Kapitola 10: Diferenciální rovnice.

Co je to diferenciální rovnice?

Diferenciální rovnice je vztah mezi hledanou funkcí $y(x)$, jejími derivacemi $y'(x), y''(x), y'''(x), \ldots$ a nezávisle proměnnou x. Řešením diferenciální rovnice je funkce.

Příklady diferenciálních rovnic:

$$\begin{aligned} y' &= 3x \\ y'y &= sin(x) \\ y''' - x\,y'' - 2\,y\,y' &= x^2 \end{aligned}$$

Definice:
Množina všech řešení diferenciální rovnice se nazývá obecné řešení. Jedno konkrétní řešení se nazývá partikulární řešení. Graf partikulárního řešení se nazývá integrální křivka.

V aplikacích diferenciálních rovnic se setkáváme s úlohou nalézt partikulární řešení diferenciální rovnice, které pro danou hodnotu x_0 nezávisle proměnné x nabývá předepsanou hodnotu y_0, tj. hledáme řešení, aby splňovalo počáteční podmínku

$$y(x_0) = y_0.$$

Co je to diferenciální rovnice?

Diferenciální rovnice je vztah mezi hledanou funkcí $y(x)$, jejími derivacemi $y'(x), y''(x), y'''(x), \dots$ a nezávisle proměnnou x. Řešením diferenciální rovnice je funkce.

Příklady diferenciálních rovnic:

$$\begin{aligned} y' &= 3x \\ y'y &= sin(x) \\ y''' - x\,y'' - 2\,y\,y' &= x^2 \end{aligned}$$

Definice:

Množina všech řešení diferenciální rovnice se nazývá obecné řešení. Jedno konkrétní řešení se nazývá partikulární řešení. Graf partikulárního řešení se nazývá integrální křivka.

V aplikacích diferenciálních rovnic se setkáváme s úlohou nalézt partikulární řešení diferenciální rovnice, které pro danou hodnotu x_0 nezávisle proměnné x nabývá předepsanou hodnotu y_0, tj. hledáme řešení, aby splňovalo počáteční podmínku

$$y(x_0) = y_0.$$

Co je to diferenciální rovnice?

Diferenciální rovnice je vztah mezi hledanou funkcí $y(x)$, jejími derivacemi $y'(x), y''(x), y'''(x), \ldots$ a nezávisle proměnnou x. Řešením diferenciální rovnice je funkce.

Příklady diferenciálních rovnic:

$$\begin{aligned} y' &= 3x \\ y'y &= sin(x) \\ y''' - x\,y'' - 2\,y\,y' &= x^2 \end{aligned}$$

Definice:
Množina všech řešení diferenciální rovnice se nazývá obecné řešení. Jedno konkrétní řešení se nazývá partikulární řešení. Graf partikulárního řešení se nazývá integrální křivka.

V aplikacích diferenciálních rovnic se setkáváme s úlohou nalézt partikulární řešení diferenciální rovnice, které pro danou hodnotu x_0 nezávisle proměnné x nabývá předepsanou hodnotu y_0, tj. hledáme řešení, aby splňovalo počáteční podmínku

$$y(x_0) = y_0.$$

Co je to diferenciální rovnice?

Diferenciální rovnice je vztah mezi hledanou funkcí $y(x)$, jejími derivacemi $y'(x), y''(x), y'''(x), \ldots$ a nezávisle proměnnou x. Řešením diferenciální rovnice je funkce.

Příklady diferenciálních rovnic:

$$\begin{aligned} y' &= 3x \\ y'y &= sin(x) \\ y''' - x\,y'' - 2\,y\,y' &= x^2 \end{aligned}$$

Definice:
Množina všech řešení diferenciální rovnice se nazývá obecné řešení. Jedno konkrétní řešení se nazývá partikulární řešení. Graf partikulárního řešení se nazývá integrální křivka.

V aplikacích diferenciálních rovnic se setkáváme s úlohou nalézt partikulární řešení diferenciální rovnice, které pro danou hodnotu x_0 nezávisle proměnné x nabývá předepsanou hodnotu y_0, tj. hledáme řešení, aby splňovalo počáteční podmínku

$$y(x_0) = y_0.$$

Rovnice typu $y' = f(x)\,g(y)$.

