Kapitola 11: Vektory a matice:

Prostor $\mathbb{R}^n$

$\mathbb{R}^n = \{(x_1, ..., x_n) \,|\, x_i \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, n\}, \quad n \in \mathbb{N}$

- $\vec{x} = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ se nazývá *vektor*
- x_i je i-tá souřadnice vektoru $\vec{x}$
- rovnost vektorů:

$$\vec{x} = \vec{y} \;\Leftrightarrow\; \forall i = 1, \ldots, n: \; x_i = y_i$$

- grafická reprezentace vektorů pro $n = 2, 3$

Operace na vektorech

Definice: Nechť $\vec{a} = (a_1, ..., a_n), \vec{b} = (b_1, ..., b_n) \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

- *součtem vektorů* $\vec{a}$ a $\vec{b}$ je vektor

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, ..., a_n + b_n) \in \mathbb{R}^n$$

- α*-násobek vektoru* $\vec{a}$ je vektor

$$\alpha\,\vec{a} = (\alpha\, a_1, \ldots, \alpha\, a_n) \in \mathbb{R}^n$$

Věta: $\forall\; \vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n \;\; \forall\; \alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

(i) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

(ii) $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$

(iii) $\alpha\,(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\,\vec{a} + \alpha\,\vec{b}$

(iv) $(\alpha + \beta)\,\vec{a} = \alpha\,\vec{a} + \beta\,\vec{a}$

(v) $(\alpha\,\beta)\,\vec{a} = \alpha\,(\beta\,\vec{a})$

Lineární kombinace vektorů

Definice: Nechť $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k \in \mathbb{R}^n$ a nechť $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$. Vektor

$$\vec{a} = \alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_k \vec{a}_k = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \vec{a}_i$$

nazýváme *lineární kombinací* vektorů $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k$ a čísla $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ *koeficienty* této lineární kombinace. Jsou-li všechna $\alpha_i = 0$, $i = 1, \dots, n$, nazýváme lineární kombinaci *triviální*. Ta je vždy rovna nulovému vektoru $\vec{o} = (0, \dots, 0)$. Je-li alespoň jedno $\alpha_i \neq 0$, nazýváme lineární kombinaci *netriviální*.

Lineární nezávislost vektorů (1)

Definice: Systém vektorů $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k \in \mathbb{R}^n$ nazýváme *lineárně nezávislým* (*LN*), jestliže pouze triviální lineární kombinace těchto vektorů je rovna $\vec{o}$. Systém vektorů $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k \in \mathbb{R}^n$ nazýváme *lineárně závislým* (*LZ*), jestliže není LN, t.j. existuje alespoň jedna netriviální lineární kombinace těchto vektorů, která je rovna $\vec{o}$. **Platí:** Systém vektorů $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k \in \mathbb{R}^n$ je LN právě tehdy, když

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \vec{a}_i = \vec{o} \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0$$

Lineární nezávislost vektorů (2)

Poznámka: Systém vektorů $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k \in \mathbb{R}^n$ je LN $\Leftrightarrow$ žádný z vektorů nelze vyjádřit jako lineární kombinaci ostatních vektorů. Ekvivalentně: Systém $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k \in \mathbb{R}^n$ je LZ $\Leftrightarrow$ některý z vektorů je lineární kombinací ostatních vektorů. **Věta:** Následující úpravy nemění LZ/LN systému vektorů $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k \in \mathbb{R}^n$:

- vynásobení některého vektoru $\vec{a}_i$ nenulovým číslem
- přičtení nějakého vektoru $\vec{a}_i$ k nějakému jinému vektoru $\vec{a}_j$

Důsledek: $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k \in \mathbb{R}^n$ jsou LN $\Leftrightarrow$ $\vec{a}_1 + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \vec{a}_i, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k \in \mathbb{R}^n$ jsou LN

Matice

$$A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n}$$

- A - *matice typu* (m,n)
- i - řádkový index, $\quad j$ - sloupcový index
- $(a_{i1},\cdots,a_{in}) \in \mathbb{R}^n \quad$ - ***řádkový vektor*** matice A
- $(a_{1j},\cdots,a_{mj})^T \in \mathbb{R}^m$ - ***sloupcový vektor*** matice A
- rovnost matic $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$ a $B = (b_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$:

$$A = B \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, i = 1,\dots,m,\ j = 1,\dots,n:\ a_{ij} = b_{ij}$$

- $\{a_{11},\dots,a_{kk}\}$, $k = \min\{m,n\}$ - *hlavní diagonála* matice A
- matice typu (n,n) se nazývá *čtvercová* matice

Operace s maticemi - sčítání, násobení číslem

Definice: Je-li $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ a $\alpha \in \mathbb{R}$, pak

- *součtem matic* A a B je matice $A + B = C = (c_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ s prvky $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad \forall\, i = 1,\dots,m;\ j = 1,\dots,n.$
- α - *násobkem matice* A je matice $\alpha\, A = C = (c_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ s prvky $c_{ij} = \alpha\, a_{ij}, \quad \forall\, i = 1,\dots,m;\ j = 1,\dots,n.$

Věta: Nechť A, B, C jsou libovolné matice typu (m,n) a nechť $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$, pak platí:

(i) $A + B = B + A$

(ii) $(A+B)+C = A+(B+C)$

(iii) $\alpha\,(A+B) = \alpha\,A + \alpha\,B$

(iv) $(\alpha+\beta)\,A = \alpha\,A + \beta\,A$

(v) $(\alpha\,\beta)\,A = \alpha\,(\beta\,A)$

Operace s maticemi - násobení (1)

Připomenutí: *Skalárním součinem* vektorů $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_n), \vec{b} = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ rozumíme reálné číslo

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i.$$

Definice: Je-li $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times k}$ a $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{k \times n}$, pak *součinem matic* A a

B (v tomto pořadí) je matice $A \cdot B = C = (c_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ s prvky

$$c_{ij} = \vec{a}_i \cdot \vec{b}_j = \sum_{l=1}^{k} a_{il}\, b_{lj},$$

kde $\vec{a}_i$ je i-tý řádek matice A a $\vec{b}_j$ je j-tý sloupec matice B.

