Kapitola 1: Reálné funkce

Číselné množiny

$\mathbb{N}$, $\mathbb{N}_0$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{I}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$

Definice: *Kartézský součin $M \times N$* množin M a N je množina všech uspořádaných dvojic, ve kterých je první složka prvkem množiny M a druhá prvkem množiny N.

$$M \times N = \{(m, n) | m \in M \wedge n \in N\}$$

Definice: Nechť $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}$. Říkáme, že množina M je *shora (resp. zdola) omezená*, jestliže existuje $a \in \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $m \in M$ je $m \leq a$ (resp. $m \geq a$). Číslo a pak nazýváme *horní (resp. dolní) závorou* množiny M.

Množinu, která je omezená shora i zdola nazýváme *omezenou*.

Definice: Nechť $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}$. Říkáme, že číslo $\max M$ (resp. $\min M$) je *maximem (resp. minimem)* množiny M, jestliže platí:

(i) $\forall m \in M : m \leq \max M$ (resp. $m \geq \min M$)
(ii) $\max M \in M$ (resp. $\min M \in M$)

Číselné množiny

$\mathbb{N}$, $\mathbb{N}_0$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{I}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$

Definice: *Kartézský součin $M \times N$* množin M a N je množina všech uspořádaných dvojic, ve kterých je první složka prvkem množiny M a druhá prvkem množiny N.

$$M \times N = \{(m, n) | m \in M \wedge n \in N\}$$

Definice: Nechť $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}$. Říkáme, že množina M je *shora (resp. zdola) omezená*, jestliže existuje $a \in \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $m \in M$ je $m \leq a$ (resp. $m \geq a$). Číslo a pak nazýváme *horní (resp. dolní) závorou* množiny M.

Množinu, která je omezená shora i zdola nazýváme *omezenou*.

Definice: Nechť $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}$. Říkáme, že číslo $\max M$ (resp. $\min M$) je *maximem (resp. minimem)* množiny M, jestliže platí:

(i) $\forall m \in M : m \leq \max M$ (resp. $m \geq \min M$)

(ii) $\max M \in M$ (resp. $\min M \in M$)

Číselné množiny

$\mathbb{N}$, $\mathbb{N}_0$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{I}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$

Definice: *Kartézský součin $M \times N$* množin M a N je množina všech uspořádaných dvojic, ve kterých je první složka prvkem množiny M a druhá prvkem množiny N.

$$M \times N = \{(m, n) | m \in M \wedge n \in N\}$$

Definice: Nechť $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}$. Říkáme, že množina M je *shora (resp. zdola) omezená*, jestliže existuje $a \in \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $m \in M$ je $m \leq a$ (resp. $m \geq a$). Číslo a pak nazýváme *horní (resp. dolní) závorou* množiny M.

Množinu, která je omezená shora i zdola nazýváme *omezenou*.

Definice: Nechť $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}$. Říkáme, že číslo $\max M$ (resp. $\min M$) je *maximem (resp. minimem)* množiny M, jestliže platí:

(i) $\forall m \in M : m \leq \max M$ (resp. $m \geq \min M$)
(ii) $\max M \in M$ (resp. $\min M \in M$)

Číselné množiny

$\mathbb{N}$, $\mathbb{N}_0$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{I}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$

Definice: *Kartézský součin $M \times N$* množin M a N je množina všech uspořádaných dvojic, ve kterých je první složka prvkem množiny M a druhá prvkem množiny N.

$$M \times N = \{(m, n) | m \in M \wedge n \in N\}$$

Definice: Nechť $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}$. Říkáme, že množina M je *shora (resp. zdola) omezená*, jestliže existuje $a \in \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $m \in M$ je $m \leq a$ (resp. $m \geq a$). Číslo a pak nazýváme *horní (resp. dolní) závorou* množiny M.

Množinu, která je omezená shora i zdola nazýváme *omezenou*.