Věta: Uvažujme rovnici $y' = f(x)\,g(y)$. Je-li funkce $f(x)$ spojitá na intervalu (a, b) a $g'(y)$ je spojitá na intervalu (c, d), pak každým bodem obdélníku $\mathcal{O} = (a, b) \times (c, d)$ prochází právě jedna integrální křivka. Nebo-li existuje právě jedno řešení rovnice $y' = f(x)\,g(y)$ splňující počáteční podmínku $y(x_0) = y_0$, kde $[x_0, y_0] \in \mathcal{O}$.

Geometrický význam: V každém bodě $[x, y]$ obdélníku $\mathcal{O}$ nakreslíme krátkou úsečku o směrnici $f(x)g(y)$, tím obdržíme směrové pole. Úsečka je tečná k integrální křivce procházející bodem $[x, y]$

Nadále budeme uvažovat pouze rovnici $y' = f(x)\,g(y)$, kde $f(x)$ je spojitá na (a, b) a $g'(y)$ je spojitá na (c, d).

Rovnice typu $y' = f(x)\,g(y)$.

Věta: Uvažujme rovnici $y' = f(x)\,g(y)$. Je-li funkce $f(x)$ spojitá na intervalu (a, b) a $g'(y)$ je spojitá na intervalu (c, d), pak každým bodem obdélníku $\mathcal{O} = (a, b) \times (c, d)$ prochází právě jedna integrální křivka. Nebo-li existuje právě jedno řešení rovnice $y' = f(x)\,g(y)$ splňující počáteční podmínku $y(x_0) = y_0$, kde $[x_0, y_0] \in \mathcal{O}$.

Geometrický význam: V každém bodě $[x, y]$ obdélníku $\mathcal{O}$ nakreslíme krátkou úsečku o směrnici $f(x)g(y)$, tím obdržíme směrové pole. Úsečka je tečná k integrální křivce procházející bodem $[x, y]$

Nadále budeme uvažovat pouze rovnici $y' = f(x)\,g(y)$, kde $f(x)$ je spojitá na (a, b) a $g'(y)$ je spojitá na (c, d).

Rovnice typu $y' = f(x)\,g(y)$.

Věta: Uvažujme rovnici $y' = f(x)\,g(y)$. Je-li funkce $f(x)$ spojitá na intervalu (a, b) a $g'(y)$ je spojitá na intervalu (c, d), pak každým bodem obdélníku $\mathcal{O} = (a, b) \times (c, d)$ prochází právě jedna integrální křivka. Nebo-li existuje právě jedno řešení rovnice $y' = f(x)\,g(y)$ splňující počáteční podmínku $y(x_0) = y_0$, kde $[x_0, y_0] \in \mathcal{O}$.

Geometrický význam: V každém bodě $[x, y]$ obdélníku $\mathcal{O}$ nakreslíme krátkou úsečku o směrnici $f(x)g(y)$, tím obdržíme směrové pole. Úsečka je tečná k integrální křivce procházející bodem $[x, y]$

Nadále budeme uvažovat pouze rovnici $y' = f(x)\,g(y)$, kde $f(x)$ je spojitá na (a, b) a $g'(y)$ je spojitá na (c, d).

Rovnice typu $y' = f(x)\,g(y)$.

Věta: Uvažujme rovnici $y' = f(x)\,g(y)$. Je-li funkce $f(x)$ spojitá na intervalu (a, b) a $g'(y)$ je spojitá na intervalu (c, d), pak každým bodem obdélníku $\mathcal{O} = (a, b) \times (c, d)$ prochází právě jedna integrální křivka. Nebo-li existuje právě jedno řešení rovnice $y' = f(x)\,g(y)$ splňující počáteční podmínku $y(x_0) = y_0$, kde $[x_0, y_0] \in \mathcal{O}$.

Geometrický význam: V každém bodě $[x, y]$ obdélníku $\mathcal{O}$ nakreslíme krátkou úsečku o směrnici $f(x)g(y)$, tím obdržíme směrové pole. Úsečka je tečná k integrální křivce procházející bodem $[x, y]$

Nadále budeme uvažovat pouze rovnici $y' = f(x)\,g(y)$, kde $f(x)$ je spojitá na (a, b) a $g'(y)$ je spojitá na (c, d).

Metoda separace proměnných.

