

Kapitola 11: Vektory a matice:

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n\}, \quad n \in \mathbb{N}$$

- $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ se nazývá **vektor**
- x_i je i -tá souřadnice vektoru \vec{x}
- rovnost vektorů:

$$\vec{x} = \vec{y} \Leftrightarrow \forall i = 1, \dots, n: x_i = y_i$$

- grafická reprezentace vektorů pro $n = 2, 3$

Operace na vektorech

Definice: Necht' $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n)$, $\vec{b} = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

■ **součtem vektorů** \vec{a} a \vec{b} je vektor

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n) \in \mathbb{R}^n$$

■ **α -násobek vektoru** \vec{a} je vektor

$$\alpha \vec{a} = (\alpha a_1, \dots, \alpha a_n) \in \mathbb{R}^n$$

Věta: $\forall \vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

- (i) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
- (ii) $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$
- (iii) $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$
- (iv) $(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$
- (v) $(\alpha\beta)\vec{a} = \alpha(\beta\vec{a})$

Operace na vektorech

Definice: Necht' $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n)$, $\vec{b} = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

- součtem vektorů \vec{a} a \vec{b} je vektor

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n) \in \mathbb{R}^n$$

- α -násobek vektoru \vec{a} je vektor

$$\alpha \vec{a} = (\alpha a_1, \dots, \alpha a_n) \in \mathbb{R}^n$$

Věta: $\forall \vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

- (i) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
- (ii) $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$
- (iii) $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$
- (iv) $(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$
- (v) $(\alpha\beta)\vec{a} = \alpha(\beta\vec{a})$

Lineární kombinace vektorů

Definice: Necht' $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k \in \mathbb{R}^n$ a necht' $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$.
Vektor

$$\vec{a} = \alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_k \vec{a}_k = \sum_{i=1}^k \alpha_i \vec{a}_i$$

nazýváme **lineární kombinací** vektorů $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k$ a čísla $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ **koeficienty** této lineární kombinace.

Jsou-li všechna $\alpha_i = 0, i = 1, \dots, k$, nazýváme lineární kombinaci **triviální**. Ta je vždy rovna nulovému vektoru $\vec{0} = (0, \dots, 0)$.

Je-li alespoň jedno $\alpha_i \neq 0$, nazýváme lineární kombinaci **netriviální**.

Lineární kombinace vektorů

Definice: Necht' $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k \in \mathbb{R}^n$ a necht' $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$.
Vektor

$$\vec{a} = \alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_k \vec{a}_k = \sum_{i=1}^k \alpha_i \vec{a}_i$$

nazýváme **lineární kombinací** vektorů $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k$ a čísla $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ **koeficienty** této lineární kombinace.

Jsou-li všechna $\alpha_i = 0, i = 1, \dots, k$, nazýváme lineární kombinaci **triviální**. Ta je vždy rovna nulovému vektoru $\vec{0} = (0, \dots, 0)$.

Je-li alespoň jedno $\alpha_i \neq 0$, nazýváme lineární kombinaci **netriviální**.

Lineární kombinace vektorů

Definice: Necht' $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k \in \mathbb{R}^n$ a necht' $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$.
Vektor

$$\vec{a} = \alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_k \vec{a}_k = \sum_{i=1}^k \alpha_i \vec{a}_i$$

nazýváme **lineární kombinací** vektorů $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k$ a čísla $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ **koeficienty** této lineární kombinace.

Jsou-li všechna $\alpha_i = 0, i = 1, \dots, k$, nazýváme lineární kombinaci **triviální**. Ta je vždy rovna nulovému vektoru $\vec{0} = (0, \dots, 0)$.

Je-li alespoň jedno $\alpha_i \neq 0$, nazýváme lineární kombinaci **netriviální**.

Lineární nezávislost vektorů (1)

Definice: Systém vektorů $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k \in \mathbb{R}^n$ nazýváme **lineárně nezávislým (LN)**, jestliže pouze triviální lineární kombinace těchto vektorů je rovna $\vec{0}$.

Systém vektorů $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k \in \mathbb{R}^n$ nazýváme **lineárně závislým (LZ)**, jestliže není LN, t.j. existuje alespoň jedna netriviální lineární kombinace těchto vektorů, která je rovna $\vec{0}$.

Platí: Systém vektorů $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k \in \mathbb{R}^n$ je LN právě tehdy, když

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i \vec{a}_i = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0$$

Lineární nezávislost vektorů (1)

Definice: Systém vektorů $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k \in \mathbb{R}^n$ nazýváme **lineárně nezávislým (LN)**, jestliže pouze triviální lineární kombinace těchto vektorů je rovna $\vec{0}$.

