

Dodatek 2: Funkce dvou proměnných

Funkce dvou proměnných

Definice: Reálnou funkcí dvou reálných proměnných, definovanou na množině $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}^2$, rozumíme předpis f , který každé uspořádané dvojici reálných čísel $(x, y) \in M$ přiřazuje jedno reálné číslo $z \in \mathbb{R}$.

Zapisujeme ve tvaru:

$$z = f(x, y) \quad \text{nebo} \quad f : M \rightarrow \mathbb{R}$$

Množinu M nazýváme **definičním oborem** funkce f a píšeme $M = D(f)$.

Graf funkce dvou proměnných

Definice: Necht' $f : D(f) \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ je funkce dvou proměnných zadaná předpisem $z = f(x, y)$. Potom **grafem funkce f** rozumíme množinu

$$\text{graf } f = \{(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in D(f)\}$$

Definice: Necht' \mathcal{K} je křivka, která vznikne jako řez (průnik) grafu funkce $z = f(x, y)$ rovinou $z = z_0$. Kolmý průmět této křivky do roviny x, y nazýváme **z_0 - vrstevnicí** grafu funkce f .

$$z_0\text{-vrstevnice} = \{(x, y) \in D(f) \mid f(x, y) = z_0\}$$

Operace s funkcemi dvou proměnných

- stejné jako pro funkce jedné proměnné

- součtem funkcí $f(x, y)$ a $g(x, y)$ je funkce $h = f + g$ určena předpisem

$$h(x, y) = f(x, y) + g(x, y)$$

s definičním oborem

$$D(h) = D(f) \cap D(g)$$



⋮



- složením funkce $f(x, y)$ s funkcí $g(z)$ se rozumí funkce $h = g \circ f$ určena předpisem

$$h(x, y) = g(f(x, y))$$

s definičním oborem

$$D(h) = \{(x, y) \in D(f) \mid f(x, y) \in D(g)\}$$

Spojitosť (1)

Definice: ϵ -ovým okolím bodu $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ se rozumí množina

$$O_\epsilon(x_0, y_0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \rho((x, y), (x_0, y_0)) < \epsilon\},$$

kde

$$\rho((x, y), (x_0, y_0)) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

je vzdálenost bodů (x, y) a (x_0, y_0) .

Definice: Necht' funkce $f(x, y)$ je definovaná v jistém okolí bodu $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Funkce f je **spojitá v bodě (x_0, y_0)** jestliže

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall (x, y) \in O_\delta(x_0, y_0) : |f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \epsilon.$$

Spojítost (2)

Věta: Necht' funkce jedné proměnné $f(x)$ je spojitá na intervalu (a, b) a necht' funkce jedné proměnné $g(y)$ je spojitá na intervalu (c, d) . Potom funkce dvou proměnných

$$h_1(x, y) = f(x) + g(y) \quad \text{a} \quad h_2(x, y) = f(x)g(y)$$

jsou spojité na obdélníku $(a, b) \times (c, d)$ a funkce

$$h_3(x, y) = \frac{f(x)}{g(y)}$$

je spojitá na obdélníku $(a, b) \times (c, d)$ všude, kde $g(y) \neq 0$.

Parciální derivace funkcí dvou proměnných (1)

■ parciální derivace prvního řádu

■ podle x :
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

■ podle y :
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

■ parciální derivace druhého řádu

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)$$

■ parciální derivace vyšších řádů

Parciální derivace funkcí dvou proměnných (2)

Věta: Má-li funkce $f(x, y)$ spojité druhé parciální derivace na $(a, b) \times (c, d) \subset \mathbb{R}^2$, pak na $(a, b) \times (c, d)$ platí

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

Gradient

Definice: Uvažujme funkci $f(x, y)$ dvou proměnných a bod $(x_0, y_0) \in D(f)$. Za předpokladu, že parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ existují, nazýváme vektor

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right)$$

gradientem funkce f v bodě (x_0, y_0) a značíme **grad** $f(x_0, y_0)$.

Poznámka: Gradient je vektor, který udává směr nejrychlejšího růstu funkce.