Definice: Nechť $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}$. Říkáme, že číslo $\max M$ (resp. $\min M$) je *maximem (resp. minimem)* množiny M, jestliže platí:

(i) $\forall m \in M : m \leq \max M$ (resp. $m \geq \min M$)
(ii) $\max M \in M$ (resp. $\min M \in M$)

Reálné funkce jedné reálné proměnné

Definice: Nechť $M \subset \mathbb{R}$. Jestliže každému $x \in M$ je přiřazeno jistým předpisem f právě jedno $y \in \mathbb{R}$, říkáme, že *y je funkcí x*.

Veličinu x (vzor) nazýváme *nezávisle proměnnou*, veličinu y (obraz) *závisle proměnnou*.

Množinu M nazýváme *definičním oborem* funkce f, značíme ji $D(f)$. Množinu $\{y = f(x) | x \in D(f)\}$ nazýváme *oborem hodnot* funkce f, značíme ji $H(f)$.

- Značení: $y = f(x)$, $f : M \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$, $x \mapsto y$
- Obecnější pojem: zobrazení

Způsoby zadání funkce

- analytickým předpisem (výrazem)
- graficky

  Definice: *Grafem funkce* f rozumíme množinu uspořádaných dvojic reálných čísel $(x, f(x))$, kde $x \in D(f)$. Píšeme,

  $$\text{graf } f = \{(x, f(x)) | x \in D(f)\}$$

- tabulkou hodnot, algoritmem, slovně

Určení definičního oboru je součástí zadání funkce. Není-li definiční obor zadán, myslí se *přirozený* definiční obor.

Poznámka: Dvě funkce f a g se rovnají (zapisujeme $f = g$), jestliže

(i) $D(f) = D(g)$

(ii) $\forall x \in D(f) : f(x) = g(x)$

Tabulka I.

Operace s funkcemi $(+, -, \cdot, \setminus)$

Definice: Nechť f a g jsou reálné funkce jedné reálné proměnné s definičními obory $D(f)$ a $D(g)$.

- *Součtem funkcí* f a g nazýváme funkci $h = f + g$ s definičním oborem $D(h) = D(f) \cap D(g)$ definovanou předpisem

$$\forall x \in D(h) : h(x) = f(x) + g(x)$$

- *Součinem funkcí* f a g nazýváme funkci $h = f \cdot g$ s definičním oborem $D(h) = D(f) \cap D(g)$ definovanou předpisem

$$\forall x \in D(h) : h(x) = f(x) \cdot g(x)$$

- *Podílem funkcí* f a g nazýváme funkci $h = \frac{f}{g}$ s definičním oborem $D(h) = (D(f) \cap D(g)) \setminus N(g)$, kde $N(g) = \{x \in D(g) | g(x) = 0\}$, definovanou předpisem

$$\forall x \in D(h) : h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

Operace s funkcemi (složená funkce)

Definice: Nechť f a g jsou reálné funkce jedné reálné proměnné s definičními obory $D(f)$ a $D(g)$.

- Nechť platí $H(f) \subseteq D(g)$. Funkci h s definičním oborem $D(h) = D(f)$ definovanou předpisem

$$\forall x \in D(h) : h(x) = g(f(x))$$

  nazýváme *složenou* funkcí a značíme ji $h = g \circ f$.
  g - *vnější* funkce, f - *vnitřní* funkce
- Není-li splněno $H(f) \subseteq D(g)$, rozumíme definičním oborem složené funkce $h = g \circ f$ množinu

$$D(h) = \{x \in D(f) | f(x) \in D(g)\}$$

Poznámka: Obecně neplatí $g \circ f = f \circ g$.

Operace s funkcemi (složená funkce)

Definice: Nechť f a g jsou reálné funkce jedné reálné proměnné s definičními obory $D(f)$ a $D(g)$.

- Nechť platí $H(f) \subseteq D(g)$. Funkci h s definičním oborem $D(h) = D(f)$ definovanou předpisem

$$\forall x \in D(h) : h(x) = g(f(x))$$

  nazýváme *složenou* funkcí a značíme ji $h = g \circ f$.
  g - *vnější* funkce, f - *vnitřní* funkce

- Není-li splněno $H(f) \subseteq D(g)$, rozumíme definičním oborem složené funkce $h = g \circ f$ množinu

$$D(h) = \{x \in D(f) | f(x) \in D(g)\}$$

Poznámka: Obecně neplatí $g \circ f = f \circ g$.