Operace s maticemi - násobení (2)

Věta: Pro operaci násobení matic platí (pokud mají uvedené operace smysl):

(i) $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$

(ii) $A \cdot (B+C) = A \cdot B + A \cdot C$

(iii) $(A+B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$

(iv) $\alpha\,(A \cdot B) = (\alpha\,A) \cdot B = A \cdot (\alpha\,B)$

Definice: Čtvercová matice řádu n, t.j. matice typu (n,n), která má na hlavní diagonále samé 1 a ostatní prvky jsou rovny 0, se nazývá *jednotková matice* a značí se E (nebo E_n). **Platí:** Je-li A matice typu (m,n), pak

$$E_m \cdot A = A, \qquad A \cdot E_n = A.$$

Operace s maticemi - transponování

Definice: Je-li $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, pak *transponovanou maticí* k matici A rozumíme matici $A^T = (b_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}} \in \mathbb{R}^{n\times m}$, kde

$$\forall\, i = 1,\dots,n,\ j = 1,\dots,m: \quad b_{ij} = a_{ji}.$$

Poznámka: j-tý řádek matice A^T je j-tý sloupec matice A, i-tý sloupec matice A^T je i-tý řádek matice A. **Věta:** Pro operaci transponování platí (pokud mají uvedené operace smysl):

(i) $(A+B)^T = A^T + B^T$

(ii) $(\alpha\, A)^T = \alpha\, A^T$

(iii) $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$

(iv) $(A^T)^T = A$

Definice: Čtvercovou matici A, pro kterou platí $A = A^T$, nazýváme *symetrickou* maticí.

Determinanty (1)

Definice:

- Determinantem čtvercové matice $A = [a]$, $a \in \mathbb{R}$ řádu 1 rozumíme číslo $\det\, A = a$.
- Nechť $A = (a_{ij})$ je čtvercová matice řádu n. Označme symbolem M_{ij}, $i,j = 1,\dots,n$, determinant čtvercové matice řádu $(n-1)$, která vznikne vynecháním i-tého řádku a j-tého sloupce z matice A. Zvolme $k \in \mathbb{N}$, $1 \le k \le n$, potom determinantem matice A rozumíme číslo

$$\begin{aligned}\det\, A &= (-1)^{k+1} a_{k1}\, M_{k1} + \cdots + (-1)^{k+n} a_{kn}\, M_{kn} \\ &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{kj}\, M_{kj}\end{aligned}$$

M_{ij} - *minor* $(n-1)$-ho řádu k prvku a_{ij} matice A

$A_{ij} := (-1)^{i+j} M_{ij}$ - *algebraický doplňek* prvku a_{ij}

$\det\, A = \sum_{j=1}^{n} a_{kj}\, A_{kj}$ - *rozvoj determinantu* matice A podle k-tého řádku

Determinanty (2)

Tvrzení:

(i) Hodnota determinantu nezávisí na volbě řádku, podle kterého determinant rozvíjíme.

(ii) Podobně lze udělat rozvoj podle k-tého sloupce

$$\det\ A = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}\, A_{ik}$$

a hodnota determinantu se také nezmění.

Věta: Nechť A je čtvercová matice. Pak $\det\ A = \det\ A^T$.

Věta:

(i) $\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21}$

(ii) *Sarrusovo pravidlo*

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{array}{l} a_{11}\, a_{22}\, a_{33} + a_{21}\, a_{32}\, a_{13} + a_{12}\, a_{23}\, a_{31} \\ -a_{13}\, a_{22}\, a_{31} - a_{32}\, a_{23}\, a_{11} - a_{21}\, a_{12}\, a_{33} \end{array}$$

Determinanty (3)

Věta:

(i) Determinant matice A se nezmění, přičteme-li k řádku (sloupci) matice A libovolný násobek jiného řádku (sloupce) matice A.

(ii) Vznikne-li matice B z matice A vynásobením jejího řádku (sloupce) číslem α, platí

$$\det\ B = \alpha\ \det\ A.$$

(iii) Vznikne-li matice B z matice A zaměněním dvou řádků (sloupců) matice A, platí

$$\det\ B = -\det\ A.$$

Determinanty (4)

Věta: Je-li $A = (a_{ij})$ čtvercová HT-matice řádu n, je

$$\det\ A = a_{11}\ a_{22}\ \ldots\ a_{nn} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Definice: Říkáme, že čtvercová matice A je *regulární*, jestliže $\det\ A \neq 0$. V opačném případě, $\det\ A = 0$, se matice A nazývá *singulární*.

Věta: Je-li A čtvercová matice řádu n, pak

$$\det\ A \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad h(A) = n$$

Věta: Jsou-li A a B čtvercové matice řádu n, pak platí

$$\det\ A\,B = \det\ A\ \det\ B$$