, d)$ všude, kde $g(y) \neq 0$.

Parciální derivace funkcí dvou proměnných (1)

- parciální derivace prvního řádu
  - podle x: $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$
  - podle y: $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$
- parciální derivace druhého řádu

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

- parciální derivace vyšších řádů

Parciální derivace funkcí dvou proměnných (1)

- parciální derivace prvního řádu
  - podle x: $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$
  - podle y: $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$
- parciální derivace druhého řádu

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

- parciální derivace vyšších řádů

Parciální derivace funkcí dvou proměnných (1)

- parciální derivace prvního řádu
  - podle x: $$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$
  - podle y: $$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$$
- parciální derivace druhého řádu

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

- parciální derivace vyšších řádů

Parciální derivace funkcí dvou proměnných (1)

- parciální derivace prvního řádu
  - podle x: $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$
  - podle y: $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$
- parciální derivace druhého řádu

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

- parciální derivace vyšších řádů

Parciální derivace funkcí dvou proměnných (2)

Věta: Má-li funkce $f(x, y)$ spojité druhé parciální derivace na $(a, b) \times (c, d) \subset \mathbb{R}^2$, pak na $(a, b) \times (c, d)$ platí

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

Gradient

Definice: Uvažujme funkci $f(x, y)$ dvou proměnných a bod $(x_0, y_0) \in D(f)$. Za předpokladu, že parciální derivace $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ a $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ existují, nazýváme vektor

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right)$$

gradientem funkce f v bodě (x_0, y_0) a značíme grad $f(x_0, y_0)$.

Poznámka: Gradient je vektor, který udává směr nejrychlejšího růstu funkce.

Gradient

Definice: Uvažujme funkci $f(x, y)$ dvou proměnných a bod $(x_0, y_0) \in D(f)$. Za předpokladu, že parciální derivace $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ a $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ existují, nazýváme vektor

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right)$$

gradientem funkce f v bodě (x_0, y_0) a značíme $\operatorname{grad} f(x_0, y_0)$.

Poznámka: Gradient je vektor, který udává směr nejrychlejšího růstu funkce.