1. Najdeme všechny body y_0, pro které $g(y_0) = 0$. Potom $y \equiv y_0$ je konstantní řešení diferenciální rovnice $y' = f(x)\,g(y)$.
2. $$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y), \; x \in I, \; y \in J$$
3. Separujeme proměnné:
$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$$
4. $$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx$$
$$G(y) + C_1 = F(x) + C_2,$$
kde $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ jsou libovolné konstanty.
$$G(y) = F(x) + C,$$
kde $C = C_2 - C_1$.
5. $$y(x) = G^{-1}(F(x) + C),$$
kde $x \in (a, b)$.

Metoda separace proměnných.

1. Najdeme všechny body y_0, pro které $g(y_0) = 0$.
   Potom $y \equiv y_0$ je konstantní řešení diferenciální rovnice
   $y' = f(x)\,g(y)$.
2. $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x)g(y), \;\; x \in I, \; y \in J$$
3. Separujeme proměnné:
   $$\frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = f(x)\mathrm{d}x$$
4. $$\int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = \int f(x)\mathrm{d}x$$
   $$G(y) + C_1 = F(x) + C_2,$$
   kde $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ jsou libovolné konstanty.
   $$G(y) = F(x) + C,$$
   kde $C = C_2 - C_1$.
5. $$y(x) = G^{-1}(F(x) + C),$$
   kde $x \in (a, b)$.

Metoda separace proměnných.

1. Najdeme všechny body y_0, pro které $g(y_0) = 0$.
   Potom $y \equiv y_0$ je konstantní řešení diferenciální rovnice $y' = f(x)\,g(y)$.
2. $$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y), \; x \in I, \; y \in J$$
3. Separujeme proměnné:
   $$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$$
4. $$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx$$
   $$G(y) + C_1 = F(x) + C_2,$$
   kde $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ jsou libovolné konstanty.
   $$G(y) = F(x) + C,$$
   kde $C = C_2 - C_1$.
5. $$y(x) = G^{-1}(F(x) + C),$$
   kde $x \in (a, b)$.

Metoda separace proměnných.

1. Najdeme všechny body y_0, pro které $g(y_0) = 0$.
   Potom $y \equiv y_0$ je konstantní řešení diferenciální rovnice $y' = f(x)\,g(y)$.

2. $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x)g(y), \;\; x \in I, \;\; y \in J$$

3. Separujeme proměnné:
   $$\frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = f(x)\mathrm{d}x$$

4. $$\int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = \int f(x)\mathrm{d}x$$
   $$G(y) + C_1 = F(x) + C_2,$$
   kde $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ jsou libovolné konstanty.
   $$G(y) = F(x) + C,$$
   kde $C = C_2 - C_1$.

5. $$y(x) = G^{-1}(F(x) + C),$$
   kde $x \in (a, b)$.

Metoda separace proměnných.

1. Najdeme všechny body y_0, pro které $g(y_0) = 0$.
   Potom $y \equiv y_0$ je konstantní řešení diferenciální rovnice $y' = f(x)\,g(y)$.
2. $$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y), \;\; x \in I, \;\; y \in J$$
3. Separujeme proměnné:
   $$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$$
4. $$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx$$
   $$G(y) + C_1 = F(x) + C_2,$$
   kde $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ jsou libovolné konstanty.
   $$G(y) = F(x) + C,$$
   kde $C = C_2 - C_1$.
5. $$y(x) = G^{-1}(F(x) + C),$$
   kde $x \in (a, b)$.

Metoda separace proměnných.

1. Najdeme všechny body y_0, pro které $g(y_0) = 0$.
   Potom $y \equiv y_0$ je konstantní řešení diferenciální rovnice $y' = f(x)\,g(y)$.
2. $$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y), \; x \in I, \; y \in J$$
3. Separujeme proměnné:
   $$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$$
4. $$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx$$
   $$G(y) + C_1 = F(x) + C_2,$$
   kde $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ jsou libovolné konstanty.
   $$G(y) = F(x) + C,$$
   kde $C = C_2 - C_1$.
5. $$y(x) = G^{-1}(F(x) + C),$$
   kde $x \in (a, b)$.

Metoda separace proměnných - shrnutí.

Věta: Nechť je funkce $f(x)$ spojitá na intervalu (a, b) a funkce $g(y)$ spojitá na intervalu (c, d). Potom:

1. Je-li $g(y_0) = 0$ pro nějaké $y_0 \in (c, d)$, je konstantní funkce
$$y(x) \equiv y_0$$
definované na (a, b) řešením rovnice $y' = f(x)\, g(y)$.
2. Je-li $g(y) \neq 0$ pro každé $y \in (c, d)$, pak obecné řešení rovnice $y' = f(x)\, g(y)$ na obdélníku $(a, b) \times (c, d)$ má tvar
$$y(x) \; = \; G^{-1}(F(x) + C),$$
kde $F(x) = \int f(x) \mathrm{d}x$ a $G(x) = \int \frac{1}{g(y)} \mathrm{d}y$.