Vlastnosti funkcí - prosté funkce

Definice: Funkce $f : D(f) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je *prostá* na $M \subseteq D(f)$, jestliže

$$\forall x_1, x_2 \in M : x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

Poznámka:

- ekvivalentní formulace $\to$ důkaz, že f je prostá

$$\forall x_1, x_2 \in M : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

- negace $\to$ důkaz, že f není prostá

$$\exists x_1, x_2 \in M : x_1 \neq x_2 \wedge f(x_1) = f(x_2)$$

Vlastnosti funkcí - monotonní funkce

Definice: Mějme dánu funkci $f : D(f) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a množinu $M \subseteq D(f)$. Jestliže pro každé $x_1, x_2 \in M$, $x_1 < x_2$ platí

(i) $f(x_1) < f(x_2)$, je funkce f *rostoucí* na M

(ii) $f(x_1) \leq f(x_2)$, je funkce f *neklesající* na M

(iii) $f(x_1) > f(x_2)$, je funkce f *klesající* na M

(iv) $f(x_1) \geq f(x_2)$, je funkce f *nerostoucí* na M

Má-li f jednu z vlastností $(i) - (iv)$, nazýváme ji *monotonní*.
Má-li f vlastnost (i) nebo (iii), nazýváme ji *ryze monotonní*.

Tvrzení: Součet dvou rostoucích (klesajících) funkcí je funkce rostoucí (klesající). *(neplatí pro součin a podíl funkcí)*

Věta: Je-li funkce f ryze monotonní na množině $M \subseteq \mathbb{R}$, je na M prostá.

Vlastnosti funkcí - monotonní funkce

Definice: Mějme dánu funkci $f : D(f) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a množinu $M \subseteq D(f)$. Jestliže pro každé $x_1, x_2 \in M$, $x_1 < x_2$ platí

(i) $f(x_1) < f(x_2)$, je funkce f *rostoucí* na M

(ii) $f(x_1) \leq f(x_2)$, je funkce f *neklesající* na M

(iii) $f(x_1) > f(x_2)$, je funkce f *klesající* na M

(iv) $f(x_1) \geq f(x_2)$, je funkce f *nerostoucí* na M

Má-li f jednu z vlastností $(i) - (iv)$, nazýváme ji *monotonní*.
Má-li f vlastnost (i) nebo (iii), nazýváme ji *ryze monotonní*.

Tvrzení: Součet dvou rostoucích (klesajících) funkcí je funkce rostoucí (klesající). *(neplatí pro součin a podíl funkcí)*

Věta: Je-li funkce f ryze monotonní na množině $M \subseteq \mathbb{R}$, je na M prostá.

Vlastnosti funkcí - monotonní funkce

Definice: Mějme dánu funkci $f : D(f) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a množinu $M \subseteq D(f)$. Jestliže pro každé $x_1, x_2 \in M$, $x_1 < x_2$ platí

(i) $f(x_1) < f(x_2)$, je funkce f *rostoucí* na M

(ii) $f(x_1) \leq f(x_2)$, je funkce f *neklesající* na M

(iii) $f(x_1) > f(x_2)$, je funkce f *klesající* na M

(iv) $f(x_1) \geq f(x_2)$, je funkce f *nerostoucí* na M

Má-li f jednu z vlastností $(i) - (iv)$, nazýváme ji *monotonní*.
Má-li f vlastnost (i) nebo (iii), nazýváme ji *ryze monotonní*.

Tvrzení: Součet dvou rostoucích (klesajících) funkcí je funkce rostoucí (klesající). *(neplatí pro součin a podíl funkcí)*

Věta: Je-li funkce f ryze monotonní na množině $M \subseteq \mathbb{R}$, je na M prostá.