Systém vektorů $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k \in \mathbb{R}^n$ nazýváme **lineárně závislým (LZ)**, jestliže není LN, t.j. existuje alespoň jedna netriviální lineární kombinace těchto vektorů, která je rovna $\vec{0}$.

Platí: Systém vektorů $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k \in \mathbb{R}^n$ je LN právě tehdy, když

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i \vec{a}_i = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0$$

Lineární nezávislost vektorů (1)

Definice: Systém vektorů $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k \in \mathbb{R}^n$ nazýváme **lineárně nezávislým (LN)**, jestliže pouze triviální lineární kombinace těchto vektorů je rovna $\vec{0}$.

Systém vektorů $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k \in \mathbb{R}^n$ nazýváme **lineárně závislým (LZ)**, jestliže není LN, t.j. existuje alespoň jedna netriviální lineární kombinace těchto vektorů, která je rovna $\vec{0}$.

Platí: Systém vektorů $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k \in \mathbb{R}^n$ je LN právě tehdy, když

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i \vec{a}_i = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0$$

Lineární nezávislost vektorů (2)

Poznámka: Systém vektorů $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k \in \mathbb{R}^n$ je LN \Leftrightarrow žádný z vektorů nelze vyjádřit jako lineární kombinaci ostatních vektorů.

Ekvivalentně: Systém $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k \in \mathbb{R}^n$ je LZ \Leftrightarrow některý z vektorů je lineární kombinací ostatních vektorů.

Věta: Následující úpravy nemění LZ/LN systému vektorů $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k \in \mathbb{R}^n$:

- vynásobení některého vektoru \vec{a}_i nenulovým číslem
- přičtení nějakého vektoru \vec{a}_i k nějakému jinému vektoru \vec{a}_j

Důsledek:

$\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k \in \mathbb{R}^n$ jsou LN $\Leftrightarrow \vec{a}_1 + \sum_{i=1}^k \alpha_i \vec{a}_i, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k \in \mathbb{R}^n$ jsou LN

Lineární nezávislost vektorů (2)

Poznámka: Systém vektorů $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k \in \mathbb{R}^n$ je LN \Leftrightarrow žádný z vektorů nelze vyjádřit jako lineární kombinaci ostatních vektorů.

Ekvivalentně: Systém $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k \in \mathbb{R}^n$ je LZ \Leftrightarrow některý z vektorů je lineární kombinací ostatních vektorů.

Věta: Následující úpravy nemění LZ/LN systému vektorů $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k \in \mathbb{R}^n$:

- vynásobení některého vektoru \vec{a}_i nenulovým číslem
- přičtení nějakého vektoru \vec{a}_i k nějakému jinému vektoru \vec{a}_j

Důsledek:

$\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k \in \mathbb{R}^n$ jsou LN $\Leftrightarrow \vec{a}_1 + \sum_{i=1}^k \alpha_i \vec{a}_i, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k \in \mathbb{R}^n$ jsou LN

Lineární nezávislost vektorů (2)

Poznámka: Systém vektorů $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k \in \mathbb{R}^n$ je LN \Leftrightarrow žádný z vektorů nelze vyjádřit jako lineární kombinaci ostatních vektorů.

Ekvivalentně: Systém $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k \in \mathbb{R}^n$ je LZ \Leftrightarrow některý z vektorů je lineární kombinací ostatních vektorů.

Věta: Následující úpravy nemění LZ/LN systému vektorů $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k \in \mathbb{R}^n$:

- vynásobení některého vektoru \vec{a}_i nenulovým číslem
- přičtení nějakého vektoru \vec{a}_i k nějakému jinému vektoru \vec{a}_j

Důsledek:

$\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k \in \mathbb{R}^n$ jsou LN $\Leftrightarrow \vec{a}_1 + \sum_{i=1}^k \alpha_i \vec{a}_i, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k \in \mathbb{R}^n$ jsou LN

Matrice

$$A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

- **A - matice typu (m, n)**

- i - řádkový index, j - sloupcový index

- $(a_{i1}, \dots, a_{in}) \in \mathbb{R}^n$ - **řádkový vektor** matice A

- $(a_{1j}, \dots, a_{mj})^T \in \mathbb{R}^m$ - **sloupcový vektor** matice A

- rovnost matic $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$ a $B = (b_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$:

$$A = B \Leftrightarrow \forall i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n : a_{ij} = b_{ij}$$