Lineární rovnice 1. řádu

Předpokládejme, že funkce $a_0(x)$, $a_1(x)$, $b_1(x)$, $a(x)$, $b(x)$ jsou spojité na intervalu $I = (\alpha, \beta)$

Definice: Rovnici tvaru

$$a_0(x)y' + a_1(x)y = b_1(x), \quad a_0(x) \neq 0 \ \forall x \in I$$

nebo ekvivalentní rovnici tvaru

$$y' + a(x)y = b(x)$$

nazýváme lineární diferenciální rovnicí 1. řádu.

Rovnici

$$y' + a(x)y = 0$$

nazýváme homogenní lineární diferenciální rovnicí 1. řádu - HLDR.

Rovnici $$y' + a(x)y = b(x), \quad \exists\, x \in I : \ b(x) \neq 0$$

nazýváme nehomogenní lineární diferenciální rovnicí 1. řádu - NLDR.

Lineární rovnice 1. řádu

Předpokládejme, že funkce $a_0(x)$, $a_1(x)$, $b_1(x)$, $a(x)$, $b(x)$ jsou spojité na intervalu $I = (\alpha, \beta)$

Definice: Rovnici tvaru

$$a_0(x)y' + a_1(x)y = b_1(x), \quad a_0(x) \neq 0 \; \forall x \in I$$

nebo ekvivalentní rovnici tvaru

$$y' + a(x)y = b(x)$$

nazýváme lineární diferenciální rovnicí 1. řádu.

Rovnici

$$y' + a(x)y = 0$$

nazýváme homogenní lineární diferenciální rovnicí 1. řádu - HLDR.

Rovnici $$y' + a(x)y = b(x), \quad \exists\, x \in I : \; b(x) \neq 0$$

nazýváme nehomogenní lineární diferenciální rovnicí 1. řádu - NLDR.

Lineární rovnice 1. řádu

Předpokládejme, že funkce $a_0(x)$, $a_1(x)$, $b_1(x)$, $a(x)$, $b(x)$ jsou spojité na intervalu $I = (\alpha, \beta)$

Definice: Rovnici tvaru

$$a_0(x)y' + a_1(x)y = b_1(x), \quad a_0(x) \neq 0 \ \forall x \in I$$

nebo ekvivalentní rovnici tvaru

$$y' + a(x)y = b(x)$$

nazýváme lineární diferenciální rovnicí 1. řádu.

Rovnici

$$y' + a(x)y = 0$$

nazýváme homogenní lineární diferenciální rovnicí 1. řádu - HLDR.

Rovnici $$y' + a(x)y = b(x), \quad \exists x \in I : b(x) \neq 0$$

nazýváme nehomogenní lineární diferenciální rovnicí 1. řádu - NLDR.

Lineární rovnice 1. řádu

Předpokládejme, že funkce $a_0(x)$, $a_1(x)$, $b_1(x)$, $a(x)$, $b(x)$ jsou spojité na intervalu $I = (\alpha, \beta)$

Definice: Rovnici tvaru

$$a_0(x)y' + a_1(x)y = b_1(x), \quad a_0(x) \neq 0 \; \forall x \in I$$

nebo ekvivalentní rovnici tvaru

$$y' + a(x)y = b(x)$$

nazýváme lineární diferenciální rovnicí 1. řádu.

Rovnici

$$y' + a(x)y = 0$$

nazýváme homogenní lineární diferenciální rovnicí 1. řádu - HLDR.

Rovnici $$y' + a(x)y = b(x), \quad \exists\, x \in I \, : \, b(x) \neq 0$$

nazýváme nehomogenní lineární diferenciální rovnicí 1. řádu - NLDR.

Řešení HLDR.

Věta: Množina všech řešení HLDR 1. řádu

$$y' + a(x)y = 0$$

má tvar

$$y_H(x) = Ce^{-A(x)}, \; C \in \mathbb{R},$$

kde $A(x) = \int a(x)\mathrm{d}x$.