Vlastnosti funkcí - omezené funkce

Definice:

- Říkáme, že funkce f je na svém definičním oboru $D(f)$ *omezená zdola*, jestliže

$$\exists d \in \mathbb{R}\ \forall x \in D(f):\ d \leq f(x)$$

- Říkáme, že funkce f je na svém definičním oboru $D(f)$ *omezená shora*, jestliže

$$\exists h \in \mathbb{R}\ \forall x \in D(f):\ f(x) \leq h$$

- Funkci, která je omezená zdola i shora nazýváme *omezenou*.

Vlastnosti funkcí - sudé a liché funkce

Definice:

- Říkáme, že funkce $f : D(f) \to \mathbb{R}$ je *sudá*, jestliže

$$\forall x \in D(f) : \; f(x) = f(-x)$$

- Říkáme, že funkce $f : D(f) \to \mathbb{R}$ je *lichá*, jestliže

$$\forall x \in D(f) : \; f(x) = -f(-x)$$

Poznámka:

(i) Graf sudé funkce je souměrný podle osy y.

(ii) Graf liché funkce je souměrný podle počátku.

(ii) Definiční obor sudé nebo liché funkce je souměrný podle počátku.

Vlastnosti funkcí - periodické funkce

Definice: Funkci $f : D(f) \to \mathbb{R}$ nazýváme *periodickou*, jestliže $\exists p \in \mathbb{R}$, $p \neq 0$ takové, že:

(i) $x \in D(f) \Rightarrow x \pm p \in D(f)$

(ii) $\forall x \in D(f): \; f(x \pm p) = f(x)$

Číslo p nazýváme *periodou* funkce f. Nejmenší kladnou periodu nazýváme *primitivní periodou*.

Věta:

(i) Je-li funkce f periodická s periodou p a funkce g taková, že $H(f) \subseteq D(g)$, pak složená funkce $h(x) = g(f(x))$ je rovněž periodická s periodou p.

(ii) Je-li funkce f periodická s periodou p a $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, pak funkce $g(x) = f(ax)$ je periodická s periodou $\frac{p}{a}$.

Vlastnosti funkcí - periodické funkce

Definice: Funkci $f : D(f) \to \mathbb{R}$ nazýváme *periodickou*, jestliže $\exists p \in \mathbb{R}$, $p \neq 0$ takové, že:

(i) $x \in D(f) \Rightarrow x \pm p \in D(f)$

(ii) $\forall x \in D(f) : \; f(x \pm p) = f(x)$

Číslo p nazýváme *periodou* funkce f. Nejmenší kladnou periodu nazýváme *primitivní periodou*.

Věta:

(i) Je-li funkce f periodická s periodou p a funkce g taková, že $H(f) \subseteq D(g)$, pak složená funkce $h(x) = g(f(x))$ je rovněž periodická s periodou p.

(ii) Je-li funkce f periodická s periodou p a $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, pak funkce $g(x) = f(ax)$ je periodická s periodou $\frac{p}{a}$.

Inverzní funkce

Definice: Nechť $f : D(f) \to \mathbb{R}$ je prostá, s oborem hodnot $H(f)$. *Inverzní funkcí* k funkci f rozumíme funkci f^{-1} s definičním oborem $D(f^{-1}) = H(f)$ a s oborem hodnot $H(f^{-1}) = D(f)$ definovanou vztahem

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$$

Poznámka:

(i) Graf inverzní funkce f^{-1} je souměrný s grafem funkce f podle přímky $y = x$.

(ii) $\forall x \in D(f) : f^{-1}(f(x)) = x$

(iii) $\forall y \in D(f^{-1}) : f(f^{-1}(y)) = y$

(iv) $(f^{-1})^{-1} = f$

Exponenciální a logaritmické funkce

$$y = a^x \Leftrightarrow x = \log_a(y), x \in \mathbb{R}, y > 0, 1 \neq a > 0$$

Užitečné: $h(x) = f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\ln(f(x))}$

Inverzní funkce

Definice: Nechť $f : D(f) \to \mathbb{R}$ je prostá, s oborem hodnot $H(f)$. *Inverzní funkcí* k funkci f rozumíme funkci f^{-1} s definičním oborem $D(f^{-1}) = H(f)$ a s oborem hodnot $H(f^{-1}) = D(f)$ definovanou vztahem

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$$

Poznámka:

(i) Graf inverzní funkce f^{-1} je souměrný s grafem funkce f podle přímky $y = x$.