- $\{a_{11}, \dots, a_{kk}\}$, $k = \min\{m, n\}$ - **hlavní diagonála** matice A

- matice typu (n, n) se nazývá **čtvercová** matice

Matrice

$$A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

■ A - matice typu (m, n)

■ i - řádkový index, j - sloupcový index

■ $(a_{i1}, \dots, a_{in}) \in \mathbb{R}^n$ - řádkový vektor matice A

■ $(a_{1j}, \dots, a_{mj})^T \in \mathbb{R}^m$ - sloupcový vektor matice A

■ rovnost matic $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$ a $B = (b_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$:

$$A = B \Leftrightarrow \forall i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n : a_{ij} = b_{ij}$$

■ $\{a_{11}, \dots, a_{kk}\}$, $k = \min\{m, n\}$ - hlavní diagonála matice A

■ matice typu (n, n) se nazývá čtvercová matice

Matrice

$$A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

- A - matice typu (m, n)
- i - řádkový index, j - sloupcový index
- $(a_{i1}, \dots, a_{in}) \in \mathbb{R}^n$ - řádkový vektor matice A
- $(a_{1j}, \dots, a_{mj})^T \in \mathbb{R}^m$ - sloupcový vektor matice A
- rovnost matic $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$ a $B = (b_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$:
$$A = B \Leftrightarrow \forall i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n : a_{ij} = b_{ij}$$
- $\{a_{11}, \dots, a_{kk}\}$, $k = \min\{m, n\}$ - hlavní diagonála matice A
- matice typu (n, n) se nazývá čtvercová matice

Matrice

$$A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

- A - matice typu (m, n)
- i - řádkový index, j - sloupcový index
- $(a_{i1}, \dots, a_{in}) \in \mathbb{R}^n$ - řádkový vektor matice A
- $(a_{1j}, \dots, a_{mj})^T \in \mathbb{R}^m$ - sloupcový vektor matice A
- rovnost matic $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$ a $B = (b_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$:
$$A = B \Leftrightarrow \forall i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n : a_{ij} = b_{ij}$$

- $\{a_{11}, \dots, a_{kk}\}$, $k = \min\{m, n\}$ - hlavní diagonála matice A
- matice typu (n, n) se nazývá čtvercová matice

Matrice

$$A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

- A - matice typu (m, n)
- i - řádkový index, j - sloupcový index
- $(a_{i1}, \dots, a_{in}) \in \mathbb{R}^n$ - řádkový vektor matice A
- $(a_{1j}, \dots, a_{mj})^T \in \mathbb{R}^m$ - sloupcový vektor matice A
- rovnost matic $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$ a $B = (b_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$:
$$A = B \Leftrightarrow \forall i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n : a_{ij} = b_{ij}$$
- $\{a_{11}, \dots, a_{kk}\}$, $k = \min\{m, n\}$ - hlavní diagonála matice A
- matice typu (n, n) se nazývá čtvercová matice

Matice

$$A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

- A - matice typu (m, n)
- i - řádkový index, j - sloupcový index
- $(a_{i1}, \dots, a_{in}) \in \mathbb{R}^n$ - řádkový vektor matice A
- $(a_{1j}, \dots, a_{mj})^T \in \mathbb{R}^m$ - sloupcový vektor matice A
- rovnost matic $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$ a $B = (b_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$:
$$A = B \Leftrightarrow \forall i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n : a_{ij} = b_{ij}$$
- $\{a_{11}, \dots, a_{kk}\}$, $k = \min\{m, n\}$ - hlavní diagonála matice A
- matice typu (n, n) se nazývá čtvercová matice

Operace s maticemi - sčítání, násobení číslem

Definice: Je-li $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ a $\alpha \in \mathbb{R}$, pak

- **součtem matic** A a B je matice $A + B = C = (c_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ s prvky $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, $\forall i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$.
- α - **násobkem matice** A je matice $\alpha A = C = (c_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ s prvky $c_{ij} = \alpha a_{ij}$, $\forall i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$.