Věta: Obecné řešení NLDR 1. řádu

$$y' + a(x)y = b(x)$$

je ve tvaru

$$y = y_p + y_H,$$

kde y_p je jedno libovolné partikulární řešení NLDR a y_H jsou všechna řešení HLDR.

Řešení HLDR.

Věta: Množina všech řešení HLDR 1. řádu

$$y' + a(x)y = 0$$

má tvar

$$y_H(x) = Ce^{-A(x)},\ C \in \mathbb{R},$$

kde $A(x) = \int a(x)\mathrm{d}x$.

Věta: Obecné řešení NLDR 1. řádu

$$y' + a(x)y = b(x)$$

je ve tvaru

$$y = y_p + y_H,$$

kde y_p je jedno libovolné partikulární řešení NLDR a y_H jsou všechna řešení HLDR.

Řešení NLDR - metoda variace konstanty.

Uvažujme NLDR

$$y' + a(x)y = b(x), \quad x \in I.$$

1. Řešíme HLDR:

$$y_H(x) = Ce^{-A(x)}, \; C \in \mathbb{R}, \quad A(x) = \int a(x)\mathrm{d}x.$$

   Označme $\varphi(x) = \mathrm{e}^{-A(x)}$, tj. $y_H(x) = C\varphi(x)$.

2. Variace konstanty:
   hledáme partikulární řešení NLDR ve tvaru

$$y_p(x) = c(x)\varphi(x),$$

   kde $c(x)$ je nějaká funkce definovaná na I.
   Dosadíme y_p do NLDR.

$$c'(x)\varphi(x) + c(x)\varphi'(x) + a(x)c(x)\varphi(x) = b(x)$$

   dostaneme rovnici pro $c'(x)$

$$c'(x)\varphi(x) = b(x).$$

   Z této rovnice vypočteme $c'(x)$ a integrací vypočteme $c(x)$.

Řešení NLDR - metoda variace konstanty.

Uvažujme NLDR

$$y' + a(x)y = b(x), \quad x \in I.$$

1. Řešíme HLDR:

   $$y_H(x) = Ce^{-A(x)}, \; C \in \mathbb{R}, \quad A(x) = \int a(x)\mathrm{d}x.$$

   Označme $\varphi(x) = \mathrm{e}^{-A(x)}$, tj. $y_H(x) = C\varphi(x)$.

2. Variace konstanty:
   hledáme partikulární řešení NLDR ve tvaru

   $$y_p(x) = c(x)\varphi(x),$$

   kde $c(x)$ je nějaká funkce definovaná na I.
   Dosadíme y_p do NLDR.

   $$c'(x)\varphi(x) + c(x)\varphi'(x) + a(x)c(x)\varphi(x) = b(x)$$

   dostaneme rovnici pro $c'(x)$

   $$c'(x)\varphi(x) = b(x).$$

   Z této rovnice vypočteme $c'(x)$ a integrací vypočteme $c(x)$.

Řešení NLDR - metoda variace konstanty.

Uvažujme NLDR

$$y' + a(x)y = b(x), \quad x \in I.$$

1. Řešíme HLDR:

   $$y_H(x) = Ce^{-A(x)}, \; C \in \mathbb{R}, \quad A(x) = \int a(x)\mathrm{d}x.$$

   Označme $\varphi(x) = \mathrm{e}^{-A(x)}$, tj. $y_H(x) = C\varphi(x)$.
2. Variace konstanty:
   hledáme partikulární řešení NLDR ve tvaru

   $$y_p(x) = c(x)\varphi(x),$$

   kde $c(x)$ je nějaká funkce definovaná na I.
   Dosadíme y_p do NLDR.

   $$c'(x)\varphi(x) + c(x)\varphi'(x) + a(x)c(x)\varphi(x) = b(x)$$

   dostaneme rovnici pro $c'(x)$

   $$c'(x)\varphi(x) = b(x).$$

   Z této rovnice vypočteme $c'(x)$ a integrací vypočteme $c(x)$.

Řešení NLDR - metoda variace konstanty.

Uvažujme NLDR

$$y' + a(x)y = b(x), \quad x \in I.$$

1. Řešíme HLDR:

$$y_H(x) = Ce^{-A(x)}, \; C \in \mathbb{R}, \quad A(x) = \int a(x)\mathrm{d}x.$$

   Označme $\varphi(x) = \mathrm{e}^{-A(x)}$, tj. $y_H(x) = C\varphi(x)$.