(ii) $\forall x \in D(f) : f^{-1}(f(x)) = x$

(iii) $\forall y \in D(f^{-1}) : f(f^{-1}(y)) = y$

(iv) $(f^{-1})^{-1} = f$

Exponenciální a logaritmické funkce

$$y = a^x \Leftrightarrow x = \log_a(y), x \in \mathbb{R}, y > 0, 1 \neq a > 0$$

Užitečné: $h(x) = f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\ln(f(x))}$

Cyklometrické funkce

Věta:
Vlastnosti funkcí arcsin(x), arccos(x), arctg(x), arccotg(x)

$f(x)$	arcsin(x)	arccos(x)	arctg(x)	arccotg(x)
$D(f)$	$\langle -1, 1\rangle$	$\langle -1, 1\rangle$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$H(f)$	$\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle$	$\langle 0, \pi\rangle$	$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$	$(0, \pi)$
rostoucí	✓	–	✓	–
klesající	–	✓	–	✓
sudá	–	–	–	–
lichá	✓	–	✓	–
$f^{-1}(x)$	sin(x)	cos(x)	tg(x)	cotg(x)
	$x \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle$	$x \in \langle 0, \pi\rangle$	$x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$	$x \in (0, \pi)$

Věta: $\arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}$ pro $x \in \langle -1, 1\rangle$
$\mathrm{arctg}(x) + \mathrm{arccotg}(x) = \frac{\pi}{2}$ pro $x \in \mathbb{R}$

Cyklometrické funkce

Věta:
Vlastnosti funkcí $\arcsin(x)$, $\arccos(x)$, $\mathrm{arctg}(x)$, $\mathrm{arccotg}(x)$

$f(x)$	$\arcsin(x)$	$\arccos(x)$	$\mathrm{arctg}(x)$	$\mathrm{arccotg}(x)$
$D(f)$	$\langle -1, 1\rangle$	$\langle -1, 1\rangle$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$H(f)$	$\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle$	$\langle 0, \pi\rangle$	$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$	$(0, \pi)$
rostoucí	$\checkmark$	–	$\checkmark$	–
klesající	–	$\checkmark$	–	$\checkmark$
sudá	–	–	–	–
lichá	$\checkmark$	–	$\checkmark$	–
$f^{-1}(x)$	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\mathrm{tg}(x)$	$\mathrm{cotg}(x)$
	$x \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle$	$x \in \langle 0, \pi\rangle$	$x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$	$x \in (0, \pi)$

Věta: $\arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}$ pro $x \in \langle -1, 1\rangle$
$\mathrm{arctg}(x) + \mathrm{arccotg}(x) = \frac{\pi}{2}$ pro $x \in \mathbb{R}$

Cyklometrické funkce

Věta:
Vlastnosti funkcí $\arcsin(x)$, $\arccos(x)$, $\mathrm{arctg}(x)$, $\mathrm{arccotg}(x)$

$f(x)$	$\arcsin(x)$	$\arccos(x)$	$\mathrm{arctg}(x)$	$\mathrm{arccotg}(x)$
$D(f)$	$\langle -1, 1\rangle$	$\langle -1, 1\rangle$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$H(f)$	$\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle$	$\langle 0, \pi\rangle$	$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$	$(0, \pi)$
rostoucí	$\checkmark$	$-$	$\checkmark$	$-$
klesající	$-$	$\checkmark$	$-$	$\checkmark$
sudá	$-$	$-$	$-$	$-$
lichá	$\checkmark$	$-$	$\checkmark$	$-$
$f^{-1}(x)$	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\mathrm{tg}(x)$	$\mathrm{cotg}(x)$
	$x \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle$	$x \in \langle 0, \pi\rangle$	$x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$	$x \in (0, \pi)$

Věta: $\arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}$ pro $x \in \langle -1, 1\rangle$
$\mathrm{arctg}(x) + \mathrm{arccotg}(x) = \frac{\pi}{2}$ pro $x \in \mathbb{R}$