Věta: Necht' A, B, C jsou libovolné matice typu (m, n) a necht' $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, pak platí:

- $A + B = B + A$
- $(A + B) + C = A + (B + C)$
- $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$
- $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$
- $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$

Operace s maticemi - sčítání, násobení číslem

Definice: Je-li $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ a $\alpha \in \mathbb{R}$, pak

- **součtem matic** A a B je matice $A + B = C = (c_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ s prvky $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad \forall i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n.$
- **α - násobkem matice** A je matice $\alpha A = C = (c_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ s prvky $c_{ij} = \alpha a_{ij}, \quad \forall i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n.$

Věta: Necht' A, B, C jsou libovolné matice typu (m, n) a necht' $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, pak platí:

- $A + B = B + A$
- $(A + B) + C = A + (B + C)$
- $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$
- $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$
- $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$

Operace s maticemi - sčítání, násobení číslem

Definice: Je-li $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ a $\alpha \in \mathbb{R}$, pak

- **součtem matic** A a B je matice $A + B = C = (c_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ s prvky $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, $\forall i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$.
- **α - násobkem matice** A je matice $\alpha A = C = (c_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ s prvky $c_{ij} = \alpha a_{ij}$, $\forall i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$.

Věta: Necht' A, B, C jsou libovolné matice typu (m, n) a necht' $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, pak platí:

- (i) $A + B = B + A$
- (ii) $(A + B) + C = A + (B + C)$
- (iii) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$
- (iv) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$
- (v) $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$

Operace s maticemi - násobení (1)

Připomenutí: Skalárním součinem vektorů

$\vec{a} = (a_1, \dots, a_n), \vec{b} = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ rozumíme reálné číslo

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + \dots + a_n b_n = \sum_{i=1}^n a_i b_i.$$

Definice: Je-li $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times k}$ a $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{k \times n}$, pak

součinem matic A a B (v tomto pořadí) je matice

$A \cdot B = C = (c_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ s prvky

$$c_{ij} = \vec{a}_i \cdot \vec{b}_j = \sum_{l=1}^k a_{il} b_{lj},$$

kde \vec{a}_i je i -tý řádek matice A a \vec{b}_j je j -tý sloupec matice B .

Operace s maticemi - násobení (1)

Připomenutí: Skalárním součinem vektorů

$\vec{a} = (a_1, \dots, a_n)$, $\vec{b} = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ rozumíme reálné číslo

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + \dots + a_n b_n = \sum_{i=1}^n a_i b_i.$$

Definice: Je-li $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times k}$ a $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{k \times n}$, pak

součinem matic A a B (v tomto pořadí) je matice

$A \cdot B = C = (c_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ s prvky

$$c_{ij} = \vec{a}_i \cdot \vec{b}_j = \sum_{l=1}^k a_{il} b_{lj},$$

kde \vec{a}_i je i -tý řádek matice A a \vec{b}_j je j -tý sloupec matice B .

Operace s maticemi - násobení (2)

Věta: Pro operaci násobení matic platí (pokud mají uvedené operace smysl):

$$(i) \quad (A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$

$$(ii) \quad A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$$

$$(iii) \quad (A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$$

$$(iv) \quad \alpha(A \cdot B) = (\alpha A) \cdot B = A \cdot (\alpha B)$$

Definice: Čtvercová matice řádu n , t.j. matice typu (n, n) , která má na hlavní diagonále samé 1 a ostatní prvky jsou rovny 0, se nazývá **jednotková matice** a značí se E (nebo E_n).

Platí: Je-li A matice typu (m, n) , pak

$$E_m \cdot A = A, \quad A \cdot E_n = A.$$

Operace s maticemi - násobení (2)

Věta: Pro operaci násobení matic platí (pokud mají uvedené operace smysl):

$$(i) \quad (A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$

$$(ii) \quad A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$$

$$(iii) \quad (A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$$

$$(iv) \quad \alpha(A \cdot B) = (\alpha A) \cdot B = A \cdot (\alpha B)$$

Definice: Čtvercová matice řádu n , t.j. matice typu (n, n) , která má na hlavní diagonále samé 1 a ostatní prvky jsou rovny 0, se nazývá **jednotková matice** a značí se E (nebo E_n).

Platí: Je-li A matice typu (m, n) , pak

$$E_m \cdot A = A, \quad A \cdot E_n = A.$$

Operace s maticemi - násobení (2)

Věta: Pro operaci násobení matic platí (pokud mají uvedené operace smysl):

$$(i) \quad (A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$

$$(ii) \quad A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$$

$$(iii) \quad (A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$$

$$(iv) \quad \alpha(A \cdot B) = (\alpha A) \cdot B = A \cdot (\alpha B)$$

Definice: Čtvercová matice řádu n , t.j. matice typu (n, n) , která má na hlavní diagonále samé 1 a ostatní prvky jsou rovny 0, se nazývá **jednotková matice** a značí se E (nebo E_n).