2. Variace konstanty:
   hledáme partikulární řešení NLDR ve tvaru

$$y_p(x) = c(x)\varphi(x),$$

   kde $c(x)$ je nějaká funkce definovaná na I.
   Dosadíme y_p do NLDR.

$$c'(x)\varphi(x) + c(x)\varphi'(x) + a(x)c(x)\varphi(x) = b(x)$$

   dostaneme rovnici pro $c'(x)$

$$c'(x)\varphi(x) = b(x).$$

   Z této rovnice vypočteme $c'(x)$ a integrací vypočteme $c(x)$.

Variace konstanty - shrnutí.

Věta: Nechť je dána NLDR

$$y' + a(x)y = b(x)$$

$$\text{(resp. } a_0(x)y' + a_1(x)y = b_1(x), \quad a_0(x) \neq 0 \; \forall x \in I)$$

a nechť obecné řešení přiřazené HLDR má tvar

$$y_H(x) = C\varphi(x).$$

Splňuje-li funkce $c(x)$ rovnici

$$c'(x)\varphi(x) = b(x) \quad \text{(resp. } c'(x)\varphi(x) = \frac{b_1(x)}{a_0(x)})$$

je funkce

$$y_p(x) = c(x)\varphi(x)$$

řešením uvažované NLDR.

Eulerova metoda.

Numerická metoda pro výpočet přibližného řešení diferenciální rovnice:

$$y' = f(x, y) \qquad x \in \langle a, b\rangle \quad y(a) = y_0.$$

Dostaneme přibližné řešení v konečném počtu uzlových bodů $a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b$, $x_i \in \langle a, b\rangle$.
Označme tuto přibližnou hodnotu $y_i \doteq y(x_i)$.

Získáme tedy funkci zadanou tabulkou:

x_0	x_1	$\cdots$	x_n
y_0	y_1	$\cdots$	y_n

Známe-li počáteční hodnotu y_0, přibližné hodnoty vypočteme Eulerovou metodou:

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + h f(x_i, y_i) \quad i = 0, 1, \ldots, n \\ x_{i+1} &= x_i + h, \end{aligned}$$

kde h je krok metody. Chyba $E(h) = y_n - y(b)$ je úměrná veličině h. Eulerova metoda je metoda 1. řádu.

Eulerova metoda.

Numerická metoda pro výpočet přibližného řešení diferenciální rovnice:

$$y' = f(x, y) \qquad x \in \langle a, b\rangle \quad y(a) = y_0.$$

Dostaneme přibližné řešení v konečném počtu uzlových bodů $a = x_0, x_1, \dots, x_n = b$, $x_i \in \langle a, b\rangle$.
Označme tuto přibližnou hodnotu $y_i \doteq y(x_i)$.

Získáme tedy funkci zadanou tabulkou:

x_0	x_1	$\cdots$	x_n
y_0	y_1	$\cdots$	y_n

Známe-li počáteční hodnotu y_0, přibližné hodnoty vypočteme Eulerovou metodou:

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + h f(x_i, y_i) \quad i = 0, 1, \dots, n \\ x_{i+1} &= x_i + h, \end{aligned}$$

kde h je krok metody. Chyba $E(h) = y_n - y(b)$ je úměrná veličině h. Eulerova metoda je metoda 1. řádu.

Eulerova metoda.

Numerická metoda pro výpočet přibližného řešení diferenciální rovnice:

$$y' \; = \; f(x,y) \qquad x \in \langle a, b\rangle \quad y(a) = y_0.$$

Dostaneme přibližné řešení v konečném počtu uzlových bodů $a = x_0, x_1, \dots, x_n = b$, $x_i \in \langle a, b\rangle$.
Označme tuto přibližnou hodnotu $y_i \doteq y(x_i)$.

Získáme tedy funkci zadanou tabulkou:

x_0	x_1	$\cdots$	x_n
y_0	y_1	$\cdots$	y_n

Známe-li počáteční hodnotu y_0, přibližné hodnoty vypočteme Eulerovou metodou:

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= \; y_i \; + \; h\, f(x_i, y_i) \quad i = 0, 1, \dots, n \\ x_{i+1} &= \; x_i \; + \; h, \end{aligned}$$

kde h je krok metody. Chyba $E(h) = y_n - y(b)$ je úměrná veličině h. Eulerova metoda je metoda 1. řádu.