Platí: Je-li A matice typu (m, n) , pak

$$E_m \cdot A = A, \quad A \cdot E_n = A.$$

Operace s maticemi - transponování

Definice: Je-li $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, pak **transponovanou**

maticí k matici A rozumíme matici $A^T = (b_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}} \in \mathbb{R}^{n \times m}$,

kde

$$\forall i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m: b_{ij} = a_{ji}.$$

Poznámka: j -tý řádek matice A^T je j -tý sloupec matice A , i -tý sloupec matice A^T je i -tý řádek matice A .

Věta: Pro operaci transponování platí (pokud mají uvedené operace smysl):

(i) $(A + B)^T = A^T + B^T$

(ii) $(\alpha A)^T = \alpha A^T$

(iii) $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$

(iv) $(A^T)^T = A$

Definice: Čtvercovou matici A , pro kterou platí $A = A^T$, nazýváme **symetrickou** maticí.

Operace s maticemi - transponování

Definice: Je-li $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, pak **transponovanou**

maticí k matici A rozumíme matici $A^T = (b_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}} \in \mathbb{R}^{n \times m}$,

kde

$$\forall i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m: b_{ij} = a_{ji}.$$

Poznámka: j -tý řádek matice A^T je j -tý sloupec matice A , i -tý sloupec matice A^T je i -tý řádek matice A .

Věta: Pro operaci transponování platí (pokud mají uvedené operace smysl):

(i) $(A + B)^T = A^T + B^T$

(ii) $(\alpha A)^T = \alpha A^T$

(iii) $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$

(iv) $(A^T)^T = A$

Definice: Čtvercovou matici A , pro kterou platí $A = A^T$, nazýváme **symetrickou** maticí.

Operace s maticemi - transponování

Definice: Je-li $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, pak **transponovanou**

maticí k matici A rozumíme matici $A^T = (b_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}} \in \mathbb{R}^{n \times m}$,

kde

$$\forall i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m: b_{ij} = a_{ji}.$$

Poznámka: j -tý řádek matice A^T je j -tý sloupec matice A , i -tý sloupec matice A^T je i -tý řádek matice A .

Věta: Pro operaci transponování platí (pokud mají uvedené operace smysl):

(i) $(A + B)^T = A^T + B^T$

(ii) $(\alpha A)^T = \alpha A^T$

(iii) $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$

(iv) $(A^T)^T = A$

Definice: Čtvercovou matici A , pro kterou platí $A = A^T$, nazýváme **symetrickou** maticí.

Operace s maticemi - transponování

Definice: Je-li $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, pak **transponovanou**

maticí k matici A rozumíme matici $A^T = (b_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}} \in \mathbb{R}^{n \times m}$,

kde

$$\forall i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m: b_{ij} = a_{ji}.$$

Poznámka: j -tý řádek matice A^T je j -tý sloupec matice A , i -tý sloupec matice A^T je i -tý řádek matice A .

Věta: Pro operaci transponování platí (pokud mají uvedené operace smysl):

(i) $(A + B)^T = A^T + B^T$

(ii) $(\alpha A)^T = \alpha A^T$

(iii) $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$

(iv) $(A^T)^T = A$

Definice: Čtvercovou matici A , pro kterou platí $A = A^T$, nazýváme **symetrickou** maticí.

Determinanty (1)

Definice:

- Determinantem čtvercové matice $A = [a]$, $a \in \mathbb{R}$ řádu 1 rozumíme číslo $\det A = a$.
- Nechť $A = (a_{ij})$ je čtvercová matice řádu n . Označme symbolem M_{ij} , $i, j = 1, \dots, n$, determinant čtvercové matice řádu $(n - 1)$, která vznikne vynecháním i -tého řádku a j -tého sloupce z matice A . Zvolme $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq n$, potom determinantem matice A rozumíme číslo

$$\begin{aligned}\det A &= (-1)^{k+1} a_{k1} M_{k1} + \dots + (-1)^{k+n} a_{kn} M_{kn} \\ &= \sum_{j=1}^n (-1)^{k+j} a_{kj} M_{kj}\end{aligned}$$

M_{ij} - minor $(n - 1)$ -ho řádu k prvku a_{ij} matice A
 $A_{ij} := (-1)^{i+j} M_{ij}$ - algebraický doplněk prvku a_{ij}
 $\det A = \sum_{j=1}^n a_{kj} A_{kj}$ - rozvoj determinantu matice A podle k -tého řádku

Determinanty (1)

Definice:

- Determinantem čtvercové matice $A = [a]$, $a \in \mathbb{R}$ řádu 1 rozumíme číslo $\det A = a$.
- Nechť $A = (a_{ij})$ je čtvercová matice řádu n . Označme symbolem M_{ij} , $i, j = 1, \dots, n$, determinant čtvercové matice řádu $(n - 1)$, která vznikne vynecháním i -tého řádku a j -tého sloupce z matice A . Zvolme $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq n$, potom determinantem matice A rozumíme číslo

$$\begin{aligned}\det A &= (-1)^{k+1} a_{k1} M_{k1} + \dots + (-1)^{k+n} a_{kn} M_{kn} \\ &= \sum_{j=1}^n (-1)^{k+j} a_{kj} M_{kj}\end{aligned}$$

M_{ij} - minor $(n - 1)$ -ho řádu k prvku a_{ij} matice A
 $A_{ij} := (-1)^{i+j} M_{ij}$ - algebraický doplněk prvku a_{ij}
 $\det A = \sum_{j=1}^n a_{kj} A_{kj}$ - rozvoj determinantu matice A podle k -tého řádku

Determinanty (1)

Definice:

- Determinantem čtvercové matice $A = [a]$, $a \in \mathbb{R}$ řádu 1 rozumíme číslo $\det A = a$.
- Nechť $A = (a_{ij})$ je čtvercová matice řádu n . Označme symbolem M_{ij} , $i, j = 1, \dots, n$, determinant čtvercové matice řádu $(n - 1)$, která vznikne vynecháním i -tého řádku a j -tého sloupce z matice A . Zvolme $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq n$, potom determinantem matice A rozumíme číslo

$$\begin{aligned}\det A &= (-1)^{k+1} a_{k1} M_{k1} + \dots + (-1)^{k+n} a_{kn} M_{kn} \\ &= \sum_{j=1}^n (-1)^{k+j} a_{kj} M_{kj}\end{aligned}$$

M_{ij} - minor $(n - 1)$ -ho řádu k prvku a_{ij} matice A
 $A_{ij} := (-1)^{i+j} M_{ij}$ - algebraický doplněk prvku a_{ij}
 $\det A = \sum_{j=1}^n a_{kj} A_{kj}$ - rozvoj determinantu matice A podle k -tého řádku

Determinanty (1)

Definice:

- Determinantem čtvercové matice $A = [a]$, $a \in \mathbb{R}$ řádu 1 rozumíme číslo $\det A = a$.
- Nechť $A = (a_{ij})$ je čtvercová matice řádu n . Označme symbolem M_{ij} , $i, j = 1, \dots, n$, determinant čtvercové matice řádu $(n - 1)$, která vznikne vynecháním i -tého řádku a j -tého sloupce z matice A . Zvolme $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq n$, potom determinantem matice A rozumíme číslo

$$\begin{aligned}\det A &= (-1)^{k+1} a_{k1} M_{k1} + \dots + (-1)^{k+n} a_{kn} M_{kn} \\ &= \sum_{j=1}^n (-1)^{k+j} a_{kj} M_{kj}\end{aligned}$$

M_{ij} - minor $(n - 1)$ -ho řádu k prvku a_{ij} matice A
 $A_{ij} := (-1)^{i+j} M_{ij}$ - algebraický doplněk prvku a_{ij}
 $\det A = \sum_{j=1}^n a_{kj} A_{kj}$ - rozvoj determinantu matice A podle k -tého řádku

Determinanty (1)

Definice:

- Determinantem čtvercové matice $A = [a]$, $a \in \mathbb{R}$ řádu 1 rozumíme číslo $\det A = a$.
- Nechť $A = (a_{ij})$ je čtvercová matice řádu n . Označme symbolem M_{ij} , $i, j = 1, \dots, n$, determinant čtvercové matice řádu $(n - 1)$, která vznikne vynecháním i -tého řádku a j -tého sloupce z matice A . Zvolme $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq n$, potom determinantem matice A rozumíme číslo

$$\begin{aligned}\det A &= (-1)^{k+1} a_{k1} M_{k1} + \dots + (-1)^{k+n} a_{kn} M_{kn} \\ &= \sum_{j=1}^n (-1)^{k+j} a_{kj} M_{kj}\end{aligned}$$

M_{ij} - minor $(n - 1)$ -ho řádu k prvku a_{ij} matice A
 $A_{ij} := (-1)^{i+j} M_{ij}$ - algebraický doplněk prvku a_{ij}
 $\det A = \sum_{j=1}^n a_{kj} A_{kj}$ - rozvoj determinantu matice A podle k -tého řádku

Determinanty (1)

Definice:

- Determinantem čtvercové matice $A = [a]$, $a \in \mathbb{R}$ řádu 1 rozumíme číslo $\det A = a$.
- Nechť $A = (a_{ij})$ je čtvercová matice řádu n . Označme symbolem M_{ij} , $i, j = 1, \dots, n$, determinant čtvercové matice řádu $(n - 1)$, která vznikne vynecháním i -tého řádku a j -tého sloupce z matice A . Zvolme $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq n$, potom determinantem matice A rozumíme číslo

$$\begin{aligned}\det A &= (-1)^{k+1} a_{k1} M_{k1} + \dots + (-1)^{k+n} a_{kn} M_{kn} \\ &= \sum_{j=1}^n (-1)^{k+j} a_{kj} M_{kj}\end{aligned}$$

M_{ij} - minor $(n - 1)$ -ho řádu k prvku a_{ij} matice A
 $A_{ij} := (-1)^{i+j} M_{ij}$ - algebraický doplněk prvku a_{ij}
 $\det A = \sum_{j=1}^n a_{kj} A_{kj}$ - rozvoj determinantu matice A podle k -tého řádku

Determinanty (2)

Tvrzení:

- (i) Hodnota determinantu nezávisí na volbě řádku, podle kterého determinant rozvíjíme.
- (ii) Podobně lze udělat rozvoj podle k -tého sloupce

$$\det A = \sum_{i=1}^n a_{ik} A_{ik}$$

a hodnota determinantu se také nezmění.

Věta: Nechť A je čtvercová matice. Pak $\det A = \det A^T$.

Věta:

- (i) $\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$

- (ii) Sarrusovo pravidlo

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{11} a_{22} a_{33} + a_{21} a_{32} a_{13} + a_{12} a_{23} a_{31} - a_{13} a_{22} a_{31} - a_{32} a_{23} a_{11} - a_{21} a_{12} a_{33}$$

Determinanty (2)

Tvrzení:

- (i) Hodnota determinantu nezávisí na volbě řádku, podle kterého determinant rozvíjíme.
- (ii) Podobně lze udělat rozvoj podle k -tého sloupce

$$\det A = \sum_{i=1}^n a_{ik} A_{ik}$$

a hodnota determinantu se také nezmění.

Věta: Nechť A je čtvercová matice. Pak $\det A = \det A^T$.

Věta:

(i) $\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$

(ii) Sarrusovo pravidlo

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{11} a_{22} a_{33} + a_{21} a_{32} a_{13} + a_{12} a_{23} a_{31} - a_{13} a_{22} a_{31} - a_{32} a_{23} a_{11} - a_{21} a_{12} a_{33}$$

Determinanty (2)

Tvrzení:

- (i) Hodnota determinantu nezávisí na volbě řádku, podle kterého determinant rozvíjíme.
- (ii) Podobně lze udělat rozvoj podle k -tého sloupce

$$\det A = \sum_{i=1}^n a_{ik} A_{ik}$$

a hodnota determinantu se také nezmění.

Věta: Necht' A je čtvercová matice. Pak $\det A = \det A^T$.

Věta:

(i) $\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$

(ii) Sarrusovo pravidlo

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{11} a_{22} a_{33} + a_{21} a_{32} a_{13} + a_{12} a_{23} a_{31} - a_{13} a_{22} a_{31} - a_{32} a_{23} a_{11} - a_{21} a_{12} a_{33}$$

Determinanty (2)

Tvrzení:

- (i) Hodnota determinantu nezávisí na volbě řádku, podle kterého determinant rozvíjíme.
- (ii) Podobně lze udělat rozvoj podle k -tého sloupce

$$\det A = \sum_{i=1}^n a_{ik} A_{ik}$$

a hodnota determinantu se také nezmění.

Věta: Necht' A je čtvercová matice. Pak $\det A = \det A^T$.

Věta:

(i) $\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$

(ii) Sarrusovo pravidlo

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{11} a_{22} a_{33} + a_{21} a_{32} a_{13} + a_{12} a_{23} a_{31} - a_{13} a_{22} a_{31} - a_{32} a_{23} a_{11} - a_{21} a_{12} a_{33}$$

Determinanty (2)

Tvrzení:

- (i) Hodnota determinantu nezávisí na volbě řádku, podle kterého determinant rozvíjíme.
- (ii) Podobně lze udělat rozvoj podle k -tého sloupce

$$\det A = \sum_{i=1}^n a_{ik} A_{ik}$$

a hodnota determinantu se také nezmění.

Věta: Necht' A je čtvercová matice. Pak $\det A = \det A^T$.

Věta:

(i) $\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$

(ii) **Sarrusovo pravidlo**

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{11} a_{22} a_{33} + a_{21} a_{32} a_{13} + a_{12} a_{23} a_{31} - a_{13} a_{22} a_{31} - a_{32} a_{23} a_{11} - a_{21} a_{12} a_{33}$$

Determinanty (3)

Věta:

- (i) Determinant matice A se nezmění, přičteme-li k řádku (sloupci) matice A libovolný násobek jiného řádku (sloupce) matice A .

- (ii) Vznikne-li matice B z matice A vynásobením jejího řádku (sloupce) číslem α , platí

$$\det B = \alpha \det A.$$

- (iii) Vznikne-li matice B z matice A zaměněním dvou řádků (sloupců) matice A , platí

$$\det B = -\det A.$$

Determinanty (3)

Věta:

- (i) Determinant matice A se nezmění, přičteme-li k řádku (sloupci) matice A libovolný násobek jiného řádku (sloupce) matice A .

- (ii) Vznikne-li matice B z matice A vynásobením jejího řádku (sloupce) číslem α , platí

$$\det B = \alpha \det A.$$

- (iii) Vznikne-li matice B z matice A zaměněním dvou řádků (sloupců) matice A , platí

$$\det B = -\det A.$$

Determinanty (3)

Věta:

- (i) Determinant matice A se nezmění, přičteme-li k řádku (sloupci) matice A libovolný násobek jiného řádku (sloupce) matice A .

- (ii) Vznikne-li matice B z matice A vynásobením jejího řádku (sloupce) číslem α , platí

$$\det B = \alpha \det A.$$

- (iii) Vznikne-li matice B z matice A zaměněním dvou řádků (sloupců) matice A , platí

$$\det B = -\det A.$$

Determinanty (4)

Věta: Je-li $A = (a_{ij})$ čtvercová HT-matice řádu n , je

$$\det A = a_{11} a_{22} \dots a_{nn} = \prod_{i=1}^n a_{ii}.$$

Definice: Říkáme, že čtvercová matice A je **regulární**, jestliže $\det A \neq 0$. V opačném případě, $\det A = 0$, se matice A nazývá **singulární**.

Věta: Je-li A čtvercová matice řádu n , pak

$$\det A \neq 0 \Leftrightarrow h(A) = n$$

Věta: Jsou-li A a B čtvercové matice řádu n , pak platí

$$\det AB = \det A \det B$$

Determinanty (4)

Věta: Je-li $A = (a_{ij})$ čtvercová HT-matice řádu n , je

$$\det A = a_{11} a_{22} \dots a_{nn} = \prod_{i=1}^n a_{ii}.$$

Definice: Říkáme, že čtvercová matice A je **regulární**, jestliže $\det A \neq 0$. V opačném případě, $\det A = 0$, se matice A nazývá **singulární**.

Věta: Je-li A čtvercová matice řádu n , pak

$$\det A \neq 0 \Leftrightarrow h(A) = n$$

Věta: Jsou-li A a B čtvercové matice řádu n , pak platí

$$\det AB = \det A \det B$$

Determinanty (4)

Věta: Je-li $A = (a_{ij})$ čtvercová HT-matice řádu n , je

$$\det A = a_{11} a_{22} \dots a_{nn} = \prod_{i=1}^n a_{ii}.$$

Definice: Říkáme, že čtvercová matice A je **regulární**, jestliže $\det A \neq 0$. V opačném případě, $\det A = 0$, se matice A nazývá **singulární**.

Věta: Je-li A čtvercová matice řádu n , pak

$$\det A \neq 0 \Leftrightarrow h(A) = n$$

Věta: Jsou-li A a B čtvercové matice řádu n , pak platí

$$\det AB = \det A \det B$$

Determinanty (4)

Věta: Je-li $A = (a_{ij})$ čtvercová HT-matice řádu n , je

$$\det A = a_{11} a_{22} \dots a_{nn} = \prod_{i=1}^n a_{ii}.$$

Definice: Říkáme, že čtvercová matice A je **regulární**, jestliže $\det A \neq 0$. V opačném případě, $\det A = 0$, se matice A nazývá **singulární**.

Věta: Je-li A čtvercová matice řádu n , pak

$$\det A \neq 0 \Leftrightarrow h(A) = n$$

Věta: Jsou-li A a B čtvercové matice řádu n , pak platí

$$\det AB = \det A \det B$$